Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

1 de junio de 2021

Agenda Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

- Una ecuación diferencial lineal de orden n, tiene la forma $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)$, donde $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones contínuas de x en un intervalo $\mathbf{I}$ y $f_n(x) \neq 0$.

- Una ecuación diferencial lineal de orden n, tiene la forma $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)$, donde $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones contínuas de x en un intervalo $\mathbf{I}$ y $f_n(x) \neq 0$.
- Si $Q(x) = 0$ tendremos una ecuación diferencial homogénea $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0$, con n soluciones linealmente independientes: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$

- Una ecuación diferencial lineal de orden n, tiene la forma $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)$, donde $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones contínuas de x en un intervalo $\mathbf{I}$ y $f_n(x) \neq 0$.
- Si $Q(x) = 0$ tendremos una ecuación diferencial homogénea $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0$, con n soluciones linealmente independientes: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$
- La combinación lineal $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, también será solución.

- Una ecuación diferencial lineal de orden n, tiene la forma $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)$, donde $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones contínuas de x en un intervalo $\mathbf{I}$ y $f_n(x) \neq 0$.
- Si $Q(x) = 0$ tendremos una ecuación diferencial homogénea $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0$, con n soluciones linealmente independientes: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$
- La combinación lineal $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, también será solución.
- Si $Q(x) \neq 0$ tendremos como solución general de la ecuación inhomogénea $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$,

- Una ecuación diferencial lineal de orden n, tiene la forma $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)$, donde $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones contínuas de x en un intervalo $\mathbf{I}$ y $f_n(x) \neq 0$.
- Si $Q(x) = 0$ tendremos una ecuación diferencial homogénea $f_n(x)y^{(n)}(x)\cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0$, con n soluciones linealmente independientes: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$
- La combinación lineal $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, también será solución.
- Si $Q(x) \neq 0$ tendremos como solución general de la ecuación inhomogénea $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$,
- Si $f_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$. Entonces $y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$, será la solución general

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria y homogénea de la forma $a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$, donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

- Si proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{mx}$, convertimos la ecuación diferencial en $a_n m^n e^{mx} + \cdots + a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$ y finalmente en $a_n m^n + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ un polinomio de grado m

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria y homogénea de la forma $a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$, donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

- Si proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{mx}$, convertimos la ecuación diferencial en $a_n m^n e^{mx} + \cdots + a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$ y finalmente en $a_n m^n + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ un polinomio de grado m
- Cuando las n raíces son distintas entonces las n soluciones son: $y_1(x) = e^{m_1 x}$, $y_2(x) = e^{m_2 x}$, $y_3(x) = e^{m_3 x}$, $\ldots$, $y_n(x) = e^{m_n x}$, y la solución general será $y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria y homogénea de la forma $a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$, donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

- Si proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{mx}$, convertimos la ecuación diferencial en $a_n m^n e^{mx} + \cdots + a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$ y finalmente en $a_n m^n + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ un polinomio de grado m
- Cuando las n raíces son distintas entonces las n soluciones son: $y_1(x) = e^{m_1 x}$, $y_2(x) = e^{m_2 x}$, $y_3(x) = e^{m_3 x}$, $\ldots$, $y_n(x) = e^{m_n x}$, y la solución general será $y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$.
- Cuando la ecuación tiene una raíz $m = a$ que se repite k veces, la solución general es $y(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{k-1}\right) e^{ax}$

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria y homogénea de la forma $a_n y^{(n)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$, donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

- Si proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{mx}$, convertimos la ecuación diferencial en
  $a_n m^n e^{mx} + \cdots + a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0$ y finalmente en
  $a_n m^n + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ un polinomio de grado m
- Cuando las n raíces son distintas entonces las n soluciones son:
  $y_1(x) = e^{m_1 x}, \; y_2(x) = e^{m_2 x}, \; y_3(x) = e^{m_3 x}, \quad \ldots \quad, y_n(x) = e^{m_n x}$,
  y la solución general será $y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$.
- Cuando la ecuación tiene una raíz $m = a$ que se repite k veces, la solución general es $y(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{k-1}\right) e^{ax}$
- Si las raíces de la ecuación son imaginarias entonces si $a + ib$, también $a - ib$ lo será. Entonces la solución será:
  $y(x) = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x} = c_1 e^{ax} e^{ibx} + c_2 e^{ax} e^{-ibx} \Rightarrow$
  $y(x) = e^{ax}\left[c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}\right]$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, caso 1

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 1: Si términos de $Q(x)$ y la solución de la homogénea, $y_h(x)$, no coinciden. La solución particular de la inhomogénea se propone con los términos linealmente independientes de $Q(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$. La solución de la homogénea será $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, caso 1

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 1: Si términos de $Q(x)$ y la solución de la homogénea, $y_h(x)$, no coinciden. La solución particular de la inhomogénea se propone con los términos linealmente independientes de $Q(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$. La solución de la homogénea será $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$
- Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$ y sustituimos $[2A + De^x] + 4[2Ax + B + De^x] + 4\left[Ax^2 + Bx + C + De^x\right] = 4x^2 + 6e^x$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, caso 1

