Armónicos Esféricos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

22 de junio de 2022

Agenda Armónicos esféricos

1. Polinomios asociados de Legendre
   - Definición, Fórmula de Rodrigues, Ecuación diferencial
   - Relaciones de recurrencia, generatriz, ortogonalidad
   - Ejemplos y representación gráfica
2. Armónicos esféricos
   - Armónicos esféricos: generalidades, ortogonalidad y expansiones
   - Relaciones de recurrencia y valores extremos $Y_l^m(\theta, \varphi)$
   - Representación Gráfica
   - Algunos armónicos esféricos
3. Recapitulando

Polinomios asociados de Legendre 1/3

- Los polinomios asociados de Legendre son una “generalización” de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.

Polinomios asociados de Legendre 1/3

- Los polinomios asociados de Legendre son una "generalización" de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.

Polinomios asociados de Legendre 1/3

- Los polinomios asociados de Legendre son una "generalización" de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.
- La fórmula de Rodrigues será $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{\mathrm{d}x^l} \left[\left(x^2 - 1\right)^l\right] \quad \Rightarrow$

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Polinomios asociados de Legendre 1/3

- Los polinomios asociados de Legendre son una "generalización" de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.
- La fórmula de Rodrigues será $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{\mathrm{d}x^l} \left[\left(x^2 - 1\right)^l\right] \quad \Rightarrow$
  $P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} \left(x^2 - 1\right)^l$
- Los *polinomios asociados de Legendre* son solución de la ecuación de Legendre generalizada
  $(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} P_l^m(x) - 2x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_l^m(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_l^m(x) = 0$
- y equivalentemente en su forma autoadjunta
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1 - x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_l^m(x)\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_l^m(x) = 0$

- Los polinomios asociados de Legendre son una "generalización" de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.
- La fórmula de Rodrigues será $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{\mathrm{d}x^l} \left[\left(x^2 - 1\right)^l\right] \quad \Rightarrow$
  $P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} \left(x^2 - 1\right)^l$
- Los *polinomios asociados de Legendre* son solución de la ecuación de Legendre generalizada
  $(1 - x^2) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} P_l^m(x) - 2x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_l^m(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_l^m(x) = 0$
- y equivalentemente en su forma autoadjunta
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\left(1 - x^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_l^m(x)\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_l^m(x) = 0$
- Como m^2 aparece en la ecuación diferencial es costumbre acotar $-m \leq l \leq m$. Además se puede demostrar que $P_l^m \propto P_l^{-m}$ de la forma $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$.

Polinomios asociados de Legendre 2/3

- Las relaciones de recurrencia para los polinomios asociados de Legendre son mas complicadas y variadas:

$$P_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) = 0$$

$$(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) + P_{l+1}^{m+1}(x) = 0$$

$$(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) + (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) + \frac{1}{2}P_l^{m+1}(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) = 0$$

Polinomios asociados de Legendre 2/3

- Las relaciones de recurrencia para los polinomios asociados de Legendre son mas complicadas y variadas:

$$P_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) = 0$$

$$(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) + P_{l+1}^{m+1}(x) = 0$$

$$(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) + (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) + \frac{1}{2}P_l^{m+1}(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) = 0$$

- La función generatriz para los polinomios de Legendre es $\mathcal{A}_m(x,t) \equiv \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty}(1-x^2)^{-1/2}P_{s+m}^m(x)t^s$

- Las relaciones de recurrencia para los polinomios asociados de Legendre son mas complicadas y variadas:

$$P_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) = 0$$

$$(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) + P_{l+1}^{m+1}(x) = 0$$

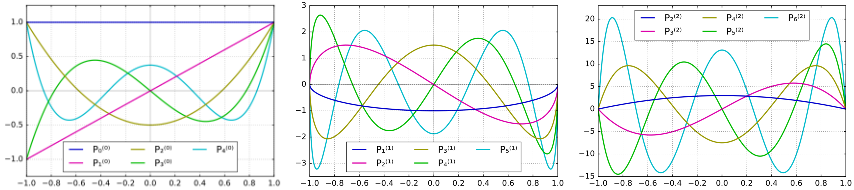
$$(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) + (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) + \frac{1}{2}P_l^{m+1}(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) = 0$$

