

[BasesFuncionales.mw](#)

>

Bases para un espacio de funciones

Luis A. Núñez

*Escuela de Física**Universidad Industrial de Santander**Bucaramanga Colombia**Actualizado Noviembre2020*

Expansión por series de Taylor. Una base de monomios en un espacio de polinomios

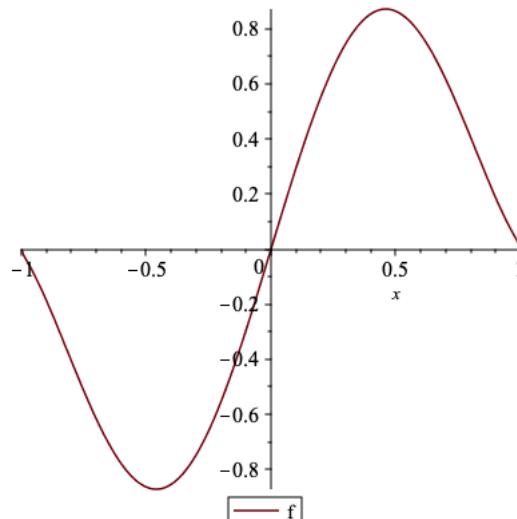
```
>restart: with(plots):
```

Consideremos una función sencilla

```
>f := x -> sqrt(1-x^2)*sin(3*x);
```

$$f := x \mapsto \sqrt{1 - x^2} \sin(3x) \quad (1)$$

```
>plot(f(x),x=-1..1, legend=[f]);
```



y recordemos la aproximación por serie de Taylor. Fijemos el mayor orden del monomio en la aproximación

```
>n:=7;
```

$$n := 7 \quad (2)$$

```
>Taylor[n]:=taylor(f(x),x=0,n);
```

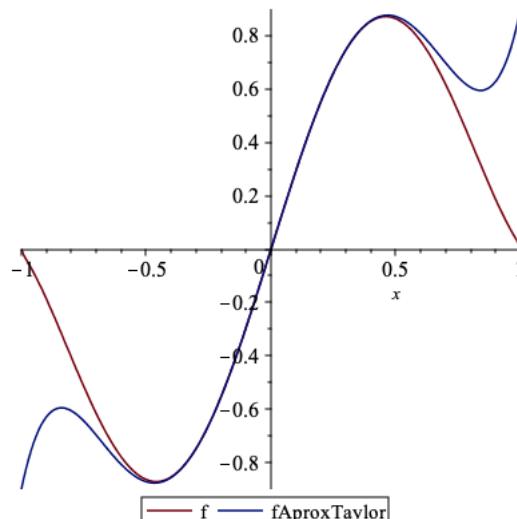
$$Taylor_7 := 3x - 6x^3 + \frac{39}{10}x^5 + O(x^7) \quad (3)$$

Nótese que fijamos el orden de la aproximación es $n-1$

```
>fAproxTaylor[n]:=convert(Taylor[n],polynom):
```

La serie de Taylor no es más que una expansión en una base de monomios en la cual conocemos los coeficientes y sabemos como generarlos. Si graficamos la función y su aproximación vemos, que mejora cuando aumentamos el orden del polinomio

```
>plot([f(x),fAproxTaylor[n]],x=-1..1, legend=[f,fAproxTaylor]);
```

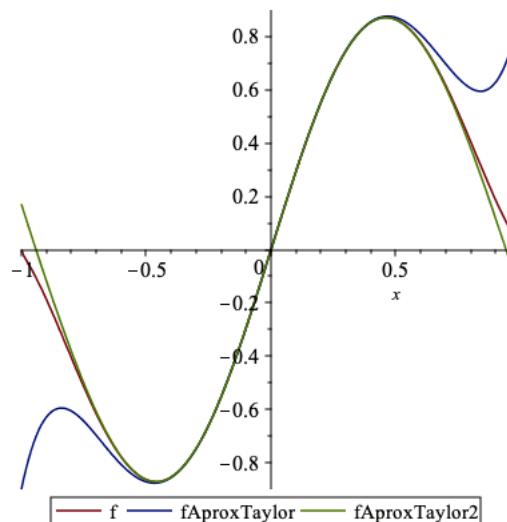


```
>nn:=9;Taylor2[nn]:= taylor(f(x),x=0,nn);fAproxTaylor2[nn]:=convert(Taylor2[nn],polynom):
```

$$\begin{aligned} m &:= 9 \\ Taylor2_9 &:= 3x - 6x^3 + \frac{39}{10}x^5 - \frac{15}{14}x^7 + O(x^9) \end{aligned}$$

(4)

```
>plot([f(x),fAproxTaylor[n],fAproxTaylor2[nn]],x=-1..1, legend=[["f", "fAproxTaylor", "fAproxTaylor2"]]);
```



Como siempre el error de la aproximación será la norma de la resta de los dos vectores: la función original y la función aproximada por series de Taylor. Para el producto interno $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$ el error será

$$\langle f - f\text{Aprox} | f - f\text{Aprox} \rangle = \int_{-1}^1 (f - f\text{Aprox})^2 dx$$

Esto es para el caso de $n=$

> n;

7

(5)

```
> ErrorTaylor := sqrt(int((f(x)-fAproxTaylor[n])^2,x=-1..1)); evalf(%);
```

$$\begin{aligned} \text{ErrorTaylor} := & \frac{1}{6930} \left(8004150 \sqrt{\pi} \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} + \frac{\cos(6)}{3\sqrt{\pi}} - \frac{\sin(6)}{18\sqrt{\pi}} \right) - 96049800 \pi \left(-\text{BesselJ}(0, 3) + \frac{2 \text{BesselJ}(1, 3)}{3} \right) + 85377600 \pi \left(\frac{3 \text{BesselJ}(0, 3)}{4} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{7 \text{BesselJ}(1, 3)}{4} \right) - 24664640 \pi \left(-\frac{45 \text{BesselJ}(0, 3)}{8} - 3 \text{BesselJ}(1, 3) \right) + 44993718 \right)^{1/2} \\ & 0.3330194739 \end{aligned}$$

(6)

y para el caso de n

>nn;

9

(7)

```
>ErrorTaylor2 := sqrt(int((f(x)-fAproxTaylor2[nn])^2,x=-1..1)); evalf(%);
```

$$\begin{aligned} \text{ErrorTaylor2} := & \frac{1}{20790} \left(308314512 + 72037350 \sqrt{\pi} \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} + \frac{\cos(6)}{3\sqrt{\pi}} - \frac{\sin(6)}{18\sqrt{\pi}} \right) - 864448200 \pi \left(-\text{BesselJ}(0, 3) + \frac{2 \text{BesselJ}(1, 3)}{3} \right) \right. \\ & + 768398400 \pi \left(\frac{3 \text{BesselJ}(0, 3)}{4} + \frac{7 \text{BesselJ}(1, 3)}{4} \right) - 221981760 \pi \left(-\frac{45 \text{BesselJ}(0, 3)}{8} - 3 \text{BesselJ}(1, 3) \right) + 27104000 \pi \left(\frac{1233 \text{BesselJ}(0, 3)}{16} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1947 \text{BesselJ}(1, 3)}{32} \right) \right)^{1/2} \\ & 0.05870966633 \end{aligned}$$

