CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA PARA OBJETOS COMPACTOS ANISÓTROPOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN ROTACIÓN LENTA

PRESENTADO POR
DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO

DIRECTOR
LUIS ALBERTO NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO MARTÍNEZ

CODIRECTOR
JUSTO HERNÁN OSPINO ZÚÑIGA

CODIRECTORA
LAURA MARCELA BECERRA BAYONA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2023

CONTENIDO

RESUMEN

Los modelos teóricos de objetos compactos deben cumplir con condiciones de regularidad, condiciones de energía y condiciones de estabilidad para representar modelos realistas y observables en la naturaleza. A estas restricciones se les llama condiciones de aceptabilidad física.

Las condiciones de aceptabilidad física están definidas en modelos de objetos compactos anisótropos, estáticos, con simetría esférica. Sin embargo, una revisión preliminar de la literatura evidencia la escasez de trabajos que unifiquen criterios sistemáticos para evaluar la aceptabilidad física de modelos anisótropos con simetría axial y estacionarios.

El objetivo de este trabajo es investigar y conformar las condiciones de aceptabilidad física que deben cumplir los modelos de objetos compactos anisótropos, axialmente simétricos, bajo la aproximación de rotación lenta en Relatividad General. Asimismo, se busca determinar la estrategia más efectiva para introducir anisotropía en modelos estelares estáticos con simetría esférica y modelos estacionarios axialmente simétricos, implementando las condiciones de aceptabilidad física en cada caso.

La motivación para estudiar la aceptabilidad física de configuraciones anisótropas con simetría axial radica en que estos sistemas representan una descripción más realista de muchos objetos astrofísicos, como estrellas de neutrones, en comparación con modelos isótropos con simetría esférica. De esta manera, se espera descubrir nuevos conocimientos sobre la estructura de los objetos compactos al evaluar tanto su utilidad para reproducir fenómenos observables como su compatibilidad con las leyes físicas conocidas.

Por otra parte, la importancia de la anisotropía local de las presiones (tensiones radiales y tangenciales desiguales) se basa en los efectos significativos que tiene sobre la estructura y propiedades de objetos estelares. Por ejemplo, mejoran la estabilidad ante pulsaciones radiales y aumentan la masa máxima, el corrimiento al rojo superficial y la compacidad de configuraciones en equilibrio. Esto último ha ganado relevancia con el reciente descubrimiento de púlsares con masas por encima de 2 masas solares.

Existen distintas estrategias para modelar e introducir anisotropía en configuraciones materiales relativistas, entre las más populares se encuentran: anisotropía proporcional a la fuerza gravitacional; anisotropía como una ecuación de estado cuasilocal (en función de la presión y la compacidad); anisotropía proporcional al gradiente de presión; anisotropía a través de la definición y condicionamiento del factor de complejidad; y anisotropía utilizando la condición de Karmarkar. ¿Cuál de las estrategias es la más acertada?¿Cuál describe mejor la realidad?

Las ecuaciones de campo de Einstein serán resueltas a través de integración numérica mediante la implementación de perfiles de densidad conocidos o ecuaciones de estado barótropas. El resultado esperado es inferir cuál es el método más efectivo para introducir anisotropía con base en el número de condiciones de aceptabilidad física cumplidas.

1 INTRODUCCIÓN

Los objetos compactos son el punto final de la evolución de estrellas, por lo cual también se les conoce como remanentes estelares. Estos se diferencian de las estrellas normales principalmente en dos aspectos: (i) han dejado de fusionar elementos en su núcleo; (ii) su tamaño extremadamente reducido. En consecuencia, el estado de la materia que compone a las estrellas de neutrones, por ejemplo, es el más complejo, exótico y desconocido que se ha encontrado en astronomía.

Los remanentes estelares son sistemas físicos intrincados con propiedades gobernadas por las complejas interacciones entre las fuerzas nucleares, los efectos cuánticos y las interacciones gravitacionales que obedecen a las formas más extremas del universo. Se caracterizan por ser ultracompactos, girar con periodos de rotación del orden de milisegundos y tener densidades centrales por encima de la densidad nuclear.

El modelado físico-matemático de objetos compactos emplea las ecuaciones de campo de Einstein para una métrica y un tensor de energía-impulso conocido, dando como resultado relaciones entre variables físicas y geométricas dentro de la estrella. La naturaleza exótica de los objetos compactos permite que su descripción sea tan compleja como se quiera. Por lo tanto, la estrategia empleada para modelarlos consiste en añadir características al modelo más simple para completar gradualmente su descripción. Como primera aproximación se considera a la estrella como una distribución de materia autogravitante, esféricamente simétrica, en equilibrio hidrostático y compuesta de un fluido perfecto.

En primer lugar se puede considerar la complejidad de las fuertes interacciones, los cambios de fase en su composición y los grandes campos magnéticos a los que están sometidos los objetos compactos para enriquecer la descripción del modelo. Las consideraciones anteriores sugieren que las propiedades físicas del fluido que lo constituyen varíen según la dirección en que se midan [1, 2]. Particularmente, la aparición de cizallamiento en el flujo de fluido, los flujos disipativos y/o la inhomogeneidad de la densidad de energía generan anisotropía en la presión [3, 4]. Esto es, diferencia de presión a lo largo de diferentes direcciones espaciales dentro del objeto, dejando de estar constituido por un fluido pascaliano.

Existen distintas estrategias para modelar e introducir anisotropía en configuraciones materiales relativistas, entre las más populares se encuentran: anisotropía proporcional a la fuerza gravitacional [5]; anisotropía como una ecuación de estado cuasilocal (en función de la presión y la compacidad) [6]; anisotropía proporcional al gradiente de presión [7]; anisotropía a través de la definición y condicionamiento del factor de complejidad [8]; y anisotropía utilizando la condición de Karmarkar [9, 10]. De lo anterior emerge la pregunta ¿cuál representa mejor la realidad?

Por otro lado, la mayoría de los objetos astrofísico giran sobre un eje interno, lo que indica que la rotación es una característica importante para su descripción. Por esta razón, la simetría axial describe de forma más precisa las fuentes astrofísicas observadas, concediendo una representación más real para comprender fenómenos como los púlsares, los discos de acreción y las estrellas de neutrones en general.

La mayoría de estrellas de neutrones observadas giran a tal velocidad que pueden ser descritas con precisión a través del formalismo de rotación lenta [11–13]. Esta aproximación, se fundamenta en considerar la rotación como una pequeña perturbación de una configuración no rotatoria conocida. De esta manera, las ecuaciones de campo son expandidas en potencias de la velocidad angular conservando solo los términos de primer y segundo orden, lo cual simplifica las ecuaciones de estructura a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una solución de las ecuaciones de estructura relativistas con condiciones de frontera adecuadas representa un objeto compactos que, en principio, puede ser físicamente viable o no. Por lo tanto, actualmente se requiere que los modelos teóricos de objetos compactos cumplan con condiciones de regularidad, condiciones de energía y condiciones de estabilidad para que representen modelos realistas u observables en la naturaleza. A estas restricciones se les llama condiciones de aceptabilidad física.

Uno de los primeros trabajos en evaluar la aceptabilidad física de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein fue presentado por Delgaty y Lake [14] en 1998. En ese estudio se encontró que solo 16 de 127 soluciones estáticas con simetría esférica cumplían con regularidad en el origen; con densidad y presión positivas; con presión nula en un radio finito; con gradiente de densidad y gradiente de presión negativos y con velocidad del sonido menor que la velocidad de la luz.

Las condiciones de aceptabilidad física están determinadas para modelos de objetos compactos estáticos, anisótropos y con simetría esférica [15, 16]. Recientemente, estas condiciones se han empleado para investigar las propiedades de la materia en configuraciones estelares con ecuaciones de estado polítropa generalizadas, y con ello modelar candidatos a púlsares observados [16, 17]. Sin embargo, una revisión preliminar de la literatura evidencia la escasez de trabajos que unifiquen criterios sistemáticos para evaluar plenamente la aceptabilidad física de modelos de objetos compactos anisótropos con simetría axial.