- La función generatriz para los polinomios de Legendre es $\mathcal{A}_m(x,t) \equiv \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty}(1-x^2)^{-1/2}P_{s+m}^m(x)t^s$
- La ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre son: $\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_q^m(x)\mathrm{d}x \equiv \int_0^{\pi} P_p^m(\cos\theta)P_q^m(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2p+1}\frac{(p+m)!}{(p-m)!}\delta_{pq}$ y $\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_p^n(x)\mathrm{d}x = \frac{(p+m)!}{m(p-m)!}\delta_{mn}$

Polinomios asociados de Legendre 3/3



Polinomios		cartesiana		polares
$P_0^0(x)$	$=$	1		
$P_1^{-1}(x)$	$=$	$\frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$	$=$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$
$P_1^0(x)$	$=$	x	$=$	$\cos\theta$
$P_1^1(x)$	$=$	$-(1-x^2)^{1/2}$	$=$	$-\operatorname{sen}\theta$
$P_2^{-2}(x)$	$=$	$\frac{1}{8}(1-x^2)$	$=$	$\frac{1}{8}\operatorname{sen}\theta$
$P_2^{-1}(x)$	$=$	$\frac{1}{2}x\left(1-x^2\right)^{1/2}$	$=$	$\frac{1}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
$P_2^0(x)$	$=$	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$=$	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
$P_2^1(x)$	$=$	$-3x\left(1-x^2\right)^{1/2}$	$=$	$-3\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
$P_2^2(x)$	$=$	$3(1-x^2)$	$=$	$3\operatorname{sen}\theta$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$

Armónicos esféricos: generalidades y ortogonalidad

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonomal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2}$

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonomal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2}$
- Cualquier función $f(\theta,\varphi)$ puede ser expandida como $f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \Leftrightarrow$ $c_{lm} = \langle Y_l^m \mid f(\theta,\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta \, Y_l^m(\theta,\varphi)^* f(\theta,\varphi)$

Armónicos esféricos: generalidades y ortogonalidad

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonomal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2}$
- Cualquier función $f(\theta,\varphi)$ puede ser expandida como $f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \Leftrightarrow$ $c_{lm} = \langle Y_l^m \mid f(\theta,\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi)^* f(\theta,\varphi)$
- Esta expansión puede interpretarse como unaexpansión multipolar: la expansión de Laplace: $f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} C_\ell^m Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ C_0^0 representa el monopolo; C_1^{-1}, C_1^0 y C_1^1 representan el dipolo, etc, etc.

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonomal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) = \delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 m_2}$
- Cualquier función $f(\theta,\varphi)$ puede ser expandida como $f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \Leftrightarrow$ $c_{lm} = \langle Y_l^m \mid f(\theta,\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta \, Y_l^m(\theta,\varphi)^* f(\theta,\varphi)$
- Esta expansión puede interpretarse como unaexpansión multipolar: la expansión de Laplace: $f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} C_\ell^m Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ C_0^0 representa el monopolo; C_1^{-1}, C_1^0 y C_1^1 representan el dipolo, etc, etc.
- Podemos re-escribir la expresión anterior como $f(\theta,\varphi) = C + C_i n^i + C_{ij} n^i n^j + C_{ijk} n^i n^j n^k + C_{ijk\ell} n^i n^j n^k n^\ell + \cdots$. Los n^i son las componentes de un vector unitario en la dirección θ y φ. C es el monopolo; los tres C_i, representan el dipolo, etc

Relaciones de recurrencia

- A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, obtenemos:

$$\cos\theta\, Y_l^m = \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^m,$$

$$e^{\pm i\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\, Y_l^m = \mp\left[\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^{m\pm1} \pm \left[\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^{m\pm1}.$$

Relaciones de recurrencia

- A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, obtenemos:

$$\cos\theta\, Y_l^m = \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^m,$$

$$e^{\pm i\varphi}\operatorname{sen}\theta\, Y_l^m = \mp \left[\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^{m\pm 1} \pm \left[\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^{m\pm 1}.$$

- Para $\theta = 0$, el valor de φ se vuelve irrelevante, y todo Y_l^m con dependencia de φ desaparece y como $P_l(1) = 1$, entonces $Y_l^m(0,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}$

