Aplicaciones Polinomios de Legendre

Luis A. Núñez

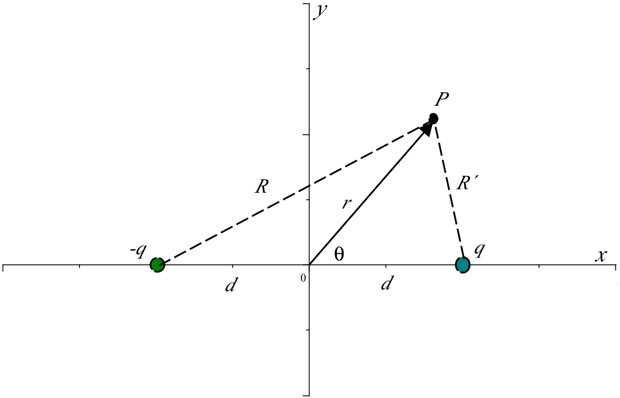
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

6 de junio de 2022

Agenda Aplicaciones Polinomios de Legendre

Potencial electrostático de un dipolo

Consideremos un dipolo donde $V = q\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$



Donde $(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\theta)$ y $R^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)$

- Entonces
$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$, y
$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\left(\pi - \theta\right)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$
$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$

Potencial electrostático de un dipolo

- Entonces
$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$, y
$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\left(\pi - \theta\right)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$
$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n$.

Potencial electrostático de un dipolo

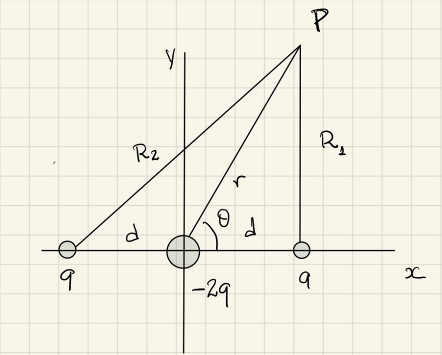
- Entonces
  $\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$, y
  $\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\left(\pi - \theta\right)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$
  $= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n$.
- Todos los términos pares de $P_n(\cos(\theta))$ se anulan y tendremos
  $V = \frac{2q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta))\ \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}$

Potencial electrostático de un dipolo

- Entonces
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n, \text{ y}$$
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\pi - \theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$$
- El potencial será $V = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n$.
- Todos los términos pares de $P_n(\cos(\theta))$ se anulan y tendremos
$$V = \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta)) \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}$$
- Si $\frac{d}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V \approx \frac{q}{r^2}\, 2d\cos(\theta)$.

Potencial electrostático de un cuadrupolo

Consideremos un cuadrupolo donde $V = q\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{r}\right)$



con $V_1 = q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)$ y $V_2 = q\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow V = V_1 + V_2$.
Esta configuración representa un cuadrupolo: un par de dipolos superpuestos con orientaciones opuestas

Expansión multipolar 2/2

- Igual que en el caso del monopolo $R_1^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos\theta$ y $R_2^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)$, con lo cual $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$ y $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$

Expansión multipolar 2/2

- Igual que en el caso del monopolo $R_1^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos\theta$ y $R_2^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)$, con lo cual $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$ y $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) + P_n(-\cos\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n - 2\right] = \frac{2q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n} - 1\right] = \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n}$.

Expansión multipolar 2/2

- Igual que en el caso del monopolo $R_1^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos\theta$ y $R_2^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)$, con lo cual $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$ y $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) + P_n(-\cos\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n - 2\right] = \frac{2q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n} - 1\right] = \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n}$.
- Se anulan los términos impares y el primer término $(n = 0)$.
- El primer término de la serie, $n = 1$, es el cuadrupolo $V = \frac{2qd^2 P_2(\cos\theta)}{r^3}$

