Cuerpo Rígido:
Energía cinética, momento de inercia, cantidad de movimiento angular y ecuaciones de movimiento

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

28 de abril de 2025

Agenda

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_{j}^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots$, donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\mathrm{cm}}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$
- El primer término es $\frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right) v_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2$.

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$
- El primer término es $\frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right) v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2} M v_{\rm cm}^2$.
- El segundo término se simplifica usando $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Entonces $\sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \cdot \left(\mathbf{v}_{\rm cm} \times \mathbf{\Omega}\right) =$
$= \left(\mathbf{v}_{\rm cm} \times \mathbf{\Omega}\right) \cdot \cancelto{0}{\left(\sum_j m_j \mathbf{r}_j\right)} = 0$, ya que $\mathbf{R}_{\rm cm} = \frac{\sum_j m_j \mathbf{r}_j}{M} = 0$

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$

El Tensor de Inercia

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 \right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$

El Tensor de Inercia

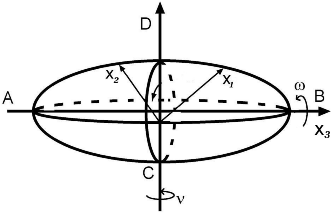
- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$

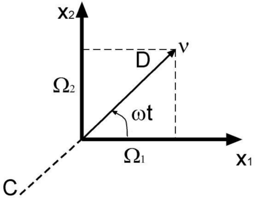
- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$
- La energía cinética será $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k}\left(\Omega_i\Omega_k r_j^2\delta_{ik} - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right)$, o mejor $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\sum_j m_j\left(r_j^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k x_{i\,j} x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k \delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k \delta_{ik} = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}$
- La energía cinética será $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k} \left(\Omega_i \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\right)$, o mejor $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$
- Donde

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum_j m_j \left(x_2^2 + x_3^2\right) & -\sum_j m_j x_1 x_2 & -\sum_j m_j x_1 x_3 \\ -\sum_j m_j x_2 x_1 & \sum_j m_j \left(x_1^2 + x_3^2\right) & -\sum_j m_j x_2 x_3 \\ -\sum_j m_j x_3 x_1 & -\sum_j m_j x_3 x_2 & \sum_j m_j \left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{pmatrix}$$

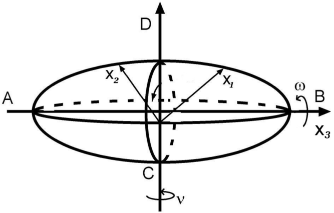
- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,

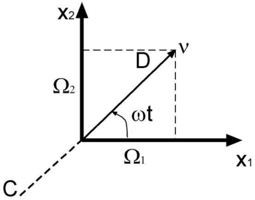




Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

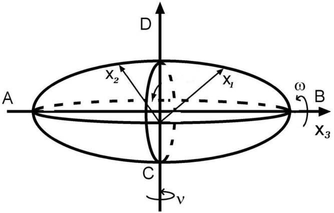
- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,

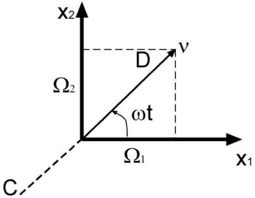




- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,



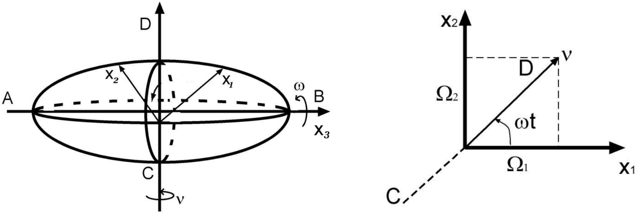


- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).
- Las componentes $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ son

$$\tilde{\Omega}_1 = \nu \cos \omega t, \quad \tilde{\Omega}_2 = \nu \operatorname{sen} \omega t \text{ y} \quad \tilde{\Omega}_3 = \omega,$$

Elipsoide en rotación

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,



- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).
- Las componentes $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ son

  $$\tilde{\Omega}_1 = \nu \cos \omega t, \quad \tilde{\Omega}_2 = \nu \operatorname{sen} \omega t \text{ y } \quad \tilde{\Omega}_3 = \omega,$$

- Finalmente $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} \tilde{\Omega}_1^2 + \frac{1}{2} I_{22} \tilde{\Omega}_2^2 + \frac{1}{2} I_{33} \tilde{\Omega}_3^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} \left(I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \operatorname{sen}^2 \omega t\right) \nu^2 + \frac{1}{2} I_{33} \omega^2$

Cantidad de movimiento angular

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.

