Simetrías y Cantidades Conservadas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

19 de febrero de 2025

Agenda

1. Variables conjugadas y cíclicas
   - Ejemplo: Partícula cono invertido
   - Ejemplo: Partícula en medio viscoso
2. Teorema de Noether
   - Transformaciones contínuas
   - Ejemplo: Coordenada cíclica
   - Ejemplo: Partícula en campo gravitatorio
3. Homogeneidad del espacio y conservación del momento lineal
4. Isotropía del espacio y conservación del momento angular
   - Ejemplo: Oscilador armónico bidimensional
5. Homogeneidad del tiempo y conservación de la energía
6. Recapitulando

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener $\dot{q}_i$ y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.

Variables conjugadas y cíclicas

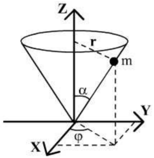
- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener $\dot{q}_i$ y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada cíclica, q_i, es constante. Luego, la cantidad $p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener $\dot{q}_i$ y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada cíclica, q_i, es constante. Luego, la cantidad $p_i\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.
- Si una coordenada q_i es cíclica, entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, y la ecuación de Lagrange para esa coordenada cíclica q_i es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow p_i = \text{ cte.}$

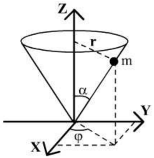
Partícula sobre un cono invertido

- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



Partícula sobre un cono invertido

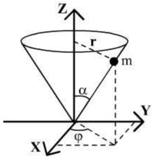
- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$

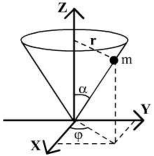
Partícula sobre un cono invertido

- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_φ asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{ cte }.$

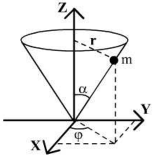
- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_φ asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{ cte}$.
- El momento angular de la partícula, $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v} = m\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$

Partícula sobre un cono invertido

- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica

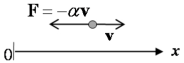


- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_φ asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{ cte }$.
- El momento angular de la partícula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$
- La componente z es $\mathcal{L}_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2 \dot{\varphi} \equiv p_\varphi = \mathrm{cte}$,

  ya que $\begin{array}{ll} x = r \cos \varphi, & \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \\ y = r \operatorname{sen} \varphi, & \dot{y} = \dot{r} \operatorname{sen} \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{array}$

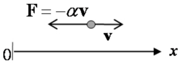
Partícula en medio viscoso

- Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α.



Partícula en medio viscoso

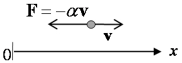
- Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α.



- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$

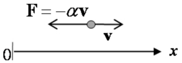
Partícula en medio viscoso

- Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α.



- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.

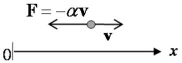
- Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α.



- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m} t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} e^{\frac{\alpha}{m} t} = \text{ cte } = m v_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m} t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = m v_x(t)$, que no es constante.

Partícula en medio viscoso

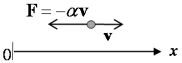
- Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α.



- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posición es $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha}\left(1 - e^{-(\alpha/m)t}\right)$

Partícula en medio viscoso

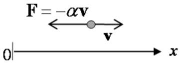
- Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α.



- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posición es $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha}\left(1 - e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuación de movimiento, $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$

Partícula en medio viscoso

- Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α.



- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posición es $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha}\left(1 - e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuación de movimiento, $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$
- Que es la Segunda Ley de Newton para la componente x de la fuerza $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}$ ejercida por el fluido sobre la Partícula.

Teorema de Noether

- Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.

- Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformación infinitesimal representa una simetría del sistema, **una simetría de la acción** y se dice que **la acción es invariante bajo esa transformación**.

- Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformación infinitesimal representa una simetría del sistema, **una simetría de la acción** y se dice que **la acción es invariante bajo esa transformación**.
- **Teorema de Noether en mecánica Clásica**
  - Si la acción de un sistema es invariante bajo una transformación infinitesimal de coordenadas $q_j' = q_j + \delta q_j$ que cambia el Lagrangiano a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, tal que $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f(q_j,t)}{\mathrm{d}t}$ para alguna función $f(q_j, t)$.
  - Entonces el Lagrangiano (y el sistema) $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ posee una simetría y la función $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j - f$ constituye una cantidad conservada asociada a esa transformación.
  - La cantidad $\mathcal{J}$ se denomina corriente de Noether.

- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$

- La transformación $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)$

Demostración del Teorema de Noether

- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$.

Demostración del Teorema de Noether

- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a
$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f\right) = 0 \Rightarrow$
$\mathcal{J}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = \text{ cte.}$

Demostración del Teorema de Noether

- La transformación $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f(q_j, t)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d}f(q_j, t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f\right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f =$ cte.
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada

Demostración del Teorema de Noether

- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f(q_j, t)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \frac{\mathrm{d}f(q_j, t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f =$ cte.
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetrías y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.

Demostración del Teorema de Noether

- La transformación $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f\right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f =$ cte.
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetrías y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.
- Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales de segundo orden para las q_j, mientras que las cantidades conservadas $\mathcal{J}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = cte$, son ecuaciones diferenciales de primer orden

Transformaciones contínuas

- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$ con $s \in \mathbb{R}$, donde $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$.

Transformaciones contínuas

- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$ con $s \in \mathbb{R}$, donde $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$.
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano $\mathcal{L}$ si $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t), \dot{q}^i(s,t), t) = 0$ y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.

Transformaciones contínuas

- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$ con $s \in \mathbb{R}$, donde $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$.
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano $\mathcal{L}$ si $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t), \dot{q}^i(s,t), t) = 0$ y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$
  $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)\left.\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s}\right|_{s=0}$
  $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0}\right) \Rightarrow Q = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} = cte$, que es la cantidad conservada

Transformaciones contínuas

- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$ con $s \in \mathbb{R}$, donde $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$.
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano $\mathcal{L}$ si $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t), \dot{q}^i(s,t), t) = 0$ y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$
  $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)\left.\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s}\right|_{s=0}$
  $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0}\right) \Rightarrow Q = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} = cte$, que es la cantidad conservada
- El teorema de Noether es válido **necesariamente** parametrizadas por un parámetro $s \in \mathbb{R}$

- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$ con $s \in \mathbb{R}$, donde $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$.
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano $\mathcal{L}$ si $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t), \dot{q}^i(s,t), t) = 0$ y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Rightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$
  $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)\left.\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s}\right|_{s=0}$
  $\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0}\right) \Rightarrow Q = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial q^i}{\partial s}\right|_{s=0} = cte$, que es la cantidad conservada
- El teorema de Noether es válido **necesariamente** parametrizadas por un parámetro $s \in \mathbb{R}$
- Muchas teorías son invariantes bajo reflexión, también conocida como paridad, que actúa como $\mathbf{r}_i \to -\mathbf{r}_i$. Este tipo de simetrías no dan lugar a leyes de conservación en física clásica (aunque sí en física cuántica).

Coordenada cíclica

- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$.

Coordenada cíclica

- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$.
- La transformación de coordenadas $q'_i = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \text{cte}$, y $q'_j = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$

Coordenada cíclica

- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$.
- La transformación de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \mathrm{cte}$, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta\mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la función f surge de $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$

Coordenada cíclica

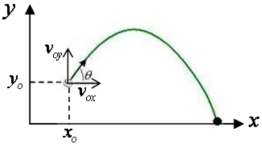
- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$.
- La transformación de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \text{cte}$, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la función f surge de $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada $\mathcal{J}$ es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - c = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{ cte}.$

Coordenada cíclica

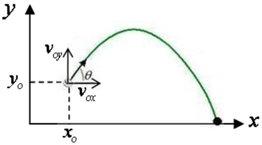
- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$.
- La transformación de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \text{cte}$, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta\mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la función f surge de $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada $\mathcal{J}$ es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - f = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - c = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{ cte}.$
- El momento conjugado p_i asociado a q_i es constante.

Partícula en campo gravitatorio

- Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$

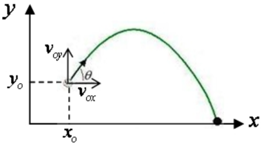


- Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



- El cambio en $\mathcal{L}$ bajo la transformación de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\underbrace{\delta\dot{y}}_{=0} \equiv -mg\delta y$

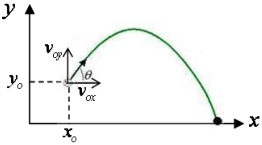
- Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



- El cambio en $\mathcal{L}$ bajo la transformación de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\underbrace{\delta\dot{y}}_{=0} \equiv -mg\delta y$
- Con lo cual $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow \quad f = -mg\, t\, \delta y$