- Igual que en el caso del monopolo
  $R_1^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos\theta$ y $R_2^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)$,
  con lo cual $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$ y
  $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi-\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) + P_n(-\cos\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n - 2\right] =$
  $\frac{2q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n} - 1\right] = \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n}$.
- Se anulan los términos impares y el primer término $(n = 0)$.
- El primer término de la serie, $n = 1$, es el cuadrupolo $V = \frac{2qd^2 P_2(\cos\theta)}{r^3}$
- Podemos generalizar las contribuciones al potencial con multipolos puntuales de $i-$cargas en $r \to 0$ con términos proporcionales a $\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$ de la forma $V = \frac{1}{r}\left[\mu_0 + \frac{\mu_1}{r}P_1(\cos\theta) + \frac{\mu_2}{r^2}P_2(\cos\theta) + \cdots\right]$,
  con $V = \frac{1}{r}\left[\sum_i q_i + \sum_i \frac{q_i d_i}{r} P_1(\cos\theta) + \sum_i \frac{q_i d_i^2}{r^2} P_2(\cos\theta) + \cdots\right]$

Expansión multipolar 2/2

- Igual que en el caso del monopolo $R_1^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos\theta$ y $R_2^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)$, con lo cual $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$ y $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi-\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) + P_n(-\cos\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n - 2\right] = \frac{2q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n} - 1\right] = \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n}$.
- Se anulan los términos impares y el primer término $(n = 0)$.
- El primer término de la serie, $n = 1$, es el cuadrupolo $V = \frac{2qd^2 P_2(\cos\theta)}{r^3}$
- Podemos generalizar las contribuciones al potencial con multipolos puntuales de $i-$cargas en $r \to 0$ con términos proporcionales a $\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$ de la forma $V = \frac{1}{r}\left[\mu_0 + \frac{\mu_1}{r}P_1(\cos\theta) + \frac{\mu_2}{r^2}P_2(\cos\theta) + \cdots\right]$, con $V = \frac{1}{r}\left[\sum_i q_i + \sum_i \frac{q_i d_i}{r}P_1(\cos\theta) + \sum_i \frac{q_i d_i^2}{r^2}P_2(\cos\theta) + \cdots\right]$
- El monopolo $\mu_0 = \sum_i q_i$: la carga total. El dipolo $\mu_1 = \sum_i q_i d_i$; El cuadrupolo $\mu_2 = \sum_i q_i d_i^2$ y así consecutivamente.

- Dato un conjunto de n medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \cdots, (x_n, y_n) = f(x_n)\}$ queremos una función que ajuste estos puntos.

- Dato un conjunto de n medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \cdots, (x_n, y_n) = f(x_n)\}$ queremos una función que ajuste estos puntos.
- Un polinomio de grado $n-1$ que pase por los puntos experimentales.

- Dato un conjunto de n medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \cdots, (x_n, y_n) = f(x_n)\}$ queremos una función que ajuste estos puntos.
- Un polinomio de grado $n-1$ que pase por los puntos experimentales.
- Tendremos: $\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{array} \right.$$

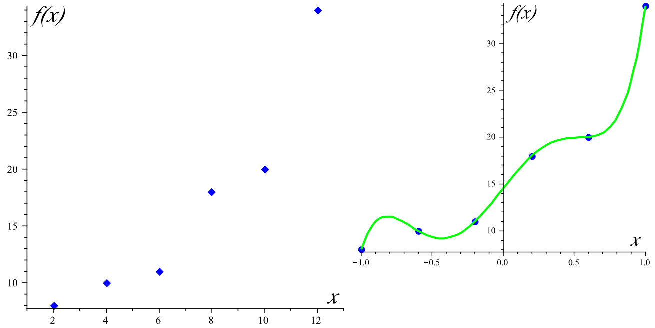
Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Dato un conjunto de n medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \cdots, (x_n, y_n) = f(x_n)\}$ queremos una función que ajuste estos puntos.
- Un polinomio de grado $n-1$ que pase por los puntos experimentales.
- Tendremos: $\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{array} \right.$$

- Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C_0, C_1, \cdots C_{n-1}\}$ que definen al polinomio



En el lado izquierdo se muestran el conjunto de puntos experimentales: $\{(2,8),(4,10),(6,11),(8,18),(10,20),(12,34)\}$ y a la derecha la función polinómica que los interpola. Nótese el reescalamiento de la variable x en el rango de validez de los polinomios de legendre.