Cantidad de movimiento angular

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.

Cantidad de movimiento angular

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j \left(\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j\right)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j^N m_j \mathbf{r}_j \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) \equiv \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - \left(\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}\right) \mathbf{r}_j\right]$. Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

Cantidad de movimiento angular

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j \left(\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j\right)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j^N m_j \mathbf{r}_j \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) \equiv \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - \left(\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}\right) \mathbf{r}_j\right]$. Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
$L_i = \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k^3 x_{kj} \Omega_k\right]$
$L_i = \sum_j^N m_j \left[\sum_k^3 \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k^3 x_{ij} x_{kj} \Omega_k\right]$
$L_i = \sum_j^N m_j \sum_k^3 \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj}\right] = \sum_k^3 \Omega_k \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj}\right]$

Cantidad de movimiento angular

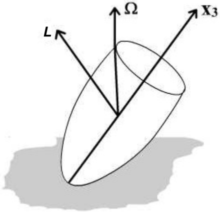
- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j \left(\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j\right)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j^N m_j \mathbf{r}_j \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) \equiv \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - \left(\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}\right) \mathbf{r}_j\right]$. Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
$$L_i = \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k^3 x_{kj} \Omega_k\right]$$
$$L_i = \sum_j^N m_j \left[\sum_k^3 \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k^3 x_{ij} x_{kj} \Omega_k\right]$$
$$L_i = \sum_j^N m_j \sum_k^3 \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj}\right] = \sum_k^3 \Omega_k \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj}\right]$$
- Finalmente $L_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \Omega_k \Leftrightarrow \mathbf{L} = I \boldsymbol{\Omega}$ ya que el tensor de inercia es $I_{ik} = \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj}\right]$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\mathbf{\Omega}$

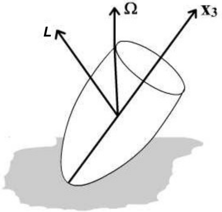
$\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



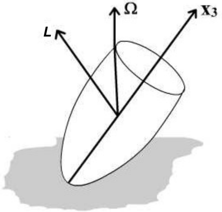
- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



- Si el vector $\boldsymbol{\Omega}$ posee solamente una componente sobre un eje x_k, tenemos $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,\hat{\mathbf{x}}_k$ y por lo tanto $\mathbf{L} = I_{kk}\Omega\,\hat{\mathbf{x}}_k$.

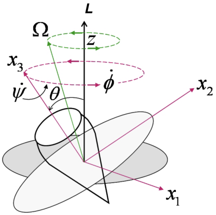
L y Ω

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



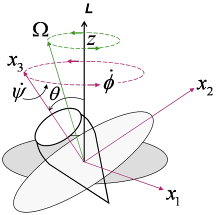
- Si el vector $\boldsymbol{\Omega}$ posee solamente una componente sobre un eje x_k, tenemos $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,\hat{\mathbf{x}}_k$ y por lo tanto $\mathbf{L} = I_{kk}\Omega\,\hat{\mathbf{x}}_k$.
- Para cuerpos esféricos, $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, y $\mathbf{L} = I_{11}\boldsymbol{\Omega}$: $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



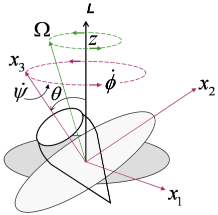
Rotación libre, mas general, de un trompo 1/2

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



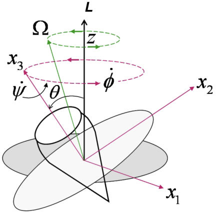
- Tal y como se muestra en la figura $\mathbf{L}$ y $\mathbf{\Omega}$ no están alineados.

