El Trompo de Lagrange

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

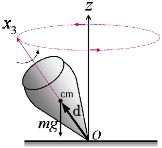
28 de abril de 2025

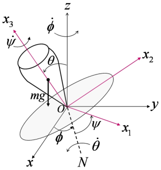
El Trompo de Lagrange

El Trompo de Lagrange: Generalidades

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.

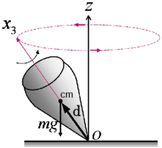
- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.

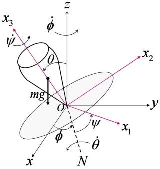




El Trompo de Lagrange: Generalidades

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.

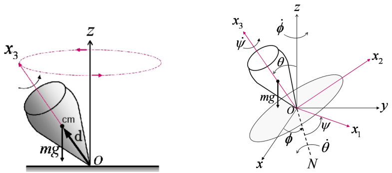




- Los momentos de inercia $I_{11}^{\rm cm} = I_{22}^{\rm cm} \neq I_{33}^{\rm cm}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.

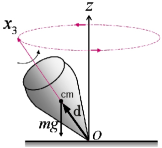
El Trompo de Lagrange: Generalidades

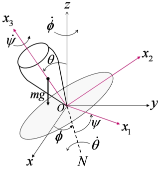
- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.



- Los momentos de inercia $I_{11}^{\mathrm{cm}} = I_{22}^{\mathrm{cm}} \neq I_{33}^{\mathrm{cm}}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio (x, y, z) y el sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, ambos con origen en O.

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.





- Los momentos de inercia $I_{11}^{\mathrm{cm}} = I_{22}^{\mathrm{cm}} \neq I_{33}^{\mathrm{cm}}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio (x, y, z) y el sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, ambos con origen en O.
- Sea $\mathbf{d} = (0, 0, d)$ la posición del centro de masa del trompo con respecto a O en el sistema (x_1, x_2, x_3).

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O, $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2\right)$

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O, $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2\right)$
- Las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2$$

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O, $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2\right)$
- Las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como
$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$
- El Lagrangiano del sistema es
$$\mathcal{L} = T_{rot} - V = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mgd\cos\theta.$$

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte}.$

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z = \text{cte.}$

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 =$ cte.
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\operatorname{sen}^2\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z =$ cte.
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd\,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z), al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte}.$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\operatorname{sen}^2\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z = \text{cte}.$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd\,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z), al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}_3$ ni $\hat{\mathbf{z}}$, es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que $L_3 = \text{cte}$ y $L_z = \text{cte}$.

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte}.$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\operatorname{sen}^2\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z = \text{cte}.$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd\,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z), al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}_3$ ni $\hat{\mathbf{z}}$, es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que $L_3 = \text{cte}$ y $L_z = \text{cte}$.
- La energía se conserva
  $E = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + mgd\cos\theta = \text{cte}.$

Primeras integrales

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).

Primeras integrales

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).
- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)}{I_{11} \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33}\dot{\phi}\cos\theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)\cos\theta}{I_{11}\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}}\left(E - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd\cos\theta\right)}$$

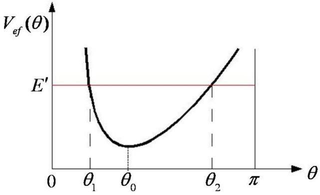
Primeras integrales

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).
- Las primeras integrales del sistema serán:
$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)}{I_{11} \operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33}\dot{\phi}\cos\theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)\cos\theta}{I_{11}\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}}\left(E - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd\cos\theta\right)}$$
- Podemos reescribir $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2}I_{11}\dot{\theta}^2 + V_{\mathrm{ef}}(\theta) =$cte, con $V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$

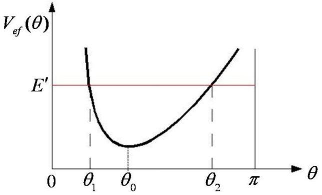
Primeras integrales

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas $(L_3, L_z$ y E).
- Las primeras integrales del sistema serán:
$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)}{I_{11} \operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33}\dot{\phi}\cos\theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)\cos\theta}{I_{11}\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}}\left(E - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd\cos\theta\right)}$$
- Podemos reescribir $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2}I_{11}\dot{\theta}^2 + V_{\mathrm{ef}}(\theta) =$cte, con $V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$
- Es un problema unidimensional para la coordenada θ, con un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}\ (\theta)$

- El potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$



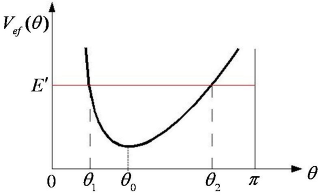
- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$

El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

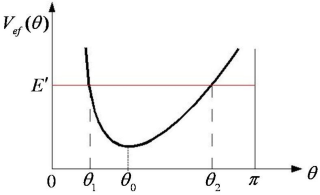
- El potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\mathrm{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación $E' = V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2I_{11}\,\mathrm{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$

