

# Series de Laurent y Residuos

**Luis A. Núñez**

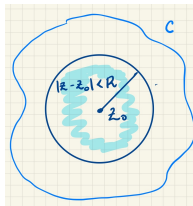
*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



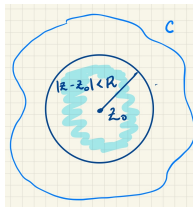
12 de agosto de 2021

- 1 Series de Taylor y funciones analíticas
- 2 Series de Laurent
- 3 Un ejemplo a pie con  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$
- 4 Residuos
- 5 Recapitulando

- Si  $f(z)$  es analítica en un círculo de radio  $R$ , encerrado por un contorno  $\mathcal{C}$  y centrado en un punto  $z = z_0$ , entonces  $f(z)$  puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo  $|z - z_0| < R$



- Si  $f(z)$  es analítica en un círculo de radio  $R$ , encerrado por un contorno  $\mathcal{C}$  y centrado en un punto  $z = z_0$ , entonces  $f(z)$  puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo  $|z - z_0| < R$



- Entonces  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \equiv f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_n$ , con el resto  $R_n(z)$  definido como:

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)}.$$

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \frac{1}{z - z_0} \right]_{1 - \frac{1}{\zeta - z_0}},$$

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \frac{1}{z - z_0} \right]_{1 - \frac{1}{\zeta - z_0}},$$

- Pero alguien muy genial se dio cuenta que  $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right],$$

- Pero alguien muy genial se dio cuenta que  $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}$ .
- Entonces:  $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left( \frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right]$$

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \frac{1}{\frac{z - z_0}{1 - \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z_0}}} \right],$$

- Pero alguien muy genial se dio cuenta que  $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}$ .

- Entonces:  $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left( \frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right]$$

- Finalmente,  $f(z) = \sum_{j=0}^n (z - z_0)^j \left( \frac{1}{2i\pi} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \right) + R_n(z) =$

$$\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j + R_n(z) \text{ donde:}$$

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_C d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)}.$$



- Si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$ , en  $z = z_0$ , dentro de  $\mathcal{R}$ , no será analítica. Mientras que la función:  $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$  si lo será en todos los puntos de esa región.

- Si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$ , en  $z = z_0$ , dentro de  $\mathcal{R}$ , no será analítica. Mientras que la función:  $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$  si lo será en todos los puntos de esa región.
- Entonces alrededor de  $z = z_0$  tendremos  $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$

- Si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$ , en  $z = z_0$ , dentro de  $\mathcal{R}$ , no será analítica. Mientras que la función:  $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$  si lo será en todos los puntos de esa región.
- Entonces alrededor de  $z = z_0$  tendremos  $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
- Es decir  $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{parte analítica}}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2.$

- Si  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$ , en  $z = z_0$ , dentro de  $\mathcal{R}$ , no será analítica. Mientras que la función:  $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$  si lo será en todos los puntos de esa región.
- Entonces alrededor de  $z = z_0$  tendremos  $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
- Es decir  $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{parte analítica}}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2.$
- Con  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$  y  $b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-k+1}} dz, \quad k = 1, 2, \dots$

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función  $f(z)$  alrededor de un punto  $z = z_0$  para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si  $f(z)$  es analítica alrededor de  $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$ .

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función  $f(z)$  alrededor de un punto  $z = z_0$  para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si  $f(z)$  es analítica alrededor de  $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$ .
- Puede ocurrir que no sólo todos los  $b_k$  sean cero para sino que  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  sean también cero.

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función  $f(z)$  alrededor de un punto  $z = z_0$  para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si  $f(z)$  es analítica alrededor de  $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$ .
- Puede ocurrir que no sólo todos los  $b_k$  sean cero para sino que  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  sean también cero.
- En este caso el primer término distinto de cero es  $a_m(z - z_0)^m$  con  $m > 0$ , entonces que  $f(z)$  tiene un cero de orden  $m$  en  $z = z_0$ .