(8)

Claramente, para este caso el error disminuye un orden de magnitud al aumentar un orden en la aproximación. En ambos casos las desviaciones ocurren en los extremos de la función

Taylor (la base de monomios) no es ortogonal

Para el producto interno $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$ esta base de monomios no es ortogonal

```
>Int(x^l*x^m,x=-1..1)=int(x^l*x^m,x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^1 x^l x^m dx = \frac{(-1)^{l+m} + 1}{l+m+1} \quad (9)$$

Miren el caso particular para $l = 14$ y $m = 28$

```
>Int(x^l*x^m,x=-1..1)=int(x^l*x^m,x=-1..1);
Prodintern:=int(x^l*x^m,x=-1..1);subs({l=14,m=28},Prodintern);
```

$$\int_{-1}^1 x^l x^m dx = \frac{(-1)^{l+m} + 1}{l+m+1}$$

$$\text{Prodintern} := \frac{(-1)^{l+m} + 1}{l+m+1}$$

$\frac{2}{43}$

(10)

Ortogonalización de la base de monomios

Supongamos que ahora ortogonalizamos esa base de monomios $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 \dots\}$ mediante del procedimiento de Gram Schmidt. Podemos construir los coeficientes a partir de la definición de producto interno $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$

Para ello almacenamos en un arreglo la base de monomios que es, en general, la base "oblicua"

```
> KK := n-2;
for k from 0 to KK do  BaseOblic[k]:= x^k  end do;
```

$$\begin{aligned} KK &:= 5 \\ \text{BaseOblic}_0 &:= 1 \\ \text{BaseOblic}_1 &:= x \\ \text{BaseOblic}_2 &:= x^2 \\ \text{BaseOblic}_3 &:= x^3 \\ \text{BaseOblic}_4 &:= x^4 \\ \text{BaseOblic}_5 &:= x^5 \end{aligned}$$

(11)

y luego ortogonalizamos mediante el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener

```
> BaseOrtog[0] := BaseOblic[0];
BaseOrtog[1] := BaseOblic[1] - (simplify(int(BaseOrtog[0]*BaseOblic[1], x=-1..1)/int(BaseOrtog[0]^2, x=-1..1))
)*BaseOrtog[0];
BaseOrtog[2] := BaseOblic[2] - (simplify(int(BaseOrtog[1]*BaseOblic[2], x=-1..1)/int(BaseOrtog[1]^2, x=-1..1))
)*BaseOrtog[1];
```

```

        - (simplify(int(BaseOrtog[0]*BaseOblic[2],x=-1..1)/int(BaseOrtog[0]^2,x=-1..1)
      )*BaseOrtog[0];
BaseOrtog[3] := BaseOblic[3]- (simplify(int(BaseOrtog[2]*BaseOblic[3],x=-1..1)/int(BaseOrtog[2]^2,x=-1..1)
      )*BaseOrtog[2]
        - (simplify(int(BaseOrtog[1]*BaseOblic[3],x=-1..1)/int(BaseOrtog[1]^2,x=-1..1)
      )*BaseOrtog[1]
        - (simplify(int(BaseOrtog[0]*BaseOblic[3],x=-1..1)/int(BaseOrtog[0]^2,x=-1..1)
      )*BaseOrtog[0];

```

$$\begin{aligned}
 \text{BaseOrtog}_0 &:= 1 \\
 \text{BaseOrtog}_1 &:= x \\
 \text{BaseOrtog}_2 &:= x^2 - \frac{1}{3} \\
 \text{BaseOrtog}_3 &:= x^3 - \frac{3}{5} x
 \end{aligned} \tag{12}$$

Pero la gracia del método de Gram-Schmidt es que es algorítmico y se puede programar. Por lo tanto es más inteligente hacer

```

>BaseOrtog[0]:= BaseOblic[0];
for u from 1 to KK do
  BaseOrtog[u] := BaseOblic[u] -add( (simplify(int(BaseOrtog[v-1]*BaseOblic[u],x=-1..1)/int(BaseOrtog[v-1]^2,x=-1..1)
)) *BaseOrtog[v-1], v=1..u)
end do;

```

$$\begin{aligned}
 \text{BaseOrtog}_0 &:= 1 \\
 \text{BaseOrtog}_1 &:= x \\
 \text{BaseOrtog}_2 &:= x^2 - \frac{1}{3} \\
 \text{BaseOrtog}_3 &:= x^3 - \frac{3}{5} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BaseOrtog}_4 &:= x^4 + \frac{3}{35} - \frac{6}{7} x^2 \\ \text{BaseOrtog}_5 &:= x^5 + \frac{5}{21} x - \frac{10}{9} x^3 \end{aligned} \quad (13)$$

Por construcción serán ortogonales. Miren

```
> int(BaseOrtog[0]*BaseOrtog[1],x=-1..1);
int(BaseOrtog[1]*BaseOrtog[2],x=-1..1);
int(BaseOrtog[1]*BaseOrtog[3],x=-1..1);
```

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (14)$$

Son verdaderamente ortogonales

y podemos expresar la función f como combinación lineal de esta base ortogonal $|f\rangle = C_0|P_0\rangle + C_1|P_1\rangle + C_2|P_2\rangle + C_3|P_3\rangle + C_4|P_4\rangle + \dots$ Donde, gracias a los $|P_n\rangle$ son ortogonales, los coeficientes se pueden calcular fácilmente y uno por uno como $C_n = \frac{\langle f | P_n \rangle}{\langle P_n | P_n \rangle}$. Por lo tanto las proyecciones a lo largo de cada uno de los vectores base serán

```
> BaseOrtog[0]; C[0]:=Int(f(x)*BaseOrtog[0],x=-1..1)/Int(BaseOrtog[0]^2,x=-1..1) =
int(f(x)*BaseOrtog[0],x=-1..1)/int(BaseOrtog[0]^2,x=-1..1);
```

$$C_0 := \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = 0 \quad (15)$$

