Tiempo mínimo: Braquistocrona y Principio de Fermat

Luis A. Núñez

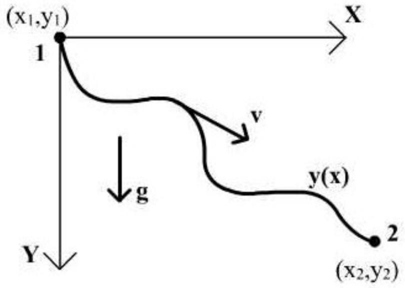
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

13 de febrero de 2025

Agenda

El Problema

- Encontrar la trayectoria $y(x)$ de una partícula, que en un movimiento sin fricción, partiendo del reposo y sometida a un campo gravitatorio terrestre, que emplea el menor tiempo para ir de un punto (x_1, y_1) a otro punto (x_2, y_2).



El funcional y la ecuación de Euler

- Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y la dirección del eje y hacia abajo.

El funcional y la ecuación de Euler

- Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y la dirección del eje y hacia abajo.
- Si v es la magnitud de la velocidad en un punto de la trayectoria, entonces el elemento de tiempo para recorrer una distancia infinitesimal $\mathrm{d}s$ a lo largo de la trayectoria es $dt = \frac{\mathrm{d}s}{v}$.

El funcional y la ecuación de Euler

- Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y la dirección del eje y hacia abajo.
- Si v es la magnitud de la velocidad en un punto de la trayectoria, entonces el elemento de tiempo para recorrer una distancia infinitesimal $\mathrm{d}s$ a lo largo de la trayectoria es $dt = \frac{\mathrm{d}s}{v}$.
- El tiempo total para ir del punto 1 al punto 2 es $t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{v} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}\mathrm{d}y$

El funcional y la ecuación de Euler

- Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y la dirección del eje y hacia abajo.
- Si v es la magnitud de la velocidad en un punto de la trayectoria, entonces el elemento de tiempo para recorrer una distancia infinitesimal $\mathrm{d}s$ a lo largo de la trayectoria es $dt = \frac{\mathrm{d}s}{v}$.
- El tiempo total para ir del punto 1 al punto 2 es
$t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{v} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}\mathrm{d}y$
- Identificamos el función del funcional $f(x, x', y) = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}$

El funcional y la ecuación de Euler

- Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y la dirección del eje y hacia abajo.
- Si v es la magnitud de la velocidad en un punto de la trayectoria, entonces el elemento de tiempo para recorrer una distancia infinitesimal $\mathrm{d}s$ a lo largo de la trayectoria es $dt = \frac{\mathrm{d}s}{v}$.
- El tiempo total para ir del punto 1 al punto 2 es $t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{v} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}\mathrm{d}y$
- Identificamos el función del funcional $f\left(x, x', y\right) = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}$
- La ecuación de Euler correspondiente es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(x')^2}} = c = \text{constante}$

El funcional y la ecuación de Euler

- Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y la dirección del eje y hacia abajo.
- Si v es la magnitud de la velocidad en un punto de la trayectoria, entonces el elemento de tiempo para recorrer una distancia infinitesimal $\mathrm{d}s$ a lo largo de la trayectoria es $dt = \frac{\mathrm{d}s}{v}$.
- El tiempo total para ir del punto 1 al punto 2 es $t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{v} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}\mathrm{d}y$
- Identificamos el función del funcional $f(x, x', y) = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}$
- La ecuación de Euler correspondiente es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(x')^2}} = c =$ constante
- En este caso la ecuación de Euler para $f(x, x', y)$ resulta más sencilla que para $f(y, y', x)$, porque $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

El funcional y la ecuación de Euler

- Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y la dirección del eje y hacia abajo.
- Si v es la magnitud de la velocidad en un punto de la trayectoria, entonces el elemento de tiempo para recorrer una distancia infinitesimal $\mathrm{d}s$ a lo largo de la trayectoria es $dt = \frac{\mathrm{d}s}{v}$.
- El tiempo total para ir del punto 1 al punto 2 es $t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{v} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}\mathrm{d}y$
- Identificamos el función del funcional $f(x, x', y) = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{2gy}}$
- La ecuación de Euler correspondiente es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(x')^2}} = c = \text{constante}$
- En este caso la ecuación de Euler para $f(x, x', y)$ resulta más sencilla que para $f(y, y', x)$, porque $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$
- Entonces $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \sqrt{\frac{2gc^2 y}{1-2gc^2 y}} \Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{\frac{1}{2gc^2} - y}}\mathrm{d}y = \int \sqrt{\frac{y}{2R-y}}\mathrm{d}y$, con $2R \equiv 1/2gc^2$

La trayectoria

- Con un cambio de variable $y = R(1-\cos\theta)$, $\quad \mathrm{d}y = R\mathrm{sen}\,\theta\mathrm{d}\theta$, tendremos $x = R\int\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}\mathrm{sen}\,\theta\;\mathrm{d}\theta = R\int(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta$