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función  $f(z)$  alrededor de un punto  $z = z_0$  para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si  $f(z)$  es analítica alrededor de  $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$ .
- Puede ocurrir que no sólo todos los  $b_k$  sean cero para sino que  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  sean también cero.
- En este caso el primer término distinto de cero es  $a_m(z - z_0)^m$  con  $m > 0$ , entonces que  $f(z)$  tiene un cero de orden  $m$  en  $z = z_0$ .
- Si  $f(z)$  no es analítica en  $z = z_0$  se dan dos casos,
  - Es posible encontrar un número entero  $p$  tal que  $a_{-p} \neq 0$  pero  $a_{-p-k} = 0$  para todo entero  $k > 0$ . Entonces  $f(z)$  tiene un polo de orden  $p$  en  $z = z_0$ . Al valor de  $b_{-1}$  se llama el residuo de  $f(z)$  en el polo  $z = z_0$ .
  - No es posible encontrar ese valor mínimo de  $-p$ . Si las potencias decrecientes negativas de  $z - z_0$  no terminan, se dice que  $f(z)$  tiene una singularidad esencial.



# Un ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ , polo $z = 0$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de  $z = 0$

- Tendremos que

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{8z(1 - z/2)^3} \\ &= -\frac{1}{8z} \left[ 1 + (-3) \left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!} \left(-\frac{z}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!} \left(-\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{8z} - \frac{3}{16} - \frac{3z}{16} - \frac{5z^2}{32} - \dots \end{aligned}$$

# Un ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ , polo $z = 0$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de  $z = 0$

- Tendremos que

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{8z(1 - z/2)^3} \\ &= -\frac{1}{8z} \left[ 1 + (-3) \left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!} \left(-\frac{z}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!} \left(-\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{8z} - \frac{3}{16} - \frac{3z}{16} - \frac{5z^2}{32} - \dots \end{aligned}$$

- Como la menor potencia de  $z$  es  $-1$ , el punto  $z = 0$  es un polo de orden 1.

# Un ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ , polo $z = 0$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de  $z = 0$

- Tendremos que

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{8z(1 - z/2)^3} \\ &= -\frac{1}{8z} \left[ 1 + (-3) \left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!} \left(-\frac{z}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!} \left(-\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{8z} - \frac{3}{16} - \frac{3z}{16} - \frac{5z^2}{32} - \dots \end{aligned}$$

- Como la menor potencia de  $z$  es  $-1$ , el punto  $z = 0$  es un polo de orden 1.
- El residuo de  $f(z)$  en  $z = 0$  es el coeficiente de  $z^{-1}$  en la expansión de Laurent en ese punto y es igual a  $-1/8$ .

# Un ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ , polo $z = 2$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de  $z = 2$  cambiando variables  
 $z = 2 + \xi \Rightarrow \xi = z - 2$

- Entonces tendremos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2 + \xi)\xi^3} = \frac{1}{2\xi^3(1 + \xi/2)} \\ &= \frac{1}{2\xi^3} \left[ 1 - \left(\frac{\xi}{2}\right) + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \dots \right] \\ &= \frac{1}{2\xi^3} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{1}{8\xi} - \frac{1}{16} + \frac{\xi}{32} - \dots \\ &= \frac{1}{2(z-2)^3} - \frac{1}{4(z-2)^2} + \frac{1}{8(z-2)} - \frac{1}{16} + \frac{z-2}{32} - \dots \end{aligned}$$

# Un ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ , polo $z = 2$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de  $z = 2$  cambiando variables  
 $z = 2 + \xi \Rightarrow \xi = z - 2$

- Entonces tendremos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2 + \xi)\xi^3} = \frac{1}{2\xi^3(1 + \xi/2)} \\ &= \frac{1}{2\xi^3} \left[ 1 - \left(\frac{\xi}{2}\right) + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \dots \right] \\ &= \frac{1}{2\xi^3} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{1}{8\xi} - \frac{1}{16} + \frac{\xi}{32} - \dots \\ &= \frac{1}{2(z-2)^3} - \frac{1}{4(z-2)^2} + \frac{1}{8(z-2)} - \frac{1}{16} + \frac{z-2}{32} - \dots \end{aligned}$$

- Notamos que  $z = 2$  es un polo de orden 3 y que el residuo de  $f(z)$  en  $z = 2$  es  $1/8$ .

