Dinámica Hamiltoniana

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

13 de mayo de 2025

Agenda

1. Entre Lagrange y Hamilton
   - La idea lagrangiana
   - La idea hamiltoniana
   - Velocidades generalizada y momentos conjugados
2. El esquema Hamiltoniano
   - Del lagrangeano al hamiltoniano
   - La transformación de Legendre
   - El oscilador armónico
   - Partícula moviéndose en cono vertical
   - Partícula en un potencial central
3. Simetrías y leyes de conservación
   - El Hamiltoniano y la Energía
   - Un ejemplo de la realción entre Hamiltoniano y la Energía total
4. Recapitulando
5. Para la discusión

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right), i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $\left(q_i, \dot{q}_i\right)$.

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right), i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$.
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right), i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$.
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las $2n$ condiciones iniciales: los valores de las coordenadas q_s y velocidades $\dot{q}_s$ para un instante particular t_0.

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right), i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$.
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las $2n$ condiciones iniciales: los valores de las coordenadas q_s y velocidades $\dot{q}_s$ para un instante particular t_0.
- El movimiento se representa geométricamente mediante una trayectoria en el espacio de configuración n-dimensional descrito por las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de $2n$ dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes q_i y p_i.

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de $2n$ dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes q_i y p_i.
- La importancia del formalismo hamiltoniano radica en que proporciona un método potente, general y flexible para la investigación de elemento estructurales más profundos de la mecánica clásica. Por ello sirve de fundamento a la mecánica cuántica y a la mecánica estadística.

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i$, $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.

Velocidades generalizada y momentos conjugados

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i$, $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las q_i y s_i de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.

Velocidades generalizada y momentos conjugados

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i$, $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las q_i y s_i de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.
- Bajar el orden del sistema de ecuaciones dinámicas, se consigue describiendo la evolución del sistema mediante $2n$, cantidades: las posiciones $q_1, \ldots, q_n$ y los momentos conjugados $p_1, \ldots, p_n$, definidos por $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n$.

Del lagrangeano al hamiltoniano

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.

Del lagrangeano al hamiltoniano

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.

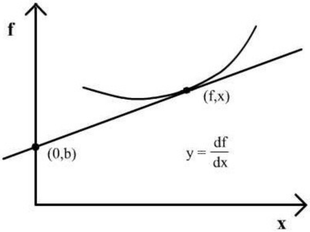
Del lagrangeano al hamiltoniano

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
- Las ecuaciones dinámicas serán $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n$

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
- Las ecuaciones dinámicas serán $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n$
- El planteamiento hamiltoniano de la dinámica implica los siguientes pasos:
  - Se fijan las coordenadas generalizadas y construye el lagrangeano a partir de las energías cinética y potencial
  - Se expresan la velocidades generalizadas en término de los momentos canónicos conjungados $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
  - Se construye el Hamiltoniano a partir de la transformación de Legendre del Lagrangeano
  - Se plantean las ecuaciones dinámicas de Hamilton

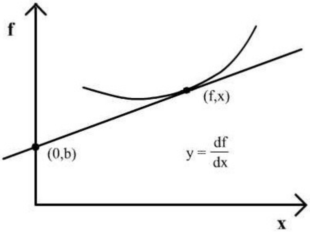
La transformación de Legendre 1/2

- Dada una función $f(x)$, la transformación de Legendre permite encontrar otra función $g(y)$ que contiene la misma información que $f(x)$, usando como argumento la pendiente $y = f'(x)$



La transformación de Legendre 1/2

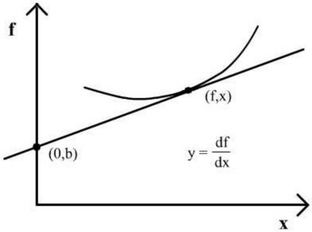
- Dada una función $f(x)$, la transformación de Legendre permite encontrar otra función $g(y)$ que contiene la misma información que $f(x)$, usando como argumento la pendiente $y = f'(x)$



- Cada punto (f, x) en la curva $f(x)$ define una línea recta que pasa por un punto $(0, b)$ con pendiente $y = f'(x)$.