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 1: Si términos de $Q(x)$ y la solución de la homogénea, $y_h(x)$, no coinciden. La solución particular de la inhomogénea se propone con los términos linealmente independientes de $Q(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$. La solución de la homogénea será $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$
- Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$ y sustituimos $[2A + De^x] + 4[2Ax + B + De^x] + 4\left[Ax^2 + Bx + C + De^x\right] = 4x^2 + 6e^x$
- Entonces

$$\begin{array}{rcl} 4A & = & 4 \\ 8A + 4B & = & 0 \\ 2A + 4B + 4C & = & 0 \\ 9D & = & 6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 1\,,\; B = -2\,,\; C = \frac{3}{2}\,,\; D = \frac{2}{3}\,,$$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, caso 1

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 1: Si términos de $Q(x)$ y la solución de la homogénea, $y_h(x)$, no coinciden. La solución particular de la inhomogénea se propone con los términos linealmente independientes de $Q(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$. La solución de la homogénea será $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$
- Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$ y sustituimos $[2A + De^x] + 4\,[2Ax + B + De^x] + 4\left[Ax^2 + Bx + C + De^x\right] = 4x^2 + 6e^x$
- Entonces
$$\begin{array}{rcl} 4A & = & 4 \\ 8A + 4B & = & 0 \\ 2A + 4B + 4C & = & 0 \\ 9D & = & 6 \end{array} \Rightarrow A = 1\,,\; B = -2\,,\; C = \frac{3}{2}\,,\; D = \frac{2}{3}\,,$$
- $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, Caso 2

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 2: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- La ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Entonces coinciden $e^{2x} = x^0\ e^{2x} \Rightarrow k = 0 \quad r = 1$

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 2: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- La ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Entonces coinciden $e^{2x} = x^0\ e^{2x} \Rightarrow k = 0 \quad r = 1$
- Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}$ y se sustituye $\left[2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x}\right] - 3\left[2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x}\right] + 2\left[Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}\right] = 2x^2 + 3e^{2x}$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, Caso 2

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 2: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- La ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Entonces coinciden $e^{2x} = x^0\ e^{2x} \Rightarrow k = 0 \quad r = 1$
- Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}$ y se sustituye $\left[2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x}\right] - 3\left[2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x}\right] + 2\left[Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}\right] = 2x^2 + 3e^{2x}$
- Por lo cual

$$\begin{array}{rcl} 2A & = & 2 \\ 2B - 6A & = & 0 \\ 2A - 3B + 2C & = & 0 \\ D & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 1\,,\ B = 3\,,\ C = \frac{7}{2}\,,\ D = 3\,,$$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, Caso 2

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 2: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- La ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Entonces coinciden $e^{2x} = x^0\ e^{2x} \Rightarrow k = 0 \quad r = 1$
- Proponemos $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}$ y se sustituye $\left[2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x}\right] - 3\left[2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x}\right] + 2\left[Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}\right] = 2x^2 + 3e^{2x}$
- Por lo cual

$$\begin{array}{rcl} 2A & = & 2 \\ 2B - 6A & = & 0 \\ 2A - 3B + 2C & = & 0 \\ D & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = 1\,,\ B = 3\,,\ C = \tfrac{7}{2}\,,\ D = 3\,,$$

- Por lo tanto $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x}$.

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, Caso 2 cont

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 2, cont...: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ Coinciden con $x\ e^{-2x} \Rightarrow k = 1$ y $r = 2$.

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, Caso 2 cont

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$
Caso 2, cont...: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 xe^{-2x}$ Coinciden con $x\ e^{-2x} \Rightarrow k = 1$ y $r = 2$.
- Proponemos $y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$ y se sustituye $\left[4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x}\right] +$ $4\left[-2Ax^3e^{-2x} + 3Ax^2e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} + 2Bxe^{-2x}\right] +$ $4\left[Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}\right] = 3xe^{-2x} \Rightarrow 6Axe^{-2x} + 2Be^{-2x} = 3xe^{-2x}$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, Caso 2 cont

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$
Caso 2, cont...: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ Coinciden con $x\ e^{-2x} \Rightarrow k = 1$ y $r = 2$.
- Proponemos $y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$ y se sustituye $\left[4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x}\right] +$ $4\left[-2Ax^3e^{-2x} + 3Ax^2e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} + 2Bxe^{-2x}\right] +$ $4\left[Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}\right] = 3xe^{-2x} \Rightarrow 6Axe^{-2x} + 2Be^{-2x} = 3xe^{-2x}$
- igualando coeficientes $\left\{ \begin{array}{rcl} 6A & = & 3 \\ 2B & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\,,\ B = 0\,,$

Solución de la inhomogénea: coeficientes indeterminados, Caso 2 cont

$Q(x)$ contiene términos: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$

Caso 2, cont...: Si $Q(x)$ **contiene** algún término $x^k\, y_h(x)$ de las solución de la homogénea que es una raíz que se repite r, veces. En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y sus derivadas.

