

# Teoremas integrales y campos vectoriales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



4 de noviembre de 2025

## 1 Integrales de línea

- Integrales de línea:  $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ ,  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  y  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Integrales de línea  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  y  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

## 2 Integrales de superficie $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$ , $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ .

## 3 Teorema de Gauss $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$

## 4 Teorema de Gauss y campo eléctrico

- Generalidades
- Discontinuidades y densidades superficiales de carga
- Un ejemplo con densidad de carga
- Identidades de Green

## 5 Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ .

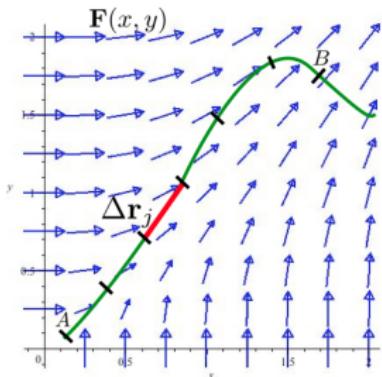
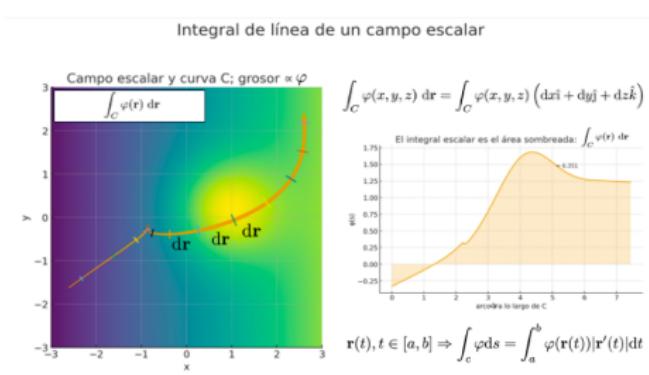
## 6 Un ejemplo del Teorema de Stokes.

# Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ , $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:  
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ ,  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  y  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

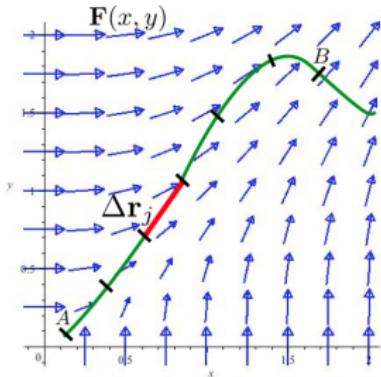
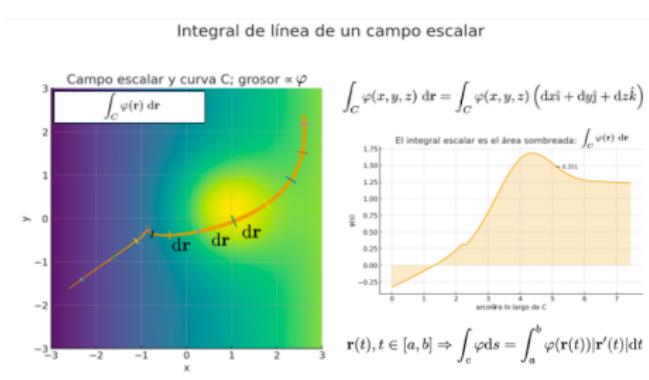
# Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ , $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:  
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ ,  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  y  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas  $C$ , las trayectorias, para la integración.



# Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ , $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

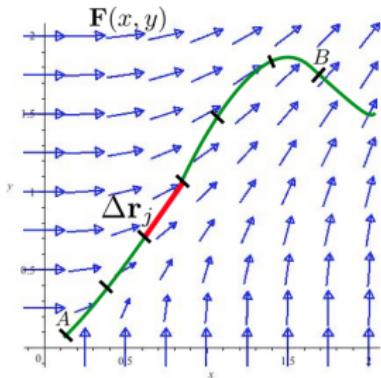
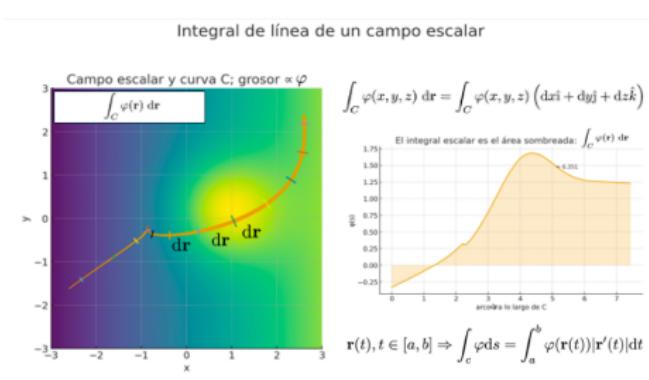
- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:  
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ ,  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  y  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas  $C$ , las trayectorias, para la integración.



- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.

# Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ , $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:  
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$ ,  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  y  $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas  $C$ , las trayectorias, para la integración.



- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.

# Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo  $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ , en coordenadas cartesianas,  
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}).$

# Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo  $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ , en coordenadas cartesianas,  
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$ .
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

# Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo  $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ , en coordenadas cartesianas,  
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}).$
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva  $q^i$  es  $d\boldsymbol{\nu}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$ , por lo tanto:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i, \text{ con } \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|.$$

# Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo  $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ , en coordenadas cartesianas,  
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$ .
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva  $q^i$  es  $d\boldsymbol{\nu}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$ , por lo tanto:  
 $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$ , con  $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ ,  $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$ .
- En esféricas es:  $d\boldsymbol{\nu}_r = \hat{\mathbf{e}}_r dr$ ,  $d\boldsymbol{\nu}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r d\theta$  y  $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) d\varphi$ ,  
 En cilíndricas  $d\boldsymbol{\nu}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho$ ,  $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi$  y  $d\boldsymbol{\nu}_z = \hat{\mathbf{e}}_z dz$ .

# Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo  $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ , en coordenadas cartesianas,  
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$ .
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva  $q^i$  es  $d\boldsymbol{\nu}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$ , por lo tanto:  
 $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$ , con  $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ ,  $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$ .
- En esféricas es:  $d\boldsymbol{\nu}_r = \hat{\mathbf{e}}_r dr$ ,  $d\boldsymbol{\nu}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r d\theta$  y  $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) d\varphi$ ,  
 En cilíndricas  $d\boldsymbol{\nu}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho$ ,  $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi$  y  $d\boldsymbol{\nu}_z = \hat{\mathbf{e}}_z dz$ .
- En general:  $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_C \phi(\mathbf{r}(q^j)) \left( \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$

# Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar:  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ . Otra vez en coordenadas cartesianas resulta  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$   
$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$$

# Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar:  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ . Otra vez en coordenadas cartesianas resulta  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$   
$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ , la *circulación* del campo vectorial  $\mathbf{A}$  a lo largo del contorno  $C$ .

# Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar:  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ . Otra vez en coordenadas cartesianas resulta  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [\mathbf{d}x\mathbf{i} + \mathbf{d}y\mathbf{j} + \mathbf{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$   

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ , la *circulación* del campo vectorial  $\mathbf{A}$  a lo largo del contorno  $C$ .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas  $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^i)) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$ , resulta que  $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3$ .

# Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar:  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ . Otra vez en coordenadas cartesianas resulta  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$   

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ , la *circulación* del campo vectorial  $\mathbf{A}$  a lo largo del contorno  $C$ .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas  $\int_C \mathbf{A} \cdot (r)dr = \int_C \mathbf{A}(r(q^j)) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$ , resulta que  $\int_C \mathbf{A}(r) \cdot dr = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3$ .
- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial.  $\int_C \mathbf{A} \times dr$ . En coordenadas cartesianas sería  $\int_C \mathbf{A} \times dr = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$  y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas  $\int_C \mathbf{A} \times dr = \left( \int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk} \right) |e_k\rangle \equiv \left( \int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \epsilon^{ijk} \right) |\tilde{e}_k\rangle$

# Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar:  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ . Otra vez en coordenadas cartesianas resulta  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$   
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
  - Cuando el contorno cerrado, tenemos  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ , la *circulación* del campo vectorial  $\mathbf{A}$  a lo largo del contorno  $C$ .
  - En coordenadas curvilíneas generalizadas  $\int_C \mathbf{A} \cdot (r)dr = \int_C \mathbf{A}(r(q^i)) \cdot (\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i)$ , resulta que  $\int_C \mathbf{A}(r) \cdot dr = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$
  - Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial.  $\int_C \mathbf{A} \times dr$ . En coordenadas cartesianas sería  $\int_C \mathbf{A} \times dr = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$  y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas  $\int_C \mathbf{A} \times dr = (\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk}) |e_k\rangle \equiv (\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \epsilon^{ijk}) |\tilde{e}_k\rangle$
  - Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifican a través de un parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano  $x = f(\lambda)$ ,  $y = g(\lambda)$  y  $z = h(\lambda)$ . Las componentes del vector desplazamiento, para el  $d\mathbf{r}$  serán  $dx = f'(\lambda)d\lambda$ ,  $dy = g'(\lambda)d\lambda$  y  $dz = h'(\lambda)d\lambda$ , mientras que las componentes del campo vectorial
- $$\mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \begin{cases} A^1(x, y, z) = & A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv F(\lambda) \\ A^2(x, y, z) = & A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv G(\lambda) \\ A^3(x, y, z) = & A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv H(\lambda) \end{cases}$$

# Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar:  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ . Otra vez en coordenadas cartesianas resulta  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$   
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
  - Cuando el contorno cerrado, tenemos  $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ , la *circulación* del campo vectorial  $\mathbf{A}$  a lo largo del contorno  $C$ .
  - En coordenadas curvilíneas generalizadas  $\int_C \mathbf{A} \cdot (r)dr = \int_C \mathbf{A}(r(q^i)) \cdot (\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i)$ , resulta que  $\int_C \mathbf{A}(r) \cdot dr = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$
  - Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial.  $\int_C \mathbf{A} \times dr$ . En coordenadas cartesianas sería  $\int_C \mathbf{A} \times dr = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$  y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas  $\int_C \mathbf{A} \times dr = (\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk}) |e_k\rangle \equiv (\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \epsilon^{ijk}) |\tilde{e}_k\rangle$
  - Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifican a través de un parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano  $x = f(\lambda)$ ,  $y = g(\lambda)$  y  $z = h(\lambda)$ . Las componentes del vector desplazamiento, para el  $d\mathbf{r}$  serán  $dx = f'(\lambda)d\lambda$ ,  $dy = g'(\lambda)d\lambda$  y  $dz = h'(\lambda)d\lambda$ , mientras que las componentes del campo vectorial
- $$\mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \begin{cases} A^1(x, y, z) = & A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv F(\lambda) \\ A^2(x, y, z) = & A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv G(\lambda) \\ A^3(x, y, z) = & A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv H(\lambda) \end{cases}$$
- por lo tanto:  $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)] d\lambda$

# Integrales de superficie $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ , $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son  $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ ,  $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  y  $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ .

# Integrales de superficie $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ , $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son  $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ ,  $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  y  $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ .
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS.$$

# Integrales de superficie $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ , $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

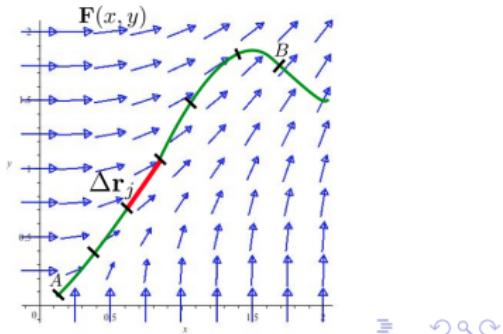
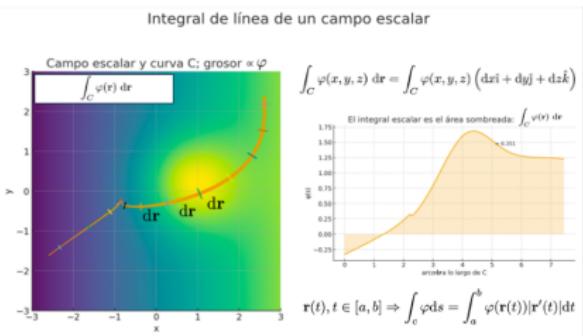
- Ahora las integrales de superficie, son  $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ ,  $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  y  $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ .
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS.$$
- los operadores diferenciales:
  - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow$  Densidad de Campo
  - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow$  Densidad Flujo
  - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$  Densidad Circulación

# Integrales de superficie $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ , $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son  $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$ ,  $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  y  $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ .
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s A_{\hat{n}} \, dS.$$
- los operadores diferenciales:
  - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow$  Densidad de Campo
  - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow$  Densidad Flujo
  - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$  Densidad Circulación
- as integrales de volumen  $\int_V \phi(\mathbf{r}) \, dV$  y  $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dV$