La transformación de Legendre 1/2

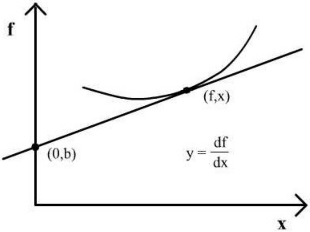
- Dada una función $f(x)$, la transformación de Legendre permite encontrar otra función $g(y)$ que contiene la misma información que $f(x)$, usando como argumento la pendiente $y = f'(x)$



- Cada punto (f, x) en la curva $f(x)$ define una línea recta que pasa por un punto $(0, b)$ con pendiente $y = f'(x)$.
- El conjunto de todas las rectas (y, b) describe las envolventes de la curva $f(x)$ y contiene la misma información que $f(x)$.

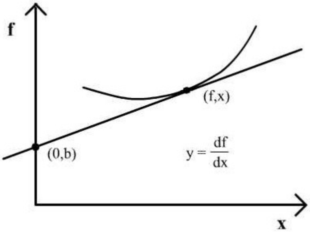
La transformación de Legendre 1/2

- Dada una función $f(x)$, la transformación de Legendre permite encontrar otra función $g(y)$ que contiene la misma información que $f(x)$, usando como argumento la pendiente $y = f'(x)$



- Cada punto (f, x) en la curva $f(x)$ define una línea recta que pasa por un punto $(0, b)$ con pendiente $y = f'(x)$.
- El conjunto de todas las rectas (y, b) describe las envolventes de la curva $f(x)$ y contiene la misma información que $f(x)$.
- Ambas descripciones (f, x) o de (y, b), son equivalentes.

- Dada una función $f(x)$, la transformación de Legendre permite encontrar otra función $g(y)$ que contiene la misma información que $f(x)$, usando como argumento la pendiente $y = f'(x)$



- Cada punto (f, x) en la curva $f(x)$ define una línea recta que pasa por un punto $(0, b)$ con pendiente $y = f'(x)$.
- El conjunto de todas las rectas (y, b) describe las envolventes de la curva $f(x)$ y contiene la misma información que $f(x)$.
- Ambas descripciones (f, x) o de (y, b), son equivalentes.
- https://youtu.be/vgLq90cOI_M?si=bLGxc5GFEGesVJId

La transformación de Legendre 2/2

- La transformada de Legendre de una función $f(x)$ se define como $g(y) \equiv yx(y) - f(x(y))$

La transformación de Legendre 2/2

- La transformada de Legendre de una función $f(x)$ se define como $g(y) \equiv yx(y) - f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a $(-b, y)$ y, describen la misma curva que $f(x)$.

La transformación de Legendre 2/2

- La transformada de Legendre de una función $f(x)$ se define como $g(y) \equiv yx(y) - f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a $(-b, y)$ y, describen la misma curva que $f(x)$.
- Si tenemos una función de s variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, existen s derivadas $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ para $i = 1, 2, \ldots, s$.