Con esta propuesta de investigación se busca establecer las condiciones de aceptabilidad física para modelos de objetos compactos anisótropos, estacionarios y axialmente simétricos en el marco de la Relatividad General. Asimismo, se desea determinar la estrategia más efectiva para introducir anisotropía en modelos estelares estáticos con simetría esférica y modelos estacionarios axialmente simétricos implementando las condiciones de aceptabilidad física en cada caso.

La motivación detrás de esta investigación es analizar rigurosamente la plausibilidad física de los modelos anisótropos axialmente simétricos. De esta forma, evaluando su capacidad para reproducir fenómenos observables y su compatibilidad con las leyes físicas conocidas, se puede descubrir nuevos conocimientos sobre la naturaleza de la materia ultradensa y la estructura de los objetos compactos.

Con el fin de alcanzar el objetivo propuesto se plantea realizar una revisión bibliográfica extensiva que recopile las condiciones de aceptabilidad física existentes para configuraciones con simetría axial en la aproximación de rotación lenta. Las ecuaciones de campo de Einstein, para modelos estáticos con simetría estática y para modelos estacionarios con simetría axial (en rotación lenta), serán integradas numéricamente en Pyhton. Posteriormente, las condiciones de aceptabilidad física serán evaluadas en cada modelo obtenido dando como resultado el número de condiciones cumplidas. Por último, se comparará el número de condiciones cumplidas para determinar la estrategia más eficaz para introducir anisotropía en modelos de objetos compactos.

2 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Las condiciones de aceptabilidad física están definidas para modelos de objetos compactos estáticos, anisótropos y con simetría esférica. Estas condiciones se han empleado para validar configuraciones estelares con ecuaciones de estado polítropa generalizadas que modelan candidatos a púlsares observados [16, 17]. Una revisión preliminar de la literatura evidencia la escasez de trabajos que unifiquen criterios sistemáticos para evaluar plenamente la aceptabilidad física de modelos de objetos compactos anisótropos con simetría axial. Lo que lleva a plantearse ¿cómo cambian las condiciones de aceptabilidad física de simetría esférica a simetría axial? ¿Cómo influye la rotación en el estudio de la estabilidad de los modelos? ¿Cuáles son las condiciones de aceptabilidad física para modelos anisótropos, rotatorios y axialmente simétricos?

El objetivo de este trabajo es investigar y conformar las condiciones de aceptabilidad física que deben cumplir los modelos de objetos compactos anisótropos, axialmente simétricos, bajo la aproximación de rotación lenta en Relatividad General. Asimismo, se busca determinar la estrategia más efectiva para introducir anisotropía en modelos estelares estáticos con simetría esférica y modelos estacionarios axialmente simétricos implementando las condiciones de aceptabilidad física en cada caso.

La motivación para estudiar la aceptabilidad física de configuraciones anisótropas con simetría axial radica en que estos sistemas representan una descripción más realista de muchos objetos astrofísicos, como estrellas de neutrones, en comparación con modelos isótropos con simetría esférica. De esta manera, se espera descubrir nuevos conocimientos sobre la estructura de los objetos compactos al evaluar tanto su utilidad para reproducir fenómenos observables como su compatibilidad con las leyes físicas conocidas.

Por otra parte, la importancia de las tensiones radiales y tangenciales desiguales (anisotropía local de las presiones) se basa en los efectos significativos que tiene sobre la estructura y propiedades de objetos estelares. Por ejemplo, mejoran la estabilidad ante pulsaciones radiales [18] y aumentan la masa máxima, el corrimiento al rojo superficial y la compacidad de configuraciones en equilibrio [19–21]. Esto último ha ganado relevancia con el reciente descubrimiento de púlsares con masas por encima de 2 masas solares [22, 23].

Existen distintas estrategias para modelar e introducir anisotropía en configuraciones materiales relativistas, entre las más populares se encuentran: anisotropía proporcional a la fuerza gravitacional [5]; anisotropía como una ecuación de estado cuasilocal (en función de la presión y la compacidad) [6]; anisotropía proporcional al gradiente de presión [7]; anisotropía a través de la definición y condicionamiento del factor de complejidad [8]; y anisotropía utilizando la condición de Karmarkar [9, 10]. ¿Cuál de las estrategias es la más acertada?¿Cuál describe mejor la realidad?

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Establecer las condiciones de aceptabilidad física para fuentes anisótropas, estacionarias y axialmente simétricas en Relatividad General e implementarlas para determinar la estrategia más efectiva de introducir anisotropía en modelos estelares.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Clasificar las distintas estrategias para introducir anisotropía en configuraciones estelares anisótropas, estáticas y esféricamente simétricas, de acuerdo al número de condiciones de aceptabilidad física cumplidas por los modelos.
- Determinar las condiciones de aceptabilidad física para modelos anisótropos, estacionarios y axialmente simétricos.
- Categorizar las distintas estrategias para introducir anisotropía en configuraciones estelares anisótropas axialmente simétricas, en rotación lenta, de acuerdo al número de condiciones de aceptabilidad física cumplidas por los modelos.

4 ESTADO DEL ARTE

4.1 ESTRATEGIAS PARA INTRODUCIR ANISOTROPÍA

El trabajo de Bowers y Liang [19] (1974) fue pionero en retomar la idea de anisotropía en esferas relativistas al generalizar la ecuación de equilibrio hidrostático para incluir sus efectos. A partir de la métrica para un objeto anisótropo estático con simetría esférica, y el tensor de energía-momento que representa un fluido no pascaliano, se obtienen las ecuaciones de estructura

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{(\rho + P)\left(m + 4\pi r^3 P\right)}{r\,(r-2m)} + \frac{2\Delta}{r} \qquad \text{y} \tag{4.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho\,, \tag{4.2}$$

siendo m la función masa, ρ la densidad de energía, P la presión radial, $P_\perp$ la presión tangencial y $\Delta(\equiv P_\perp - P)$ la anisotropía en la presión, tal que cuando $\Delta = 0$ se recupera el caso isótropo. Desde entonces, las investigaciones sobre configuraciones estáticas anisótropas con simetría esférica han sido cuantiosas en el marco de la Relatividad General [5–8, 18, 20, 21, 24–34].

Entre las estrategias más utilizadas para describir la anisotropía en objetos autogravitantes se encuentran

1. Suponer que la fuerza debido a la anisotropía en la presión, presente en la ecuación de equilibrio hidrostático (4.1), es proporcional a la fuerza gravitacional [5]. Es decir

   $$\Delta = C\frac{(\rho + P)\left(m + 4\pi r^3 P\right)}{r-2m}\,,$$

   donde C, de ahora en adelante, es un escalar que cuantifica la anisotropía en los modelos. Esta idea se utilizó para modelar esferas anisótropas relativistas suponiendo una ecuación de estado polítropa entre la presión radial y la densidad de energía [16, 35]. Particularmente en [16] obtienen modelos que cumplen todas las condiciones de aceptabilidad física descritas más adelante en esta sección.

2. Considerar la anisotropía como una ecuación de estado cuasilocal, es decir, que no dependa únicamente del estado del fluido en un punto específico del espacio-tiempo. Una forma particular de este tipo de anisotropía es

   $$\Delta = 2CPm/r\,.$$

   Estudios sobre pulsaciones radiales y estabilidad de estrellas anisótropas a través del método $M(R)$ han utilizado esta forma de anisotropía [36]. Así como también en el estudio de oscilaciones no radiales en la aproximación de Cowling [6].

3. Suponer la anisotropía proporcional al gradiente de presión en la ecuación de equilibrio hidrostático. Raposo y colaboradores [7] proponen una anisotropía proporcional a la derivada covariante de la presión, dada por

$$\Delta = -Cf\left(\rho\right)k^{\mu}\nabla_{\mu}P\,,$$

donde $f(\rho)$ es una función arbitraria de la densidad de energía y $k^{\mu} = \left(0, k^1, 0, 0\right)$ es un vector tipo espacio unitario ortogonal a la cuadrivelocidad del fluido. Esta forma de anisotropía ha sido empleada principalmente para modelar estrellas ultracompactas, radialmente estables, análogas a agujeros negros [7].