Partícula en campo gravitatorio

- Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$

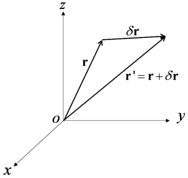


- El cambio en $\mathcal{L}$ bajo la transformación de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\underbrace{\delta\dot{y}}_{=0} \equiv -mg\delta y$
- Con lo cual $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow \quad f = -mg\,t\,\delta y$
- Con la cantidad conservada
$\mathcal{J} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\delta y - f = \mathrm{cte} \Rightarrow m\dot{y}\delta y + mgt\delta y = \mathrm{cte} \Rightarrow \dot{y} + gt = \mathrm{cte}$

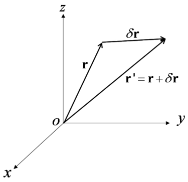
Conservación del momento lineal 1/2

- Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t)$.

- Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.

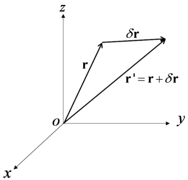


- Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.



- Supongamos la transformación de coordenadas $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$, donde $\delta\mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes δx_j son constantes; i. e., $\delta\dot{\mathbf{r}} = 0$.

- Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.



- Supongamos la transformación de coordenadas $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$, donde $\delta\mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes δx_j son constantes; i. e., $\delta\dot{\mathbf{r}} = 0$.
- Homogeneidad del espacio implica que la transformación infinitesimal no produce cambios en el Lagrangiano del sistema, $\delta\mathcal{L} = 0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ implica que f es constante.

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$

Conservación del momento lineal 2/2

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$

Conservación del momento lineal 2/2

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$

Conservación del momento lineal 2/2

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \text{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \text{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.

Conservación del momento lineal 2/2

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$

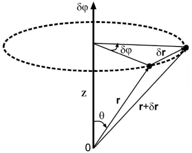
- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$
- El momento lineal de una partícula es $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$

Conservación del momento lineal 2/2

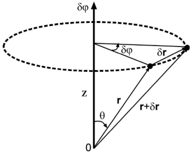
- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$
- El momento lineal de una partícula es $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$
- En un sistema donde existe simetría translacional en una dirección espacial, la componente del momento lineal total del sistema en esa dirección se conserva.

Conservación del momento angular 1/2

- Consideremos una partícula en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a O y una rotación infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.

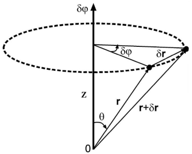


- Consideremos una partícula en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a O y una rotación infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.

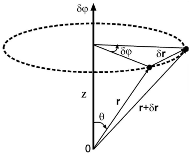
- Consideremos una partícula en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a O y una rotación infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la Partícula transformado por la rotación infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$

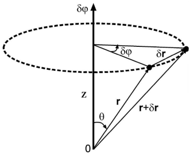
Conservación del momento angular 1/2

- Consideremos una partícula en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a O y una rotación infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la Partícula transformado por la rotación infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$
- Sonde $\delta\mathbf{r}$ tiene dirección perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta\varphi)$ y magnitud $\delta r = r \operatorname{sen}\theta\delta\varphi$, con θ es el ángulo entre $\delta\varphi$ y r. Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r}$

- Consideremos una partícula en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a O y una rotación infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la Partícula transformado por la rotación infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$
- Sonde $\delta\mathbf{r}$ tiene dirección perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta\varphi)$ y magnitud $\delta r = r \operatorname{sen}\theta\delta\varphi$, con θ es el ángulo entre $\delta\varphi$ y r. Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r}$
- Consideremos a continuación un sistema de N Partículas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha, \alpha = 1, \ldots, N$, sujeto a una rotación infinitesimal $\delta\varphi$

Conservación del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posición de la Partícula α es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.

Conservación del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posición de la Partícula α es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte

Conservación del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posición de la Partícula α es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} - f =$ cte $\Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} =$ cte $\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_\alpha =$ cte.

