# Simetrï¿½as y Cantidades Conservadas

**Luis A. Nï¿½ï¿½ez**

*Escuela de Fï¿½sica, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

20 de diciembre de 2024

# Agenda

# Variables conjugadas y cï¿½clicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada $q_j$. Tambiï¿½n llamado momento canï¿½nico.

# Variables conjugadas y cï¿½clicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada $q_j$. Tambiï¿½n llamado momento canï¿½nico.
- El $p_j$ no necesariamente es el momento lineal. Tambiï¿½n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fiï¿½sica.

# Variables conjugadas y cï¿½clicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada $q_j$. Tambiï¿½n llamado momento canï¿½nico.
- El $p_j$ no necesariamente es el momento lineal. Tambiï¿½n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fï¿½sica.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explï¿½citamente una coordenada $q_i$ (puede contener $\dot{q}_i$ y $t$ ), se dice que $q_i$ es una coordenada cï¿½clica o ignorable.

# Variables conjugadas y cï¿½clicas

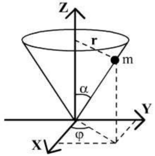
- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada $q_j$. Tambiï¿½n llamado momento canï¿½nico.
- El $p_j$ no necesariamente es el momento lineal. Tambiï¿½n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fiï¿½sica.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explï¿½citamente una coordenada $q_i$ (puede contener $\dot{q}_i$ y $t$ ), se dice que $q_i$ es una coordenada cï¿½clica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado $p_i$ asociado a una coordenada cï¿½clica, $q_i$, es constante. Luego, la cantidad $p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.

# Variables conjugadas y cï¿½clicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada $q_j$. Tambiï¿½n llamado momento canï¿½nico.
- El $p_j$ no necesariamente es el momento lineal. Tambiï¿½n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fiï¿½sica.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explï¿½citamente una coordenada $q_i$ (puede contener $\dot{q}_i$ y $t$ ), se dice que $q_i$ es una coordenada cï¿½clica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado $p_i$ asociado a una coordenada cï¿½clica, $q_i$, es constante. Luego, la cantidad $p_i\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.
- Si una coordenada $q_i$ es cï¿½clica, entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, y la ecuaciï¿½n de Lagrange para esa coordenada cï¿½clica $q_i$ es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow p_i =$ cte.

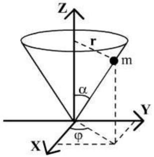
# Partï¿½cula sobre un cono invertido

- Consideremos una partï¿½cula que se mueve sobre una supreficie cï¿½nica



# Partï¿½cula sobre un cono invertido

- Consideremos una partï¿½cula que se mueve sobre una supreficie cï¿½nica

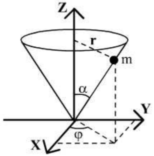



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha$

# Partï¿½cula sobre un cono invertido



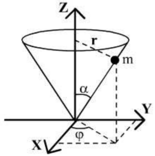
- Consideremos una partï¿½cula que se mueve sobre una supreficie cï¿½nica




- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha$
- La coordenada $\varphi$ es cï¿½clica. El momento conjugado $p_\varphi$ asociado con la coordenada angular $\varphi$ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} =$ cte .

# Partï¿½cula sobre un cono invertido

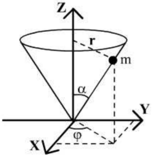
- Consideremos una partï¿½cula que se mueve sobre una supreficie cï¿½nica




- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha$
- La coordenada $\varphi$ es cï¿½clica. El momento conjugado $p_\varphi$ asociado con la coordenada angular $\varphi$ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} =$ cte .
- El momento angular de la partï¿½cula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$

# Partï¿½cula sobre un cono invertido

- Consideremos una partï¿½cula que se mueve sobre una supreficie cï¿½nica



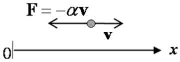

- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha$
- La coordenada $\varphi$ es cï¿½clica. El momento conjugado $p_\varphi$ asociado con la coordenada angular $\varphi$ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} =$ cte .
- El momento angular de la partï¿½cula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$
- La componente $z$ es $\mathcal{L}_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2 \dot{\varphi} \equiv p_\varphi = \mathrm{cte},$

ya que $\begin{array}{ll} x = r \cos \varphi, & \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \\ y = r \operatorname{sen} \varphi, & \dot{y} = \dot{r} \operatorname{sen} \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{array}$

# Partï¿½cula en medio viscoso

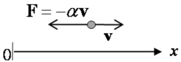


- Consideremos una partï¿½cula de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricciï¿½n $\alpha$.