4. Introducir anisotropía por medio de la definición del factor de complejidad [8], proveniente de la división ortogonal del tensor de Riemann. En términos de las variables físicas, y aplicando la condición del factor de complejidad nulo, la anisotropía está dada por

$$\Delta = -\frac{C}{2r^3}\int_0^r \tilde{r}^3\rho' \mathrm{d}\tilde{r}\,.$$

5. Introducir anisotropía a través de la condición de Karmarkar [9], la cual consiste en una relación entre las componentes del tensor de Riemann. De esta manera, la anisotropía inducida por la condición de Karmarkar para una configuración estática con simetría esférica es [10]

$$\Delta = \frac{C}{r^3}\int_0^r \tilde{r}^3\rho' \mathrm{d}\tilde{r}\left[\frac{(3P-\rho) - \frac{1}{r^3}\int_0^r \tilde{r}^3\rho' \mathrm{d}\tilde{r}}{4\rho}\right] \tag{4.3}$$

4.2 ROTACIÓN LENTA EN RELATIVIDAD GENERAL

En Relatividad General, el comportamiento del espacio-tiempo está influenciado por la presencia de masa y energía. Cuando se consideran objetos en movimiento, particularmente aquellos que giran, la geometría del espacio-tiempo se altera de tal manera que genera «efectos gravitomagnéticos» [37]. Tales efectos son relativamente débiles para objetos que giran lentamente. Sin embargo, son más notorios cuando se trata de objetos extremadamente masivos como los objetos compactos.

Cuando el objeto compacto rota lentamente, la rotación puede considerarse como una pequeña perturbación de una configuración no rotatoria ya conocida, lo que hace el cálculo de sus propiedades en equilibrio mucho más simples. De esta manera, a la configuración estática se la dota de una velocidad angular uniforme lo suficientemente lenta como para que los cambios en la presión, la densidad de energía y el campo gravitacional sean pequeños. A este enfoque se le conoce como formalismo de Hartle-Thorne [11, 12]. Entonces, la métrica y las variables son expandidas en potencias de la velocidad angular (Ω) y las perturbaciones son calculadas manteniendo solo los términos de primer y segundo

orden ($\mathcal{O}\left(\Omega^2\right)$) [11] .
Las consideraciones hechas para el desarrollo de este enfoque son

- La materia en la configuración en equilibrio satisface una ecuación de estado barótropa, es decir, $P = P\left(\rho\right)$.
- La configuración es simétricamente axial, asegurando la ausencia de radiación de ondas gravitacionales debido a que los momentos de la distribución de masa son independientes del tiempo. Lo anterior conlleva a que la configuración se encuentre en equilibrio.
- La configuración rota uniformemente.
- La aproximación de rotación lenta, la cual se da cuando las velocidades angulares Ω son tan pequeñas que los cambios fraccionarios en la presión, densidad de energía y campo gravitacional debido a la rotación son mucho menor que la unidad, lo cual implica
$$\Omega^2 \ll \left(\frac{c}{R}\right)\frac{GM}{Rc^2}\,, \tag{4.4}$$
donde M es la masa de la configuración sin perturbar y R su radio. Para la configuración sin perturbar el factor GM/Rc^2 debe ser menor que la unidad, por lo tanto, la condición en (4.4) también implica
$$R\Omega \ll c\,, \tag{4.5}$$
es decir, cada partícula debe moverse a velocidades no relativistas para que la perturbación de la geometría sea pequeña en términos de porcentajes.

En el caso estático, simétricamente esférico, el elemento de línea que describe el interior de esta configuración es

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\nu(r)}\mathrm{d}t^2 + \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]\mathrm{d}r^2 + r^2\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\left(\theta\right)\mathrm{d}\phi^2\right]\,, \tag{4.6}$$

donde $\nu(r)$, $m(r)$ y la presión $P(r)$ se determinan a través de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff dadas por

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho, \tag{4.7}$$
$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\rho + P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\,, \tag{4.8}$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{\left(\rho + P\right)\left(m + 4\pi r^3 P\right)}{r\left(r - 2m\right)}\,. \tag{4.9}$$

La solución interior se acopla en la superficie de la estrella con la solución exterior dada por
$$\mathrm{e}^{2\nu(R)} = 1 - \frac{2M}{R}\,. \tag{4.10}$$

La métrica de un sistema estacionario, con simetría axial, en coordenadas cuasi Schwarzschild (t, r, θ, ϕ), puede escribirse como

$$\mathrm{d}s^2 = -H^2(r,\theta)\,\mathrm{d}t^2 + Q^2(r,\theta)\,\mathrm{d}r^2 + r^2K^2(r,\theta)\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,(\mathrm{d}\phi - \omega(r,\theta)\,\mathrm{d}t)^2\right] , \tag{4.11}$$

donde la función métrica $\omega(r,\theta)$ es la velocidad adquirida por un observador que cae libremente desde infinito a un punto de coordenadas (r,θ) a causa de la rotación de la fuente.

Expansión a $\mathcal{O}(\Omega)$

Debido a la simetría considerada, las funciones métricas diagonales H, Q, K contienen solamente potencias pares en una expansión en términos de Ω, mientras que la expansión de ω tendrá solamente potencias impares. Por lo tanto, a $\mathcal{O}(\Omega)$

$$\omega(r,\theta) = \omega_1(r,\theta) + \mathcal{O}\left(\Omega^3\right) . \tag{4.12}$$

La expansión $\mathcal{O}(\Omega)$ de la componente $t-\phi$ de la ecuación de campo admite una solución regular asintóticamente plana solo si $\omega_1 = \omega_1(r)$. Definiendo

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &:= \Omega - \omega(r) , & (4.13)\\ j(r) &:= \mathrm{e}^{-\nu(r)}\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} \equiv \mathrm{e}^{-[\nu(r)+\lambda(r)]} , & (4.14) \end{aligned}$$

la componente $t-\phi$ de la ecuación de campo, hasta potencias de $\mathcal{O}(\Omega)$, es

$$\frac{1}{r^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^4 j\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{4}{r}\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}r}\bar{\omega} = 0 . \tag{4.15}$$

Esta ecuación diferencial puede integrarse comenzando con un valor arbitrario para $\bar{\omega}$ y luego acoplarla de forma tal que su solución analítica exterior es

$$\bar{\omega}(r) = \Omega - \frac{2J}{r^3} , \qquad r > R, \tag{4.16}$$

donde J es el momento angular total de la estrella dado por

$$J = \frac{R^4}{6}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R} . \tag{4.17}$$

Entonces, la métrica de una estrella que rota uniformemente a $\mathcal{O}(\Omega)$ es

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\nu(r)}\mathrm{d}t^2 + \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\,[\mathrm{d}\phi - \omega(r)\,\mathrm{d}t]^2\right] + \mathcal{O}\left(\Omega^2\right) , \tag{4.18}$$

donde las funciones $\nu(r)$ y $m(r)$ son soluciones de las ecuaciones de TOV para una estrella estática con la misma densidad central, mientras que $\omega(r)$ se obtiene de (4.15).

En el exterior, la métrica está dada analíticamente por

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\left(\mathrm{d}\phi - \frac{2J}{r^3}\mathrm{d}t\right)^2\right] + \mathcal{O}\left(\Omega^2\right) \,, \tag{4.19}$$

donde J es el momento angular de la estrella, dado por (4.17).