- El cambio en el vector de posición de la Partícula α es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} - f = \text{ cte } \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha = \text{ cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_\alpha \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$

- El cambio en el vector de posición de la Partícula α es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} - f =$ cte $\Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} =$ cte $\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_\alpha =$ cte.
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_\alpha\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha) = \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$
- Donde $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El cambio en el vector de posición de la Partícula α es $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} - f = \text{ cte } \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_\alpha = \text{ cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi\times\mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{p}_\alpha\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N}\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha) = \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$
- Donde $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.
- Como $\delta\boldsymbol{\varphi}$ es constante, $\mathbf{L}_\mathrm{T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$. La cantidad vectorial $\mathbf{L}_\mathrm{T}$ es el momento angular total del sistema.

Conservación del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posición de la Partícula α es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} - f = \text{ cte } \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = \text{ cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_\alpha \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.
- Como $\delta \boldsymbol{\varphi}$ es constante, $\mathbf{L}_\mathrm{T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$. La cantidad vectorial $\mathbf{L}_\mathrm{T}$ es el momento angular total del sistema.
- Si un sistema posee simetría rotacional alrededor de un eje, se conserva la componente del momento angular en esa dirección.

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right)$

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variación de $\mathcal{L}$ bajo esta transformación infinitesimal es $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variación de $\mathcal{L}$ bajo esta transformación infinitesimal es $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condición $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \mathrm{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variación de $\mathcal{L}$ bajo esta transformación infinitesimal es $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condición $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \mathrm{cte}$

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \mathrm{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variación de $\mathcal{L}$ bajo esta transformación infinitesimal es $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condición $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \mathrm{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \mathrm{cte}$
- Como $\delta\varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} - y\dot{x}) \equiv L_z = \mathrm{cte}$

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variación de $\mathcal{L}$ bajo esta transformación infinitesimal es $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condición $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \mathrm{cte}$
- Como $\delta\varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} - y\dot{x}) \equiv L_z = \mathrm{cte}$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \ r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2} kr^2$ y la coordenada φ es cíclica, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$

Oscilador armónico bidimensional

- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \mathrm{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variación de $\mathcal{L}$ bajo esta transformación infinitesimal es $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condición $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \mathrm{cte}$
- Como $\delta\varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} - y\dot{x}) \equiv L_z = \mathrm{cte}$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \ r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}kr^2$ y la coordenada φ es cíclica, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$
- El momento conjugado $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \ \text{cte}$.

Conservación de la energía

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.

Conservación de la energía

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.

Conservación de la energía

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ es $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$

Conservación de la energía

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ es $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right)$,

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ es $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]$

Conservación de la energía

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t : $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ es $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right]$
- Con lo cual $\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}\right] = 0 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} =$ cte.

Conservación de la energía

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de t : $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ es $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right]$
- Con lo cual $\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}\right] = 0 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} =$ cte.
- La energía es la cantidad escalar $E\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}$

Recapitulando

En esta clase presentamos una introducción rigurosa al teorema de Noether y el papel de las simetrías en las leyes de conservación,

- **Momentos Conjugados y Coordenadas Cíclicas**
  - Definición del momento conjugado $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$.
  - Si una coordenada q_i no aparece explícitamente en el lagrangiano, cíclicas (o ignorables) el momento conjugado p_i se conserva.
  - Ejemplos:
    - Una partícula moviéndose sobre un cono invertido, donde el ángulo azimutal ϕ es cíclico. La cantidad de movimiento angular se conserva.
    - Una partícula en un medio viscoso, muestra cómo el momento conjugado a una coordenada cíclica puede diferir del momento físico.

Recapitulando

En esta clase presentamos una introducción rigurosa al teorema de Noether y el papel de las simetrías en las leyes de conservación,

- **Momentos Conjugados y Coordenadas Cíclicas**
  - Definición del momento conjugado $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$.
  - Si una coordenada q_i no aparece explícitamente en el lagrangiano, cíclicas (o ignorables) el momento conjugado p_i se conserva.
  - Ejemplos:
    - Una partícula moviéndose sobre un cono invertido, donde el ángulo azimutal ϕ es cíclico. La cantidad de movimiento angular se conserva.
    - Una partícula en un medio viscoso, muestra cómo el momento conjugado a una coordenada cíclica puede diferir del momento físico.
- **Teorema de Noether.** Para cada simetría continua de la acción, hay una cantidad conservada correspondiente
  - Coordenada cíclica $\rightarrow$ momento conservado.
  - Homogeneidad del espacio $\rightarrow$ conservación del momento lineal.
  - Invariancia rotacional $\rightarrow$ conservación del momento angular.
  - Homogeneidad del tiempo $\rightarrow$ conservación de la energía.