Partícula en un Campo electromagnético

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

20 de febrero de 2025

Agenda

1. Energía y Potenciales dependientes de las velocidades $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$
2. Fuerza de Lorentz una *una fuerza generalizada*
3. El potencial vector
4. Simetría de Calibre
5. Teorema de Helmholtz

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T\left(\dot{q}_j\right) - V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$. y se define una función de energía como
  $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T\left(\dot{q}_j\right) - V\left(q_j, \dot{q}_j\right)$. y se define una función de energía como
  $E\left(q_j, \dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T\left(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s\right) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j\right) \dot{q}_j = 2T$

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como
  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$
- Entonces
  $E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como
  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$
- Entonces
  $E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$
- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total, $E(q_j, \dot{q}_j) = T + V$

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como
  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$
- Como en general
  $T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^{s} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_{j}^{s} \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$
- Entonces
  $E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$
- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total, $E(q_j, \dot{q}_j) = T + V$
- Si $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$, la función de energía contiene términos adicionales a $T + V$.

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.
- La fuerza de Lorentz constituye una fuerza generalizada

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=0\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$
- Entonces $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=0\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$
- Entonces $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi+\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-\frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=0\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$
- Entonces $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi+\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-\frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$
- Como $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- Como $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- Tendremos $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\right) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right]$
$$\Rightarrow F_i = q\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\right) - \frac{1}{c}\frac{dA_i}{\mathrm{d}t}\right]$$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
  $$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=0\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$
- Entonces $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi+\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-\frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$
- Como $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- Tendremos $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\left(\varphi-\frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right]$
  $$\Rightarrow F_i=q\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi-\frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)-\frac{1}{c}\frac{dA_i}{\mathrm{d}t}\right]$$
- Como $\frac{\partial V}{\partial x_i}=q\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi-\frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$ y $\frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}=-\frac{q}{c}A_i$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía E no depende del potencial vector $\mathbf{A}$ y, por tanto, tampoco depende del campo magnético $\mathbf{B}$.

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía E no depende del potencial vector $\mathbf{A}$ y, por tanto, tampoco depende del campo magnético $\mathbf{B}$.
- La fuerza magnética no realiza trabajo ya que siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula.

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**: $\mathbf{A} \quad \to \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \quad \to \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ donde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r},t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ y $\varphi(\mathbf{r},t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**: $\mathbf{A} \quad \to \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \quad \to \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ donde $\Lambda(\mathbf{r},t)$ es un campo escalar arbitrario
- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$
  $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$
  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r},t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ y $\varphi(\mathbf{r},t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**: $\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ donde $\Lambda(\mathbf{r},t)$ es un campo escalar arbitrario
- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$
  $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$
  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- El Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético bajo una transformación de calibre, es
  $\mathcal{L}' = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi' + \frac{q}{c}\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \frac{q}{c}\nabla\Lambda \cdot \mathbf{v}$
  $= \mathcal{L} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \nabla\Lambda \cdot \mathbf{v}\right) = \mathcal{L} + \frac{q}{c}\frac{d\Lambda}{\mathrm{d}t}$

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.
- La simetría de calibre de las ecuaciones de Maxwell implica la conservación de la carga eléctrica

Teorema de Helmholtz 1/2

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único

Teorema de Helmholtz 1/2

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único
- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \,. \end{array} \right.$$

Teorema de Helmholtz 1/2

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único
- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \,. \end{array} \right.$$

- En general el campo $\mathbf{F}$ puede ser discontinuo, entonces

$$\left. \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho\,(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{J}\,(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \text{y como}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = \rho\,(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}\,(\mathbf{r}) \end{array} \right. ,$$

- Entonces
  $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_I = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}_I = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_I = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho\,(\mathbf{r})$
  y la solución existe y es única.

Teorema de Helmholtz 1/2

- Entonces
  $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho\,(\mathbf{r})$
  y la solución existe y es única.
- Por otra parte $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}_t = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \;\Rightarrow$
  $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \mathbf{J}\,(\mathbf{r})$

- Entonces
  $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho\,(\mathbf{r})$
  y la solución existe y es única.
- Por otra parte $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}_t = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \;\Rightarrow$
  $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \mathbf{J}\,(\mathbf{r})$
- Al seleccionar el calibre de Coulomb $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ tendremos
  $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \partial^i\partial_i\;\mathbf{A} = -\mathbf{J}\,(\mathbf{r}) \quad\Rightarrow$

$$\partial^i\partial_i\;A^k = -J^k\,(\mathbf{r}) \;\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla}^2 A_x = -J_x\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla}^2 A_y = -J_y\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla}^2 A_z = -J_z\,(\mathbf{r}) \end{array}\right.$$