Funcionales lineales y Distribuciones

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

15 de julio de 2022

Agenda: Funcionales lineales y Distribuciones

1. Funcionales lineales y Distribuciones
2. Funciones de prueba, soporte y Delta de Dirac
3. Delta de Dirac: Generalidades
4. Delta de Dirac: Distribuciones y Sucesiones
5. Delta de Dirac: Propiedades
6. Ejemplos para la discusión
7. Recapitulando

- En el concepto de impulso $\vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_\tau = \int_0^\tau \vec{F}(t)\mathrm{d}t$
$\Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_{t_0+\tau} - \vec{p}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$, la fuerza $\vec{F}(t)$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo muy corto de tiempo y cambia su cantidad de movimiento $\vec{p}_{t_0} \rightarrow \vec{p}_{t_0+\tau}$.

- En el concepto de impulso $\vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_\tau = \int_0^\tau \vec{F}(t)\mathrm{d}t$ $\Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_{t_0+\tau} - \vec{p}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$, la fuerza $\vec{F}(t)$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo muy corto de tiempo y cambia su cantidad de movimiento $\vec{p}_{t_0} \to \vec{p}_{t_0+\tau}$.
- La cantidad físicamente importante es el valor de la integral. Se asocia con el impulso que se le provee al cuerpo para sacarlo del reposo.

- En el concepto de impulso $\vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_\tau = \int_0^\tau \vec{F}(t)\mathrm{d}t$ $\Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_{t_0+\tau} - \vec{p}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$, la fuerza $\vec{F}(t)$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo muy corto de tiempo y cambia su cantidad de movimiento $\vec{p}_{t_0} \to \vec{p}_{t_0+\tau}$.
- La cantidad físicamente importante es el valor de la integral. Se asocia con el impulso que se le provee al cuerpo para sacarlo del reposo.
- Las distribuciones generalizan la noción convencional de funciones en el análisis matemático Permiten diferenciar funciones cuyas derivadas no existen en el sentido tradicional del cálculo diferencial.

- En el concepto de impulso $\vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_\tau = \int_0^\tau \vec{F}(t)\mathrm{d}t$ $\Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_{t_0+\tau} - \vec{p}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$, la fuerza $\vec{F}(t)$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo muy corto de tiempo y cambia su cantidad de movimiento $\vec{p}_{t_0} \to \vec{p}_{t_0+\tau}$.
- La cantidad físicamente importante es el valor de la integral. Se asocia con el impulso que se le provee al cuerpo para sacarlo del reposo.
- Las distribuciones generalizan la noción convencional de funciones en el análisis matemático Permiten diferenciar funciones cuyas derivadas no existen en el sentido tradicional del cálculo diferencial.
- Se utilizan ampliamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, donde puede ser más fácil establecer la existencia de soluciones distribucionales que de soluciones clásicas.

Funcionales lineales y Distribuciones

- En el concepto de impulso $\vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_\tau = \int_0^\tau \vec{F}(t)\mathrm{d}t$ $\Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_{t_0+\tau} - \vec{p}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$, la fuerza $\vec{F}(t)$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo muy corto de tiempo y cambia su cantidad de movimiento $\vec{p}_{t_0} \to \vec{p}_{t_0+\tau}$.
- La cantidad físicamente importante es el valor de la integral. Se asocia con el impulso que se le provee al cuerpo para sacarlo del reposo.
- Las distribuciones generalizan la noción convencional de funciones en el análisis matemático Permiten diferenciar funciones cuyas derivadas no existen en el sentido tradicional del cálculo diferencial.
- Se utilizan ampliamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, donde puede ser más fácil establecer la existencia de soluciones distribucionales que de soluciones clásicas.
- El caso más emblemático de las distribuciones lo constituye la función delta de Dirac: una "función" que es cero en todo punto menos en uno que infinita.

- Consideremos la siguiente función

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

- Consideremos la siguiente función
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera éste.

- Consideremos la siguiente función
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera éste.
- Estas funciones $\psi = c^1\phi_1 + c^2\phi_2$, forman un espacio vectorial, **V**, sobre $\mathbb{R}^n$, y a K se le denomina el soporte de ϕ.