```
> BaseOrtog[1]; C[1]:=Int(f(x)*BaseOrtog[1],x=-1..1)/Int(BaseOrtog[1]^2,x=-1..1)
=int(f(x)*BaseOrtog[1],x=-1..1)/int(BaseOrtog[1]^2,x=-1..1);evalf(rhs(%));
```

$$C_1 := \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) x \, dx}{\int_{-1}^1 x^2 \, dx} = \frac{\pi \left(-\text{BesselJ}(0, 3) + \frac{2 \text{BesselJ}(1, 3)}{3} \right)}{2}$$

0.7635503665

(16)

```
> BaseOrtog[2];
C[2]:=Int(f(x)*BaseOrtog[2],x=-1..1)/Int(BaseOrtog[2]^2,x=-1..1)=int(f(x)*BaseOrtog[2],x=-1..1)/int(BaseOrtog[2]^2,x=-1..1);
```

$$C_2 := \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \, dx}{\int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \, dx} = 0$$

(17)

Otra vez la hacemos de forma algorítmica y para ello almacenamos los coeficientes en un arreglo y los calculamos

```
> for u from 0 to KK do
  C[u] := evalf(simplify( int(f(x)*BaseOrtog[u],x=-1..1)/int(BaseOrtog[u]^2,x=-1..1) ))
end do;
```

$$\begin{aligned}
C_0 &:= 0. \\
C_1 &:= 0.7635503670 \\
C_2 &:= 0. \\
C_3 &:= -2.625793952 \\
C_4 &:= 0.
\end{aligned}$$

$$C_5 := 2.521874335$$

(18)

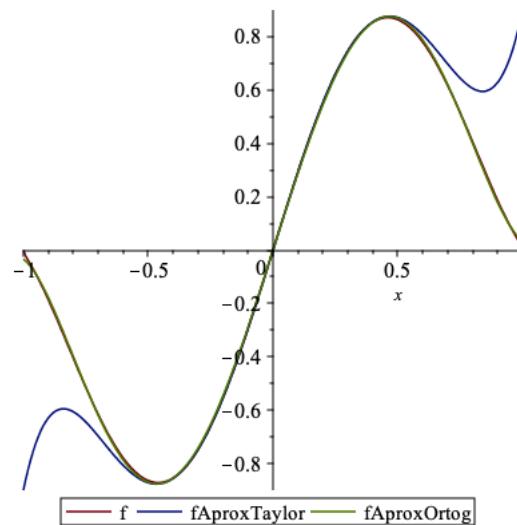
y la combinación lineal será $|f\rangle = C_0|P_0\rangle + C_1|P_1\rangle + C_2|P_2\rangle + C_3|P_3\rangle + C_4|P_4\rangle + \dots$

```
> fAproxOrto1 := add(evalf(C[u])*BaseOrtog[u], u=0..KK);
```

$$fAproxOrto1 := 2.939473008x - 5.427876546x^3 + 2.521874335x^5 \quad (19)$$

y graficamos esta aproximación con la función original

```
> plot([f(x), fAproxTaylor[n], simplify(fAproxOrto1)], x=-1..1, legend=["f", "fAproxTaylor", "fAproxOrto1"]);
```



y los errores serán

En Taylor

```
> "n":=n;"error Taylor":=evalf(ErrorTaylor);
```

$$"n" = 7$$

'error Taylor " =0.3330194739

(20)

```
> "n":=nn;"error Taylor "=evalf(ErrorTaylor2);
```

```
"n" = 9  
"error Taylor " =0.05870966633
```

(21)

En los polinomios de Legendre (polinomios ortogonalizados)

```
> "n":=KK; ErrorOrto1 := evalf(sqrt(int((f(x)-simplify(fAproxOrto1))^2,x=-1..1)));
```

```
"n" = 5  
ErrorOrto1 := 0.009348849336
```

(22)

la expansión en término de funciones ortogonales es mucho mas precisa. En particular 10 veces mas precisa.

¿La expansión en Taylor es la única expansión en una base oblicua de monomios?

Retomamos la base oblicua de monomio y hacemos la expansión de la función como combinación lineal en esa base. Es decir, no utilizamos la receta de Taylor sino que buscamos los coeficientes a partir de proyecciones y resolver un sistema de ecuaciones

```
> fAproxObli := add(Cmono[u]*BaseOblic[u], u=0..KK);
```

```
fAproxObli := Cmono5x5 + Cmono4x4 + Cmono3x3 + Cmono2x2 + Cmono1x + Cmono0
```

(23)

y proyectando con cada uno de los elementos de la base se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas, donde los coeficientes serán las incógnitas

```
> for u from 0 to KK do  
EcuacMono[u] := (int(f(x)*BaseOblic[u],x=-1..1,numeric)) =  
add(Cmono[v]*evalf(int(BaseOblic[v]*BaseOblic[u],x=-1..1,numeric)), v=0..KK);  
end do;
```

$$\begin{aligned}
 EcuacMono_0 &:= 0. = 2. Cmono_0 + 0.6666666667 Cmono_2 + 0.4000000000 Cmono_4 \\
 EcuacMono_1 &:= 0.5090335777 = 0.6666666667 Cmono_1 + 0.4000000000 Cmono_3 + 0.2857142857 Cmono_5 \\
 EcuacMono_2 &:= 0. = 0.6666666667 Cmono_0 + 0.4000000000 Cmono_2 + 0.2857142857 Cmono_4 \\
 EcuacMono_3 &:= 0.1853838518 = 0.4000000000 Cmono_1 + 0.2857142857 Cmono_3 + 0.2222222222 Cmono_5 \\
 EcuacMono_4 &:= 0. = 0.4000000000 Cmono_0 + 0.2857142857 Cmono_2 + 0.2222222222 Cmono_4 \\
 EcuacMono_5 &:= 0.09217724939 = 0.2857142857 Cmono_1 + 0.2222222222 Cmono_3 + 0.1818181818 Cmono_5
 \end{aligned} \tag{24}$$

Construimos una lista con las ecuaciones

```
> ListEcuacMono := {seq(EcuacMono[w], w=0..KK)};
```

$$\begin{aligned}
 ListEcuacMono &:= \{0. = 0.4000000000 Cmono_0 + 0.2857142857 Cmono_2 + 0.2222222222 Cmono_4, 0. = 0.6666666667 Cmono_0 + 0.4000000000 Cmono_2 \\
 &\quad + 0.2857142857 Cmono_4, 0. = 2. Cmono_0 + 0.6666666667 Cmono_2 + 0.4000000000 Cmono_4, 0.09217724939 = 0.2857142857 Cmono_1 \\
 &\quad + 0.2222222222 Cmono_3 + 0.1818181818 Cmono_5, 0.1853838518 = 0.4000000000 Cmono_1 + 0.2857142857 Cmono_3 + 0.2222222222 Cmono_5, \\
 &\quad 0.5090335777 = 0.6666666667 Cmono_1 + 0.4000000000 Cmono_3 + 0.2857142857 Cmono_5\}
 \end{aligned} \tag{25}$$