# Partï¿½cula en medio viscoso

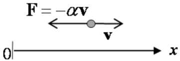
- Consideremos una partï¿½cula de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricciï¿½n $\alpha$.




- Se mueve en la direcciï¿½n $x$, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m} t}$

# Partï¿½cula en medio viscoso

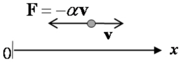
- Consideremos una partï¿½cula de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricciï¿½n $\alpha$.




- Se mueve en la direcciï¿½n $x$, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada $x$ es cï¿½clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado $p_x$ es constante,
$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.

# Partï¿½cula en medio viscoso

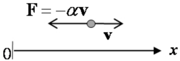
- Consideremos una partï¿½cula de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricciï¿½n $\alpha$.




- Se mueve en la direcciï¿½n $x$, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada $x$ es cï¿½clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado $p_x$ es constante,
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.

# Partï¿½cula en medio viscoso

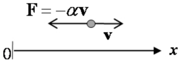
- Consideremos una partï¿½cula de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricciï¿½n $\alpha$.




- Se mueve en la direcciï¿½n $x$, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada $x$ es cï¿½clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado $p_x$ es constante,
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posiciï¿½n serï¿½ $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha}\left(1 - e^{-(\alpha/m)t}\right)$

# Partï¿½cula en medio viscoso

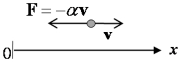
- Consideremos una partï¿½cula de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricciï¿½n $\alpha$.




- Se mueve en la direcciï¿½n $x$, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada $x$ es cï¿½clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado $p_x$ es constante,
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{ cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posiciï¿½n serï¿½ $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha}\left(1 - e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuaciï¿½n de movimiento, $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$

# Partï¿½cula en medio viscoso

- Consideremos una partï¿½cula de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un medio viscoso, con coeficiente de fricciï¿½n $\alpha$.




- Se mueve en la direcciï¿½n $x$, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 e^{\frac{\alpha}{m} t}$
- La coordenada $x$ es cï¿½clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado $p_x$ es constante,
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} e^{\frac{\alpha}{m} t} = \text{ cte } = m v_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m} t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = m v_x(t)$, que no es constante.
- La posiciï¿½n serï¿½ $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 - e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuaciï¿½n de movimiento, $m \ddot{x} = -\alpha \dot{x}$
- Que es la Segunda Ley de Newton para la componente $x$ de la fuerza $\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}$ ejercida por el fluido sobre la partï¿½cula.

# Teorema de Noether

- Consideremos una transformacii¿½n infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.

- Consideremos una transformacií¿½n infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformacií¿½n infinitesimal representa una simetrí¿½a del sistema, **una simetrí¿½a de la accií¿½n** y se dice que **la accií¿½n es invariante bajo esa transformacií¿½n**.

- Consideremos una transformaciï¿½n infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformaciï¿½n infinitesimal representa una simetrï¿½a del sistema, **una simetrï¿½a de la acciï¿½n** y se dice que **la acciï¿½n es invariante bajo esa transformaciï¿½n**.
- **Teorema de Noether en Mecï¿½nica Clï¿½sica**
    - Si la acciï¿½n de un sistema es invariante bajo una transformaciï¿½n infinitesimal de coordenadas $q_j' = q_j + \delta q_j$ que cambia el Lagrangiano a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, tal que $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f(q_j,t)}{\mathrm{d}t}$ para alguna funciï¿½n $f(q_j,t)$.
    - Entonces el Lagrangiano (y el sistema) $\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_j,t)$ posee una simetrï¿½a y la funciï¿½n $\mathcal{J}(q_j,\dot{q}_j,t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j - f$ constituye una cantidad conservada asociada a esa transformaciï¿½n.
    - La cantidad $\mathcal{J}$ se denomina corriente de Noether.

# Demostraciï¿½n del Teorema de Noether

- La transformaciï¿½n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde $t$ es fijo, $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$

# Demostraciï¿½n del Teorema de Noether

- La transformaciï¿½n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde $t$ es fijo, $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right)$

# Demostraciï¿½n del Teorema de Noether

- La transformaciï¿½n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde $t$ es fijo, $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right)$
- Segï¿½n el teorema, la variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$.