Relaciones de recurrencia

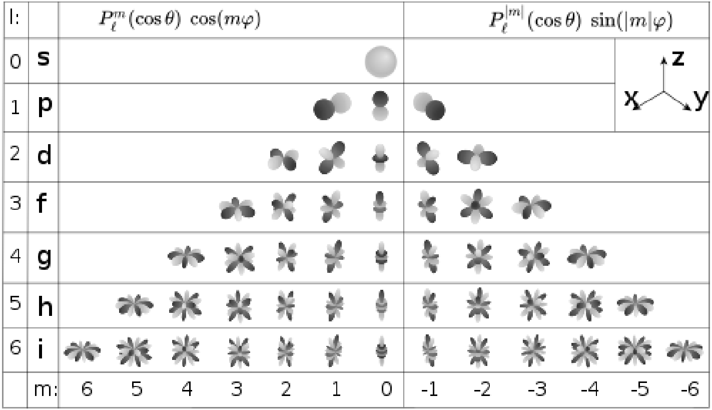
- A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, obtenemos:

$$\cos\theta\, Y_l^m = \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^m,$$

$$e^{\pm i\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\, Y_l^m = \mp\left[\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^{m\pm1} \pm \left[\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^{m\pm1}.$$

- Para $\theta = 0$, el valor de φ se vuelve irrelevante, y todo Y_l^m con dependencia de φ desaparece y como $P_l(1) = 1$, entonces $Y_l^m(0,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}$
- Para $\theta = \pi$ tendremos $Y_l^m(\pi,\varphi) = (-1)^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}$.

Representación Gráfica



Wikipedia `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphericalfunctions.svg`

Algunos armónicos esféricos

Armónico	Esféricas	Cartesianas
$Y_0^0(\theta,\varphi)$	$=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	
$Y_1^1(\theta,\varphi)$	$=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{i\varphi}$	$=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x+iy)/r$
$Y_1^0(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$	$=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}z/r$
$Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$	$=+\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{-i\varphi}$	$=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x-iy)/r$
$Y_2^2(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{2i\varphi}$	$=3\sqrt{\frac{5}{96\pi}}\left(x^2-y^2+2ixy\right)/r^2$
$Y_2^1(\theta,\varphi)$	$=-\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta e^{i\varphi}$	$=-\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3z(x+iy)/r^2$
$Y_2^0(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$	$=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}r^2\right)/r^2$
$Y_2^{-1}(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$	$=+\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3z(x-iy)/r^2$
$Y_2^{-2}(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{-2i\varphi}$	$=3\sqrt{\frac{5}{96\pi}}\left(x^2-y^2-2ixy\right)/r^2$
$Y_3^3(\theta,\varphi)$	$=-\sqrt{\frac{7}{2880\pi}}15\,\mathrm{sen}^3\,\theta e^{3i\varphi}$	$=-\sqrt{\frac{7}{2880\pi}}15\left[x^3-3xy^2+i\left(3x^2y-y^3\right)\right]/r^3$
$Y_3^2(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{7}{480\pi}}15\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{2i\varphi}$	$=\sqrt{\frac{7}{480\pi}}15z\left(x^2-y^2+2ixy\right)/r^3$
$Y_3^1(\theta,\varphi)$	$=-\sqrt{\frac{7}{48\pi}}\left(\frac{15}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{2}\right)\mathrm{sen}\,\theta e^{i\varphi}$	$=-\sqrt{\frac{7}{48\pi}}\left(\frac{15}{2}z^2-\frac{3}{2}r^2\right)(x+iy)/r^3$
$Y_3^0(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta\right)$	$=\sqrt{\frac{7}{4\pi}}z\left(\frac{5}{2}z^2-\frac{3}{2}r^2\right)/r^3$
$Y_3^{-1}(\theta,\varphi)$	$=+\sqrt{\frac{7}{48\pi}}\left(\frac{15}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{2}\right)\mathrm{sen}\,\theta e^{-i\varphi}$	$=\sqrt{\frac{7}{48\pi}}\left(\frac{15}{2}z^2-\frac{3}{2}r^2\right)(x-iy)/r^3$
$Y_3^{-2}(\theta,\varphi)$	$=\sqrt{\frac{7}{480\pi}}15\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{-2i\varphi}$	$=\sqrt{\frac{7}{480\pi}}15z\left(x^2-y^2-2ixy\right)/r^3$
$Y_3^{-3}(\theta,\varphi)$	$=+\sqrt{\frac{7}{2880\pi}}15\,\mathrm{sen}^3\,\theta e^{-3i\varphi}$	$=\sqrt{\frac{7}{2880\pi}}15\left[x^3-3xy^2-i\left(3x^2y-y^3\right)\right]/r^3$

En presentación consideramos

1.