```
> ListIncogMono := {seq(Cmono[w], w=0..KK)};
```

$$ListIncogMono := \{Cmono_0, Cmono_1, Cmono_2, Cmono_3, Cmono_4, Cmono_5\} \tag{26}$$

Resolvemos el sistema ecuaciones

```
> soluc := fsolve(ListEcuacMono, ListIncogMono); assign(soluc);
```

$$soluc := \{Cmono_0 = 0., Cmono_1 = 2.939473037, Cmono_2 = 0., Cmono_3 = -5.427876682, Cmono_4 = -0., Cmono_5 = 2.521874458\} \tag{27}$$

y la función aproximada será

```
> fAproxObli;
```

$$2.521874458 x^5 - 5.427876682 x^3 + 2.939473037 x \tag{28}$$

y si la comparamos con la expansión en Taylor

```
> fAproxTaylor[n];
```

$$3x - 6x^3 + \frac{39}{10}x^5 \quad (29)$$

Nótese la diferencia entre la expansión por Taylor y la expansión por monomios todas truncadas en el mismo punto.

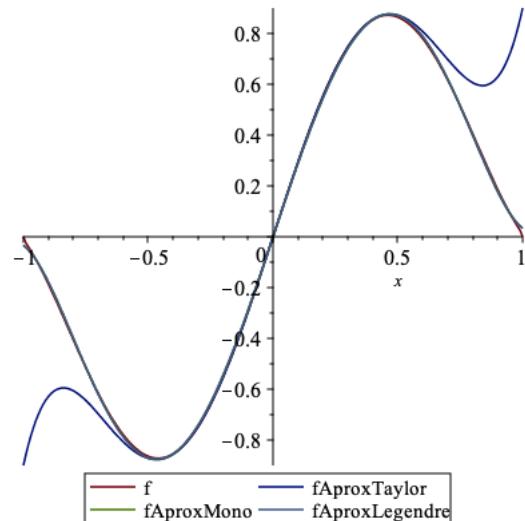
Por su parte la aproximación por funciones ortogonales (polinomios de Legendre)

```
> fAproxOrtol;
```

$$2.939473008x - 5.427876546x^3 + 2.521874335x^5 \quad (30)$$

y la gráfica será

```
> plot([f(x), fAproxTaylor[n], fAproxObli, fAproxOrtol], x=-1..1, legend=["f", "fAproxTaylor", "fAproxMono", "fAproxLegendre"]);
```



Calculamos entonces los errores correspondientes

Error de Taylor

```
> evalf(ErrorTaylor) ;
```

0.3330194739

(31)

Error de la aproximación de monomios

```
> ErrorMono := evalf(sqrt(int((f(x)-fAproxObli)^2,x=-1..1))) ;
```

ErrorMono := 0.009348849453

(32)

Error de Legendre

```
> ErrorOrto1;
```

0.009348849336

(33)

Taylor resulta un fiasco y la proyección sobre los monomios casi es igual que la expansión por polinomios ortogonales. Como demostramos la aproximación en polinomios ortogonales es mejor, pero solo un poco

Base de funciones exponenciales

Igual nos hubiera pasado con otro conjunto de funciones linealmente independiente

```
> exp0 := 1;exp1 := exp(x);exp2 := exp(2*x);exp3 := exp(3*x);exp4 := exp(4*x);exp5 := exp(5*x);exp6 := exp(6*x);  
exp7 := exp(7*x);exp8 := exp(8*x);exp9 := exp(9*x);
```

```

exp0 := 1
exp1 := ex
exp2 := e2x
exp3 := e3x
exp4 := e4x
exp5 := e5x
exp6 := e6x
exp7 := e7x
exp8 := e8x
exp9 := e9x

```

(34)

las cuales claramente no son ortogonales

```
> Int(exp0*exp1,x=-1..1)=int(exp0*exp1,x=-1..1); Int(exp0*exp2,x=-1..1)=int(exp0*exp1,x=-1..1); Int(exp0*exp3,x=-1..1)=int(exp0*exp1,x=-1..1);
```

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^x dx &= -e^{-1} + e \\
\int_{-1}^1 e^{2x} dx &= -e^{-1} + e \\
\int_{-1}^1 e^{3x} dx &= -e^{-1} + e
\end{aligned}$$
(35)

```
> Int(exp1*exp2,x=-1..1)=int(exp1*exp2,x=-1..1); Int(exp1*exp3,x=-1..1)=int(exp1*exp3,x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^1 e^x e^{2x} dx = -\frac{e^{-3}}{3} + \frac{e^3}{3}$$

$$\int_{-1}^1 e^x e^{3x} dx = -\frac{e^{-4}}{4} + \frac{e^4}{4}$$
(36)

Angulos entre las funciones exponeciales

```
>cosangulo01 := int(exp0*exp1, x=-1..1)/(sqrt(int(exp0*exp0, x=-1..1))*sqrt(int(exp1*exp1, x=-1..1)));evalf(%);
```

$$\cosangulo01 := \frac{(-e^{-1}+e)\sqrt{2}}{\sqrt{-2e^{-2}+2e^2}}$$

$$0.8726936206$$
(37)

el ángulo entre exp0 y exp1

```
>arccos(%);
```

$$0.5101042292$$
(38)

```
>cosangulo02 := int(exp0*exp2, x=-1..1)/(sqrt(int(exp0*exp0, x=-1..1))*sqrt(int(exp2*exp2, x=-1..1)));evalf(%);
```

$$\cosangulo02 := \frac{\left(-\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^2}{2}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{-e^{-4}+e^4}}$$

$$0.6942721294$$
(39)

el ángulo entre exp0 y exp2

```
>arccos(%);
```

$$0.8033882551$$
(40)

```
>cosangulo03 := int(exp0*exp3, x=-1..1)/(sqrt(int(exp0*exp0, x=-1..1))*sqrt(int(exp3*exp3, x=-1..1)));evalf(%);
```

$$\cosangulo03 := \frac{3 \left(-\frac{e^{-3}}{3} + \frac{e^3}{3} \right) \sqrt{2}}{\sqrt{-6 e^{-6} + 6 e^6}}$$

0.5759209299 (41)

el ángulo entre $\exp0$ y $\exp3$

>arccos(%);

0.9570661128 (42)

Expansión en la base oblicua de funciones exponenciales

Como las funciones exponenciales son linealmente independientes podemos plantearnos una expansión del tipo $|f> = C0*1 + C1*exp(x) + C2*exp(2*x) + C3*exp(3*x) + \dots$. Pero como la base $\{1, exp(x), exp(2*x), exp(3*x), \dots\}$ no es ortogonal la expansión de una función nos genera un sistema de ecuaciones para despejar los coeficientes C .