La trayectoria

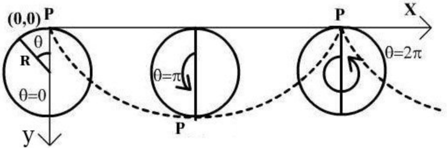
- Con un cambio de variable $y = R(1 - \cos\theta)$, $\quad \mathrm{d}y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta$, tendremos $x = R\int \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}\mathrm{sen}\,\theta\ \mathrm{d}\theta = R\int (1 - \cos\theta)\mathrm{d}\theta$
- La trayectoria queda parametrizada por
  $y = R(1 - \cos\theta)$ y $x = R(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$.
  La ecuación de la cicloide que pasa por $(x_1, y_1) = (0, 0)$, con $k = 0$.

La trayectoria

- Con un cambio de variable $y = R(1 - \cos\theta)$, $\quad \mathrm{d}y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta$, tendremos $x = R \int \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}\mathrm{sen}\,\theta\;\mathrm{d}\theta = R \int (1 - \cos\theta)\mathrm{d}\theta$
- La trayectoria queda parametrizada por
  $y = R(1 - \cos\theta)$ y $x = R(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$.
  La ecuación de la cicloide que pasa por $(x_1, y_1) = (0, 0)$, con $k = 0$.
- La constante R se determina con el punto (x_2, y_2) y da al valor del radio de la circunferencia que genera la cicloide.

La trayectoria

- Con un cambio de variable $y = R(1 - \cos\theta)$, $\quad \mathrm{d}y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta$, tendremos $x = R\int \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}}\mathrm{sen}\,\theta\ \mathrm{d}\theta = R\int(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta$
- La trayectoria queda parametrizada por
  $y = R(1 - \cos\theta)$ y $x = R(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$.
  La ecuación de la cicloide que pasa por $(x_1, y_1) = (0, 0)$, con $k = 0$.
- La constante R se determina con el punto (x_2, y_2) y da al valor del radio de la circunferencia que genera la cicloide.
- La trayectoria de tiempo mínimo es un arco de cicloide que pasa por los puntos dados $\theta_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow y = R, x = \frac{\pi}{2}R$, $\theta_\pi \Rightarrow x = \pi R, y = 2R$ y $\theta_{2\pi} \Rightarrow x = 2\pi R, y = 0$

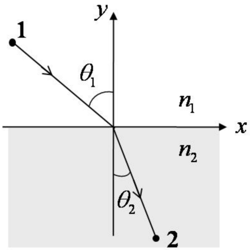


Principio de Fermat

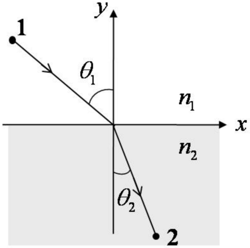
- La luz se propaga entre dos puntos siguiendo la trayectoria que corresponde al tiempo mínimo

Principio de Fermat

- La luz se propaga entre dos puntos siguiendo la trayectoria que corresponde al tiempo mínimo
- La velocidad de la luz en un medio con índice de refracción n es $v = c/n$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

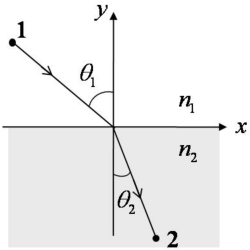


- La luz se propaga entre dos puntos siguiendo la trayectoria que corresponde al tiempo mínimo
- La velocidad de la luz en un medio con índice de refracción n es $v = c/n$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.



- El tiempo para viajar entre los puntos 1 y 2 es $t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_1^2 n\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{c} = \frac{1}{c}\int_{y_1}^{y_2} n\sqrt{1+(x')^2}\mathrm{d}y$

- La luz se propaga entre dos puntos siguiendo la trayectoria que corresponde al tiempo mínimo
- La velocidad de la luz en un medio con índice de refracción n es $v = c/n$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.



- El tiempo para viajar entre los puntos 1 y 2 es $t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_1^2 n \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{c} = \frac{1}{c}\int_{y_1}^{y_2} n\sqrt{1 + (x')^2}\mathrm{d}y$
- Tenemos dos índices de refracción $n = n_1$, para $y > 0$, y $n = n_2$, para $y < 0$, tal que $\frac{dn}{dy} \neq 0$ sólo en $y = 0$.