Expansión a $\mathcal{O}\left(\Omega^2\right)$

Cuando la aproximación de rotación lenta es extendida a $\mathcal{O}\left(\Omega^2\right)$, la presión, densidad y las componentes métricas diagonales son alteradas por la rotación. Los términos $\mathcal{O}\left(\Omega^2\right)$ en la expansión del fluido y de las variables métricas son funciones de dos dimensiones (r,θ), cuya dependencia angular puede ser expandida en términos de los polinomios de Legendre, $P_l\left(\cos\theta\right)$. Se puede demostrar que solo los términos monopolar ($l=0$) y cuadrupolar ($l=2$) en esta expansión son diferentes de cero. Como las transformaciones $r \to f\left(r\right)$ no cambian la forma de la métrica de Schwarzschild, la deformación monopolar en la parte $r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)$ del elemento de línea puede ser absorbida en una redefinición de la coordenada radial r. En consecuencia, quedan deformaciones monopolares en g_{tt} y g_{rr} y deformaciones cuadrupolares en todas las componentes diagonales de la métrica. De esta manera, la métrica para $\mathcal{O}\left(\Omega^2\right)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& -\mathrm{e}^{2\nu(r)}\left\{1 + 2\left[h_0\left(r\right) + h_2\left(r\right)P_2\left(\cos\theta\right)\right]\right\}\mathrm{d}t^2 \\ &+ \left[1-\frac{2m\left(r\right)}{r}\right]^{-1}\left\{1 + \frac{2\left[m_0\left(r\right) + m_2\left(r\right)P_2\left(\cos\theta\right)\right]}{r-2m\left(r\right)}\right\}\mathrm{d}r^2 \\ &+ r^2\left\{1 + 2\left[v_2\left(r\right) - h_2\left(r\right)\right]P_2\left(\cos\theta\right)\right\}\left\{\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\left[\mathrm{d}\phi - \omega_1\left(r\right)\mathrm{d}t\right]^2\right\} \\ &+ \mathcal{O}\left(\Omega^3\right) \,,\end{aligned} \tag{4.20}$$

donde $h_0\left(r\right)$ y $m_0\left(r\right)$ son funciones relacionadas con las deformaciones monopolares y $h_2\left(r\right)$, $m_2\left(r\right)$ y $v_2\left(r\right)$ representan la dependencia radial de las deformaciones cuadrupolares.

Similarmente, la presión puede expandirse como

$$P\left(r,\theta\right) = P\left(r\right) + \left(\rho + P\right)\left[P_0^*\left(r\right) + P_2^*\left(r\right)P_2\left(\cos\theta\right)\right] + \mathcal{O}\left(\Omega^4\right) \,, \tag{4.21}$$

donde $P\left(r\right)$ es la distribución de presión de un modelo no rotatorio con la misma densidad central. $P_0^*\left(r\right)$ y $P_2^*\left(r\right)$ están relacionadas con las deformaciones monopolar y cuadrupolar $\mathcal{O}\left(\Omega^2\right)$ de la distribución de presión, respectivamente. La expansión correspondiente de la distribución de densidad de energía es

$$\rho\left(r,\theta\right) = \rho\left(r\right) + \left(\rho + P\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P}\left[P_0^*\left(r\right) + P_2^*\left(r\right)P_2\left(\cos\theta\right)\right] + \mathcal{O}\left(\Omega^4\right) \,, \tag{4.22}$$

donde $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}P$ es obtenido de la ecuación de estado.

Con estas definiciones, las ecuaciones de campo de Einstein para una configuración estacionaria, axialmente simétrica, puede ser separada en un conjunto de ecuaciones para la parte no rotatoria, un conjunto de ecuaciones para la parte $l = 0$ y un conjunto de ecuaciones para la parte $l = 2$. A partir de estos conjuntos se puede obtener ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para las funciones $m_0(r)$, $P_0^*(r)$, $v_2(r)$, $h_2(r)$ y una ecuación algebraica para $m_2(r)$. Expandiendo la ecuación de equilibrio hidroestacionario y la cuadrivelocidad a orden $\mathcal{O}(\Omega^2)$ y separando la ecuación resultante en las partes no rotatoria, monopolar y cuadrupolar, se puede obtener ecuaciones algebraicas para las funciones restantes $h_0(r)$ y $P_2^*(r)$.
A partir de la parte $l = 0$ de la ecuación $G_t^t = 8\pi T_t^t$, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para $m_0(r)$, dada por

$$\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}P}(\rho + P) P_0^* + \frac{1}{12} j^2 r^4 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \frac{1}{3} r^3 \frac{\mathrm{d}j^2}{\mathrm{d}r} \bar{\omega}^2 \,, \tag{4.23}$$

y combinando las partes $l = 0$ de $G_r^r = 8\pi T_r^r$ y de la ecuación de equilibrio hidroestacionario, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para $P_0^*(r)$ dada por

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_0^*}{\mathrm{d}r} = &- \frac{m_0\left(1 + 8\pi r^2 P\right)}{(r - 2m)^2} - \frac{4\pi(\rho + P) r^2}{(r - 2m)} P_0^* + \frac{r^4 j^2}{12(r - 2m)} \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{r^3 j^2 \bar{\omega}^2}{r - 2m}\right) \,.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Las dos ecuaciones anteriores son integradas desde el centro de la estrella hacia afuera, donde la suposición de que la estrella rotatoria tiene la misma densidad central que el modelo no rotatorio lleva a la condición de frontera $m_0(r = 0) = 0$ y $P_0^*(r = 0) = 0$.
La última deformación monopolar, h_0, se obtiene de la parte $l = 0$ de la ecuación de equilibrio hidroestacionario a través de la relación algebraica

$$h_0 = -P_0^* + \frac{1}{3} r^2 \mathrm{e}^{-2\nu} \bar{\omega}^2 + h_{0c} \,, \tag{4.25}$$

donde h_{0c} es una constante de integración que se determina con el acople con la solución exterior en la superficie.
La solución exterior para m_0 y h_0 se obtiene resolviendo analíticamente la ecuación (4.23) y la ecuación diferencial de primer orden obtenida de la parte $l = 0$ de $G_r^r = 8\pi T_r^r$ dada por

$$\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}r} = \frac{m_0\left(1 + 8\pi r^2 P\right)}{(r - 2m)^2} + \frac{4\pi(\rho + P) r^2}{(r - 2m)} P_0^* - \frac{r^4 j^2}{12(r - 2m)} \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r}\right)^2 \,. \tag{4.26}$$

La solución analítica es

$$\begin{aligned} m_0(r) &= \delta M - \frac{J^2}{r^3} \,, \\ h_0(r) &= -\frac{\delta M}{r - 2M} + \frac{J^2}{r^3(r - 2M)} \,, \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde δM es el cambio en la masa gravitacional de la estrella debido a la rotación, esto es

$$\delta M = m_0 (R) + \frac{J^2}{R^3} \,, \tag{4.28}$$

haciendo la comparación entre dos estrellas con la misma densidad central.
Dos ecuaciones diferenciales de primer orden para $v_2 (r)$ y $h_2 (r)$ se obtienen de la parte $l = 2$ de las componentes $R^\theta_r = 0$ y $G^r_r = 8\pi T^r_r$ de las ecuaciones de campo. Con la ayuda de las partes $l = 2$ de la ecuación de equilibrio hidroestacionario y de la relación $R^\theta_\theta - R^\phi_\phi = 8\pi \left(T^\theta_\theta - T^\phi_\phi \right)$, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}r} = -2\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} h_2 + \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} \right) \left[-\frac{1}{3} r^3 \frac{\mathrm{d}j^2}{\mathrm{d}r} \bar{\omega}^2 + \frac{1}{6} j^2 r^4 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r} \right)^2 \right] \,, \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}r} = & \left\{ -2\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} + \frac{r}{2(r-2m)} \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} \right)^{-1} \left[8\pi (\rho + P) - \frac{4m}{r^3} \right] \right\} h_2 \\ & - \frac{2v_2}{r(r-2m)} \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} \right)^{-1} + \frac{1}{6} \left[\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} r - \frac{1}{2(r-2m)} \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} \right)^{-1} \right] r^3 j^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r} \right)^2 \\ & - \frac{1}{3} \left[\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{2(r-2m)} \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} \right)^{-1} \right] r^2 \frac{\mathrm{d}j^2}{\mathrm{d}r} \bar{\omega}^2 \,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