Construimos entonces la base oblicua de funciones exponenciales

>for k from 0 to KK do BaseOblic3[k]:=exp(k*x); end do;

$$\begin{aligned}
 \text{BaseOblic3}_0 &:= 1 \\
 \text{BaseOblic3}_1 &:= e^x \\
 \text{BaseOblic3}_2 &:= e^{2x} \\
 \text{BaseOblic3}_3 &:= e^{3x} \\
 \text{BaseOblic3}_4 &:= e^{4x} \\
 \text{BaseOblic3}_5 &:= e^{5x}
 \end{aligned}$$

(43)

y la expansión en esta base de funciones oblicuas

```
> fAproxObli3 := add(CexpOblic[u]*BaseOblic3[u], u=0..KK);
```

$$fAproxObli3 := CexpOblic_0 + CexpOblic_1 e^x + CexpOblic_2 e^{2x} + CexpOblic_3 e^{3x} + CexpOblic_4 e^{4x} + CexpOblic_5 e^{5x} \quad (44)$$

Al igual que hicimos arriba podemos expandir nuestra función en término de esa base oblicua

```
> for u from 0 to KK do
EcuacExpOblic[u] := (int(f(x)*BaseOblic3[u],x=-1..1,numerics)) =
add(CexpOblic[v]*evalf(int(BaseOblic3[v]*BaseOblic3[u],x=-1..1,numerics)), v=0..KK);
end do;
```

$$\begin{aligned}
EcuacExpOblic_0 &:= 0 = .2 \cdot CexpOblic_0 + 2.350402387 \cdot CexpOblic_1 + 3.626860408 \cdot CexpOblic_2 + 6.678583285 \cdot CexpOblic_3 + 13.64495860 \cdot CexpOblic_4 \\
&\quad + 29.68128423 \cdot CexpOblic_5 \\
EcuacExpOblic_1 &:= 0.5407098789 = 2.350402387 \cdot CexpOblic_0 + 3.626860408 \cdot CexpOblic_1 + 6.678583285 \cdot CexpOblic_2 + 13.64495860 \cdot CexpOblic_3 \\
&\quad + 29.68128423 \cdot CexpOblic_4 + 67.23771912 \cdot CexpOblic_5 \\
EcuacExpOblic_2 &:= 1.291253516 = 3.626860408 \cdot CexpOblic_0 + 6.678583285 \cdot CexpOblic_1 + 13.64495860 \cdot CexpOblic_2 + 29.68128423 \cdot CexpOblic_3 \\
&\quad + 67.23771912 \cdot CexpOblic_4 + 156.6617495 \cdot CexpOblic_5 \\
EcuacExpOblic_3 &:= 2.573532407 = 6.678583285 \cdot CexpOblic_0 + 13.64495860 \cdot CexpOblic_1 + 29.68128423 \cdot CexpOblic_2 + 67.23771912 \cdot CexpOblic_3 \\
&\quad + 156.6617495 \cdot CexpOblic_4 + 372.6197064 \cdot CexpOblic_5 \\
EcuacExpOblic_4 &:= 5.004651834 = 13.64495860 \cdot CexpOblic_0 + 29.68128423 \cdot CexpOblic_1 + 67.23771912 \cdot CexpOblic_2 + 156.6617495 \cdot CexpOblic_3 \\
&\quad + 372.6197064 \cdot CexpOblic_4 + 900.3426449 \cdot CexpOblic_5 \\
EcuacExpOblic_5 &:= 9.872377974 = 29.68128423 \cdot CexpOblic_0 + 67.23771912 \cdot CexpOblic_1 + 156.6617495 \cdot CexpOblic_2 + 372.6197064 \cdot CexpOblic_3 \\
&\quad + 900.3426449 \cdot CexpOblic_4 + 2202.646575 \cdot CexpOblic_5
\end{aligned} \quad (45)$$

Una vez mas, construimos una lista con las ecuaciones

```
> ListEcuacExpOblic := {seq(EcuacExpOblic[w], w=0..KK)};
```

$$\begin{aligned}
 ListEcuacExpOblic := & \{ 0. = 2. CexpOblic_0 + 2.350402387 CexpOblic_1 + 3.626860408 CexpOblic_2 + 6.678583285 CexpOblic_3 + 13.64495860 CexpOblic_4 \\
 & + 29.68128423 CexpOblic_5, 0.5407098789 = 2.350402387 CexpOblic_0 + 3.626860408 CexpOblic_1 + 6.678583285 CexpOblic_2 \\
 & + 13.64495860 CexpOblic_3 + 29.68128423 CexpOblic_4 + 67.23771912 CexpOblic_5, 1.291253516 = 3.626860408 CexpOblic_0 + 6.678583285 CexpOblic_1 \\
 & + 13.64495860 CexpOblic_2 + 29.68128423 CexpOblic_3 + 67.23771912 CexpOblic_4 + 156.6617495 CexpOblic_5, 2.573532407 = 6.678583285 CexpOblic_0 \\
 & + 13.64495860 CexpOblic_1 + 29.68128423 CexpOblic_2 + 67.23771912 CexpOblic_3 + 156.6617495 CexpOblic_4 + 372.6197064 CexpOblic_5, \\
 & 5.004651834 = 13.64495860 CexpOblic_0 + 29.68128423 CexpOblic_1 + 67.23771912 CexpOblic_2 + 156.6617495 CexpOblic_3 + 372.6197064 CexpOblic_4 \\
 & + 900.3426449 CexpOblic_5, 9.872377974 = 29.68128423 CexpOblic_0 + 67.23771912 CexpOblic_1 + 156.6617495 CexpOblic_2 + 372.6197064 CexpOblic_3 \\
 & + 900.3426449 CexpOblic_4 + 2202.646575 CexpOblic_5 \}
 \end{aligned} \tag{46}$$

```
> ListIncogExpOblic := {seq(CexpOblic[w], w=0..KK)};
```

$$ListIncogExpOblic := \{CexpOblic_0, CexpOblic_1, CexpOblic_2, CexpOblic_3, CexpOblic_4, CexpOblic_5\} \tag{47}$$

```
> solucExpOblic:= fsolve(ListEcuacExpOblic,ListIncogExpOblic);assign(solucExpOblic);
```

$$\begin{aligned}
 solucExpOblic := & \{ CexpOblic_0 = 7.783863816, CexpOblic_1 = -37.29378628, CexpOblic_2 = 56.78012295, CexpOblic_3 = -37.13200709, CexpOblic_4 \\
 & = 11.07660084, CexpOblic_5 = -1.246457563 \}
 \end{aligned} \tag{48}$$

finalmente la expansión en la base oblicua de funciones exponenciales será

```
> fAproxObli3;
```

$$7.783863816 - 37.29378628 e^x + 56.78012295 e^{2x} - 37.13200709 e^{3x} + 11.07660084 e^{4x} - 1.246457563 e^{5x} \tag{49}$$

