

Planteamiento General para Polinomios Ortogonales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



18 de abril de 2022

Agenda Planteamiento General para Polinomios Ortogonales



- 1 Ortogonalidad y norma genérica
- 2 Fórmula de Rodrigues
- 3 Relaciones de recurrencia genéricas
- 4 Función generatriz generalizada
- 5 Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales
- 6 Recapitulando

Propiedades genéricas de los Polinomios Ortogonales, N_n indica la norma del polinomio de grado n .

$$\int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = h_n \delta_{nm}$$

Polinomio	Nombre	a	b	$w(x)$	h_n	h_0
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	$\frac{2}{2n+1}$	
$T_n(x)$	Tchebychev1E	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$U_n(x)$	Tchebychev2E	-1	1	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$	
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$2^n n! \sqrt{\pi}$	
$L_n(x)$	Laguerre	0	∞	e^{-x}	1	
$L_n^\alpha(x)$	LaguerreG	0	∞	$x^\alpha e^{-x}; \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	
$P_n^{\alpha\beta}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	\dagger	

En el caso de los polinomios de Jacobi, la norma es

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \quad \text{con} \quad \alpha > -1 \quad \text{y} \quad \beta > -1.$$

Los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ vienen definidos por la fórmula de Rodrigues generalizada

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)\mu_n} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)q(x)^n)$$

donde $w(x)$, $q(x)$ y μ_n .

Polinomio	μ_n	$w(x)$	$q(x)$
P_n	$2^n n!$	1	$1 - x^2$
T_n	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1 - x^2$
U_n	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{1-x^2}$	$1 - x^2$
H_n	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1
L_n	$n!$	e^{-x}	x
L_n^α	$n!$	$x^\alpha e^{-x}$	x

Cuadro: Funciones para determinar la Fórmula de Rodrigues generalizada

También se pueden formular, de manera genérica las relaciones de recurrencia.

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) - c_np_{n-1}(x)$$

Polinomio	a_n	b_n	c_n
P_n	0	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
T_n	0	2	1
U_n	0	2	1
H_n	0	2	$2n$
L_n	$\frac{2n+1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
L_n^α	$\frac{2n+1+\alpha}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n+\alpha}{n+1}$

La función generatriz generalizada viene expresada por la serie

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x) t^n \quad \text{con } a_n \text{ constante}$$

Polinomio	C_n	$\mathcal{G}(x, t)$
P_n	1	$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$
T_n	2	$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} + 1$
U_n	1	$\frac{1}{1-2xt+t^2}$
H_n	$1/n!$	e^{2xt-x^2}
H_{2n}	$1^n/(2n)!$	$\cos(2xt)e^{t^2}$
H_{2n+1}	$1^n/(2n+1)!$	$\sen(2xt)e^{t^2}$
L_n	1	$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$
L_n^α	1	$\frac{1}{(1-t)^\alpha} e^{-\frac{xt}{1-t}}$

Cada uno de los polinomios ortogonales habrá de ser solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$g_2(x) \frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} + g_1(x) \frac{dp_n(x)}{dx} + \alpha_n p_n(x) = 0$$

Polinomio	$g_2(x)$	$g_1(x)$	α_n
P_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1 - x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1 - x$	n
L_n^α	x	$1 - x + \alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - x(2 + \alpha + \beta)$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$

En presentación consideramos

1