Título presentación

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

9 de noviembre de 2024

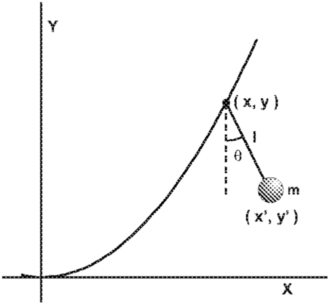
Agenda

1. Hamiltoniano y Péndulo
   - El problema y las coordenadas
   - El Lagrangeano y el Hamiltoniano

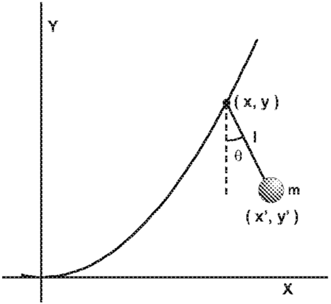
2. $\mathcal{H} = q + te^p$ y la transformación $Q = q + e^p, P = p$

Hamiltoniano y Péndulo

El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y', El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y',
- Se tiene las siguientes relaciones:
  $x' = x + l \,\mathrm{sen}\, \theta, \quad y' = y - l\cos\theta = ax^2 - l\cos\theta$
  $\dot{x}' = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{y}' = \dot{y} + l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = 2ax\dot{x} + l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 \right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta + 4axl \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \right)$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 \right) \Rightarrow$
$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l \dot{x}\dot{\theta} \cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg \left(ax^2 - l \cos\theta \right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \left(1 + 4a^2 x^2 \right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax \operatorname{sen}\theta)$
$p_\theta = ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax \operatorname{sen}\theta)$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m}\frac{1}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\frac{1 + 4a^2x^2}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m}\frac{1}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\frac{1 + 4a^2x^2}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
- Con lo cual $\mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - L$ se puede expresar
  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m}\frac{1}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2ml^2}\frac{1 + 4a^2x^2}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0$;
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$; y finalmente

$\mathcal{H} = q + te^p$ y $Q = q + e^p$ & $P = p$ 1/2

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0$;
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$; y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = e^p$, $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$, y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1$, obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1$.

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$; y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = e^p$, $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$, y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1$, obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1$.
- Por lo tanto, como la tranformación cumple con $\{Q, Q\} = 0, \quad \{P, P\} = 0, \quad$ y $\quad \{Q, P\} = 1$. **Es canónica**

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

$\mathcal{H} = q + te^p$ y $Q = q + e^p$ & $P = p\ 2/2$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$, $F_2(q, P) = qP + \int e^P\, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$,
  $F_2(q, P) = qP + \int e^P\, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$
- La función generadora es $F_2(q, P) = qP + e^P$