

Polos, cortes y transformaciones conformes

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



5 de agosto de 2021

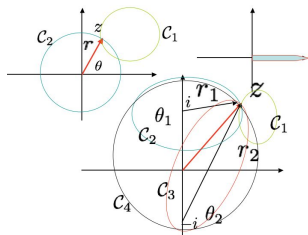
- 1 Funciones univaluadas
- 2 Ramificación de corte
- 3 Singularidades y ceros
- 4 Transformaciones conformes
- 5 Recapitulando
- 6 Para la discusión

- Si $w = f(z)$ donde $z = r \exp(i\theta) = r \exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces
 $w = \text{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$
 $w = \text{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.

- Si $w = f(z)$ donde $z = r \exp(i\theta) = r \exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces $w = \text{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$
 $w = \text{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.
- $w = \sqrt{z} \Rightarrow w = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces
 $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$ será función para $n = 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$
Para $n = 1$ entonces $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$

- Si $w = f(z)$ donde $z = r \exp(i\theta) = r \exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces
 $w = \text{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$
 $w = \text{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.
- $w = \sqrt{z} \Rightarrow w = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces
 $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$ será función para $n = 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$
Para $n = 1$ entonces $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})}$
 $f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

- Si $w = f(z)$ donde $z = r \exp(i\theta) = r \exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces $w = \text{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$
 $w = \text{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.
- $w = \sqrt{z} \Rightarrow w = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces
 $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$ será función para $n = 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 Para $n = 1$ entonces $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})}$
 $f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$
- Entonces



- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas.
La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,

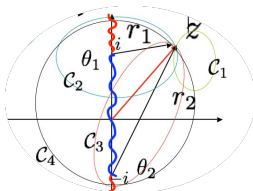
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* se conoce como *punto de ramificación*. Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* se conoce como *punto de ramificación*. Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$
- El dominio de una función $f(z) = \sqrt{z}$ son el conjunto de valores que puede tomar z

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* se conoce como *punto de ramificación*. Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$
- El dominio de una función $f(z) = \sqrt{z}$ son el conjunto de valores que puede tomar z
- Si esos valores “siguen” una curva cerrada e incluyen un *punto de ramificación*, esa función no será analítica.

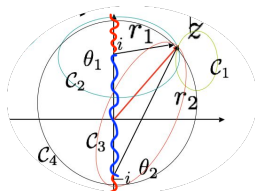
Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$

- Contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces:
 $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el \mathcal{C}_1 .



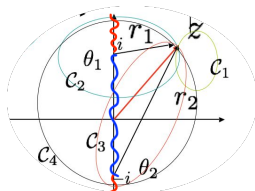
Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$

- Contorno C_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces:
 $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el C_1 .
- Contorno C_2 incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces:
 $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.



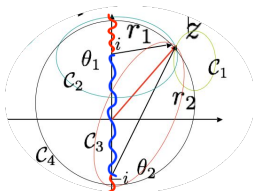
Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$

- Contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces:
 $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el \mathcal{C}_1 .
- Contorno \mathcal{C}_2 incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces:
 $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_3 incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces:
 $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.



Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$

- Contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el \mathcal{C}_1 .
- Contorno \mathcal{C}_2 incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_3 incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_4 incluye ambos como punto de ramificación, $z = i$ y $z = -i$, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow f(z)$ retoma su valor.



- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aislada.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \exists$.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \exists$.
- Un **polo de orden n** es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \nexists$, para ningún n .

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \exists$.
- Un **polo de orden n** es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \nexists$, para ningún n .
- Los **ceros de una función compleja**, $f(z_0) = 0$, se clasifican igual que los polos $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con n entero positivo y $g(z) \neq 0 \quad \forall z$.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0 .

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0 .
- Si z_0 es una **singularidad removable** entonces encontramos que $f(z) \rightarrow 0/0$ cuando $z \rightarrow z_0$, por ejemplo: $f(z) = \frac{\text{sen}(z)}{z} \Rightarrow$
$$f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots \right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \cdots \right) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$$

- Las transformaciones entre planos complejos, son:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow$$
$$z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$$

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
$$z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow$$
$$z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
$$z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow$$
$$z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
$$z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow$$
$$z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.
- Para todo punto z y w (excepto en aquellos en los cuales $g'(z)$ y por lo tanto $h'(w)$ son cero o infinita) **transformaciones conformes** cumplen con:
 - Curvas continuas en z transforman en curvas continuas en w .
 - Cualquier función analítica en $z = x + iy$ transforma en otra función $w = r + is$ también analítica.
 - Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre las curvas que se interceptan.
 - El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.

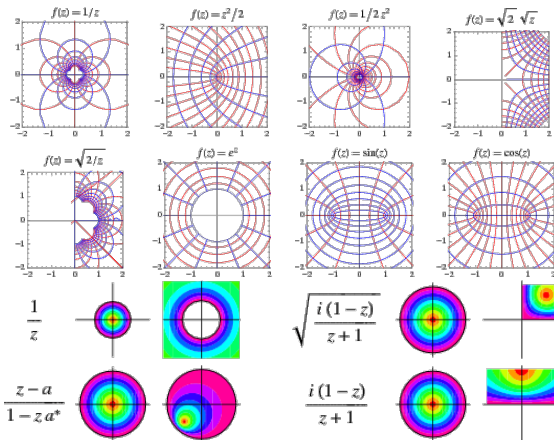


Figura: Transformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping.** *MathWorld—A Wolfram Web Resource.*

<http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo θ** $w = ze^{i\theta}$;
expansiones de escala a : $w = az$

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo θ** $w = ze^{i\theta}$;
expansiones de escala a : $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right|\exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo θ** $w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala a :** $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano. Para convencernos de ello notamos que
 $|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|.$

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo θ** $w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a : $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z| \exp(i\phi)} = \left| \frac{1}{z} \right| \exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano. Para convencernos de ello notamos que
 $|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior ($y \geq 0$), entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo θ** $w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a : $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z| \exp(i\phi)} = \left| \frac{1}{z} \right| \exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano. Para convencernos de ello notamos que
 $|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior ($y \geq 0$), entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.
- La igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$.

En presentación consideramos

1

- 1 Determine el tipo de singularidades (en caso de poseerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$

1

$$f(z) = \frac{1}{z - 2}$$

2

$$f(z) = \frac{1 + z^3}{z^2}$$

3

$$f(z) = \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$$

- 1 Determine el tipo de singularidades (en caso de poseerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$

1

$$f(z) = \frac{1}{z - 2}$$

2

$$f(z) = \frac{1 + z^3}{z^2}$$

3

$$f(z) = \sinh\left(\frac{1}{z}\right)$$

- 2 Identifique los ceros, polos y las singularidades esenciales de las siguientes funciones:

1

$$f(z) = \frac{z - 2}{z^2} \sin\left(\frac{1}{1 - z}\right)$$

2

$$f(z) = e^{1/z}$$

3