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



- Tal y como se muestra en la figura $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ no están alineados.
- Como no existen torques externos $\mathbf{L} = cte$ y elegimos el eje z del sistema laboratorio tal que $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{z}}$

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



- Tal y como se muestra en la figura **L** y **Ω** no están alineados.
- Como no existen torques externos $\mathbf{L} = cte$ y elegimos el eje z del sistema laboratorio tal que $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{z}}$
- Como el cuerpo tiene simetría axial no la velocidad angular no puede depender de ψ. Entonces $\mathbf{\Omega}$ en el sistema CM: $\begin{cases} \tilde{\Omega}_1 = \dot{\theta} \\ \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \\ \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{cases}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \theta = \mathrm{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \mathrm{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{II_{33}} = \mathrm{cte}$$

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \mathrm{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \qquad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{I I_{33}} = \mathrm{cte}$$

- La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ son $\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\theta} = 0 \\ \Omega_2 = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_{11}} = \mathrm{cte} \\ \Omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_{33}} = \mathrm{cte} \end{cases}$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \text{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \text{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{II_{33}} = \text{cte}$$

- La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ son $\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\theta} = 0 \\ \Omega_2 = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_{11}} = \text{cte} \\ \Omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_{33}} = \text{cte} \end{cases}$
- El vector $\boldsymbol{\Omega}$ está sobre el plano $x_2 - x_3$.

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad\qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \mathrm{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{I I_{33}} = \mathrm{cte}$$

- La velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ son $\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\theta} = 0 \\ \Omega_2 = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_{11}} = \mathrm{cte} \\ \Omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_{33}} = \mathrm{cte} \end{cases}$
- El vector $\mathbf{\Omega}$ está sobre el plano $x_2 - x_3$.
- Como el plano $x_2 - x_3$ rota alrededor de z, entonces $\mathbf{\Omega}$ también precesa alrededor de la dirección de $\mathbf{L}$ con velocidad angular $\dot{\phi} = $ cte.

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$

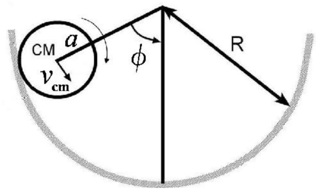
Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

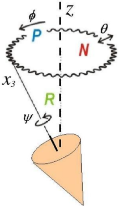
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

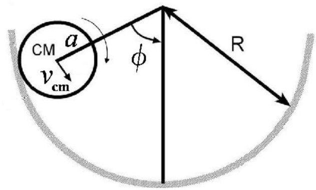
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas
- Los casos más simples son los que presentan simetrías: axial (trompos) o esférica

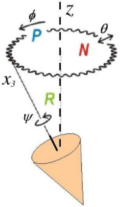
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.





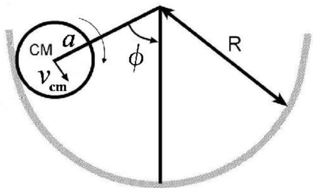
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

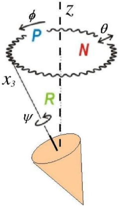




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.

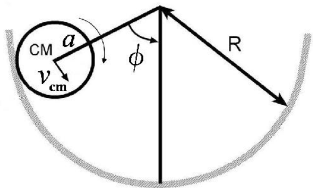
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

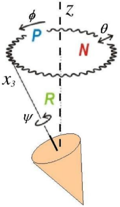




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.

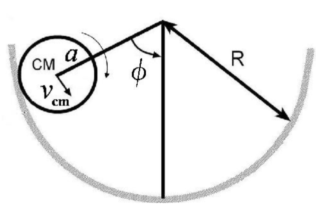
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

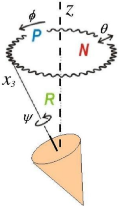




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.

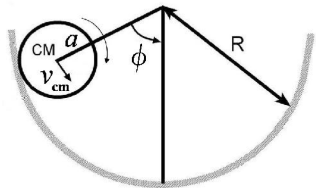
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

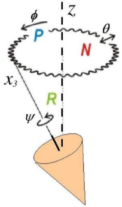




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$.

