Principios Variacionales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

10 de agosto de 2024

Agenda

Extremos de un funcional

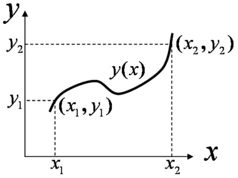
- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $y = g(x)$ es máxima o mínima.

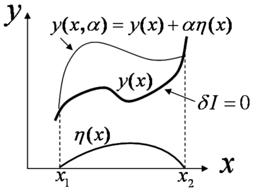
Extremos de un funcional

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $y = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $f(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[f(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).

Extremos de un funcional

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $y = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $f(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[f(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).
- Entonces anularemos las variaciones del funcional, $\delta I = \delta\mathcal{F}[f(x)] = 0$, para determinar la $f(x)$ que lo hace extremo.





- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\; f(y(x), y'(x), x)$.

CONSTRUIMOS FUTURO

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x,0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1,0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2,0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left.\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x,0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\; f(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left.\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$
- Al evaluar $\alpha = 0$ garantizamos que obtenemos la $y(x)$ que hace extremo el funcional I.

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha} \mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right] \mathrm{d}x$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right] \mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right] \mathrm{d}x.$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$
- El segundo término se integra por partes, $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x,$

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$
- El segundo término se integra por partes, $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x,$
- Finalmente $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)\mathrm{d}x.$

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.