# Demostraciï¿½n del Teorema de Noether

- La transformaciï¿½n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde $t$ es fijo, $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$
- Segï¿½n el teorema, la variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f(q_j, t)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \frac{\mathrm{d}f(q_j, t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f =$ cte.

# Demostraciï¿½n del Teorema de Noether

- La transformaciï¿½n $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde $t$ es fijo, $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$
- Segï¿½n el teorema, la variaciï¿½n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f(q_j, t)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \frac{\mathrm{d} f(q_j, t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetrï¿½a de un sistema, le corresponde una cantidad conservada

# Demostracii¿½n del Teorema de Noether

- La transformacii¿½n $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde $t$ es fijo, $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variacii¿½n $\delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right)$
- Segi¿½n el teorema, la variacii¿½n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right) = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{J}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetri¿½a de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetri¿½as y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.

# Demostracï¿½n del Teorema de Noether

- La transformacï¿½n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde $t$ es fijo, $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variacï¿½n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\delta q_j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$
- Segï¿½n el teorema, la variacï¿½n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f(q_j, t)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) = \frac{\mathrm{d} f(q_j, t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = \text{ cte}.$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetrï¿½a de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetrï¿½as y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.
- Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales de segundo orden para las $q_j$, mientras que las cantidades conservadas $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) = cte$, son ecuaciones diferenciales de primer orden

# Coordenada cï¿½clica

- Supongamos que la coordenada $q_i$ es cï¿½clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$.

# Coordenada cï¿½clica

- Supongamos que la coordenada $q_i$ es cï¿½clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$.
- La transformaciï¿½n de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \text{cte}$, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta\mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$

# Coordenada cï¿½clica

- Supongamos que la coordenada $q_i$ es cï¿½clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$.
- La transformacïi¿½n de coordenadas $q'_i = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \mathrm{cte}$, y $q'_j = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta\mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la funcïi¿½n $f$ surge de $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$

# Coordenada cï¿½clica

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

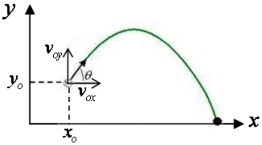
- Supongamos que la coordenada $q_i$ es cï¿½clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$.
- La transformacïi¿½n de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \text{cte}$, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la funcïi¿½n $f$ surge de $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada $\mathcal{J}$ es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - c = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{ cte.}$

# Coordenada cï¿½clica

- Supongamos que la coordenada $q_i$ es cï¿½clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$.
- La transformacïï¿½n de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \mathrm{cte}$, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta\mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la funcïï¿½n $f$ surge de $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada $\mathcal{J}$ es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - f = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - c = \text{ cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{ cte.}$
- El momento conjugado $p_i$ asociado a $q_i$ es constante.

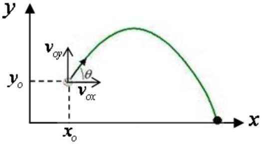
# Partï¿½cula en campo gravitatorio

- Consideremos una partï¿½cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



# Partï¿½cula en campo gravitatorio

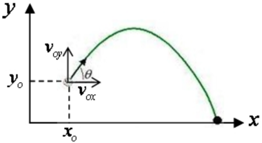
- Consideremos una partï¿½cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy$




- El cambio en $\mathcal{L}$ bajo la transformaciï¿½n de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg\delta y$

# Partï¿½cula en campo gravitatorio

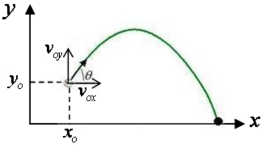
- Consideremos una partï¿½cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$




- El cambio en $\mathcal{L}$ bajo la transformaciï¿½n de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg\delta y$
- Con lo cual $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow \quad f = -mg\, t\, \delta y$

# Partï¿½cula en campo gravitatorio

- Consideremos una partï¿½cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



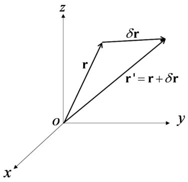

- El cambio en $\mathcal{L}$ bajo la transformacïi¿½n de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y = $ cte, es $\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\underbrace{\delta\dot{y}}_{=0} \equiv -mg\delta y$
- Con lo cual $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow \quad f = -mg\,t\,\delta y$
- Con la cantidad conservada $\mathcal{J} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\delta y - f = \mathrm{cte} \Rightarrow m\dot{y}\delta y + mgt\delta y = \mathrm{cte} \Rightarrow \dot{y} + gt = \mathrm{cte}$

# Conservacii¿½n del momento lineal 1/2

- Consideremos un sistema de $N$ partï¿½culas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t\right)$.