# Integrales de superficie $\int_s \phi d\mathbf{S}$ , $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son  $\int_s \phi d\mathbf{S}$ ,  $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  y  $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$ .
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_s A_{\hat{n}} dS.$$
- los operadores diferenciales:
  - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(q^i) d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad de Campo}$
  - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad Flujo}$
  - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow \text{Densidad Circulación}$
- as integrales de volumen  $\int_V \phi(\mathbf{r}) dV$  y  $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV$
- Mientras que el segundo tipo de integral es simplemente:
$$\int_V \mathbf{A}(x^i) dV = \mathbf{i} \int_V A_x(x^j) dV + \mathbf{j} \int_V A_y(x^j) dV + \mathbf{k} \int_V A_z(x^j) dV.$$



# Teorema de Gauss y sus variantes

- El Teorema de Gauss es  $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$ .

# Teorema de Gauss y sus variantes

- El Teorema de Gauss es  $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$ .
- Compruebe el teorema de Gauss para un cubo de lado  $l$  y un campo vectorial  $\mathbf{B} = (x + 1)\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y - z\hat{\mathbf{e}}_z$

# Teorema de Gauss y sus variantes

- El Teorema de Gauss es  $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$ .
- Compruebe el teorema de Gauss para un cubo de lado  $l$  y un campo vectorial  $\mathbf{B} = (x+1)\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y - z\hat{\mathbf{e}}_z$
- Para un campo escalar  $\phi(x, y, z) \Rightarrow \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$   
Si  $\mathbf{c}$  es un vector constante, tendremos  $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c}\phi(x, y, z)$  y,  
 $\iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV \Leftrightarrow \mathbf{c} \cdot \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} = \mathbf{c} \cdot \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$   
con lo cual  $0 = \mathbf{c} \cdot [\iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} - \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV]$
- Usando la misma estrategia anterior compruebe la expresión del teorema de Gauss para un campo vectorial  $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x^i) dV$ .

# Teorema de Gauss y campo eléctrico

- El flujo del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la distribución de cargas:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

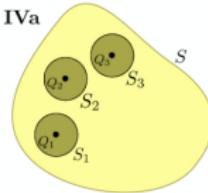
# Teorema de Gauss y campo eléctrico

- El flujo del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la distribución de cargas:  

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$
- Un conjunto de cargas distribuidas en una región encerrada por la superficie  $S$ . Encerramos cada carga  $Q_i$  en una superficie  $S_i$ .  

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0$$
, con lo cual  

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i$$



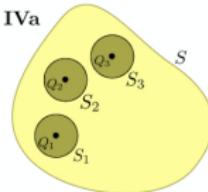
# Teorema de Gauss y campo eléctrico

- El flujo del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la distribución de cargas:  

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$
- Un conjunto de cargas distribuidas en una región encerrada por la superficie  $S$ . Encerramos cada carga  $Q_i$  en una superficie  $S_i$ .  

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0$$
, con lo cual  

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i$$



- $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \left( \iint_{S_i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i + \iint_{S_i} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i \right) \Rightarrow$   

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

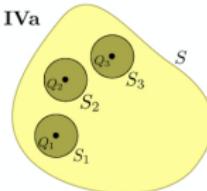
# Teorema de Gauss y campo eléctrico

- El flujo del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y la distribución de cargas:  

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$
- Un conjunto de cargas distribuidas en una región encerrada por la superficie  $S$ . Encerramos cada carga  $Q_i$  en una superficie  $S_i$ .  

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0$$
, con lo cual  

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i$$

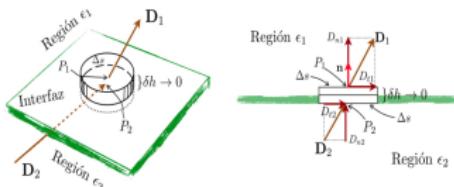
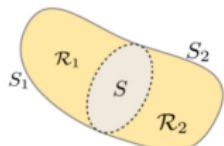


- $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \left( \iint_{S_i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i + \iint_{S_i} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i \right) \Rightarrow$   

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
- $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

# Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región  $R$  delimitada por una superficie  $S$ , y una superficie  $\bar{S}$ , separa dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$  a través de la cual un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , es discontinuo