Funciones de prueba, soporte y Delta de Dirac

- Consideremos la siguiente función
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera éste.
- Estas funciones $\psi = c^1\phi_1 + c^2\phi_2$, forman un espacio vectorial, $\mathbf{V}$, sobre $\mathbb{R}^n$, y a K se le denomina el soporte de ϕ.
- Definimos una distribución a través de un funcional de la forma $\mathcal{F}\left[|\phi\rangle\right] \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathcal{F}_f\left[|\phi\rangle\right] \equiv \langle f\ |\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$,
donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.

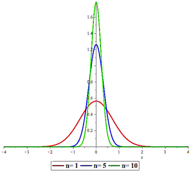
Funciones de prueba, soporte y Delta de Dirac

- Consideremos la siguiente función
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera éste.
- Estas funciones $\psi = c^1\phi_1 + c^2\phi_2$, forman un espacio vectorial, $\mathbf{V}$, sobre $\mathbb{R}^n$, y a K se le denomina el soporte de ϕ.
- Definimos una distribución a través de un funcional de la forma $\mathcal{F}\left[|\phi\rangle\right] \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathcal{F}_f\left[|\phi\rangle\right] \equiv \langle f \, |\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$, donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.
- Podemos definir la distribución $\delta_{(0)}$ definida en $\mathbb{R}$, como $\mathcal{F}_{\delta_{(0)}}\left[|\phi\rangle\right] \equiv \left\langle \delta_{(0)} \, |\phi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(0)}\phi(x)\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0)$, $\forall\phi(x_0) \in \mathbb{R}$. El soporte de $\delta_{(0)}$ es el punto $x = 0$ de $\mathbb{R}$.

Funciones de prueba, soporte y Delta de Dirac

- Consideremos la siguiente función
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera éste.
- Estas funciones $\psi = c^1\phi_1 + c^2\phi_2$, forman un espacio vectorial, $\mathbf{V}$, sobre $\mathbb{R}^n$, y a K se le denomina el soporte de ϕ.
- Definimos una distribución a través de un funcional de la forma $\mathcal{F}\left[|\phi\rangle\right] \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathcal{F}_f\left[|\phi\rangle\right] \equiv \langle f \, |\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$, donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.
- Podemos definir la distribución $\delta_{(0)}$ definida en $\mathbb{R}$, como $\mathcal{F}_{\delta_{(0)}}\left[|\phi\rangle\right] \equiv \left\langle \delta_{(0)} \, |\phi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(0)}\phi(x)\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0)$, $\forall\phi(x_0) \in \mathbb{R}$. El soporte de $\delta_{(0)}$ es el punto $x = 0$ de $\mathbb{R}$.
- En Física este tipo de objetos se conoce como **Deltas de Dirac**.

Delta de Dirac: Generalidades

- Podemos definir la “función” Delta de Dirac como el límite de una sucesión de la forma
$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \begin{cases} \delta_{(0)} \equiv \delta(x) \to \infty & \text{si} \quad x \to 0 \\ \\ \delta(x) = 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$
En el límite $n \to \infty$ tendremos una “función” que se anula en todos los puntos $x \neq 0$ e infinitamente derivable. Nótese que, siguiendo la costumbre en Física, aquí estamos escribiendo $\delta_{(0)} = \delta(x)$


una sucesión funciones gaussianas tal que: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \mathrm{d}x = 1\,, \;\; n > 0.$

- En general uno puede definir las distribuciones como el límite de una familia, $\{f_j(x)\}$, de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = \lim_{j\to j_0} f_j \quad \Rightarrow \lim_{j\to j_0} \mathcal{F}_{f_j}[|\phi\rangle] \equiv \lim_{j\to j_0} \langle f_j |\phi\rangle = \lim_{j\to j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$

- En general uno puede definir las distribuciones como el límite de una familia, $\{f_j(x)\}$, de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = \text{lím}_{j\to j_0} f_j \quad \Rightarrow \text{lím}_{j\to j_0} \mathcal{F}_{f_j}\left[|\phi\rangle\right] \equiv \text{lím}_{j\to j_0} \langle f_j \,|\phi\rangle = \text{lím}_{j\to j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$
- La familia $f_j(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4j}}}{\sqrt{4\pi j}}$ para $j \to 0$ es kernel de **Gauss**.

