Dispersión

Luis A. Núñez

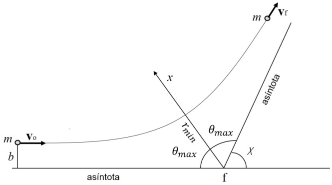
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

17 de septiembre de 2024

Agenda

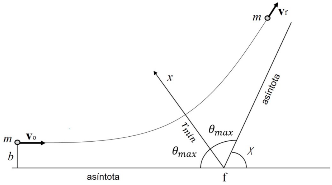
1. Dispersión: El concepto
2. Parámetro de Impacto
3. Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$
4. Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$
5. Sección eficaz
6. Sección eficaz diferencial
7. El experimento de Rutherford

- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$



Dispersión

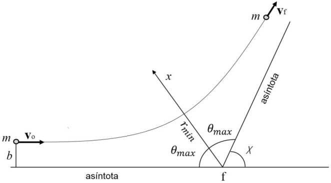
- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$



- Consideremos una partícula de masa M situada en el foco f y una partícula con masa $m \ll M (\mu \approx m)$ incidente desde $r \to \infty$

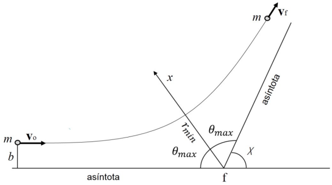
Dispersión

- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$



- Consideremos una partícula de masa M situada en el foco f y una partícula con masa $m \ll M (\mu \approx m)$ incidente desde $r \to \infty$
- La partícula describe una trayectoria abierta desde $r = \infty$ hasta $r = r_{\text{mín}}$ y retorna a $r = \infty$, cambiando la dirección de su velocidad.

- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$



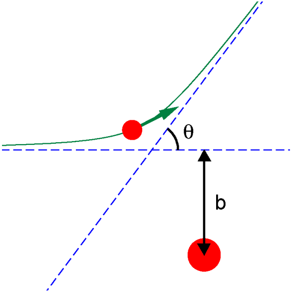
- Consideremos una partícula de masa M situada en el foco f y una partícula con masa $m \ll M(\mu \approx m)$ incidente desde $r \to \infty$
- La partícula describe una trayectoria abierta desde $r = \infty$ hasta $r = r_{\text{mín}}$ y retorna a $r = \infty$, cambiando la dirección de su velocidad.
- El ángulo entre la dirección del vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y la dirección del vector velocidad final $\mathbf{v}_f$ se denomina ángulo de dispersión, que denotaremos por χ

Parámetro de Impacto

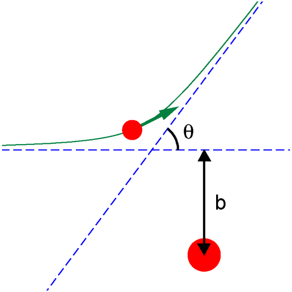
- La energía inicial de la partícula en $r = \infty$ es $E = \frac{1}{2} m v_0^2$

Parámetro de Impacto

- La energía inicial de la partícula en $r = \infty$ es $E = \frac{1}{2} m v_0^2$
- El parámetro de impacto b es la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula incidente y la recta paralela que pasa por el centro del potencial $V(r)$



- La energía inicial de la partícula en $r = \infty$ es $E = \frac{1}{2}mv_0^2$
- El parámetro de impacto b es la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula incidente y la recta paralela que pasa por el centro del potencial $V(r)$



- Los datos claves para la dispersión con campos centrales son b y E.

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r\sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$

Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r\sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$

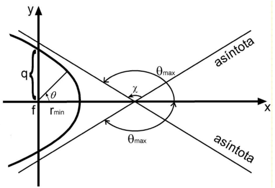
Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r\sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$

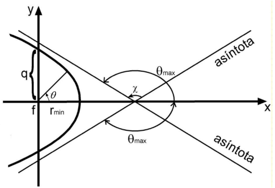
Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r \sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$
- El ángulo de dispersión χ entre las asíntotas es $\chi = 2\theta_{\text{máx}} - \pi$.