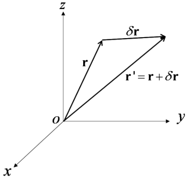
# Conservaciï¿½n del momento lineal 1/2

- Consideremos un sistema de $N$ partï¿½culas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t\right)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una direcciï¿½n arbitraria del espacio.



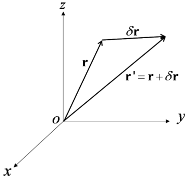
# Conservaciï¿½n del momento lineal 1/2

- Consideremos un sistema de $N$ partï¿½culas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una direcciï¿½n arbitraria del espacio.




- Supongamos la transformaciï¿½n de coordenadas $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$, donde $\delta\mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes $\delta x_j$ son constantes; i. e., $\delta\dot{\mathbf{r}} = 0$.

- Consideremos un sistema de $N$ partï¿½culas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_{1\,\alpha}, x_{2\,\alpha}, x_{3\,\alpha})$ $\alpha = 1, \ldots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una direccï¿½n arbitraria del espacio.




- Supongamos la transformacii¿½n de coordenadas $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$, donde $\delta\mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes $\delta x_j$ son constantes; i. e., $\delta\dot{\mathbf{r}} = 0$.
- Homogeneidad del espacio implica que la transformacii¿½n infinitesimal no produce cambios en el Lagrangiano del sistema, $\delta\mathcal{L} = 0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ implica que $f$ es constante.

# Conservaciï¿½n del momento lineal 2/2

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$

# Conservaciï¿½n del momento lineal 2/2

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$

# Conservacii¿½n del momento lineal 2/2

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.

- La corriente conservada es $\mathcal{J}=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}\cdot\delta\mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{3\,\alpha}}\right)$
- Como $\delta\mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energï¿½a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^{2} - V\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N\right)$

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energï¿½a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$

- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energi¿½a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^{2} - V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$
- El momento lineal de una parti¿½cula es $\mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$

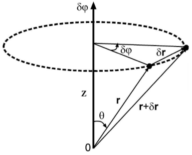
# Conservacii¿½n del momento lineal 2/2



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j - f = \mathrm{cte} \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_j = \mathrm{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathrm{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \mathrm{cte}$
- La cantidad $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energi¿½a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2 - V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$
- El momento lineal de una parti¿½cula es $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$
- En un sistema donde existe simetri¿½a translacional en una direccii¿½n espacial, la componente del momento lineal total del sistema en esa direccii¿½n se conserva.

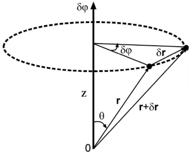
# Conservaciï¿½n del momento angular 1/2

- Consideremos una partï¿½cula en la posiciï¿½n $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a $O$ y una rotaciï¿½n infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



# Conservaciï¿½n del momento angular 1/2

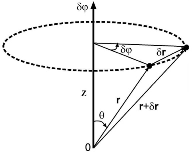
- Consideremos una partï¿½cula en la posiciï¿½n $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a $O$ y una rotaciï¿½n infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.




- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ï¿½ngulo rotado en sentido antihorario.

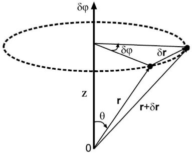
# Conservaciï¿½n del momento angular 1/2

- Consideremos una partï¿½cula en la posiciï¿½n $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a $O$ y una rotaciï¿½n infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



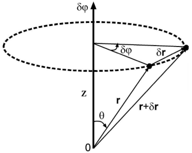

- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ï¿½ngulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posiciï¿½n de la partï¿½cula transformado por la rotaciï¿½n infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$

- Consideremos una partï¿½cula en la posiciï¿½n $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a $O$ y una rotaciï¿½n infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.




- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ï¿½ngulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posiciï¿½n de la partï¿½cula transformado por la rotaciï¿½n infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$
- Sonde $\delta\mathbf{r}$ tiene direcciï¿½n perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta\varphi)$ y magnitud $\delta r = r \operatorname{sen}\theta\delta\varphi$, con $\theta$ es el ï¿½ngulo entre $\delta\varphi$ y $r$. Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r}$

- Consideremos una partïi¿½cula en la posicïi¿½n $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a $O$ y una rotacïi¿½n infinitesimal del vector $\mathbf{r}$ alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.




- Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ïi¿½ngulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posicïi¿½n de la partïi¿½cula transformado por la rotacïi¿½n infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$
- Sonde $\delta\mathbf{r}$ tiene direccïi¿½n perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta\varphi)$ y magnitud $\delta r = r \operatorname{sen} \theta \delta\varphi$, con $\theta$ es el ïi¿½ngulo entre $\delta\varphi$ y $r$. Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r}$
- Consideremos a continuacïi¿½n un sistema de $N$ partïi¿½culas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha, \alpha = 1, \ldots, N$, sujeto a una rotacïi¿½n infinitesimal $\delta\varphi$

- El cambio en el vector de posicii¿½n de la parti¿½cula $\alpha$ es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.

# Conservacii¿½n del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posicii¿½n de la parti¿½cula $\alpha$ es $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La isotropi¿½a del espacio implica que esta transformacii¿½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte

# Conservaciï¿½n del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posiciï¿½n de la partï¿½cula $\alpha$ es $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La isotropï¿½a del espacio implica que esta transformaciï¿½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \text{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} - f = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_\alpha = \text{ cte}.$

- El cambio en el vector de posiciï¿½n de la partï¿½cula $\alpha$ es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La isotropï¿½a del espacio implica que esta transformaciï¿½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} - f = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha = \text{ cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_\alpha \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$

- El cambio en el vector de posicïż½n de la partïż½cula $\alpha$ es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La isotropïż½a del espacio implica que esta transformacïż½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f =$ cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} - f =$ cte $\Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} =$ cte $\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha =$ cte.
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_\alpha \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

# Conservaciï¿½n del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posiciï¿½n de la partï¿½cula $\alpha$ es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La isotropï¿½a del espacio implica que esta transformaciï¿½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \text{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} - f = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_\alpha = \text{ cte}.$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_\alpha\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N}\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha) = \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$
- Donde $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.
- Como $\delta\varphi$ es constante, $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$. La cantidad vectorial $\mathbf{L}_{\mathrm{T}}$ es el momento angular total del sistema.

# Conservacii¿½n del momento angular 2/2

- El cambio en el vector de posicii¿½n de la parti¿½cula $\alpha$ es $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$.
- La isotropi¿½a del espacio implica que esta transformacii¿½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta\mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \text{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} - f = \text{ cte } \Rightarrow$ $\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{j\,\alpha}}\delta x_{j\,\alpha} = \text{ cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_\alpha}\cdot\delta\mathbf{r}_\alpha = \text{ cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{p}_\alpha\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N}\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha) = \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$
- Donde $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.
- Como $\delta\boldsymbol{\varphi}$ es constante, $\mathbf{L}_\mathrm{T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte}$. La cantidad vectorial $\mathbf{L}_\mathrm{T}$ es el momento angular total del sistema.
- Si un sistema posee simetri¿½a rotacional alrededor de un eje, se conserva la componente del momento angular en esa direccii¿½n.

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right)$

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes
  $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes
  $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variaciï¿½n de $\mathcal{L}$ bajo esta transformaciï¿½n infinitesimal es
  $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes
$\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variaciï¿½n de $\mathcal{L}$ bajo esta transformaciï¿½n infinitesimal es
$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condiciï¿½n $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes
  $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variaciï¿½n de $\mathcal{L}$ bajo esta transformaciï¿½n infinitesimal es
  $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condiciï¿½n $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.
- La cantidad conservada
  $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \text{cte}$

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes
  $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \mathrm{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variaciï¿½n de $\mathcal{L}$ bajo esta transformaciï¿½n infinitesimal es
  $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condiciï¿½n $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \mathrm{cte} = c$.
- La cantidad conservada
  $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \mathrm{cte}$
- Como $\delta\varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} - y\dot{x}) \equiv L_z = \mathrm{cte}$