  La familia $f_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\right) & \text{si } |\theta| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |\theta| > \pi \end{cases}$ para $r \to 1$

  es kernel de **Poisson**.

  La familia $f_k(x) = \begin{cases} \sum_{m=-k}^{k} \frac{1}{2\pi} e^{imx} & \text{si } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |x| > \pi \end{cases}$ para $k \to \infty$

  será el kernel de **Dirichlet**.

- En general uno puede definir las distribuciones como el límite de una familia, $\{f_j(x)\}$, de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = \lim_{j\to j_0} f_j \quad \Rightarrow \lim_{j\to j_0} \mathcal{F}_{f_j}[|\phi\rangle] \equiv \lim_{j\to j_0} \langle f_j |\phi\rangle = \lim_{j\to j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$
- La familia $f_j(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4j}}}{\sqrt{4\pi j}}$ para $j \to 0$ es kernel de **Gauss**.

  La familia $f_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\right) & \text{si } |\theta| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |\theta| > \pi \end{cases}$ para $r \to 1$

  es kernel de **Poisson**.

  La familia $f_k(x) = \begin{cases} \sum_{m=-k}^{k} \frac{1}{2\pi} e^{imx} & \text{si } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |x| > \pi \end{cases}$ para $k \to \infty$

  será el kernel de **Dirichlet**.
- Es claro que también
  $\delta_n(x - x_0) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2} \Rightarrow \delta(x - x_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2}$

Delta de Dirac: Distribuciones y Sucesiones

- En general uno puede definir las distribuciones como el límite de una familia, $\{f_j(x)\}$, de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = \lim_{j\to j_0} f_j \quad \Rightarrow \lim_{j\to j_0} \mathcal{F}_{f_j}\left[|\phi\rangle\right] \equiv \lim_{j\to j_0} \langle f_j \,|\phi\rangle = \lim_{j\to j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$
- La familia $f_j(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4j}}}{\sqrt{4\pi j}}$ para $j \to 0$ es kernel de **Gauss**.

  La familia $f_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\right) & \text{si } |\theta| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |\theta| > \pi \end{cases}$ para $r \to 1$

  es kernel de **Poisson**.

  La familia $f_k(x) = \begin{cases} \sum_{m=-k}^{k} \frac{1}{2\pi} e^{imx} & \text{si } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |x| > \pi \end{cases}$ para $k \to \infty$

  será el kernel de **Dirichlet**.
- Es claro que también
  $\delta_n(x - x_0) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2} \Rightarrow \delta(x - x_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2}$
- $\mathcal{F}_{\delta_{(x_0)}}\left[|\phi\rangle\right] = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(x_0)}\phi(x)\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(x_0)$, $\forall \phi(x_0) \in \mathbb{R}$.

Delta de Dirac: Propiedades

Resumimos aquí algunas de las propiedades de la delta de Dirac expresadas en el sentido distribucional:

- $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
- $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$
- $x\delta(x) = 0$
- $f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x$
- $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x - a) + \delta(x + a)\right]$
- $x^{n+1}\frac{\mathrm{d}^n\delta(x)}{\mathrm{d}x^n} = 0$
- $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$
- $\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathrm{d}V = f(\mathbf{r}_0)$

Ejemplos para la discusión

- Una distribución de carga eléctrica puntual, localizada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, puede escribirse utilizando la delta de Dirac como
$$q = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V = q \underbrace{\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathrm{d}V}_{=1} \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,.$$

Ejemplos para la discusión

- Una distribución de carga eléctrica puntual, localizada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, puede escribirse utilizando la delta de Dirac como
$$q = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V = q \underbrace{\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathrm{d}V}_{=1} \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,.$$
- Demostremos que: $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{\alpha}$, con$\alpha > 0$.
Suponemos $y = \alpha x$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha x)\mathrm{d}x =$
$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)\mathrm{d}y = \frac{f(0)}{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x$,
por lo tanto: $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{\alpha}$. La condición $\alpha > 0$ es porque la función delta de Dirac es par, $\delta(\alpha x) = \delta(-\alpha x)$, En general $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$.