Bases Exponenciales ortogonales

Igual las podemos ortogonalizar, y para empezar almacenamos las funciones de la base oblicua en un arreglo y ortogonalizamos con Gram-Schmidt

```
> BaseOrtog3[0]:=BaseOblic3[0];
for u from 1 to KK do
  BaseOrtog3[u] := (BaseOblic3[u] -add( (simplify(int(BaseOrtog3[v-1]*BaseOblic3[u],x=-1..1)/int(BaseOrtog3[v-1]^2,x=-1..1) ))*BaseOrtog3[v-1], v=1..u))
end do;
```

$$\begin{aligned}
& \text{BaseOrtog3}_0 := 1 \\
& \text{BaseOrtog3}_1 := e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \\
& \text{BaseOrtog3}_2 := e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1}(e^4 + 4e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \\
& \text{BaseOrtog3}_3 := e^{3x} + \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{6} - \frac{e^{-2}(e^6 + 3e^4 + 3e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \\
& \quad - \frac{e^{-1}(5e^6 - 39e^4 - 57e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1}(e^4 + 4e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5e^4 - 40e^2 - 25} \\
& \text{BaseOrtog3}_4 := e^{4x} + \frac{e^{-4}}{8} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^{-3}(3e^8 + 8e^6 + 8e^4 + 8e^2 + 13) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{40} \\
& \quad - \frac{(9e^6 - 72e^4 - 57e^2 - 120e^2 - 120) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1}(e^4 + 4e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{10e^4 - 80e^2 - 50} \\
& \quad - \frac{1}{-35e^6 + 189e^4 + 567e^2 + 119} \left((-57e^7 + 276e^5 + 1080e^3 + 201e^{-1} + 1020e) \left(e^{3x} + \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{6} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{e^{-2}(e^6 + 3e^4 + 3e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right. \\
& \quad \left. - \frac{e^{-1}(5e^6 - 39e^4 - 57e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1}(e^4 + 4e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5e^4 - 40e^2 - 25} \right) \\
& \text{BaseOrtog3}_5 := e^{5x} + \frac{e^{-5}}{10} - \frac{e^5}{10} - \frac{e^{-4}(2e^{10} + 5e^8 + 5e^6 + 5e^4 + 5e^2 + 8) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{30} \\
& \quad + \frac{2e^{-3}(-14e^{10} + 115e^8 + 205e^6 + 235e^4 + 205e^2 + 94) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1}(e^4 + 4e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{35e^4 - 280e^2 - 175} \\
& \quad - \frac{1}{-35e^6 + 189e^4 + 567e^2 + 119} \left((-69e^8 + 315e^6 + 1380e^4 + 1860e^2 + 249e^{-2} + 1305) \left(e^{3x} + \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{6} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{e^{-2}(e^6 + 3e^4 + 3e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right. \\
& \quad \left. - \frac{e^{-1}(5e^6 - 39e^4 - 57e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1}(e^4 + 4e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5e^4 - 40e^2 - 25} \right) \\
& \quad - \frac{1}{-117e^8 + 288e^6 + 3888e^4 + 3168e^2 + 333} \left((-254e^9 + 490e^7 + 8440e^5 + 13640e^3 + 734e^{-1} + 7190e) \left(e^{4x} + \frac{e^{-4}}{8} - \frac{e^4}{8} \right) \right)
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{e^{-3} (3 e^8 + 8 e^6 + 8 e^4 + 8 e^2 + 13) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{40} \\
& - \frac{(9 e^6 - 72 e^4 - 57 e^2 - 120 e^0 - 120) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{10 e^4 - 80 e^2 - 50} \\
& - \frac{1}{-35 e^6 + 189 e^4 + 567 e^2 + 119} \left[(-57 e^7 + 276 e^5 + 1080 e^3 + 201 e^{-1} + 1020 e) \left(e^{3x} + \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{6} \right) \right. \\
& - \frac{e^{-2} (e^6 + 3 e^4 + 3 e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \\
& \left. - \frac{e^{-1} (5 e^6 - 39 e^4 - 57 e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5 e^4 - 40 e^2 - 25} \right] \]
\end{aligned}$$

```

>int(BaseOrtog3[2]*BaseOrtog3[3],x=-1..1);
int(BaseOrtog3[1]*BaseOrtog3[3],x=-1..1);
int(BaseOrtog3[4]*BaseOrtog3[3],x=-1..1);

```

0
0
0

(51)

y los nuevos coeficientes serán

```

>for u from 0 to KK do
CexpOrt[u] := (simplify( int(f(x)*BaseOrtog3[u],x=-1..1,numERIC)/int(BaseOrtog3[u]^2,x=-1..1,numERIC) ))
end do;

```

$$\begin{aligned}
CexpOrt_0 &:= 0 \\
CexpOrt_1 &:= 0.6253405145 \\
CexpOrt_2 &:= -0.6962843792 \\
CexpOrt_3 &:= -0.8541834883 \\
CexpOrt_4 &:= 1.802274230 \\
CexpOrt_5 &:= -1.248527815
\end{aligned} \tag{52}$$

y la combinación lineal

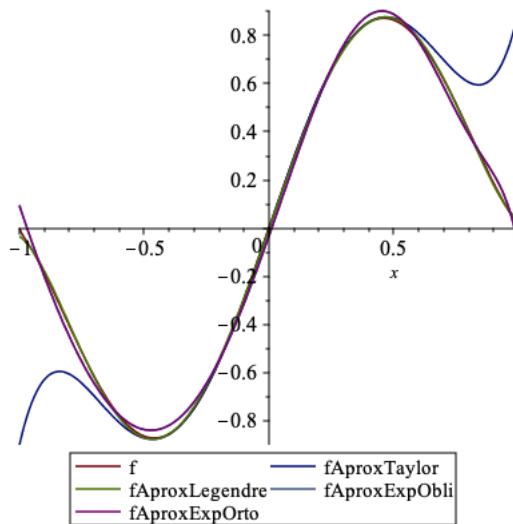
```
> fAproxOrto3 := add(CexpOrt[u]*BaseOrtog3[u], u=0..KK);
```

