Dos Problemas Sólidos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

1 de noviembre de 2024

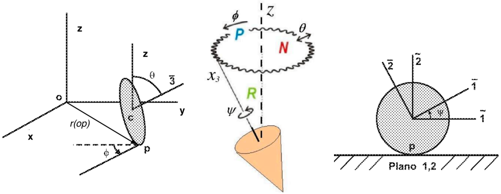
Agenda

1. Moneda que rueda sin deslizar
   - Ligaduras
   - El Lagrangeano
   - Sección
2. Moneda en un plano inclinado
   - Planteamiento del problema
   - Coordenadas y ligaduras
   - Integración de ligaduras
   - Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

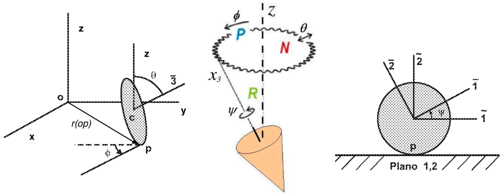
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

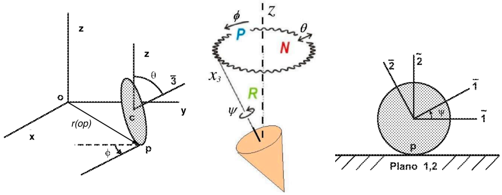
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

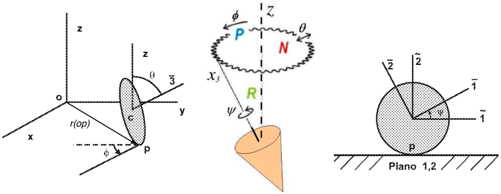
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos

$$\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2, \text{ y } \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos
$$\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2, \text{ y } \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$
- Respecto al sistema centro de masa $\Omega_1 = \dot{\phi}\,\text{sen }\theta\,\text{sen }\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
$\Omega_2 = \dot{\phi}\,\text{sen }\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen }\psi \quad \text{y} \quad \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos

$$\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2, \text{ y } \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Respecto al sistema centro de masa $\Omega_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\,\text{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
$\Omega_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\;\psi \quad$ y $\quad \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$

- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$

Título transparencia

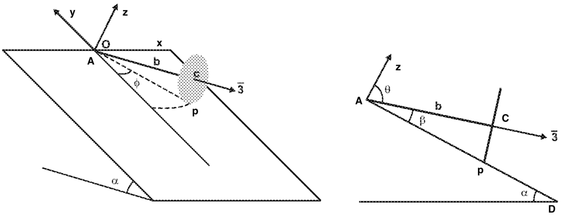
- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mga \operatorname{sen}\theta$

- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mga \operatorname{sen}\theta$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right] - mga \operatorname{sen}\theta$

- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mga\operatorname{sen}\theta$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right] - mga\operatorname{sen}\theta$
- La ecuación de movimiento será $\ddot{\phi} = -g\operatorname{sen}\alpha\frac{4\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{a^2+6b^2}\operatorname{sen}\phi$

Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b. El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo α con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O, eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema $\tilde{S}$ origen también en O y eje $\tilde{3}$ en la direción AC. Encontrar las ecuaciones de movimiento para



Coordenadas y ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras

Coordenadas y ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$

Coordenadas y ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,

Coordenadas y ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

Coordenadas y ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi\operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$

Coordenadas y ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

Coordenadas y ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi\operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y
  $$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$ con cual respecto al centro de masa $b\dot{\hat{x}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3) = 0$

Integración de ligaduras

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
  $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$

Integración de ligaduras

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$
$\dot{y} + a(\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$
$\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$

Integración de ligaduras

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
  $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$
  $\dot{y} + a(\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$
  $\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
  $\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a}\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$

Integración de ligaduras

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta) = 0$
$\dot{y} + a(\dot{\psi}\operatorname{sen}\phi + \dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\operatorname{sen}\theta) = 0$
$\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
$\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
$\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$
- Donde hemos sustituido el valor de θ que implica $\operatorname{sen}\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}$ y $\cos\theta = a/\sqrt{a^2+b^2}$.

- Como siempre la energía cinética se construye como
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\,\mathrm{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi;$
  $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta.$

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\;\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\,\text{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi;$ $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\text{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será $V = Mg(y\,\mathrm{sen}\,\alpha + z\cos\alpha) \equiv Mgb(-\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha)$

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\,\text{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\;\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\text{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será $V = Mg(y\,\text{sen}\,\alpha + z\cos\alpha) \equiv Mgb(-\cos\phi\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha)$
- La ecuación de movimiento será $\ddot{\phi} = -g\,\text{sen}\,\alpha\frac{4\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{a^2+6b^2}\,\text{sen}\,\phi$