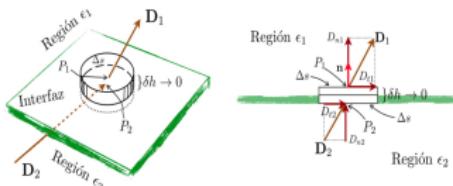
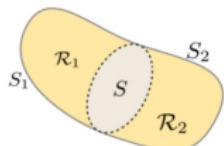


- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

# Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región  $R$  delimitada por una superficie  $S$ , y una superficie  $\bar{S}$ , separa dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$  a través de la cual un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , es discontinuo

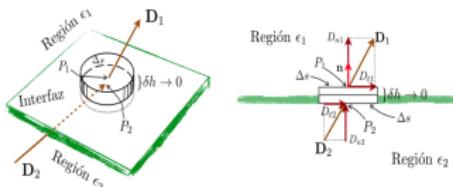
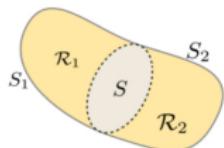


- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

# Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región  $R$  delimitada por una superficie  $S$ , y una superficie  $\bar{S}$ , separa dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$  a través de la cual un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , es discontinuo



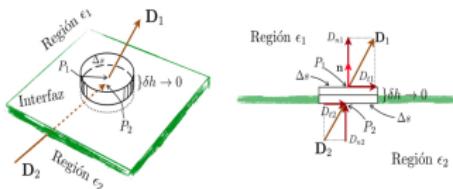
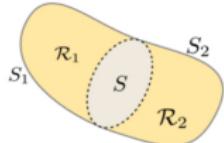
- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región  $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$ .

# Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región  $R$  delimitada por una superficie  $S$ , y una superficie  $\bar{S}$ , separa dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$  a través de la cual un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , es discontinuo



- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

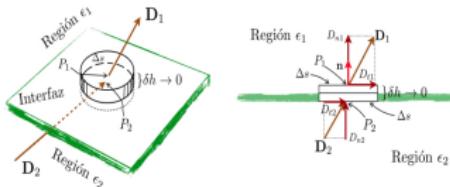
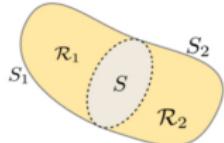
- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región  $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$ .

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ con } \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \text{ el vector unitario, normal a la superficie } \bar{S} \text{ y que apunta de } R_1 \rightarrow R_2.$$

# Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región  $R$  delimitada por una superficie  $S$ , y una superficie  $\bar{S}$ , separa dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$  a través de la cual un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , es discontinuo



- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región  $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$ .

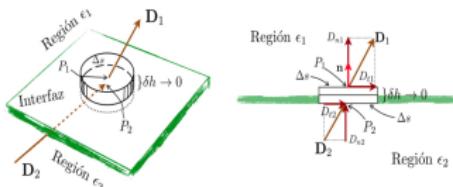
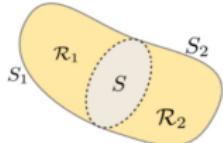
- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ con } \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \text{ el vector unitario, normal a la superficie } \bar{S} \text{ y que apunta de } R_1 \rightarrow R_2.$$

- El ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$ , a través de una superficie  $\bar{S}$ , que separa dos medios. La ecuación de Maxwell correspondiente será  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(r) \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} = \sigma$ , con  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

# Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región  $R$  delimitada por una superficie  $S$ , y una superficie  $\bar{S}$ , separa dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$  a través de la cual un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , es discontinuo



- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región  $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$ .

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ con } \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \text{ el vector unitario, normal a la superficie } \bar{S} \text{ y que apunta de } R_1 \rightarrow R_2.$$

- El ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$ , a través de una superficie  $\bar{S}$ , que separa dos medios. La ecuación de Maxwell correspondiente será  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(r) \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} = \sigma$ , con  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ .
- Así  $(\nabla \cdot \mathbf{D})dV = \mathbf{D}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 \Rightarrow \rho(r)(\Delta S_2 \delta h) = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_2} \Delta S_2 \Rightarrow \rho(r)\delta h \equiv \sigma = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_2}$

# Un ejemplo con densidad de carga

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 
  - El plano infinito en  $z = 0$  tiene densidad de carga superficial  $\sigma$
  - Calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}(z)$  y analizar en  $z = 0$

# Un ejemplo con densidad de carga

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 
  - El plano infinito en  $z = 0$  tiene densidad de carga superficial  $\sigma$
  - Calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}(z)$  y analizar en  $z = 0$
- El flujo del campo es  $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$