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes
$\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variaciï¿½n de $\mathcal{L}$ bajo esta transformaciï¿½n infinitesimal es
$\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condiciï¿½n $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.
- La cantidad conservada
$\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \mathrm{cte}$
- Como $\delta\varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} - y\dot{x}) \equiv L_z = \mathrm{cte}$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \ r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}kr^2$ y la coordenada $\varphi$ es cï¿½clica, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$

# Oscilador armï¿½nico bidimensional

- Sea una partï¿½cula de masa $m$ sobre el plano $(x, y)$ sin fricciï¿½n, sujeta a la fuerza elï¿½stica de constante $k$
  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotaciï¿½n infinitesimal $\delta\varphi = \delta\varphi\hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje $z$.
- Entonces $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes
  $\delta x = -y\delta\varphi, \delta\dot{x} = -\dot{y}\delta\varphi \quad \text{y} \quad \delta y = x\delta\varphi, \delta\dot{y} = \dot{x}\delta\varphi$
- La variaciï¿½n de $\mathcal{L}$ bajo esta transformaciï¿½n infinitesimal es
  $\delta\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i = kxy\delta\varphi - kyx\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi = 0$
- La condiciï¿½n $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$ implica que $f = \text{cte} = c$.
- La cantidad conservada
  $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \mathrm{cte}$
- Como $\delta\varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} - y\dot{x}) \equiv L_z = \mathrm{cte}$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es
  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}kr^2$ y la coordenada $\varphi$ es cï¿½clica, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$
- El momento conjugado $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = $ cte.

# Conservaciï¿½n de la energï¿½a

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.

# Conservaciï¿½n de la energï¿½a

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogï¿½neo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explï¿½citamente de $t$ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.

# Conservaciï¿½n de la energï¿½a

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogï¿½neo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explï¿½citamente de $t$ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ serï¿½ $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}}$

# Conservaciï¿½n de la energï¿½a

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogï¿½neo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explï¿½citamente de $t$ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ serï¿½ $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuaciï¿½n de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)$,

# Conservaciï¿½n de la energï¿½a

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogï¿½neo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explï¿½citamente de $t$ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ serï¿½ $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuaciï¿½n de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{d}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]$

# Conservacï¿½n de la energï¿½a

- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogï¿½neo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explï¿½citamente de $t$ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ serï¿½ $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuacï¿½n de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right]$
- Con lo cual $\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}\right] = 0 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} =$ cte.

# Conservaciï¿½n de la energï¿½a



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogï¿½neo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal{L}$ no depende explï¿½citamente de $t$ : $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El cambio total de $\mathcal{L}$ serï¿½ $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}}$
- Usamos la ecuaciï¿½n de Lagrange, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}\right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s}\left[\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j\right]$
- Con lo cual $\frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}\right] = 0 \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} =$ cte.
- La energï¿½a es la cantidad escalar $E\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L}$

# Energï¿½a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j, )$

- Existen sistemas donde la energï¿½a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.

- Existen sistemas donde la energï¿½a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T\left(\dot{q}_j\right) - V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$. y se define una funciï¿½n de energï¿½a como
  $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$

- Existen sistemas donde la energï¿½a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una funciï¿½n de energï¿½a como
  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left( \sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$

# Energï¿½a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j, )$

- Existen sistemas donde la energï¿½a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T\left(\dot{q}_j\right) - V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$. y se define una funciï¿½n de energï¿½a como
  $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T\left(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s\right) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j\right) \dot{q}_j = 2T$
- Entonces
  $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$

- Existen sistemas donde la energï¿½a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T\left(\dot{q}_j\right) - V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$. y se define una funciï¿½n de energï¿½a como
  $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T\left(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s\right) = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \left(\sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj}\dot{q}_j\right)\dot{q}_j = 2T$
- Entonces
  $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j$
- Si la energï¿½a potencial $V$ es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la funciï¿½n de energï¿½a es igual a la energï¿½a meciï¿½nica total, $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = T + V$

- Existen sistemas donde la energïż½a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una funciïż½n de energïż½a como
  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left( \sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$
- Entonces
  $E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$
- Si la energïż½a potencial $V$ es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la funciïż½n de energïż½a es igual a la energïż½a meciïż½nica total, $E(q_j, \dot{q}_j) = T + V$
- Si $V = V(q_j, \dot{q}_j, )$, la funciïż½n de energïż½a contiene tïż½rminos adicionales a $T + V$.