- Entonces podemos identificar $f(x, x', y) = n\sqrt{1+(x')^2}$, que satisface la ecuación de Euler, $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Principio de Fermat

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Entonces podemos identificar $f\left(x,x',y\right)=n\sqrt{1+\left(x'\right)^2}$, que satisface la ecuación de Euler, $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}=0$
- Con lo cual $\frac{nx'}{\sqrt{1+x'^2}}=\text{cte.}$

- Entonces podemos identificar $f\left(x, x', y\right) = n\sqrt{1 + \left(x'\right)^2}$, que satisface la ecuación de Euler, $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$
- Con lo cual $\frac{nx'}{\sqrt{1+x'^2}} = \text{cte.}$
- Adicionalmente, $x' = \frac{dx}{dy} = -\tan\theta$, con θ el ángulo de la trayectoria de la luz con el eje y (normal a la interfase).

- Entonces podemos identificar $f\left(x, x', y\right) = n\sqrt{1 + \left(x'\right)^2}$, que satisface la ecuación de Euler, $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$
- Con lo cual $\frac{nx'}{\sqrt{1+x'^2}} = \text{cte.}$
- Adicionalmente, $x' = \frac{dx}{dy} = -\tan\theta$, con θ el ángulo de la trayectoria de la luz con el eje y (normal a la interfase).
- Con lo cual obtenemos $-\frac{n\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \text{ cte. } \Rightarrow n\,\mathrm{sen}\,\theta = \text{ cte. }$,

Principio de Fermat

- Entonces podemos identificar $f(x, x', y) = n\sqrt{1 + (x')^2}$, que satisface la ecuación de Euler, $\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$
- Con lo cual $\frac{nx'}{\sqrt{1+x'^2}} = \text{cte.}$
- Adicionalmente, $x' = \frac{dx}{dy} = -\tan\theta$, con θ el ángulo de la trayectoria de la luz con el eje y (normal a la interfase).
- Con lo cual obtenemos $-\frac{n\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \text{ cte. } \Rightarrow n\,\text{sen}\,\theta = \text{ cte. }$,
- Finalmente, implica la ley de refracción, $n_1\,\text{sen}\,\theta_1 = n_2\,\text{sen}\,\theta_2$

Recapitulando

- La distancia más corta no siempre es la más rápida; *los principios variacionales* determinan los caminos óptimos.

Recapitulando

- La distancia más corta no siempre es la más rápida; *los principios variacionales* determinan los caminos óptimos.
- La integral del tiempo es $t_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dy$.

Recapitulando

- La distancia más corta no siempre es la más rápida; *los principios variacionales* determinan los caminos óptimos.
- La integral del tiempo es $t_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dy$.
- El problema se resuelve mediante la *ecuación de Euler-Lagrange*, genera una primera integral que relaciona la pendiente de la trayectoria con la energía.

Recapitulando

- La distancia más corta no siempre es la más rápida; *los principios variacionales* determinan los caminos óptimos.
- La integral del tiempo es $t_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dy$.
- El problema se resuelve mediante la *ecuación de Euler-Lagrange*, genera una primera integral que relaciona la pendiente de la trayectoria con la energía.
- La trayectoria resultante es un *segmento de una cicloide*, parametrizada como: $x = R(\theta - \text{sen}\ \theta), \quad y = R(1 - \cos\theta)$, donde R se determina por las condiciones de frontera.

Recapitulando

- La distancia más corta no siempre es la más rápida; *los principios variacionales* determinan los caminos óptimos.
- La integral del tiempo es $t_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{2gy}}\, dy$.
- El problema se resuelve mediante la *ecuación de Euler-Lagrange*, genera una primera integral que relaciona la pendiente de la trayectoria con la energía.
- La trayectoria resultante es un *segmento de una cicloide*, parametrizada como: $x = R(\theta - \operatorname{sen}\, \theta), \quad y = R(1 - \cos\theta)$, donde R se determina por las condiciones de frontera.
- El *principio de Fermat* establece que la luz sigue el *camino del menor tiempo*, lo que conduce a la *ley de Snell* de la refracción: $n_1 \operatorname{sen}\, \theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\, \theta_2$

Para la discusión

- Supongamos que se añade una *fuerza resistiva* (por ejemplo, la resistencia del aire). ¿Cómo modificaría esto la ecuación del movimiento?

Para la discusión

- Supongamos que se añade una *fuerza resistiva* (por ejemplo, la resistencia del aire). ¿Cómo modificaría esto la ecuación del movimiento?
- En un *campo gravitatorio no uniforme* (por ejemplo, cerca de un planeta masivo), ¿cómo cambiaría la trayectoria óptima?

Para la discusión

- Supongamos que se añade una *fuerza resistiva* (por ejemplo, la resistencia del aire). ¿Cómo modificaría esto la ecuación del movimiento?
- En un *campo gravitatorio no uniforme* (por ejemplo, cerca de un planeta masivo), ¿cómo cambiaría la trayectoria óptima?
- Si la esfera rueda sin deslizar (en lugar de deslizarse sin fricción), ¿cómo modificaría esto la trayectoria óptima en el tiempo?