# Un ejemplo con densidad de carga

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 
  - El plano infinito en  $z = 0$  tiene densidad de carga superficial  $\sigma$
  - Calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}(z)$  y analizar en  $z = 0$
- El flujo del campo es  $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$
- La ley de Gauss impone  $E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , con  $Q = \sigma A$ , pero además, por simetría  $E_{z+} = -E_{z-}$

# Un ejemplo con densidad de carga

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 
    - El plano infinito en  $z = 0$  tiene densidad de carga superficial  $\sigma$
    - Calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}(z)$  y analizar en  $z = 0$
  - El flujo del campo es  $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$
  - La ley de Gauss impone  $E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , con  $Q = \sigma A$ , pero además, por simetría  $E_{z+} = -E_{z-}$
  - Por lo tanto, el campo eléctrico generado por el plano cargado es
- $$\vec{E}_z = \begin{cases} \vec{E}_{z+} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z > 0 \\ \vec{E}_{z-} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z < 0 \end{cases}$$

# Un ejemplo con densidad de carga

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 
  - El plano infinito en  $z = 0$  tiene densidad de carga superficial  $\sigma$
  - Calcular el campo eléctrico total  $\vec{E}(z)$  y analizar en  $z = 0$
- El flujo del campo es  $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$
- La ley de Gauss impone  $E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , con  $Q = \sigma A$ , pero además, por simetría  $E_{z+} = -E_{z-}$
- Por lo tanto, el campo eléctrico generado por el plano cargado es
 
$$\vec{E}_z = \begin{cases} \vec{E}_{z+} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z > 0 \\ \vec{E}_{z-} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z < 0 \end{cases}$$
- La discontinuidad en  $z = 0$  sigue siendo la misma:
 
$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \left( E_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) - \left( E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

# Identidades de Green

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si  $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)$  el teorema de Gauss implica
$$\iint_s (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) dV$$

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si  $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$  el teorema de Gauss implica
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$

# Identidades de Green

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si  $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$  el teorema de Gauss implica
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$
- Si consideramos campos vectoriales
$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) = \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i) + \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)$$
$$\nabla \cdot (\xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \nabla\xi(x^i) \cdot \nabla\zeta(x^i) + \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i).$$

# Identidades de Green

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si  $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$  el teorema de Gauss implica
 
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
 
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$
- Si consideramos campos vectoriales
 
$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) = \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i) + \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)$$

$$\nabla \cdot (\xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \nabla\xi(x^i) \cdot \nabla\zeta(x^i) + \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i).$$
- Restando

$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i)$$

# Identidades de Green

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si  $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$  el teorema de Gauss implica
 
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
 
$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$
- Si consideramos campos vectoriales
 
$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) = \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i) + \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)$$

$$\nabla \cdot (\xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \nabla\xi(x^i) \cdot \nabla\zeta(x^i) + \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i).$$
- Restando
 
$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i)$$
- Integrando en un volumen  $V$  obtendremos el *teorema simétrico de Green, la segunda identidad*

$$\iiint_V \{\zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i)\} dV =$$

$$\iint_s (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) \cdot d\mathbf{s}$$

# Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ .

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , a lo largo de una curva cerrada  $C$ , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva  $C$ .  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS$ .

# Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ .

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , a lo largo de una curva cerrada  $C$ , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva  $C$ .  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS$ .
- Teorema de Stokes y Campo Magnético. La ley de Ampere para una densidad de corriente:  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ .

# Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ .

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , a lo largo de una curva cerrada  $C$ , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva  $C$ .  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS$ .
- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente:  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ .
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$ , para cualquier superficie  $S$ .

La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell:  $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ .

# Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ .

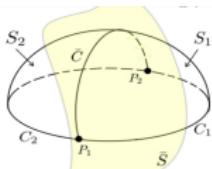
- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , a lo largo de una curva cerrada  $C$ , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva  $C$ .  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS$ .
- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente:  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ .  
Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$ , para cualquier superficie  $S$ .  
La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell:  $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ .
- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar  $\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$   
 $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$

# Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ .

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , a lo largo de una curva cerrada  $C$ , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva  $C$ .  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS$ .
- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente:  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ .
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$ , para cualquier superficie  $S$ .  
La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell:  $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ .
- Versión del Teorema de Stokes: Campo escalar  $\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$   
 $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$
- Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria:  $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$

# Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$ .