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r\sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$
- El ángulo de dispersión χ entre las asíntotas es $\chi = 2\theta_{\text{máx}} - \pi$.
- Esto es $\cos\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$



- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r \sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$
- El ángulo de dispersión χ entre las asíntotas es $\chi = 2\theta_{\text{máx}} - \pi$.
- Esto es $\cos\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$



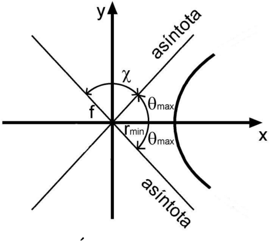
- Oumuamua y Borisov

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$

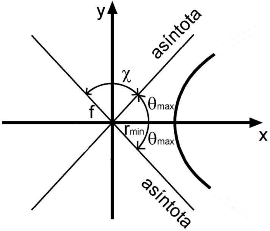
- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$

- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(e\cos\theta - 1)$



Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

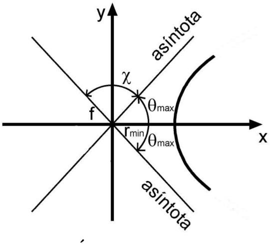
- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(e\cos\theta - 1)$



- Donde $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1}$ para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$, para $\cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \theta_{\text{máx}} < \frac{\pi}{2}$

Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 1/2

- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(e\cos\theta - 1)$



- Donde $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1}$ para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$, para $\cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \theta_{\text{máx}} < \frac{\pi}{2}$
- La órbita hiperbólica no encierra al foco y el ángulo de dispersión es $\chi = \pi - 2\theta_{\text{máx}}$, i.e. $\operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$

- El ángulo de dispersión χ se determina geométricamente con $\theta_{\text{máx}}$

Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 2/2

- El ángulo de dispersión χ se determina geométricamente con $\theta_{\text{máx}}$
- Este ángulo es
  $\theta_{\text{máx}} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}} = b \int_{r_{\text{mín}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$

Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 2/2

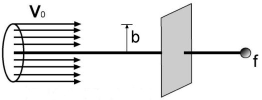
- El ángulo de dispersión χ se determina geométricamente con $\theta_{\text{máx}}$
- Este ángulo es
  $\theta_{\text{máx}} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}} = b \int_{r_{\text{mín}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$
- Es decir $\theta_{\text{máx}} = b \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - b^2 u^2}}$ donde $u = 1/r$, con $u = 0(r \to \infty)$ y $u_m = 1/r_{\text{mín}}$

Sección eficaz

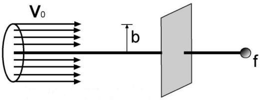
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos χ.

Sección eficaz

- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos χ.
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\ \text{part.}}{\text{área}\ \times t}$



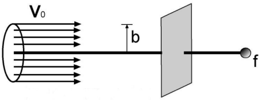
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos χ.
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\text{ part.}}{\text{área } \times t}$



- Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo χ,

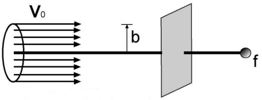
Sección eficaz

- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos χ.
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\ \text{part.}}{\text{área}\ \times t}$



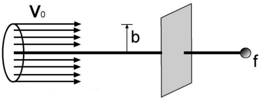
- Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo χ,
- El cono encierra un ángulo sólido Ω.

- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos χ.
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\ \text{part.}}{\text{área}\ \times t}$



- Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo χ,
- El cono encierra un ángulo sólido Ω.
- El ángulo sólido diferencial $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(2\pi r \sin\chi)(r d\chi)}{r^2} = 2\pi \sin\chi d\chi$

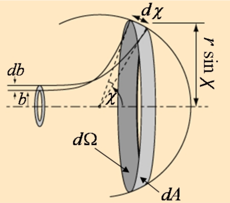
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos χ.
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\ \text{part.}}{\text{área}\ \times t}$



- Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo χ,
- El cono encierra un ángulo sólido Ω.
- El ángulo sólido diferencial $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(2\pi r \sin\chi)(r d\chi)}{r^2} = 2\pi \sin\chi d\chi$
- La sección eficaz de dispersión $\sigma(\Omega)$ es la fracción de partículas incidentes que son desviadas dentro del ángulo sólido Ω,

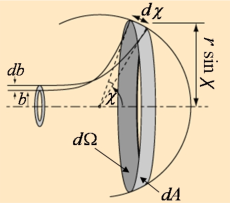
Sección eficaz diferencial

- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.