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

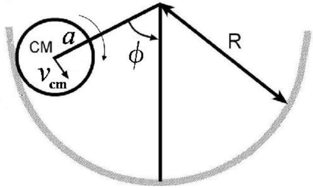


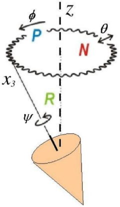


- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\rm cm} + T_{\rm rot}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\rm cm} = \frac{1}{2}Mv_{\rm cm}^2$, con $v_{\rm cm} = (R - a)\dot{\phi}$

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.





- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2$, con $v_{\mathrm{cm}} = (R - a)\dot{\phi}$
- La energía cinética de rotación es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I_{33} \Omega_3^2$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$.

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\operatorname{sen}\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\operatorname{sen}\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.
- La ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple con frecuencia $\omega^2 = \frac{2g}{3(R-a)}$.

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{I} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_i I^i_k \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j} x_{k,j} \right)$

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j}x_{k,j}\right)$
- **Velocidad angular:** $\mathbf{\Omega}(t) = (\nu\cos\omega t, \nu\sin\omega t, \omega)$

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j} x_{k,j} \right)$
- **Velocidad angular:** $\mathbf{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega}$

Recapitulando 1/2

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j}x_{k,j}\right)$
- **Velocidad angular:** $\mathbf{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega}$
- En general $\mathbf{L} \nparallel \mathbf{\Omega}$. Sólo para cuerpos esféricos o con $\mathbf{\Omega}$ en eje principal, ocurre $\mathbf{L} \parallel \mathbf{\Omega}$.
- **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2}(I_{11}\cos^2 \omega t + I_{22}\sin^2 \omega t)\nu^2 + \frac{1}{2}I_{33}\omega^2$

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{I} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j} x_{k,j} \right)$
- **Velocidad angular:** $\boldsymbol{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I} \boldsymbol{\Omega}$
- En general $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\Omega}$. Sólo para cuerpos esféricos o con $\boldsymbol{\Omega}$ en eje principal, ocurre $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\Omega}$.
- **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2}(I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \sin^2 \omega t) \nu^2 + \frac{1}{2} I_{33} \omega^2$
- **Elipsoide en rotación:** precesión de los ejes principales del elipsoide.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

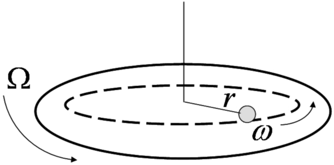
En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2\delta_{ik} - x_{i,j}x_{k,j}\right)$
- **Velocidad angular:** $\boldsymbol{\Omega}(t) = (\nu\cos\omega t, \nu\sin\omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega}$
- En general $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\Omega}$. Sólo para cuerpos esféricos o con $\boldsymbol{\Omega}$ en eje principal, ocurre $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\Omega}$.
- **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2}(I_{11}\cos^2\omega t + I_{22}\sin^2\omega t)\nu^2 + \frac{1}{2}I_{33}\omega^2$
- **Elipsoide en rotación:** precesión de los ejes principales del elipsoide.
- **Ecuaciones de Movimiento**
  - Se plantean con ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ).
  - Lagrangiano: $\mathcal{L} = T(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}) - V(\theta, \phi, \psi)$
  - Casos con simetría (esfera o trompo) permiten reducción del sistema.

Ejemplo: Cilindro Rodante

- **Sistema:** Cilindro de masa M, radio a, en cavidad de radio $R > a$
- **Condiciones:** $v_{cm} = (R - a)\dot{\varphi}, \quad \Omega_3 = \frac{v_{cm}}{a}, \quad I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$
- **Energías:** $T = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\varphi}^2 \quad V = -Mg(R-a)\cos\varphi \quad \mathcal{L} = T - V$
- **Ecuación de movimiento:** $\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-a)}\varphi = 0$, que es un oscilador armónico simple con $\omega^2 = \frac{2g}{3(R-a)}$.

Para la discusión



Considere una esfera de radio a, masa M y momento de inercia $\boldsymbol{I}$ respecto de un diámetro cualquiera que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.

- Escriba la condición de rodadura sin deslizamiento suponiendo que el plano horizontal está fijo.
- Demuestre que el centro de masas se mueve en línea recta y a velocidad constante.
- Escriba la condición de rodadura sin deslizamiento suponiendo que el plano horizontal rota con una velocidad angular Ω constante alrededor del eje z tal y como muestra la figura.