El sistema de ecuaciones anterior se integra comenzando con las condiciones de frontera $h_2 = v_2 = 0$ en $r = 0$. En el exterior, se puede encontrar una solución analítica, como una suma de una solución particular y una solución al sistema homogéneo. De las dos posible soluciones del sistema homogéneo, la solución física es la que se hace cero en infinito. Una solución particular puede obtenerse diciendo que v_2 y h_2 se comportan como $ar^{-3} + br^{-4} + cr^{-5}$, con a, b, c constantes diferentes en cada caso. De esta manera, la solución exterior para $v_2 (r)$ y $h_2 (r)$ son

$$v_2 = -\frac{J^2}{r^4} + K \frac{2M}{\left[r (r - 2M) \right]^{1/2}} Q^1_2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \,, \tag{4.31}$$

$$h_2 = J^2 \left(\frac{1}{Mr^3} + \frac{1}{r^4} \right) + K Q^2_2 \left(\frac{r}{M} - 1 \right) \,, \tag{4.32}$$

donde Q^m_n son las funciones de Legendre asociadas de segundo tipo y K es una constante determinada por el acople de las solución interior con la exterior en la superficie.
La deformación cuadrupolar $m_2 (r)$ es obtenida directamente como una ecuación algebraica de la parte $l = 2$ de la relación $R^\theta_\theta - R^\phi_\phi = 8\pi \left(T^\theta_\theta - T^\phi_\phi \right)$, la cual se hace cero idénticamente en el límite no rotatorio

$$m_2 = (r - 2M) \left[-h_2 - \frac{1}{3} r^3 \left(\frac{\mathrm{d}j^2}{\mathrm{d}r} \right) \bar{\omega}^2 + \frac{1}{6} r^4 j^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{\mathrm{d}r} \right)^2 \right] \,, \tag{4.33}$$

y la deformación cuadrupolar $P^*_2 (r)$ también es obtenida algebraicamente de la parte

$l = 2$ de la ecuación de equilibrio hidroestacionario como

$$P_2^* = -h_2 - \frac{1}{3} r^2 \mathrm{e}^{-2\nu} \bar{\omega}^2 \,, \tag{4.34}$$

lo cual completa la determinación de las propiedades del fluido y el espacio-tiempo de una estrella rotatoria a $\mathcal{O}\left(\Omega^2\right)$.

4.3 CONDICIONES DE ACEPTABILIDAD FÍSICA

Una solución de las ecuaciones de estructura relativistas, con condiciones de frontera adecuadas, representa un objeto compacto en equilibrio. Estas configuraciones, en principio, pueden ser estables o inestables.

Uno de los primeros trabajos en evaluar la aceptabilidad física de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein fue presentado por Delgaty y Lake [14] en 1998. En ese estudio se encontró que solo 16 soluciones de 127 propuestas cumplían con regularidad en el origen, densidad y presión positivas, presión nula en un radio finito, gradiente de densidad y gradiente de presión negativos, y velocidad del sonido menor que la velocidad de la luz. Evidentemente, el análisis de los modelos bajo perturbaciones de sus variables físicas también entra en escena como factor decisivo para descartar modelos estelares con base en su relevancia física.

Por consiguiente, las soluciones obtenidas deben cumplir condiciones de regularidad, de energía y de estabilidad para que representen modelos realistas o físicamente aceptables.

4.3.1 MODELOS CON SIMETRÍA ESFÉRICA Las condiciones de aceptabilidad física para modelos anisótropos, estáticos y con simetría esférica han sido identificadas y compiladas en [15]. Recientemente, las 10 condiciones originales han sido reducidas a 8 y se ha añadido el criterio de estabilidad convectiva [38] para un total de 9 condiciones de aceptabilidad física [16]. Estas son

Compacidad

La compacidad ($\mu = 2m/r$) debe ser menor que 1 con el fin de evitar singularidades dentro de la estrella. Lo anterior asegura

a) Funciones métricas positivas, finitas y libres de singularidades en el interior de la esfera. En el centro deben satisfacer $\mathrm{e}^{-2\lambda(0)} = 1$ y $\mathrm{e}^{2\nu(0)} = constante$.

b) Condición de acoplamiento para que en la superficie de la esfera $r = R$ la solución interior coincida de forma continua con la solución exterior de Schwarzschild

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right),$$

lo cual determina la métrica en la superficie como

$$\mathrm{e}^{\nu(R)} = \mathrm{e}^{-\lambda(R)} = 1 - \frac{2M}{R}.$$

c) Disminución del corrimiento al rojo interior (Z) al aumentar r [21, 39], ya que este depende solamente de ν:

$$Z(r) = \mathrm{e}^{-\nu/2} - 1.$$

En la superficie, el corrimiento al rojo y la compacidad (μ) están relacionados por

$$Z(R) = [1 - \mu(R)]^{-1/2} - 1\,, \quad \text{siendo} \quad \mu(R) = 2M/R\,.$$

Densidad y presiones positivas

La densidad y las presiones no deben ser negativas dentro de la esfera. En el centro deben ser finitas $\rho(0) = \rho_c$, $P(0) = P_c$ y $P_\perp(0) = P_{\perp_c}$. Más aún, $P(0) = P_\perp(0)$ [39], consistente con modelos estelares en equilibrio.

Gradiente de densidad y de presiones negativos

El máximo de la densidad y de las presiones se encuentra en el centro, de tal manera que $\rho'(0) = P'(0) = P'_\perp(0) = 0$, y decrecen monótonamente hacia la superficie de la esfera. Por lo tanto $\rho' \leq 0$, $P' \leq 0$, $P'_\perp \leq 0$. Consistente con modelos estelares en equilibrio.

Condición de energía

La Relatividad General propone una forma de describir la manera en la que la materia afecta la curvatura del espacio-tiempo. Esta teoría de la gravedad, por sí misma, no proporciona información sobre las características que debe tener una configuración material con el fin de modelar objetos reales. Por lo tanto, se puede considerar imponer suposiciones sobre el tensor de energía-momento para describir una distribución de materia real. Las restricciones sobre el tensor de energía-momento, que se deben mantener para describir una configuración material razonable, son conocidas como condiciones de energía [40, 41].
En consecuencia, la solución debe satisfacer la condición de energía dominante (DEC) $\rho \geq P$, y $\rho \geq P_\perp$. Es deseable que incluso la condición sobre la traza del tensor energía-momento (TEC), $\rho \geq P + 2P_\perp$, se satisfaga.

Condición de causalidad

La velocidad del sonido tangencial y radial no deben sobrepasar la velocidad de la luz. Las velocidades del sonido son definidas como $v_s^2 = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho$ y $v_{s\perp}^2 = \mathrm{d}P_\perp/\mathrm{d}\rho$. Por lo tanto, la condición puede escribirse como

$$0 < \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} \leq 1\,, \quad 0 < \frac{\mathrm{d}P_{\perp}}{\mathrm{d}\rho} \leq 1.$$

Criterio de estabilidad para el índice adiabático

El índice adiabático de la configuración, por consecuencia del criterio de estabilidad dinámica [30], debe ser mayor que 4/3 para que haya estabilidad. Esto es

$$\gamma = \frac{\rho + P}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} \geq \frac{4}{3}\,.$$

Criterio de Harrison-Zeldovich-Novikov

Harrison et al. [42] y Zeldovich y Novikov [43] formularon una condición de estabilidad afín a las perturbaciones radiales. Integrando las ecuaciones de estructura relativistas, para una ecuación de estado dada, se puede obtener una secuencia de configuraciones en equilibrio para distintos valores de la densidad de energía central ρ_c. Típicamente la curva $M\left(\rho_c\right)$ es creciente, alcanza un máximo y luego decrece.
La condición de estabilidad de Harrison-Zeldovich-Novikov enuncia que las configuraciones estables son aquellas en las que

$$\frac{\mathrm{d}M\left(\rho_c\right)}{\mathrm{d}\rho_c} \geq 0\,.$$

Fracturas

El enfoque de fracturas [44–46] consiste en determinar la aparición de fuerzas radiales totales que cambien de signo una vez que la configuración en equilibrio ha sido perturbada. La fuerza radial total dentro de la esfera es la suma de todas las fuerzas presentes en la configuración debido a la perturbación, y por lo tanto dependerá de cómo sea perturbado el objeto compacto.
El enfoque desarrollado por González et al. [47] propone un nuevo esquema al examinar la influencia de las fluctuaciones locales de la densidad en la estabilidad de esferas autogravitantes. Este tipo de perturbación afecta todas las variables físicas incluyendo el gradiente de presión y la función masa.
Se requiere que la distribución de fuerza total en la esfera, después de perturbar la ecuación de equilibrio hidrostático, no cambie de dirección (signo).