Sección eficaz diferencial

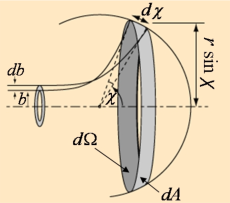
- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.



- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.

Sección eficaz diferencial

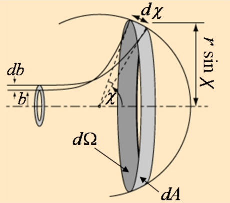
- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.



- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.
- Las partículas incidentes en el anillo de radio b y ancho db por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo $d\Omega$ por unidad de tiempo, $n(\Omega)d\Omega$.

Sección eficaz diferencial

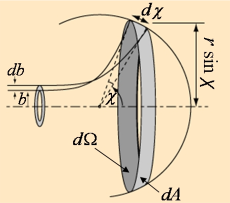
- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.



- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.
- Las partículas incidentes en el anillo de radio b y ancho db por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo $d\Omega$ por unidad de tiempo, $n(\Omega)d\Omega$.
- Esto es $I 2\pi b db = I\sigma(\Omega)d\Omega \Leftrightarrow 2\pi b db = \sigma(\Omega)2\pi \operatorname{sen}\chi d\chi$

Sección eficaz diferencial

- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.



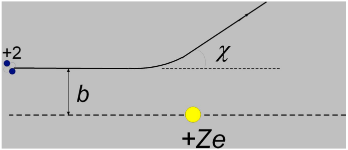
- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.
- Las partículas incidentes en el anillo de radio b y ancho db por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo $d\Omega$ por unidad de tiempo, $n(\Omega)d\Omega$.
- Esto es $I2\pi bdb = I\sigma(\Omega)d\Omega \Leftrightarrow 2\pi bdb = \sigma(\Omega)2\pi\mathrm{sen}\,\chi d\chi$
- La sección eficaz en función del ángulo de dispersión es $\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|$.

El experimento de Rutherford 1/3

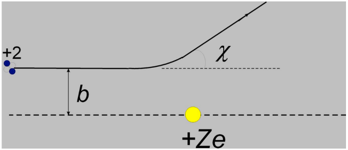
- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.

El experimento de Rutherford 1/3

- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.
- Las partículas incidentes son partículas α con carga $q' = +2e$.



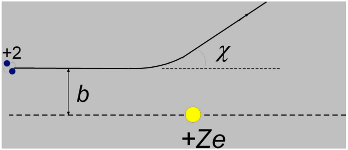
- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.
- Las partículas incidentes son partículas α con carga $q' = +2e$.



- Calculemos el ángulo de dispersión χ para una partícula incidente con energía $E > 0$ y parámetro de impacto b en un potencial central repulsivo $V(r) = k/r$, con $k = qq' = 2Ze^2$.

El experimento de Rutherford 1/3

- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.
- Las partículas incidentes son partículas α con carga $q' = +2e$.



- Calculemos el ángulo de dispersión χ para una partícula incidente con energía $E > 0$ y parámetro de impacto b en un potencial central repulsivo $V(r) = k/r$, con $k = qq' = 2Ze^2$.
- La integral para $\theta_{\max}$ con este potencial es $\theta_{\text{máx}} = b\int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{k}{E}u-b^2u^2}}$
- Entonces $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}\left[\frac{\left(1+\frac{2b^2E}{k}u\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{2bE}{k}\right)^2}}\right]\Bigg|_0^{u_m} = \cos^{-1}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{2b^2E}{k}u\right)\right]\Bigg|_0^{u_m}$

El experimento de Rutherford 2/3

- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$

El experimento de Rutherford 2/3

- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego $\theta_{\text{máx}} = \cancelto{0}{\cos^{-1}(1)} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$

El experimento de Rutherford 2/3

- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego $\theta_{\text{máx}} = \cancelto{0}{\cos^{-1}(1)} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica, $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$, de un potencial de Kepler repulsivo