$$\begin{aligned}
fAproxOrto3 &:= 1.802274230 e^{4x} - 0.6962843792 e^{2x} - 0.3126702572 e^{-} - 0.8541834883 e^{3x} + 0.3126702572 e^{-1} - 1.248527815 e^{5x} \\
&\quad - \frac{1.802274230 (9 e^6 - 72 e^4 - 57 e^2 - 120 e^0 - 120) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{10 e^4 - 80 e^2 - 50} - 0.1248527815 e^{-5} \\
&\quad + 0.07118195736 e^{-2} (e^6 + 3 e^4 + 3 e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right) + 0.05802369827 e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right) - 0.04505685575 e^{-3} (3 e^8 \\
&\quad + 8 e^6 + 8 e^4 + 8 e^2 + 13) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right) + 0.6253405145 e^x + 0.1248527815 e^5 - 0.1423639147 e^{-3} + 0.1423639147 e^3 \\
&\quad + \frac{0.8541834883 e^{-1} (5 e^6 - 39 e^4 - 57 e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5 e^4 - 40 e^2 - 25} + 0.2252842788 e^{-4} \\
&\quad - 0.2252842788 e^4 - 0.1740710948 e^{-2} + 0.1740710948 e^2 - \frac{1}{-35 e^6 + 189 e^4 + 567 e^2 + 119} \left(1.802274230 (-57 e^7 + 276 e^5 + 1080 e^3 \right. \\
&\quad \left. + 201 e^{-1} + 1020 e) \left(e^{3x} + \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{6} - \frac{e^{-2} (e^6 + 3 e^4 + 3 e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-1} (5 e^6 - 39 e^4 - 57 e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5 e^4 - 40 e^2 - 25} \right) \\
&\quad + \frac{1}{-35 e^6 + 189 e^4 + 567 e^2 + 119} \left(1.248527815 (-69 e^8 + 315 e^6 + 1380 e^4 + 1860 e^2 + 249 e^{-2} + 1305) \left(e^{3x} + \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{6} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{e^{-2} (e^6 + 3 e^4 + 3 e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{-1} (5 e^6 - 39 e^4 - 57 e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5 e^4 - 40 e^2 - 25} \right) \right) + 0.04161759383 e^{-4} (2 e^{10} + 5 e^8 + 5 e^6 \\
&\quad + 5 e^4 + 5 e^2 + 8) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right) \\
&\quad - \frac{2.497055630 e^{-3} (-14 e^{10} + 115 e^8 + 205 e^6 + 235 e^4 + 205 e^2 + 94) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{35 e^4 - 280 e^2 - 175}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{-117 e^8 + 288 e^6 + 3888 e^4 + 3168 e^2 + 333} \left[1.248527815 (-254 e^9 + 490 e^7 + 8440 e^5 + 13640 e^3 + 734 e^{-1} + 7190 e) \left(e^{4x} + \frac{e^{-4}}{8} - \frac{e^4}{8} \right) \right. \\
 & - \frac{e^{-3} (3 e^8 + 8 e^6 + 8 e^4 + 8 e^2 + 13) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{40} \\
 & - \frac{(9 e^6 - 72 e^4 - 57 e^2 - 120 e^0 - 120) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{10 e^4 - 80 e^2 - 50} \\
 & - \frac{1}{-35 e^6 + 189 e^4 + 567 e^2 + 119} \left(-57 e^7 + 276 e^5 + 1080 e^3 + 201 e^{-1} + 1020 e \right) \left(e^{3x} + \frac{e^{-3}}{6} - \frac{e^3}{6} \right) \\
 & - \frac{e^{-2} (e^6 + 3 e^4 + 3 e^2 + 5) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \\
 & \left. - \frac{e^{-1} (5 e^6 - 39 e^4 - 57 e^2 - 29) \left(e^{2x} + \frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-1} (e^4 + 4 e^2 + 7) \left(e^x + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e}{2} \right)}{12} \right)}{5 e^4 - 40 e^2 - 25} \right] \right]
 \end{aligned}$$

y la gráfica será

```
>plot([f(x), fAproxTaylor[n], fAproxOrto1, fAproxObli3, fAproxOrto3], x=-1..1, legend=
["f", "fAproxTaylor", "fAproxLegendre", "fAproxExpObli", "fAproxExpOrto" ]);
```



y los errores

El de Taylor

```
>evalf(ErrorTaylor) ;
```

$$0.3330194739$$

(54)

El de Legendre

```
>evalf(ErrorOrto1) ;
```

$$0.009348849336$$

(55)

El error de la base de funciones exponenciales oblicuas

```
>ErrorOrto3 := (sqrt(int((f(x)-fAproxObli3)^2,x=-1..1,numeric))) ;
```

$$\text{ErrorOrto3} := 0.03914518801$$

(56)

El error de la base de funciones exponenciales ortogonales

```
>ErrorOrto3 := (sqrt(int((f(x)-fAproxOrto3)^2,x=-1..1,numeric))) ;
```

$$\text{ErrorOrto3} := 0.03914443568$$

(57)

Es claro que la expansión en una base de funciones ortogonales, no necesariamente es más precisa. Cuando comparamos polimomios, claramente si lo es.

Polinomios ortogonales predefinidos

En MAPLE los polinomios ortogonales están predefinidos (en una biblioteca orthopoly) y se denotan como $P(n,x)$ donde n es el orden del polinomo y x la variable. Para detalles pueden consultar la hoja de ayuda

```
>with(orthopoly) ;
```

$$[G, H, L, P, T, U]$$

(58)

> ?P

> P(0,x);P(1,x);P(2,x);P(3,x);P(4,x);P(5,x);

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x} \\
 & -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2} \\
 & \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\
 & \frac{3}{8} + \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 \\
 & \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x
 \end{aligned} \tag{59}$$

Los Polinomios de Legendre son ortogonales bajo un producto interno definido por $\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n P_m dx$

> int(P(z,x)*P(m,x),x=-1..1);

$$\int_{-1}^1 P(z, x) P(m, x) dx \tag{60}$$

> int(P(14,x)*P(28,x),x=-1..1);

0

(61)

> int(P(77,x)*P(77,x),x=-1..1);

Por lo tanto los coeficientes de la expansión serán $\langle f | P_m \rangle = \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx$

$m=0$

```
> Int(f(x)*P(0,x),x=-1..1)/Int(P(0,x)*P(0,x),x=-1..1)=int(f(x)*P(0,x),x=-1..1)/int(P(0,x)*P(0,x),x=-1..1);
```

$$\frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = 0 \quad (63)$$

$m=1$

```
> Int(f(x)*P(1,x),x=-1..1)/Int(P(1,x)*P(1,x),x=-1..1)=int(f(x)*P(1,x),x=-1..1)/int(P(1,x)*P(1,x),x=-1..1);
```

$$\frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) x dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{\pi \left(-\text{BesselJ}(0, 3) + \frac{2 \text{BesselJ}(1, 3)}{3} \right)}{2} \quad (64)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.7635503665 = 0.7635503665$$