La transformación de Legendre 2/2

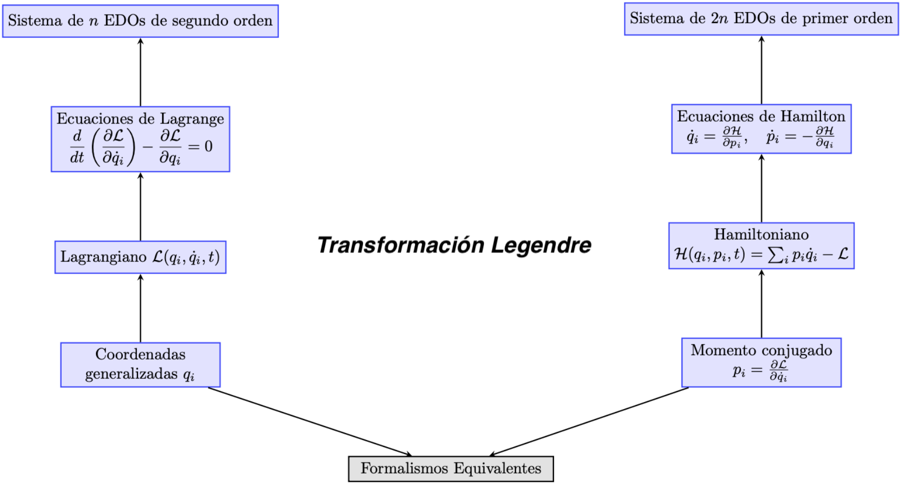
- La transformada de Legendre de una función $f(x)$ se define como $g(y) \equiv yx(y) - f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a $(-b, y)$ y, describen la misma curva que $f(x)$.
- Si tenemos una función de s variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, existen s derivadas $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ para $i = 1, 2, \ldots, s$.
- y la transformada de Legendre de $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ será $g(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{i=1}^{s} x_i y_i - f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, con $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_s)$

La transformación de Legendre 2/2

- La transformada de Legendre de una función $f(x)$ se define como $g(y) \equiv yx(y) - f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a $(-b, y)$ y, describen la misma curva que $f(x)$.
- Si tenemos una función de s variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, existen s derivadas $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ para $i = 1, 2, \ldots, s$.
- y la transformada de Legendre de $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ será $g(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{i=1}^{s} x_i y_i - f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, con $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_s)$
- Variables termodinámicas conjugadas: (Presión-Volumen); (Temperatura-Entropía); (Potencial Químico-Número de partículas).

La transformación de Legendre 2/2

- La transformada de Legendre de una función $f(x)$ se define como $g(y) \equiv yx(y) - f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a $(-b, y)$ y, describen la misma curva que $f(x)$.
- Si tenemos una función de s variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, existen s derivadas $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ para $i = 1, 2, \ldots, s$.
- y la transformada de Legendre de $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ será $g(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{i=1}^{s} x_i y_i - f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, con $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_s)$
- Variables termodinámicas conjugadas: (Presión-Volumen); (Temperatura-Entropía); (Potencial Químico-Número de partículas).
- Potenciales termodinámicos: entalpía $\mathcal{H}(S, p) = U + pV$; Energía libre de Helmholtz $F(T, V) = U - TS$; y Energía libre de Gibbs $G(T, p) = H - TS = U + pV - TS$


Sistema de n EDOs de segundo orden
Ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$
Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$
Coordenadas generalizadas q_i
Transformación Legendre
Sistema de $2n$ EDOs de primer orden
Ecuaciones de Hamilton $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
Momento conjugado $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
Formalismos Equivalentes

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} kq^2$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$

El oscilador armónico

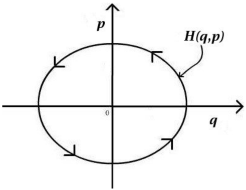
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$
- Con solución $q(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$, es decir $p(t) = m\dot{q} = Am\omega\cos(\omega t + \varphi)$

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$
- Con solución $q(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$, es decir $p(t) = m\dot{q} = Am\omega\cos(\omega t + \varphi)$
- El Hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 =$ cte Una elipse en el espacio de fase



Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2\alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2\alpha + \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha$. Es decir $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha$. Es decir $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$; $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} =$cte y $\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg \cot \alpha$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha - \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cot\alpha$. Es decir $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m\csc^2\alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$; $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} =$cte y $\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg\cot\alpha$
- Adicionalmente, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \text{cte}.$

Partícula moviéndose en cono vertical

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha - \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cot\alpha.$ Es decir $\mathcal{H}(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m\csc^2\alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$; $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} =$cte y $\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg\cot\alpha$
- Adicionalmente, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \text{cte}.$
- La función $\mathcal{H}(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \text{cte}$ describe una hipersuperficie 3-dimensional en el espacio de fase 4-dimensional $(r,\varphi,p_r,p_\varphi)$.