- Consideremos la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$ con $y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ Coinciden con $x\ e^{-2x} \Rightarrow k = 1$ y $r = 2$.
- Proponemos $y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$ y se sustituye $\left[4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x}\right] + 4\left[-2Ax^3e^{-2x} + 3Ax^2e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} + 2Bxe^{-2x}\right] + 4\left[Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}\right] = 3xe^{-2x} \Rightarrow 6Axe^{-2x} + 2Be^{-2x} = 3xe^{-2x}$
- igualando coeficientes $\left\{\begin{array}{ccc} 6A & = & 3 \\ 2B & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\,,\ B = 0\,,$
- y la solución general es $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x^3 e^{-2x}$.

Solución de la inhomogénea: variación de parámet

Consideremos la ecuación $a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,, \quad a_2 \neq 0\,,$

- Si $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ entonces proponemos $y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)\,.$

Consideremos la ecuación $a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = Q(x)\,, \quad a_2 \neq 0\,,$

- Si $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ entonces proponemos $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)\,.$
- Sustituyendo
$$a_2\left[u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x)\right] + a_2\left[u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)\right] +$$
$$a_2\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right]' + a_1\left[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)\right] +$$
$$a_1\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right] + a_0\left[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)\right] = Q(x)$$

Consideremos la ecuación $a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,, \quad a_2 \neq 0\,,$

- Si $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ entonces proponemos $y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)\,.$
- Sustituyendo
  $$a_2\left[u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x)\right] + a_2\left[u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)\right] +$$
  $$a_2\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right]' + a_1\left[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)\right] +$$
  $$a_1\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right] + a_0\left[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)\right] = Q(x)$$
- acomodando términos:
  $$u_1(x)\overbrace{\left[a_2 y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_0 y_1(x)\right]}^{=0} + u_2(x)\overbrace{\left[a_2 y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_2(\right.}^{=0}$$
  $$a_2\left[u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)\right] + a_2\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right]' +$$
  $$a_1\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right] = Q(x)$$

Solución de la inhomogénea: variación de parámet

Consideremos la ecuación $a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,, \quad a_2 \neq 0\,,$

- Si $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ entonces proponemos
  $y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)\,.$
- Sustituyendo
  $$a_2 \left[u_1(x) y_1''(x) + u_2(x) y_2''(x)\right] + a_2 \left[u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x)\right] +$$
  $$a_2 \left[u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x)\right]' + a_1 \left[u_1(x) y_1'(x) + u_2(x) y_2'(x)\right] +$$
  $$a_1 \left[u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x)\right] + a_0 \left[u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)\right] = Q(x)$$
- acomodando términos:
  $$u_1(x) \overbrace{\left[a_2 y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_0 y_1(x)\right]}^{=0} + u_2(x) \overbrace{[a_2 y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_2(}^{=0}$$
  $$a_2 \left[u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x)\right] + a_2 \left[u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x)\right]' +$$
  $$a_1 \left[u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x)\right] = Q(x)$$
- y resolvemos el sistema de ecuaciones para incógnitas: $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$
  $$u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) = 0$$
  $$u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) = \frac{Q(x)}{a_2}$$

- La solución de este sistema es:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_1(x)\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_2(x)$$

- La solución de este sistema es:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_1(x)\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_2(x)$$

- Integrando $u_1(x) = \int G_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u_2(x) = \int G_2(x)\,\mathrm{d}x$

- La solución de este sistema es:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_1(x)\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_2(x)$$

- Integrando $u_1(x) = \int G_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u_2(x) = \int G_2(x)\,\mathrm{d}x$
- $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)\,.$

- La solución de este sistema es:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_1(x)\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_2(x)$$

- Integrando $u_1(x) = \int G_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u_2(x) = \int G_2(x)\,\mathrm{d}x$
- $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)\,.$
- Si $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)$ con $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Entonces $\left\{ \begin{array}{r} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} = 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{1} \end{array} \right.$

- La solución de este sistema es:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_1(x)\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_2(x)$$

- Integrando $u_1(x) = \int G_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u_2(x) = \int G_2(x)\,\mathrm{d}x$
- $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)\,.$
- Si $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)$ con $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Entonces $\left\{ \begin{array}{r} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} = 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{1} \end{array} \right.$

- Integrando: $u_1(x) = -\int \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^x}\,\mathrm{d}x = -\cos\left(e^{-x}\right)$

$u_2(x) = \int \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right) + e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)$

- La solución de este sistema es:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_1(x)\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_2(x)$$

- Integrando $u_1(x) = \int G_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u_2(x) = \int G_2(x)\,\mathrm{d}x$
- $y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)\,.$
- Si $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)$ con $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Entonces $\begin{cases} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} = 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{1} \end{cases}$

- Integrando: $u_1(x) = -\int \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^x}\,\mathrm{d}x = -\cos\left(e^{-x}\right)$

$u_2(x) = \int \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right) + e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)$

- finalmente $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)$

Recapitulando

En presentación consideramos

1.