$m=2$

```
> Int(f(x)*P(2,x),x=-1..1)/Int(P(2,x)*P(2,x),x=-1..1)=int(f(x)*P(2,x),x=-1..1)/int(P(2,x)*P(2,x),x=-1..1);
```

$$\frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) \left(-\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2}\right) dx}{\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2}\right)^2 dx} = 0 \quad (66)$$

m=3

```
> Int(f(x)*P(3,x),x=-1..1)/Int(P(3,x)*P(3,x),x=-1..1)=int(f(x)*P(3,x),x=-1..1)/int(P(3,x)*P(3,x),x=-1..1);
```

$$\frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) dx}{\int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx} = \frac{35\pi \left(\frac{3 \text{BesselJ}(0, 3)}{4} + \frac{7 \text{BesselJ}(1, 3)}{4}\right)}{27} - \frac{7\pi \left(-\text{BesselJ}(0, 3) + \frac{2 \text{BesselJ}(1, 3)}{3}\right)}{4} \quad (67)$$

```
> evalf(%);
```

$$-1.050317580 = -1.050317580 \quad (68)$$

m=4

```
> Int(f(x)*P(4,x),x=-1..1)/Int(P(4,x)*P(4,x),x=-1..1)=int(f(x)*P(4,x),x=-1..1)/int(P(4,x)*P(4,x),x=-1..1);
```

$$\frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) \left(\frac{3}{8} + \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2\right) dx}{\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{8} + \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2\right)^2 dx} = 0 \quad (69)$$

en general los coeficientes de la expansión se expresan

```
> CoefLegendre[z]:= int(f(x)*P(z,x),x=-1..1)/int(P(z,x)*P(z,x),x=-1..1);
```

$$\text{CoefLegendre}_z := \frac{\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) P(z, x) dx}{\int_{-1}^1 P(z, x)^2 dx} \quad (70)$$

y la aproximación de la función

```
> f(x)=Sum(CoefLegendre[z]*P(z,x),z=0..nn);
```

$$\sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) = \sum_{z=0}^9 \frac{\left(\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) P(z, x) dx \right) P(z, x)}{\int_{-1}^1 P(z, x)^2 dx} \quad (71)$$

```
> h:=5;
```

$$h := 5 \quad (72)$$

```
> f(x)=Sum(CoefLegendre[z]*P(z,x),z=0..h);
```

$$\sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) = \sum_{z=0}^5 \frac{\left(\int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} \sin(3x) P(z, x) dx \right) P(z, x)}{\int_{-1}^1 P(z, x)^2 dx} \quad (73)$$

```
> AproxLegendre[h]:= sum(CoefLegendre[z]*P(z,x),z=0..h);
```

$$\begin{aligned} AproxLegendre_5 &:= \frac{\pi \left(-\text{BesselJ}(0, 3) + \frac{2 \text{BesselJ}(1, 3)}{3} \right) x}{2} \\ &+ \frac{7 \left(\frac{10 \pi \left(\frac{3 \text{BesselJ}(0, 3)}{4} + \frac{7 \text{BesselJ}(1, 3)}{4} \right)}{27} - \frac{\pi \left(-\text{BesselJ}(0, 3) + \frac{2 \text{BesselJ}(1, 3)}{3} \right)}{2} \right) \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right)}{2} \end{aligned} \quad (74)$$

```
> ?BesselJ
```

```
> simplify(AproxLegendre[h]);
```

```
>plot([f(x),AproxLegendre[h]],x=-1..1, legend=[ "f", "AproxLegendre" ]);
```

Otra vez, el error de la aproximación será la norma de la distancia entre los dos vectores. Esto es

```
>ErrorLegendre := sqrt(int((f(x)-AproxLegendre[h])^2,x=-1..1));
```

es decir

```
>evalf(%);
```

Otro conjunto de polinomios ortogonales son los polinomios de Tchevichev

```
>T(0,x);T(1,x);T(2,x);T(3,x);T(4,x);T(5,x);
```

(78)

Que se parecen a los de Legendre, pero no son

```
>P(0,x);P(1,x);P(2,x);P(3,x);P(4,x);P(5,x);
```

(79)

Porque el producto interno con el cual ortogonalizamos la base de monomios

es distinto

```
>pesoChevichev := 1/sqrt(1-x^2);
CoefChevi[m]:= int(f(x)*T(m,x)*pesoChevichev,x=-1..1)/int(T(m,x)*T(m,x)*pesoChevichev,x=-1..1);
```

(80)

```
>AproxChevi[h]:= sum(CoefChevi[m]*T(m,x),m=0..h);
```

(81)

```
>Taylor[h+2]:= taylor(f(x),x=0,h+2); AproxTaylor[h+2]:=convert(Taylor[h+2],polynom);
```

(82)

```
>plot([f(x),AproxTaylor[h+2],AproxLegendre[h],AproxChevi[h]],x=-1..1);
```

```
>ErrorChevi := sqrt(int((f(x)-AproxChevi[h])^2*pesoChevichev,x=-1..1));
```

(83)

```
>evalf(%);
```

(84)

Si seleccionamos una función un poco mas compleja

```
>restart: with(plots): with(orthopoly);
```

(85)

```
>f := x -> sqrt(x^4+x^2+1)*sin(3*Pi*x);plot(f(x), x=-1..1);
```

Probamos con Taylor

```
>n:=10;
```

(86)

```
>Taylor[n]:= taylor(f(x) ,x=0 ,n) ;
```

(87)

```
>AproxTaylor[n]:=convert(Taylor[n] ,polynom) ;
```

(88)

```
>plot([f(x),AproxTaylor[n]],x=-1..1,y=-2..2);
```

y con Legendre

```
>CoefLegendre[k]:= int(f(x)*P(k,x),x=-1..1)/int(P(k,x)*P(k,x),x=-1..1);
```

```
>AproxLegendre[n]:= sum(CoefLegendre[k]*P(k,x),k=0..n);
```

(89)

(90)

```
> simplify(%);
```

(91)

```
> AproxLegendreDefitiva:=evalf(%);
```

(92)

```
> plot([f(x),AproxTaylor[n],AproxLegendreDefitiva],x=-1..1,y=-2..2,legend=["func","AproxTaylor","AproxLegendre"]);
```

Los errores

```
>ErrorTaylor := sqrt(int((f(x)-AproxTaylor[n])^2,x=-1..1));
```

(93)

```
>evalf(%);
```

(94)

```
>ErrorLegendre := sqrt(int((f(x)-AproxLegendreDefitiva)^2,x=-1..1));
```

(95)

```
>evalf(%);
```

>

>

>