# Un ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ , polo $z = 2$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de  $z = 2$  cambiando variables  
 $z = 2 + \xi \Rightarrow \xi = z - 2$

- Entonces tendremos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2 + \xi)\xi^3} = \frac{1}{2\xi^3(1 + \xi/2)} \\ &= \frac{1}{2\xi^3} \left[ 1 - \left(\frac{\xi}{2}\right) + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \dots \right] \\ &= \frac{1}{2\xi^3} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{1}{8\xi} - \frac{1}{16} + \frac{\xi}{32} - \dots \\ &= \frac{1}{2(z-2)^3} - \frac{1}{4(z-2)^2} + \frac{1}{8(z-2)} - \frac{1}{16} + \frac{z-2}{32} - \dots \end{aligned}$$

- Notamos que  $z = 2$  es un polo de orden 3 y que el residuo de  $f(z)$  en  $z = 2$  es  $1/8$ .
- Encuentre los desarrollos de Laurent, los polos y los residuos para  $f(z) = e^{3z}(z+1)^{-3}$  y  $g(z) = (z+2)\sin\frac{1}{z+2}$ ,

- Si  $f(z)$  es analítica y univaluada en la vecindad de un punto  $z = z_0$ , entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta  $\oint_C dz f(z) = 0$

- Si  $f(z)$  es analítica y univaluada en la vecindad de un punto  $z = z_0$ , entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$
- Si  $f(z)$  tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en  $z = z_0$  dentro de un circuito de  $\mathcal{C}$ , entonces  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) \neq 0$  y expresamos  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$



- Si  $f(z)$  es analítica y univaluada en la vecindad de un punto  $z = z_0$ , entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$
- Si  $f(z)$  tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en  $z = z_0$  dentro de un circuito de  $\mathcal{C}$ , entonces  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) \neq 0$  y expresamos 
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$$
- Con lo cual  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- Si  $f(z)$  es analítica y univaluada en la vecindad de un punto  $z = z_0$ , entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta  $\oint_C dz f(z) = 0$
- Si  $f(z)$  tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en  $z = z_0$  dentro de un circuito de  $C$ , entonces  $\oint_C dz f(z) \neq 0$  y expresamos 
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$$
- Con lo cual  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Para el caso particular  $n = -1$  llamaremos residuo de  $f(z)$  en  $z = z_0$  
$$c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$$

- Si  $f(z)$  es analítica y univaluada en la vecindad de un punto  $z = z_0$ , entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$
- Si  $f(z)$  tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en  $z = z_0$  dentro de un circuito de  $\mathcal{C}$ , entonces  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) \neq 0$  y expresamos  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$
- Con lo cual  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Para el caso particular  $n = -1$  llamaremos residuo de  $f(z)$  en  $z = z_0$   $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$
- Si  $f(z)$  tiene un polo simple en  $z = z_0$ , la serie de Laurent es  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \cdots$

- Si  $f(z)$  es analítica y univaluada en la vecindad de un punto  $z = z_0$ , entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$
- Si  $f(z)$  tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en  $z = z_0$  dentro de un circuito de  $\mathcal{C}$ , entonces  $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) \neq 0$  y expresamos  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$
- Con lo cual  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Para el caso particular  $n = -1$  llamaremos residuo de  $f(z)$  en  $z = z_0$   $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$
- Si  $f(z)$  tiene un polo simple en  $z = z_0$ , la serie de Laurent es  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \cdots$
- Entonces  $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

- Si  $f(z)$  es analítica y univaluada en la vecindad de un punto  $z = z_0$ , entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta  $\oint_C dz f(z) = 0$
- Si  $f(z)$  tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en  $z = z_0$  dentro de un circuito de  $C$ , entonces  $\oint_C dz f(z) \neq 0$  y expresamos  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$
- Con lo cual  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Para el caso particular  $n = -1$  llamaremos residuo de  $f(z)$  en  $z = z_0$   $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$
- Si  $f(z)$  tiene un polo simple en  $z = z_0$ , la serie de Laurent es  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \dots$
- Entonces  $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$
- Si  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  con  $p(z)$  y  $q(z)$  analíticas en  $z = z_0$ ,  $p(z_0) \neq 0$  y  $q(z)$  con un cero simple en  $z = z_0$ . Entonces  $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0)[q'(z_0) + (z - z_0)q''(z_0)/2 + \dots]} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

En presentación consideramos

1