Partícula en un potencial central

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es
  $\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r)$

Partícula en un potencial central

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es
  $\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r)$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}$.

Partícula en un potencial central

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es $\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r)$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}$.
- Despejamos las velocidades generalizadas $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, y $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}$

Partícula en un potencial central

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es $\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r)$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}$.
- Despejamos las velocidades generalizadas $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, y $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}$
- Construimos el Hamiltoniano $\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right) + V(r)$

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es $\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) - V(r)$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}$.
- Despejamos las velocidades generalizadas $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, y $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}$
- Construimos el Hamiltoniano $\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right) + V(r)$
- Las ecuaciones de Hamilton serán $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$; $\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$; $\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}$; $\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{dV}{dr}$; $\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cot\theta}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}$ y $\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0$.

El Hamiltoniano y la Energía

- El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es equivalente a la función de energía $\mathcal{E}$
$\mathcal{E}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$

- El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es equivalente a la función de energía $\mathcal{E}$
$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$

El Hamiltoniano y la Energía

- El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es equivalente a la función de energía $\mathcal{E}$
  $\mathcal{E}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
  $\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right)$ es constante.

El Hamiltoniano y la Energía

- El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es equivalente a la función de energía $\mathcal{E}$
  $\mathcal{E}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)

El Hamiltoniano y la Energía

- El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es equivalente a la función de energía $\mathcal{E}$
$\mathcal{E}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$.
$\mathcal{L}_2$ es una función homogénea de grado dos,
$f(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_s) = \lambda^2 f(y_1, \ldots, y_s)$, $\mathcal{L}_1$ homogénea de grado 1 y
$\mathcal{L}_0$ homogénea de grado cero. Se cumple $\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf$.

El Hamiltoniano y la Energía

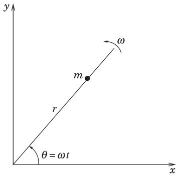
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es equivalente a la función de energía $\mathcal{E}$
$\mathcal{E}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
$\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$.
$\mathcal{L}_2$ es una función homogénea de grado dos,
$f(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_s) = \lambda^2 f(y_1, \ldots, y_s)$, $\mathcal{L}_1$ homogénea de grado 1 y
$\mathcal{L}_0$ homogénea de grado cero. Se cumple $\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf$.
- Entonces $\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 - \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0$

- El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es equivalente a la función de energía $\mathcal{E}$
  $\mathcal{E}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
  $\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$.
  $\mathcal{L}_2$ es una función homogénea de grado dos,
  $f(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_s) = \lambda^2 f(y_1, \ldots, y_s)$, $\mathcal{L}_1$ homogénea de grado 1 y
  $\mathcal{L}_0$ homogénea de grado cero. Se cumple $\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf$.
- Entonces $\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 - \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0$
- Si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y el potencial no depende de las velocidades $\mathcal{L}_2 = T$ y
  $\mathcal{L}_0 = -V$, entonces $\mathcal{E} = T + V = E$

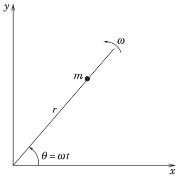
El Hamiltoniano y la Energía

- Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular ω constante.



El Hamiltoniano y la Energía

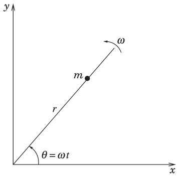
- Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular ω constante.



- El lagrangeano $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right)$,

El Hamiltoniano y la Energía

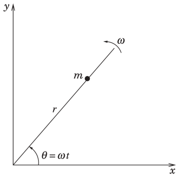
- Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular ω constante.



- El lagrangeano $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right)$,
- El momento conjugado $p_r = m\dot{r}$

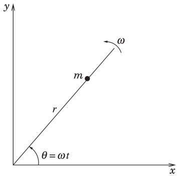
El Hamiltoniano y la Energía

- Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular ω constante.