Cuadratura e integración de funciones

- La integración numérica de una función se le conoce como integración por cuadratura. Su historia se remonta a los orígenes del cálculo.

Cuadratura e integración de funciones

- La integración numérica de una función se le conoce como integración por cuadratura. Su historia se remonta a los orígenes del cálculo.
- La cuadratura no es más que el caso especial más sencillo: La evaluación de la integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} hf_k$, con $h_k = x_{k+1} - x_k = cte$, y $f(x_k) = f_k$.

- La integración numérica de una función se le conoce como integración por cuadratura. Su historia se remonta a los orígenes del cálculo.
- La cuadratura no es más que el caso especial más sencillo: La evaluación de la integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} hf_k$, con $h_k = x_{k+1} - x_k = cte$, y $f(x_k) = f_k$.
- Con la idea de calcular el área bajo la curva con poliedros identificamos varias fórmulas populares y famosas
-

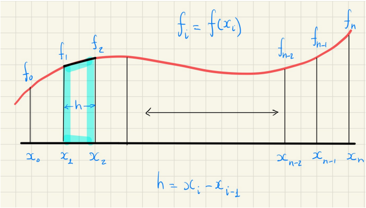


Figura: Cuadratura de una función para puntos equi-espaciados

- Este esquema implica la evaluación de las función en dos puntos y los coeficientes se ajustan con una recta (aproximación lineal) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1\right] + E_3(h^3 f'')$. $E_3(h^3 f'')$ es del orden h^3.

Integración por trapecios y parábolas

- Este esquema implica la evaluación de las función en dos puntos y los coeficientes se ajustan con una recta (aproximación lineal) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1\right] + E_3(h^3 f'')$. $E_3(h^3 f'')$ es del orden h^3.
- Es inmediato ver que si$y(x) = ax + b$, el área bajo la curva será $A = \int_0^h (ax+b)\mathrm{d}x = a\frac{x}{2} + bx\Big|_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = h\left(\frac{ah}{2} + b\right)$

- Este esquema implica la evaluación de las función en dos puntos y los coeficientes se ajustan con una recta (aproximación lineal) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1\right] + E_3(h^3 f'')$. $E_3(h^3 f'')$ es del orden h^3.
- Es inmediato ver que si$y(x) = ax + b$, el área bajo la curva será $A = \int_0^h (ax+b)\mathrm{d}x = a\frac{x}{2} + bx\Big|_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = h\left(\frac{ah}{2} + b\right)$
- Además $f_1 = ah + b$ y $f_0 = b \Rightarrow A = \frac{h}{2}(f_1 + f_0)$.

- Este esquema implica la evaluación de las función en dos puntos y los coeficientes se ajustan con una recta (aproximación lineal) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1\right] + E_3(h^3 f'')$. $E_3(h^3 f'')$ es del orden h^3.
- Es inmediato ver que si$y(x) = ax + b$, el área bajo la curva será $A = \int_0^h (ax+b)\mathrm{d}x = a\frac{x}{2} + bx\Big|_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = h\left(\frac{ah}{2} + b\right)$
- Además $f_1 = ah + b$ y $f_0 = b \Rightarrow A = \frac{h}{2}(f_1 + f_0)$.
- Del mismo modo, si empleamos tres puntos, $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\right] + E_5\left(h^5 f^{(4)}\right)$.
- Podemos espejar los coeficientes para una parábola $\int_{-h}^{h}(ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h} =$ $\left(\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch\right) - \left(-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch\right) = \frac{2ah^3}{3} + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$