El experimento de Rutherford 2/3

- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego $\theta_{\text{máx}} = \cancelto{0}{\cos^{-1}(1)} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica, $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$, de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es $\chi = \pi - 2\theta_{\text{máx}}$

El experimento de Rutherford 2/3

- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego $\theta_{\text{máx}} = \cancelto{0}{\cos^{-1}(1)} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica, $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$, de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es $\chi = \pi - 2\theta_{\text{máx}}$
- Luego, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$

El experimento de Rutherford 2/3

- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego $\theta_{\text{máx}} = \cancelto{0}{\cos^{-1}(1)} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica, $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$, de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es $\chi = \pi - 2\theta_{\text{máx}}$
- Luego, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$
- Y obtenemos $\left(\frac{2bE}{k}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} - 1 = \cot^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{2bE}{k}$

El experimento de Rutherford 2/3

- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego $\theta_{\text{máx}} = \cancelto{0}{\cos^{-1}(1)} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica, $e = \sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$, de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es $\chi = \pi - 2\theta_{\text{máx}}$
- Luego, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$
- Y obtenemos $\left(\frac{2bE}{k}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} - 1 = \cot^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{2bE}{k}$
- El ángulo de dispersión en función de datos iniciales b, E, y de la constante k del potencial $V(r) = k/r$

El experimento de Rutherford 3/3

- Los casos límites para el experimento de Rutherford son

El experimento de Rutherford 3/3

- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente $b = 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \chi = \pi$

El experimento de Rutherford 3/3

- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente
  $b = 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \chi = \pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:
  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0.$

El experimento de Rutherford 3/3

- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente
  $b = 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \chi = \pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:
  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0.$
- Como $b = \frac{k}{2E} \cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$, entonces $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E} \csc^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$

El experimento de Rutherford 3/3

- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente
  $b = 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \chi = \pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:
  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0.$
- Como $b = \frac{k}{2E}\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$, entonces $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E}\csc^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$
- La sección eficaz será $\sigma(\chi) = \frac{1}{\sin\chi}\frac{k}{2E}\cot(\chi/2)\frac{k}{4E}\csc^2(\chi/2) = \frac{k^2}{8E^2}\frac{\cot(\chi/2)\csc^2(\chi/2)}{2\sin(\chi/2)\cos(\chi/2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\csc^4\left(\frac{\chi}{2}\right)$

El experimento de Rutherford 3/3

- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente
  $b = 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \chi = \pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:
  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0.$
- Como $b = \frac{k}{2E}\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$, entonces $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E}\csc^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$
- La sección eficaz será $\sigma(\chi) = \frac{1}{\sin\chi}\frac{k}{2E}\cot(\chi/2)\frac{k}{4E}\csc^2(\chi/2) =$
  $\frac{k^2}{8E^2}\frac{\cot(\chi/2)\csc^2(\chi/2)}{2\sin(\chi/2)\cos(\chi/2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\csc^4\left(\frac{\chi}{2}\right)$
- El valor de $\sigma(\chi)$ es grande para $\chi \to 0$, la mayoría de las partículas α pasan sin desviarse mucho.

- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente $b = 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \chi = \pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión: $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0$.
- Como $b = \frac{k}{2E}\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$, entonces $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E}\csc^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$
- La sección eficaz será $\sigma(\chi) = \frac{1}{\sin\chi}\frac{k}{2E}\cot(\chi/2)\frac{k}{4E}\csc^2(\chi/2) = \frac{k^2}{8E^2}\frac{\cot(\chi/2)\csc^2(\chi/2)}{2\sin(\chi/2)\cos(\chi/2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2E}\right)^2\csc^4\left(\frac{\chi}{2}\right)$
- El valor de $\sigma(\chi)$ es grande para $\chi \to 0$, la mayoría de las partículas α pasan sin desviarse mucho.
- Para $\chi = \pi, \sigma(\pi)$ alcanza su valor mínimo no nulo con una probabilidad pequeña de observar partículas α dispersadas completamente hacia atrás, como en un choque frontal contra otra carga puntual positiva.