

Momento angular de un cuerpo rígido

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



23 de octubre de 2024

- 1 Momento Angular de un cuerpo rígido
- 2 Generalidades para \mathbf{L} y $\boldsymbol{\Omega}$
- 3 Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos
- 4 Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar
 - Angulos y velocidades
 - Ecuaciones de movimiento

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si \mathbf{r}_j es el vector de posición de la partícula j en (x_1, x_2, x_3) , tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si \mathbf{r}_j es el vector de posición de la partícula j en (x_1, x_2, x_3) , tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$.
Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si \mathbf{r}_j es el vector de posición de la partícula j en (x_1, x_2, x_3) , tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$.
Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
$$L_i = \sum_j m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j m_j \left[\sum_k \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k x_{ij} x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j m_j \sum_k \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right] = \sum_k \Omega_k \sum_j m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$$

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si \mathbf{r}_j es el vector de posición de la partícula j en (x_1, x_2, x_3) , tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$.
Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
$$L_i = \sum_j m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j m_j \left[\sum_k \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k x_{ij} x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j m_j \sum_k \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right] = \sum_k \Omega_k \sum_j m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$$
- Finalmente $L_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \Omega_k \Leftrightarrow \mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}$ ya que el tensor de inercia es $I_{ik} = \sum_j m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{I} = I\boldsymbol{\Omega}$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$

-
- A diagram showing a rigid body, represented by a shaded, irregular shape, with a vertical axis labeled X_3 . A vector Ω (angular velocity) is shown pointing upwards from the center of mass. A vector L (angular momentum) is shown pointing upwards and to the left from the center of mass. The body is tilted relative to the X_3 axis.

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler

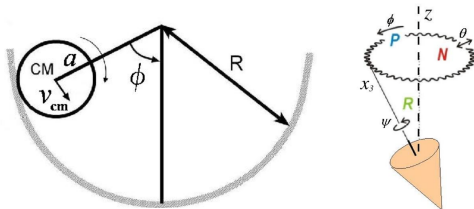
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas
- Los casos más simples son los que presentan simetrías: axial (trompos) o esférica

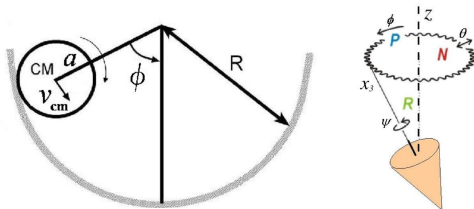
Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a . 1/2

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a . 1/2

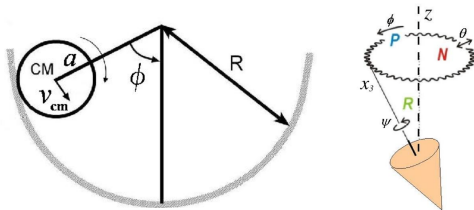
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a .

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a . 1/2

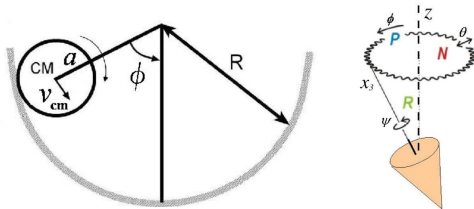
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a .
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a . 1/2

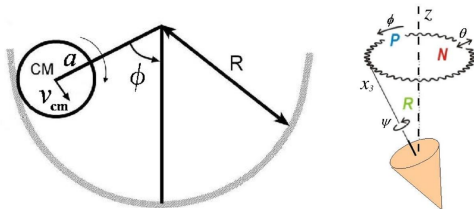
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a .
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ .

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a . 1/2

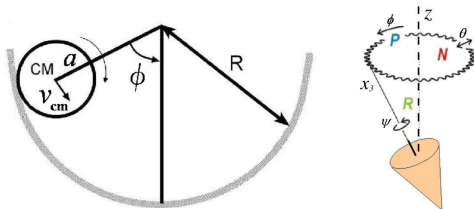
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a .
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ .
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{cm} + T_{rot}$.

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a . 1/2

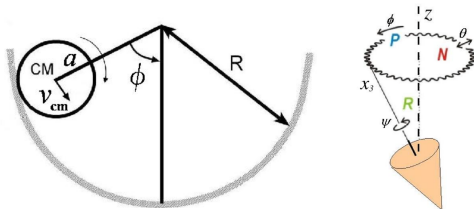
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a .
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ .
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$, con $v_{\text{cm}} = (R - a) \dot{\phi}$

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a . 1/2

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a .
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ .
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$, con $v_{\text{cm}} = (R - a)\dot{\phi}$
- La energía cinética de rotación es $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{33} \Omega_3^2$

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\sin\phi = 0$.

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\sin\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.

Cilindro de masa M y radio a . 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\text{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\sin\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.
- La ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple con frecuencia $\omega^2 = \frac{2g}{3(R-a)}$.