- Este esquema implica la evaluación de las función en dos puntos y los coeficientes se ajustan con una recta (aproximación lineal) $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1\right] + E_3(h^3 f'')$. $E_3(h^3 f'')$ es del orden h^3.
- Es inmediato ver que si$y(x) = ax + b$, el área bajo la curva será $A = \int_0^h (ax+b)\mathrm{d}x = a\frac{x}{2} + bx\Big|_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = h\left(\frac{ah}{2} + b\right)$
- Además $f_1 = ah + b$ y $f_0 = b \Rightarrow A = \frac{h}{2}(f_1 + f_0)$.
- Del mismo modo, si empleamos tres puntos, $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\right] + E_5\left(h^5 f^{(4)}\right)$.
- Podemos espejar los coeficientes para una parábola $\int_{-h}^{h}(ax^2 + bx + c)\mathrm{d}x = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h} =$ $\left(\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch\right) - \left(-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch\right) = \frac{2ah^3}{3} + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$
- Como la parábola pasa por los tres puntos, $f_0 = ah^2 - bh + c$, $f_1 = c$ y $f_2 = ah^2 + bh + c$. Entonces: $A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(f_0 - 2f_1 + f_2 + 6f_1) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$.

Intregración por cuadratura de Gauss-Legendre

- Nos planteamos la posiblilidad de aproximar la integral con puntos espaciados estratégicamente: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) + E_N$

- Nos planteamos la posiblilidad de aproximar la integral con puntos espaciados estratégicamente: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) + E_N$
- Se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \cdots N$), seleccionados de forma que la aproximación es exacta cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$.

Intregración por cuadratura de Gauss-Legendre

- Nos planteamos la posiblilidad de aproximar la integral con puntos espaciados estratégicamente: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) + E_N$
- Se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \cdots N$), seleccionados de forma que la aproximación es exacta cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$.
- Con los polinomios de Legendre para aproximamos la integral (y la función) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$, donde $a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) P_k(x)$ y $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)$.

- Nos planteamos la posiblilidad de aproximar la integral con puntos espaciados estratégicamente: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) + E_N$
- Se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \cdots N$), seleccionados de forma que la aproximación es exacta cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$.
- Con los polinomios de Legendre para aproximamos la integral (y la función) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$, donde $a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; f(x) P_k(x)$ y $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; f(x)$.
- Con lo cual $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) =$ $\sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{N} c_k P_n(x_k)$.

Intregración por cuadratura de Gauss-Legendre

- Nos planteamos la posiblilidad de aproximar la integral con puntos espaciados estratégicamente: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) + E_N$
- Se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \cdots N$), seleccionados de forma que la aproximación es exacta cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$.
- Con los polinomios de Legendre para aproximamos la integral (y la función) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$, donde $a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \ f(x) P_k(x)$ y $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \ f(x)$.
- Con lo cual $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) =$ $\sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{N} c_k P_n(x_k)$.
- $P_N(x)$ tiene N raíces, $x = x_j$, en $-1 \leq x \leq 1$. Seleccionamos esos puntos $x = x_j$ para evaluar la función $f(x_k)$.

- Nos planteamos la posiblilidad de aproximar la integral con puntos espaciados estratégicamente: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) + E_N$
- Se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \cdots N$), seleccionados de forma que la aproximación es exacta cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$.
- Con los polinomios de Legendre para aproximamos la integral (y la función) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$, donde $a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) P_k(x)$ y $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)$.
- Con lo cual $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k)$.
- $P_N(x)$ tiene N raíces, $x = x_j$, en $-1 \leq x \leq 1$. Seleccionamos esos puntos $x = x_j$ para evaluar la función $f(x_k)$.
- Podremos encontrar los pesos c_k resolviendo el sistema de N ecuaciones $\sum_{j=1}^N c_j P_0(x_j) = \sum_{j=1}^N c_j = 2 \quad$ y $\sum_{j=1}^N c_j P_k(x_j) = 0$ para $k = 1, 2, \cdots N - 1$. $P_k(x_j)$ son los distintos polinomios evaluados en las raíces del polinomio de grado N

- Se puede demostrar que la solución de este sistema son los pesos $c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\left(P_N'(x_j)\right)^2}$, donde: $P_N'(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$

- Se puede demostrar que la solución de este sistema son los pesos $c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\left(P'_N(x_j)\right)^2}$, donde: $P'_N(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$
- Entonces tendremos $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\mathrm{d}t,$

- Se puede demostrar que la solución de este sistema son los pesos $c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\left(P'_N(x_j)\right)^2}$, donde: $P'_N(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$
- Entonces tendremos $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\mathrm{d}t$,
- y para la cuadratura de Gauss-Legendre será $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k f\left(\frac{(b-a)t_k+b+a}{2}\right)$ donde los t_k son las raíces de $P_N(t_k) = 0$.