El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$

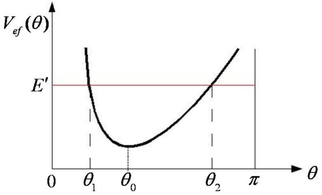


- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación $E' = V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2I_{11}\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + mgd\cos\theta$
- La nutación ocurre en el intervalo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial\theta}\right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación $E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\,\text{sen}^2\,\theta} + mgd\cos\theta$
- La nutación ocurre en el intervalo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- De la energía obtuvimos $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}{I_{11}}}, \Rightarrow t(\theta) = \sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

- El período de nutación es $T_{\rm nut} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\rm ef}(\theta))}}$

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

- El período de nutación es $T_{\rm nut} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\rm ef}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos\theta)$

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

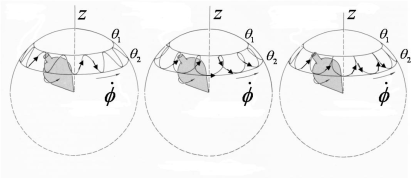
- El período de nutación es $T_{\mathrm{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\mathrm{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos\theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3 \cos\theta, \forall\theta)$.

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

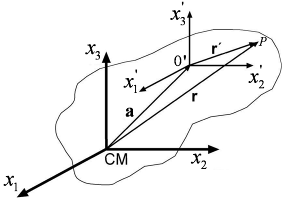
- El período de nutación es $T_{\rm nut} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\rm ef}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos\theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3 \cos\theta, \forall\theta)$.
- Cuando $\dot{\phi}$ cambia de signo en θ_1 ó en θ_2, dependiendo del signo de la cantidad ($L_z - L_3 \cos\theta_{1,2}$) (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos\theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3 \cos\theta, \forall\theta)$.
- Cuando $\dot{\phi}$ cambia de signo en θ_1 ó en θ_2, dependiendo del signo de la cantidad $(\ L_z - L_3 \cos\theta_{1,2}\ )$ (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).
- Cuando $\dot{\phi} = 0$ en θ_1 ó en θ_2 $(L_z = L_3 \cos\theta_{1,2})$.



Sea I_{ik} el tensor de inercia de un cuerpo rígido (un sistema de N partículas rígidamente unidas) en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo. Un sistema de coordenadas paralelas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) cuyo origen O' se encuentra en una posición $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ con respecto al centro de masa del cuerpo. Entonces el tensor de inercia es $I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j^N m_j \left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.



- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es $I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right)$.

Demostración Teorema de Steiner

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es $I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right)$.
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x_1', x_2', x_3'), con origen O' en una posición **a** respecto al centro de masa del cuerpo.

Demostración Teorema de Steiner

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es $I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right)$.
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x_1', x_2', x_3'), con origen O' en una posición $\mathbf{a}$ respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto P respecto (x_1, x_2, x_3) es $\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}_j' \Rightarrow x_{i\,j} = a_i + x_{i\,j}'$

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es $I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right)$.
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x_1', x_2', x_3'), con origen O' en una posición **a** respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto P respecto (x_1, x_2, x_3) es $\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}_j' \Rightarrow x_{i\,j} = a_i + x_{i\,j}'$
- Para (x_1', x_2', x_3'), tenemos $I_{ik}' = \sum_j^N m_j \left(r_j'^2 \delta_{ik} - x_i' x_k' \right)$, con $r_j'^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{a})^2 = r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_l a_l$.

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right)$.
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3), con origen O' en una posición **a** respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto P respecto (x_1, x_2, x_3) es
$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow x_{i\,j} = a_i + x'_{i\,j}$
- Para (x'_1, x'_2, x'_3), tenemos $I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k \right)$, con
$r_j'^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{a})^2 = r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_l a_l$.
- Sustituyendo,
$I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left[\left(r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_l a_l \right) \delta_{ik} - (x_i - a_i)(x_k - a_k) \right]$
$I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right) + \sum_j^N m_j \left(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k \right)$
$-2 \sum_j^N m_j \sum_l^3 x_l a_l \delta_{ik} + \sum_j^N m_j x_i a_k + \sum_j^N m_j x_k a_i$

Demostración Teorema de Steiner

- Pero en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3), tenemos

$$\sum_j^N m_j x_i a_k = a_k \left(\cancelto{0}{\sum_j^N m_j x_{i\,j}} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j x_k a_i = a_i \left(\cancelto{0}{\sum_j^N m_j x_{k\,j}} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j \sum_l^3 x_l a_l = \sum_l a_l \left(\cancelto{0}{\sum_j^N m_j x_{l\,j}} \right) = 0.$$

Demostración Teorema de Steiner

- Pero en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3), tenemos

$$\sum_{j}^{N} m_j x_i a_k = a_k \cancelto{0}{\left(\sum_{j}^{N} m_j x_{i\,j} \right)} = 0,$$

$$\sum_{j}^{N} m_j x_k a_i = a_i \cancelto{0}{\left(\sum_{j}^{N} m_j x_{k\,j} \right)} = 0,$$

$$\sum_{j}^{N} m_j \sum_{l}^{3} x_l a_l = \sum_{l} a_l \cancelto{0}{\left(\sum_{j}^{N} m_j x_{l\,j} \right)} = 0.$$

- Luego tenemos, $I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j^N m_j \left(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k \right)$