- El lagrangeano $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right)$,
- El momento conjugado $p_r = m\dot{r}$
- El hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2$ no es la energía, $E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2$ pero se conserva $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$

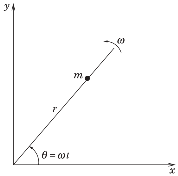
- Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular ω constante.



- El lagrangeano $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right)$,
- El momento conjugado $p_r = m\dot{r}$
- El hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2$ no es la energía, $E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2$ pero se conserva $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$
- Diferentes elecciones de coordenadas generalizadas cambian la forma funcional de un Lagrangiano, pero su valor sigue siendo el mismo.

El Hamiltoniano y la Energía

- Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular ω constante.



- El lagrangeano $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right)$,
- El momento conjugado $p_r = m\dot{r}$
- El hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2$ no es la energía,
  $E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2$ pero se conserva $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$
- Diferentes elecciones de coordenadas generalizadas cambian la forma funcional de un Lagrangiano, pero su valor sigue siendo el mismo.
- El valor y la forma funcional del hamiltoniano dependen del conjunto de coordenadas generalizadas. Puede ocurrir que se conserve en un sistema de coordenadas pero varíe en otro.

Recapitulando

- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por $2n$ condiciones iniciales: $q_i(t_0)$, $\dot{q}_i(t_0)$.

Recapitulando

- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por $2n$ condiciones iniciales: $q_i(t_0)$, $\dot{q}_i(t_0)$.
- Formulación Hamiltoniana
  - Define el espacio de fase (q_i, p_i), donde $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$.
  - Ecuaciones de movimiento de primer orden: $\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$
  - Estructura rica y general, base de la mecánica cuántica y estadística.

Recapitulando

- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por $2n$ condiciones iniciales: $q_i(t_0)$, $\dot{q}_i(t_0)$.
- Formulación Hamiltoniana
  - Define el espacio de fase (q_i, p_i), donde $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$.
  - Ecuaciones de movimiento de primer orden: $\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$
  - Estructura rica y general, base de la mecánica cuántica y estadística.
- Ejemplo: Oscilador Armónico
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
  - $p = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
  - $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
  - El sistema describe una elipse en el espacio de fase.

Recapitulando

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por $2n$ condiciones iniciales: $q_i(t_0)$, $\dot{q}_i(t_0)$.
- Formulación Hamiltoniana
  - Define el espacio de fase (q_i, p_i), donde $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$.
  - Ecuaciones de movimiento de primer orden: $\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$
  - Estructura rica y general, base de la mecánica cuántica y estadística.
- Ejemplo: Oscilador Armónico
  - $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
  - $p = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
  - $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
  - El sistema describe una elipse en el espacio de fase.
- Importancia del Formalismo
  - Simplifica el tratamiento de sistemas con simetrías.
  - Introduce corchetes de Poisson y transformaciones canónicas.
  - Punto de partida hacia formulaciones modernas de la física teórica.

Cuadro: Formalismos Equivalentes

Formalismo Lagrangiano	**Formalismo Hamiltoniano**
Elegir coordenadas generalizadas q_i	Usar las q_i y definir los momentos conjugados $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
Escribir el lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$	Calcular el hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$
Ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$	Ecuaciones de Hamilton: $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
Ecuaciones diferenciales de segundo orden para $q_i(t)$	Ecuaciones acopladas de primer orden para $q_i(t)$, $p_i(t)$
Cantidades conservadas y coordenadas cíclicas q_i	Cantidades conservadas a partir de simetrías de $\mathcal{H}$
Imagen geométrica: espacio de configuración (q_i)	Imagen geométrica: espacio de fases (q_i, p_i)
Simetrías mediante el teorema de Noether	Simetrías mediante transformaciones canónicas

Para la discusión

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Una partícula de masa m se desliza sin fricción sobre un aro circular de radio R, el cual rota con velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical z. Describa la dinámica de la partícula utilizando el formalismo Hamiltoniano.