Estabilidad convectiva

El principio de flotabilidad conduce a que la presión y la densidad de energía deben disminuir desde el centro hacia fuera en una configuración esférica de materia hidrostática [48–50].

Considérese un elemento de fluido desplazado hacia el centro de una esfera hidrostática. Comparando la densidad del elemento desplazado ρ_e con la densidad del fluido que le rodea ρ_s se pueden presentar tres casos:

- Si ρ_e aumenta más rápido que ρ_s, la gravedad atraerá al elemento de fluido hacia el centro de la esfera y el sistema será inestable.
- Si $\rho_e = \rho_s$, el sistema se encuentra en un equilibrio aparente susceptible a pequeñas perturbaciones en la densidad.
- Si $\rho_e < \rho_s$, el elemento de fluido retornará a su posición inicial y el sistema será estable.

Basado en lo anterior, Hernández et al. [38] proponen un criterio de estabilidad ante la convección adiabática. La condición de estabilidad requiere que la segunda derivada de la densidad sea negativa: $\rho'' \leq 0$.

4.3.2 MODELOS CON SIMETRÍA AXIAL En modelos rotatorios con simetría axial se encuentran los siguientes criterios de estabilidad

Criterio estático de estabilidad

J.B. Hartle y K.S. Thorne [51] generalizan el criterio estático de estabilidad [42] para estrellas relativistas que rotan lentamente. Este consiste en considerar una secuencia de estrellas estáticas en equilibrio construidas a partir de una ecuación de estado. Cada miembro de la secuencia es distinguido por su respectiva densidad central ρ_c. Luego, las estrellas son dotadas de rotación lenta y rígida, lo que resulta en una secuencia de configuraciones en equilibrio, de dos parámetros, cada una distinguida por su densidad central ϱ_c y momento angular total J respectivo.
Un incremento en J, con ϱ_c fijo, produce un incremento en la fuerza centrífuga que deforma a la estrella. Esto causa que sus modos radiales de pulsación también se deformen, cambiando las frecuencias de oscilación, por lo que se conocen como «modos cuasi-radiales». La deformación de los modos cuasi-radiales hace que la estrella emita ondas gravitacionales, amortiguando los movimientos del fluido debido a su reacción a la radiación. Este amortiguamiento se refleja en la parte imaginaria de la frecuencia del modo normal.
Luego, para cierto momento angular J habrá una densidad crítica ϱ_{cc} para la cual el enésimo modo cuasi-radial cambia la estabilidad (el signo). Así, el criterio estático de estabilidad es una técnica para calcular la densidad central ϱ_{cc} de la configuración uniformemente rotatoria cuya frecuencia de oscilación es cero [52].

Método de punto de inflexión

El método de punto de inflexión es una forma simple de localizar puntos de inestabilidad secular sobre una secuencia de configuraciones en equilibrio, análogo al criterio de

Harrison-Zeldovich-Novikov, para modelos que rotan uniformemente.
Friedman et al. en [53] proponen y prueban el siguiente teorema. Considérese una secuencia continua de modelos estelares, a partir de una ecuación de estado barótropa, cuya rotación es uniforme. Siendo λ el parámetro de secuencia, se tienen dos casos:

- Supóngase que el momento angular total es constante a lo largo de la secuencia y que existe un punto λ_0 donde $\dot{M} = \mathrm{d}M/\mathrm{d}\lambda = 0$ y donde $\mathcal{E} > 0$, siendo $\left(\dot{\mathcal{E}}\dot{M}\right)^{\cdot} \neq 0$. Aquí, M es la masa total y $\mathcal{E}$ es la energía de inyección, es decir, el aumento en la masa cuando una unidad de masa bariónica se inyecta en un punto de la estrella. Entonces, la parte de la secuencia para la cual $\dot{\mathcal{E}}\dot{M} > 0$ es inestable para λ cercano a λ_0.

- Ahora, supóngase que masa bariónica total M_0 es constante a lo largo de la secuencia y que existe un punto λ_0 donde $\dot{M} = 0$ y donde $\Omega > 0$, siendo $\left(\dot{\Omega}\dot{M}\right)^{\cdot} \neq 0$. Entonces, la parte de la secuencia para la cual $\dot{\Omega}\dot{M} > 0$ es inestable para λ cercano a λ_0.

Por lo tanto, la inestabilidad axisimétrica se establece al pasar por un modo con frecuencia cero. Es decir, a lo largo de una secuencia de modelos rotatorios, un cambio en la estabilidad ocurre solo cuando existe una solución independiente del tiempo a las ecuaciones de perturbación. Una característica importante de este método es su independencia de los parámetros que etiquetan los modelos en equilibrio, lo que permite manifestar el resultado sin restringir la parametrización [54].

Fracturas

L. Herrera y V. Varela [55] extienden el enfoque de fracturas al estudiar el efecto de perturbaciones axialmente simétricas de las variables físicas en una distribución compuesta de un fluido perfecto. Para esto consideran sistemas inicialmente esféricos sometidos a perturbaciones de la presión y la densidad de energía de la forma

$$\tilde{\rho} = \rho + \epsilon k \cos^2\theta\,, \tag{4.35}$$

$$\tilde{P} = P + \epsilon k \sin^2\theta\,, \tag{4.36}$$

donde ϵ mide la intensidad de la perturbación, y $k = k\,(r)$ es una función que se hace cero en los extremos.
Para esta forma particular de perturbación, evalúan la ecuación de conservación en la dirección θ para obtener la distribución de la fuerza total inmediatamente después de la perturbación. Para ϵ suficientemente pequeño, la fuerza total cambia de signo en el plano ecuatorial, independientemente de la función $k\,(r)$.
El resultado obtenido manifiesta que para perturbaciones que alejen al sistema de la simetría esférica puede inducir fracturas en la dirección «transversa» de la distribución material.

4.4 OBSERVACIONES

Actualmente, las observaciones con telescopios sofisticados y la medición de eventos cosmológicos son elementos fundamentales para el estudio y modelado de objetos astrofísicos como estrellas de neutrones. El avance constante en este campo de la física brinda restricciones sobre las propiedades de las interacciones en la materia ultradensa.

4.4.1 NEUTRON STAR INTERIOR COMPOSITION EXPLORER El Neutron Star Interior Composition Explorer (NICER) es un telescopio de rayos X diseñado para estudiar la composición interior, la estructura y el comportamiento de las estrellas de neutrones. NICER tiene como objetivo determinar las propiedades fundamentales de las estrellas de neutrones como sus masas, radios y momentos de inercia [22, 56]. Estas propiedades brindan información sobre la física de la materia ultradensa y pueden ayudar a restringir la ecuación de estado que describe la relación entre la presión, la densidad y la composición dentro de las estrellas de neutrones.