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ , a lo largo de una curva cerrada  $C$ , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva  $C$ .  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS$ .
  - Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente:  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ .
  - Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$ , para cualquier superficie  $S$ . La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell:  $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ .
  - Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar  $\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$
  - $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$
  - Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria:  $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$
  - Un campo vectorial  $\mathbf{A}(x, y, z)$  que es discontinuo sobre una superficie  $\bar{S}$ , que divide  $R$  en dos subregiones  $R_1$  y  $R_2$
- $$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \begin{matrix} \int_{P_2}^{P_1} \\ \text{curva } \tilde{C} \text{ en } S_1 \end{matrix} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \begin{matrix} \int_{P_1}^{P_2} \\ \text{curva } \tilde{C} \text{ en } S_2 \end{matrix} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

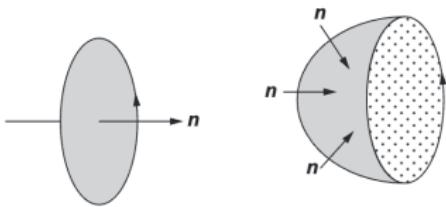


# Un ejemplo del Teorema de Stokes 1/.

- Para el campo  $\mathbf{B} = e^{-r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ , calculemos  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$  para un circuito cerrado y comparemos el resultado con las integrales  $\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$  para dos superficies diferentes que tienen el mismo perímetro.

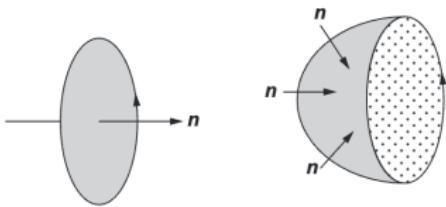
# Un ejemplo del Teorema de Stokes 1/.

- Para el campo  $\mathbf{B} = e^{-r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ , calculemos  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$  para un circuito cerrado y comparemos el resultado con las integrales  $\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$  para dos superficies diferentes que tienen el mismo perímetro.
- Las superficies son: un disco circular delimitado por una circunferencia unitaria en el plano  $xy$ , y un hemisferio delimitado por el mismo circuito, con su superficie en la región  $z < 0$ .



# Un ejemplo del Teorema de Stokes 1/.

- Para el campo  $\mathbf{B} = e^{-r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ , calculemos  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$  para un circuito cerrado y comparemos el resultado con las integrales  $\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$  para dos superficies diferentes que tienen el mismo perímetro.
- Las superficies son: un disco circular delimitado por una circunferencia unitaria en el plano  $xy$ , y un hemisferio delimitado por el mismo circuito, con su superficie en la región  $z < 0$ .



- Para la integral de línea,  $d\mathbf{r} = r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi$ , que se reduce a  $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi$  como  $\theta = \pi/2$  y  $r = 1$  tendremos  
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{e}$$

# Un ejemplo del Teorema de Stokes 2/2.

- Para calcular la integral de superficie tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_r - r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{-r} \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - (1 - r) e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

# Un ejemplo del Teorema de Stokes 2/2.

- Para calcular la integral de superficie tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_r - r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{-r} \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - (1-r)e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Para el disco,  $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r \sin \theta dr d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi$ , porque  $\theta = \pi/2$ , con  $0 \leq r \leq 1$ , y  $0 \leq \varphi < 2\pi$

Entonces  $\int_{S_1} -(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr (1-r) e^{-r} = \frac{2\pi}{e}$

El signo menos es porque la normal está en la dirección decreciente  $\theta$

# Un ejemplo del Teorema de Stokes 2/2.

- Para calcular la integral de superficie tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_r - r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{-r} \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - (1-r)e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Para el disco,  $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r \sin \theta dr d\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi$ , porque  $\theta = \pi/2$ , con  $0 \leq r \leq 1$ , y  $0 \leq \varphi < 2\pi$

Entonces  $\int_{S_1} -(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr (1-r) e^{-r} = \frac{2\pi}{e}$

El signo menos es porque la normal está en la dirección decreciente  $\theta$

- Para el hemisferio, definido por  $r = 1$ ,  $\pi/2 \leq \theta < \pi$ , y  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , tenemos  $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta d\theta d\varphi$  (la normal está en la dirección decreciente de  $r$ ), y

$$\int_{S_2} -(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta d\theta d\varphi = - \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta e^{-1} \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{e}$$