Ejemplos para la discusión

- Una distribución de carga eléctrica puntual, localizada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, puede escribirse utilizando la delta de Dirac como
$$q = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V = q \underbrace{\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathrm{d}V}_{=1} \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,.$$
- Demostremos que: $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{\alpha}$, con$\alpha > 0$.
Suponemos $y = \alpha x$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha x)\mathrm{d}x =$
$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)\mathrm{d}y = \frac{f(0)}{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x$,
por lo tanto: $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{\alpha}$. La condición $\alpha > 0$ es porque la función delta de Dirac es par, $\delta(\alpha x) = \delta(-\alpha x)$, En general $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$.
- Siguiendo el ejemplo anterior demuestre
  - $\delta(\alpha x - x_1) = \frac{\delta(x)}{\alpha}$, con $\alpha > 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta'(x - x_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f'(x)\delta(x - x_0) = f'(x_0)$
  - $\delta(g(x)) = \sum_\alpha \frac{\delta(x-\alpha)}{|g'(\alpha)|}$.

Recuerde que las $\delta(x - x_0)$ siempre viven dentro de las integrales

Recapitulando

- Distribuciones generalizan los conceptos de las funciones de cálculo

Recapitulando

- Distribuciones generalizan los conceptos de las funciones de cálculo
- La cantidad significativa es la integral de la distribución

Recapitulando

- Distribuciones generalizan los conceptos de las funciones de cálculo
- La cantidad significativa es la integral de la distribución
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera este.

Recapitulando

- Distribuciones generalizan los conceptos de las funciones de cálculo
- La cantidad significativa es la integral de la distribución
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera este.
- Definimos una distribución a través de un funcional $\mathcal{F}[|\phi\rangle] \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathcal{F}_f[|\phi\rangle] \equiv \langle f|\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$, donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.

- Distribuciones generalizan los conceptos de las funciones de cálculo
- La cantidad significativa es la integral de la distribución
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera este.
- Definimos una distribución a través de un funcional $\mathcal{F}[|\phi\rangle] \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathcal{F}_f[|\phi\rangle] \equiv \langle f |\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$, donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.
- La distribución $\delta_{(0)}$ está definida en $\mathbb{R}$, como $\mathcal{F}_{\delta_{(0)}}[|\phi\rangle] \equiv \left\langle \delta_{(0)} |\phi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(0)}\phi(x)\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0)$, $\forall\phi(x_0) \in \mathbb{R}$. El soporte de $\delta_{(0)}$ es el punto $x = 0$ de $\mathbb{R}$.

- Distribuciones generalizan los conceptos de las funciones de cálculo
- La cantidad significativa es la integral de la distribución
- Una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera este.
- Definimos una distribución a través de un funcional $\mathcal{F}[|\phi\rangle] \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \mathcal{F}_f[|\phi\rangle] \equiv \langle f\,|\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$, donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.
- La distribución $\delta_{(0)}$ está definida en $\mathbb{R}$, como $\mathcal{F}_{\delta_{(0)}}[|\phi\rangle] \equiv \left\langle \delta_{(0)}\,|\phi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(0)}\phi(x)\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0)$, $\forall\phi(x_0) \in \mathbb{R}$. El soporte de $\delta_{(0)}$ es el punto $x = 0$ de $\mathbb{R}$.
- En general las distribuciones son el límite de una familia, $\{f_j(x)\}$, de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = \lim_{j\to j_0} f_j \quad \Rightarrow \lim_{j\to j_0} \mathcal{F}_{f_j}[|\phi\rangle] \equiv \lim_{j\to j_0} \langle f_j\,|\phi\rangle = \lim_{j\to j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$