4.4.2 DEFORMABILIDAD DE MAREA La deformabilidad de marea es una medida de qué tan sensible es la materia de una estrella a la fuerza de marea causada por una estrella compañera o un agujero negro en un sistema binario [57]. La detección y el análisis de ondas gravitacionales de fusiones binarias permite estimar la deformabilidad de marea contribuyendo a la comprensión de la ecuación de estado de la materia de las estrellas de neutrones.
Varios autores han examinado la influencia de la anisotropía en los límites de deformabilidad de distintas ecuaciones de estado ultradensas [7, 58–60] a través de la polarizabilidad de marea adimensional ($\bar{\Lambda}$) y el número de Love de marea (k_2). En modelos teóricos de objetos compactos, se calcula la deformación de marea ponderada en masa ($\tilde{\Lambda}_{1.4}$) del modelo respecto a un compañero con masa de $1.4\,M_{\odot}$. LIGO reportó la restricción $50 \leq \tilde{\Lambda}_{1.4} \leq 800$ al 90 % de nivel de confianza a partir del evento GW170817 [61].

5 METODOLOGÍA

La metodología que se seguirá para abordar el problema planteado y cumplir con los objetivos establecidos se detalla a continuación

1. Para alcanzar el primer objetivo específico se considera una esfera autogravitante estática, con simetría esférica y presión anisótropa, como modelo hipersimplificado de una estrella de neutrones. Luego, se plantean las ecuaciones de campo de Einstein para cada una de las estrategias para introducir anisotropía. Asimismo, se considera un perfil de densidad conocido común a todos los modelos. En seguida, las ecuaciones (diferenciales) de estructura se integran numéricamente en Python, teniendo en cuenta las condiciones de frontera, para obtener las variables físicas que caracterizan a los modelos. Posteriormente, las condiciones de aceptabilidad física se evalúan a partir de las variables físicas obtenidas y se determina el número de condiciones cumplidas por cada modelo. Por último, se compara el número de condiciones que cada modelo cumple con el fin de determinar cuál estrategia para introducir anisotropía es más efectiva en obtener modelos estelares realistas.

2. Para cumplir con el segundo objetivo específico se realizará una revisión bibliográfica extensiva que recopile las condiciones de aceptabilidad física existentes para configuraciones axialmente simétricas en rotación lenta. A través del análisis de estas condiciones, se extenderán a configuraciones anisótropas en caso de ser necesario. Asimismo, se extenderán las condiciones de aceptabilidad física de fuentes estáticas simétricamente esféricas a fuentes rotatorias con simetría axial. Para esto, se identifican las condiciones que son afectadas por la rotación: condiciones de energía, condiciones sobre las funciones métricas, criterio de estabilidad dinámica sobre el índice adiabático, criterio de Harrison-Zeldovich-Novikov y enfoque de fracturas, entre otras. Esto último implica reconstruir las ecuaciones y conceptos fundamentales detrás de los criterios de aceptabilidad, como por ejemplo, plantear las ecuaciones dinámicas para oscilaciones axisimétricas, analizar el comportamiento de la masa total en función de la densidad central y el momento angular total o analizar la ecuación de equilibrio hidroestacionario perturbada justo después de abandonar el equilibrio. El resultado será la conformación de las condiciones de aceptabilidad física que deben cumplir los modelos de objetos compactos anisótropos, con simetría axial, en rotación lenta para representar objetos observables.

3. Para lograr el tercer objetivo se modela un objeto compacto autogravitante estacionario, con simetría axial y presión anisótropa, como representación simplificada de una estrella de neutrones. Para esto, se supone una ecuación de estado barótropa, $P = P(\rho)$, y las distintas estrategias para introducir anisotropía. Luego, se plantean las ecuaciones de campo de Einstein, correspondientes a cada estrategia, en la aproximación de rotación lenta. Es decir, teniendo en cuenta las perturbaciones

rotacionales en la métrica y en el tensor de energía-momento. Seguidamente, se determinan las propiedades del fluido y del espacio-tiempo a través de la integración numérica de las ecuaciones de campo para la parte $l = 0$ y $l = 2$. Las condiciones de aceptabilidad física se evaluarán a partir de las variables físicas y geométricas obtenidas. El resultado será un número que denote la cantidad de condiciones cumplidas por cada modelo. Se comparará el número de condiciones que cada modelo cumple con el fin de determinar determinar la estrategia para introducir anisotropía más efectiva en obtener modelos estelares realistas.

6 CRONOGRAMA

Actividad	Meses									
	1-2	2-5	5-8	8-10	10-12	12-14	14-20	18-22	20-24	24-26
Revisión bibliográfica	X	X	X	X	X					
Planteamiento de las ecuaciones de estructura para modelos estáticos con simetría esférica (MESE)	X									
Integración numérica de MESE para cada una de las estrategias para introducir anisotropía		X								
Evaluación de las condiciones de aceptabilidad física de MESE y visualización de resultados			X							
Revisión bibliográfica e investigación de antecedentes sobre condiciones de acepta-bilidad para modelos estacionarios con simetría axial (MESA)				X	X					
Extensión de las condiciones de aceptabilidad física para MESE a MESA					X					
Formación de las condiciones de aceptabilidad física para MESA				X	X	X				
Planteamiento de las ecuaciones de estructura para MESA					X	X				
Integración numérica de MESA para cada una de las estrategias para introducir anisotropía							X			
Evaluación de las condiciones de aceptabilidad física de MESA y visualización de resultados								X		
Análisis y comparación de resultados. Conclusiones									X	
Escritura y entrega de la tesis									X	X

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Ruderman, “Pulsars: structure and dynamics,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 10, p. 427, 1972.

[2] M. Mak and T. Harko, “Anisotropic stars in general relativity,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 459, no. 2030, pp. 393–408, 2003.

[3] L. Herrera, “Stability of the isotropic pressure condition,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, no. 10, p. 104024, 2020.

[4] L. Herrera and N. Santos, “Local anisotropy in self-gravitating systems,” *Phys. Rep.*, vol. 286, no. 2, pp. 53–130, 1997.

[5] M. Cosenza, L. Herrera, M. Esculpi, and L. Witten, “Some models of anisotropic spheres in general relativity,” *J. Math. Phys.*, vol. 22, no. 1, pp. 118–125, 1981.

[6] D. Doneva and S. Yazadjiev, “Nonradial oscillations of anisotropic neutron stars in the cowling approximation,” *Phys. Rev. D*, vol. 85, no. 12, p. 124023, 2012.

[7] G. Raposo, P. Pani, M. Bezares, C. Palenzuela, and V. Cardoso, “Anisotropic stars as ultracompact objects in general relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 10, p. 104072, 2019.

[8] L. Herrera, “New definition of complexity for self-gravitating fluid distributions: The spherically symmetric, static case,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, no. 4, p. 044010, 2018.

[9] K. R. Karmarkar, “Gravitational metrics of spherical symmetry and class one,” *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.-Section A*, vol. 27, no. 1, p. 56, 1948.

[10] J. Ospino and L. A. Núñez, “Karmarkar scalar condition,” *Eur. Phys. J. C*, p. 166, Jan. 2020.

[11] J. B. Hartle, “Slowly rotating relativistic stars. I. equations of structure,” *Astrophys. J.*, vol. 150, p. 1005, 1967.

[12] J. B. Hartle and K. S. Thorne, “Slowly rotating relativistic stars. II. models for neutron stars and supermassive stars,” *Astrophys. J.*, vol. 153, p. 807, 1968.

[13] E. Berti, F. White, A. Maniopoulou, and M. Bruni, “Rotating neutron stars: an invariant comparison of approximate and numerical space–time models,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 358, no. 3, pp. 923–938, 2005.

[14] M. Delgaty and K. Lake, “Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of einstein’s equations,” *Comput. Phys. Commun.*, vol. 115, no. 2-3, pp. 395–415, 1998.

[15] B. Ivanov, "Analytical study of anisotropic compact star models," *Eur. Phys. J. C*, vol. 77, no. 11, p. 738, 2017.

[16] D. Suárez-Urango, J. Ospino, H. Hernández, and L. Núñez, "Acceptability conditions and relativistic anisotropic generalized polytropes," *Eur. Phys. J. C*, vol. 82, no. 2, pp. 1–22, 2022.