Intregración por cuadratura de Gauss-Legendre

- Se puede demostrar que la solución de este sistema son los pesos $c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\left(P_N'(x_j)\right)^2}$, donde: $P_N'(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$
- Entonces tendremos $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\mathrm{d}t$,
- y para la cuadratura de Gauss-Legendre será $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^N c_k f\left(\frac{(b-a)t_k+b+a}{2}\right)$ donde los t_k son las raíces de $P_N(t_k) = 0$.
- Para el caso general, la cuadratura de Gauss aproxima la integral como $\int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k)$, donde las $\{x_1, \cdots x_k, \cdots x_N\}$ son los ceros del polinomio ortogonal, de grado N, $p_N(x)$, elegido.

- Se puede demostrar que la solución de este sistema son los pesos $c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\left(P'_N(x_j)\right)^2}$, donde: $P'_N(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$
- Entonces tendremos $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\mathrm{d}t$,
- y para la cuadratura de Gauss-Legendre será $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k f\left(\frac{(b-a)t_k+b+a}{2}\right)$ donde los t_k son las raíces de $P_N(t_k) = 0$.
- Para el caso general, la cuadratura de Gauss aproxima la integral como $\int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k)$, donde las $\{x_1, \cdots x_k, \cdots x_N\}$ son los ceros del polinomio ortogonal, de grado N, $p_N(x)$, elegido.
- Los N pesos $\{c_1, \cdots c_k, \cdots c_N\}$ surgen de resolver el sistema $\sum_{j=1}^{N} c_j = \frac{h_0}{p_0^2}$ con $h_0 = \int_a^b w(x)p_0^2(x)\mathrm{d}x$ y $\sum_{j=1}^{N} c_j p_k(x_j) = 0$

Intregración por cuadratura de Gauss-Legendre

- Se puede demostrar que la solución de este sistema son los pesos $c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\left(P'_N(x_j)\right)^2}$, donde: $P'_N(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$
- Entonces tendremos $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\mathrm{d}t$,
- y para la cuadratura de Gauss-Legendre será $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k f\left(\frac{(b-a)t_k+b+a}{2}\right)$ donde los t_k son las raíces de $P_N(t_k) = 0$.
- Para el caso general, la cuadratura de Gauss aproxima la integral como $\int_a^b \mathrm{d}x\; w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k)$, donde las $\{x_1, \cdots x_k, \cdots x_N\}$ son los ceros del polinomio ortogonal, de grado N, $p_N(x)$, elegido.
- Los N pesos $\{c_1, \cdots c_k, \cdots c_N\}$ surgen de resolver el sistema $\sum_{j=1}^{N} c_j = \frac{h_0}{p_0^2}$ con $h_0 = \int_a^b w(x)p_0^2(x)\mathrm{d}x$ y $\sum_{j=1}^{N} c_j p_k(x_j) = 0$
- Esto es $\int_0^\infty \mathrm{d}x\; e^{-x}f(x) \Rightarrow$ Laguerre, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{-x^2}f(x) \Rightarrow$ Hermite, $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$ Tchebychev.

Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Leg

N	$P_N(x_j) = 0$	$c_j = \dfrac{2}{(1 - x_j^2)\left(P'_N(x_j)\right)^2}$	$2N - 1$
2	$\pm\sqrt{3}/3$	1	3
3	0 $\pm\sqrt{15}/5$	$8/9$ $5/9$	5
4	$\pm 0{,}3399810436$ $\pm 0{,}8611363116$	0,65214515 0,34785485	7
5	0 $\pm 0{,}5384693101$ $\pm 0{,}9061798459$	0,56888889 0,47862867 0,23692689	9
6	$\pm 0{,}2386191861$ $\pm 0{,}6612093865$ $\pm 0{,}9324695142$	0,46791393 0,36076157 0,17132449	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro: Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Legendre

Recapitulando

En presentación consideramos

1.