Operadores Lineales:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

5 de marzo de 2025

Agenda: Operadores Lineales

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \,/ \mathbb{T}\left[\alpha \;\; |v_1\rangle + \beta \;\; |v_2\rangle\right] = \alpha\;\mathbb{T}\,|v_1\rangle + \beta\;\mathbb{T}\,|v_2\rangle \;\forall\; |v_1\rangle \;\text{ y }\; |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\,|v\rangle = |v'\rangle = \lambda\,|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\,|v\rangle + \beta\mathbb{T}\,|w\rangle = \alpha\lambda\,|v\rangle + \beta\lambda\,|w\rangle$.

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \,/\mathbb{T}\left[\alpha \ \ |v_1\rangle + \beta \ \ |v_2\rangle\right] = \alpha \ \mathbb{T}\,|v_1\rangle + \beta \ \mathbb{T}\,|v_2\rangle \ \forall \ |v_1\rangle \ \text{ y } \ |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\,|v\rangle = |v'\rangle = \lambda\,|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\,|v\rangle + \beta\mathbb{T}\,|w\rangle = \alpha\lambda\,|v\rangle + \beta\lambda\,|w\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}\,|v\rangle = \lambda \rightleftharpoons \langle u\,|v\rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \langle u|\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\,\langle u\,|v\rangle + \beta\,\langle u\,|w\rangle$,

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \,/ \mathbb{T}\left[\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}\,|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{T}\,|v_2\rangle \;\forall\; |v_1\rangle \text{ y } |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\,|v\rangle = |v'\rangle = \lambda\,|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\,|v\rangle + \beta\mathbb{T}\,|w\rangle = \alpha\lambda\,|v\rangle + \beta\lambda\,|w\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}\,|v\rangle = \lambda \rightleftharpoons \langle u\,|v\rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \langle u|\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\,\langle u\,|v\rangle + \beta\,\langle u\,|w\rangle$,
- Un proyector $\left[|s\rangle\,\langle s|\right]\;|v\rangle = \langle s\,|v\rangle\,|s\rangle = |v_s\rangle$.
  $|s\rangle\,\langle s|\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\,\langle s\,|v\rangle\,|s\rangle + \beta\,\langle s\,|w\rangle\,|s\rangle$ por lo tanto para $\mathbb{T} : \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbf{S}_n$ tendremos
  $\mathbb{P}_m\,|v\rangle \equiv \left(|u_i\rangle\,\left\langle u^i\right|_m\right)|v\rangle = \left\langle u^i\,|v\right\rangle_m |u_i\rangle = |v_m\rangle$,

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$, entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T}: \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
$|y\rangle = \mathbb{T}|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
$|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)$,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_m$. Esto es
  $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
  entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
  $|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \to |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \to \mathbb{D}\,[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)$,
- Las ecuaciones diferenciales también lo son
  $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)$,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T}: \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
  $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
  entonces $y^i = a^i_j\ x^j$ donde $\begin{cases} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
  $|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}\,[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)\,,$
- Las ecuaciones diferenciales también lo son
  $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
- La integral también : $g(x) = \int_a^x\ f(t)\mathrm{d}t\ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\,[f(t)]$.
- y las transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t\ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\,[f(t)]\ ,$$

  donde $\mathcal{K}(s,t)$ es una función conocida de s y t, denominada el *núcleo* de la transformación.