[17] H. Hernández, D. Suárez-Urango, and L. Núñez, "Acceptability conditions and relativistic barotropic equation of state," *Eur. Phys. J. C*, vol. 81, no. 241, 2021.

[18] K. Dev and M. Gleiser, "Anisotropic stars II: stability," *Gen. Relativ. Gravitation*, vol. 35, no. 8, pp. 1435–1457, 2003.

[19] R. L. Bowers and E. Liang, "Anisotropic spheres in general relativity," *Astrophys. J.*, vol. 188, p. 657, 1974.

[20] K. Dev and M. Gleiser, "Anisotropic stars: exact solutions," *Gen. Relativ. Gravitation*, vol. 34, no. 11, pp. 1793–1818, 2002.

[21] B. V. Ivanov, "Maximum bounds on the surface redshift of anisotropic stars," *Phys. Rev. D*, vol. 65, no. 10, p. 104011, 2002.

[22] M. Miller, F. Lamb, A. Dittmann, *et al.*, "The radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton data," *Astrophys. J. Lett.*, vol. 918, no. 2, p. L28, 2021.

[23] R. Romani, D. Kandel, A. Filippenko, *et al.*, "PSR J0952- 0607: The Fastest and Heaviest Known Galactic Neutron Star," *Astrophys. J. Lett.*, vol. 934, no. 2, p. L18, 2022.

[24] H. Heintzmann and W. Hillebrandt, "Neutron stars with an anisotropic equation of state-mass, redshift and stability," *Astron. Astrophys.*, vol. 38, pp. 51–55, 1975.

[25] J. Ovalle, "Decoupling gravitational sources in general relativity: from perfect to anisotropic fluids," *Phys. Rev. D*, vol. 95, no. 10, p. 104019, 2017.

[26] G. Abellán, Á. Rincón, E. Fuenmayor, and E. Contreras, "Anisotropic interior solution by gravitational decoupling based on a non-standard anisotropy," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 135, no. 7, pp. 1–12, 2020.

[27] B. Stewart, "Conformally flat, anisotropic spheres in general relativity," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 15, no. 8, pp. 2419–2427, 1982.

[28] S. Maharaj and R. Maartens, "Anisotropic spheres with uniform energy density in general relativity," *Gen. Relativ. Gravitation*, vol. 21, no. 9, pp. 899–905, 1989.

[29] H. Bondi, "Anisotropic spheres in general relativity," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 259, no. 2, pp. 365–368, 1992.

[30] R. Chan, L. Herrera, and N. Santos, "Dynamical instability for radiating anisotropic collapse," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 265, no. 3, pp. 533–544, 1993.

[31] M. Gokhroo and A. Mehra, "Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity," *Gen. Relativ. Gravitation*, vol. 26, no. 1, pp. 75–84, 1994.

[32] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ospino, and E. Fuenmayor, "Conformally flat anisotropic spheres in general relativity," *J. Math. Phys.*, vol. 42, no. 5, pp. 2129–2143, 2001.

[33] H. Abreu, H. Hernández, and L. Núñez, "Sound speeds, cracking and the stability of self-gravitating anisotropic compact objects," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 24, no. 18, p. 4631, 2007.

[34] L. Herrera, J. Martin, and J. Ospino, "Anisotropic geodesic fluid spheres in general relativity," *J. Math. Phys.*, vol. 43, no. 10, pp. 4889–4897, 2002.

[35] L. Herrera and W. Barreto, "General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications," *Phys. Rev. D*, vol. 88, no. 8, p. 084022, 2013.

[36] D. Horvat, S. Ilijić, and A. Marunović, "Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state," *Classical Quantum Gravity*, vol. 28, no. 2, p. 025009, 2010.

[37] J. B. Hartle, "Gravity: an introduction to einstein's general relativity," 2003.

[38] H. Hernández, L. A. Núñez, and A. Vásquez-Ramírez, "Convection and cracking stability of spheres in general relativity," *Eur. Phys. J. C*, vol. 78, no. 11, p. 883, 2018.

[39] H. A. Buchdahl, "General relativistic fluid spheres," *Phys. Rev.*, vol. 116, no. 4, p. 1027, 1959.

[40] C. A. Kolassis, N. O. Santos, and D. Tsoubelis, "Energy conditions for an imperfect fluid," *Classical Quantum Gravity*, vol. 5, no. 10, p. 1329, 1988.

[41] O. M. Pimentel, F. D. Lora-Clavijo, and G. A. González, "Ideal magnetohydrodynamics with radiative terms: energy conditions," *Classical Quantum Gravity*, vol. 34, no. 7, p. 075008, 2017.

[42] B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler, "Gravitation theory and gravitational collapse," *University of Chicago Press, Chicago*, 1965.

[43] Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov, *Relativistic astrophysics. Vol.1: Stars and relativity*. University of Chicago Press, 1971.

[44] L. Herrera, "Cracking of self-gravitating compact objects," *Phys. Lett. A*, vol. 165, no. 3, pp. 206–210, 1992.

[45] A. Di Prisco, E. Fuenmayor, L. Herrera, and V. Varela, “Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects,” *Phys. Lett. A*, vol. 195, no. 1, pp. 23–26, 1994.

[46] A. Di Prisco, L. Herrera, and V. Varela, “Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy,” *Gen. Relativ. Gravitation*, vol. 29, no. 10, pp. 1239–1256, 1997.

[47] G. González, A. Navarro, and L. A. Núñez, “Cracking of anisotropic spheres in general relativity revisited,” in *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 600, p. 012014, IOP Publishing, 2015.

[48] H. Bondi, “Massive spheres in general relativity,” *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 282, no. 1390, pp. 303–317, 1964.

[49] K. S. Thorne, “Validity in general relativity of the schwarzschild criterion for convection,” *Astrophys. J.*, vol. 144, p. 201, 1966.

[50] A. Kovetz, “Schwarzschild’s criterion for convective instability in general relativity,” *Zeitschrift fur Astrophysik*, vol. 66, p. 446, 1967.

[51] J. B. Hartle and K. S. Thorne, “Slowly rotating relativistic stars. III. static criterion for stability,” *Astrophys. J.*, vol. 158, p. 719, 1969.

[52] J. B. Hartle, “Slowly rotating relativistic stars. IIIA. The static stability criterion recovered,” *Astrophys. J.*, vol. 195, pp. 203–212, 1975.

[53] J. L. Friedman, J. R. Ipser, and R. D. Sorkin, “Turning-point method for axisymmetric stability of rotating relativistic stars,” *Astrophys. J.*, vol. 325, pp. 722–724, 1988.

[54] J. L. Friedman and N. Stergioulas, *Rotating relativistic stars*. Cambridge University Press, 2013.

[55] L. Herrera and V. Varela, “Transverse cracking of self-gravitating bodies induced by axially symmetric perturbations,” *Phys. Lett. A*, vol. 226, no. 3-4, pp. 143–149, 1997.

[56] T. E. Riley, A. L. Watts, *et al.*, “A NICER view of the massive pulsar PSR J0740+6620 informed by radio timing and XMM-Newton spectroscopy,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 918, no. 2, p. L27, 2021.

[57] E. Poisson and C. M. Will, *Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic*. Cambridge University Press, 2014.

[58] B. Biswas and S. Bose, “Tidal deformability of an anisotropic compact star: Implications of gw170817,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 10, p. 104002, 2019.

[59] A. Rahmansyah and A. Sulaksono, “Recent multimessenger constraints and the anisotropic neutron star,” *Phys. Rev. C*, vol. 104, no. 6, p. 065805, 2021.

[60] K. Yagi and N. Yunes, "I-love-q anisotropically: Universal relations for compact stars with scalar pressure anisotropy," *Phys. Rev. D*, vol. 91, no. 12, p. 123008, 2015.

[61] B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, *et al.*, "Properties of the binary neutron star merger GW170817," *Phys. Rev. X*, vol. 9, no. 1, p. 011001, 2019.