Ejemplos de transformaciones integrales

Nombre	$F(s) = \mathbb{T}\left\{f(t)\right\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1}\left\{F(s)\right\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^{\infty} \begin{matrix}\mathrm{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^{\infty} \begin{matrix}\mathrm{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} F(s)\mathrm{d}s$
Hankel	$F(s) = \int_0^{\infty} tJ_n(st)f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^{\infty} sJ_n(ts)F(s)\mathrm{d}s$
Mellin	$F(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s)\mathrm{d}s$

Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
$$\lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \, / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] = \alpha \ \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] = \alpha \ \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$

Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv \lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \; / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \lambda\mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle]$

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
$$\lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \, / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] = \alpha \ \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] = \alpha \ \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] =$ $\lambda\mathbb{A} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] + \mathbb{B} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ lineales en $\mathbf{V}$,

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $$(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv \lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \, / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] = \alpha \ \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] = \alpha \ \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] = \lambda\mathbb{A} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ lineales en $\mathbf{V}$,
- La transformación cero de $\mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2 : \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle \ \forall \ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$,
- El elemento simétrico $(-\mathbb{A}) |v\rangle = -\mathbb{A} |v\rangle \ \Rightarrow \ (\mathbb{A} - \mathbb{A}) |v\rangle = \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle$.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\,|v\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\,|v\rangle\right) = \mathbb{A}\,|\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$
\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right)\mathbb{C} = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\mathbb{C}\right); \qquad \alpha\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left(\alpha\mathbb{A}\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}\left(\alpha\mathbb{B}\right);
$$

$$
\left(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; \qquad \mathbb{A}\left(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2\right) = \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2 \,.
$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right)\mathbb{C} = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\mathbb{C}\right); \qquad \alpha\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left(\alpha\mathbb{A}\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}\left(\alpha\mathbb{B}\right);$$
$$\left(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; \qquad \mathbb{A}\left(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2\right) = \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2 .$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

- En general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:
  $\left[\mathbb{A}, \mathbb{B}\right] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow \left[\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}\right]\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}\left|v\right\rangle$.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{AB}$ tal que $\mathbb{AB}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$(\mathbb{AB})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{BC})\,; \qquad \alpha\,(\mathbb{AB}) = (\alpha\mathbb{A})\,\mathbb{B} = \mathbb{A}\,(\alpha\mathbb{B})\,;$$

$$(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\,\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}\,; \qquad \mathbb{A}\,(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) = \mathbb{AB}_1 + \mathbb{AB}_2\,.$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.
- En general $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:
  $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{AB} - \mathbb{BA} \Rightarrow [\mathbb{AB} - \mathbb{BA}]\left|v\right\rangle = \mathbb{AB}\left|v\right\rangle - \mathbb{BA}\left|v\right\rangle$.
- Entonces

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A}, \mathbb{B}] &= -\,[\mathbb{B}, \mathbb{A}] \\
[\mathbb{A}, (\mathbb{B} + \mathbb{C})] &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}] + [\mathbb{A}, \mathbb{C}] \\
[\mathbb{A}, \mathbb{BC}] &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}]\,\mathbb{C} + \mathbb{B}\,[\mathbb{A}, \mathbb{C}] \\
[\mathbb{A}, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]] &= -\,[\mathbb{B}, [\mathbb{C}, \mathbb{A}]] - [\mathbb{C}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]]\,.
\end{aligned}$$

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \; \left|v_1\right\rangle + \beta \; \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \;\forall\; \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}\left(s,t\right)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha\ \left|v_1\right\rangle + \beta\ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle\ \forall\ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1\,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t\ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \, .$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)$,
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]$,
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots \} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.
- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$.

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha \, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta \, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.
- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$.
- Como, en general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, construimos el conmutador de estos operadores como: $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow [\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}]\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}\left|v\right\rangle\,.$

Para la discusión

- Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:
  1. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$.
  2. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

  ¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$?

Para la discusión

- Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:
  1. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$.
  2. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

  ¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$?
- Suponga que un operador $\mathbb{L}$ puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que:
  $$\text{Si} \quad \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle$$
  y, del mismo modo, demuestre que:
  $$\text{Si} \quad \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |z\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|z\rangle = (\lambda-1)|z\rangle \ .$$
  Por ello es costumbre denominar a $\mathbb{L}_+$ y $\mathbb{L}_-$ los operadores de "subida" y de "bajada" respectivamente, ya que ellos construyen otros vectores con autovalores mayores (menores) en una unidad al vector operado