

Principios Variacionales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



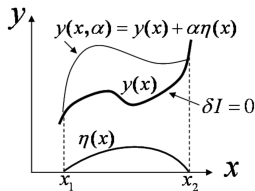
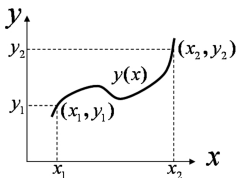
11 de febrero de 2025

- 1 Extremos de un funcional
- 2 Trayectorias cercanas a la extrema
- 3 Variaciones de un funcional
- 4 La ecuación de Euler
- 5 Cálculo de variaciones con restricciones
 - Multiplicadores de Lagrange
 - Partícula libre moviéndose sobre una esfera
 - El péndulo simple

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $y(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[y(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $y(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[y(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).
- Entonces anularemos las variaciones del funcional, $\delta I = \delta \mathcal{F}[y(x)] = 0$, para determinar la $y(x)$ que lo hace extremo.



- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x)$.

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional
$$I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x).$$
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional
$$I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x).$$
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma
$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x),$$
 con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función
$$I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$$

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left. \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left. \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$
- Al evaluar $\alpha = 0$ garantizamos que obtenemos la $y(x)$ que hace extremo el funcional I .

- La derivada $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)}{d\alpha} dx$

- La derivada $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)}{d\alpha} dx$
- Equivalentemente $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right] dx$

- La derivada $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)}{d\alpha} dx$
- Equivalentemente $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right] dx$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{d\eta}{dx}$

- La derivada $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)}{d\alpha} dx$
- Equivalentemente $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right] dx$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{d\eta}{dx}$
- Con lo cual $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx$.

- La derivada $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)}{d\alpha} dx$
- Equivalentemente $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right] dx$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{d\eta}{dx}$
- Con lo cual $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx$.
- El segundo término se integra por partes, $\int uv' dx = uv - \int u' v dx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x)}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$,

- La derivada $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)}{d\alpha} dx$
- Equivalentemente $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right] dx$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{d\eta}{dx}$
- Con lo cual $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx$.
- El segundo término se integra por partes, $\int uv' dx = uv - \int u' v dx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x)}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$,
- Finalmente $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$.

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0.$$

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0.$$
- La condición $\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0.$$
- La condición $\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0.$$
- La condición $\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcional I sea extremo.

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0.$$
- La condición $\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcional I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0.$$
- La condición $\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcional I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.
- Los principios variacionales pueden extenderse a funcionales de varias funciones y sus derivadas $f(y_i(x), y_i'(x), \dots, x)$, con $i = 1, 2, \dots, s$. Buscaremos las $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$, que pasan por x_1 y x_2 y que hacen que I adquiera un valor extremo, i.e., $\delta I = 0$.

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0.$$
- La condición $\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcional I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.
- Los principios variacionales pueden extenderse a funcionales de varias funciones y sus derivadas $f(y_i(x), y_i'(x), \dots, x)$, con $i = 1, 2, \dots, s$. Buscaremos las $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$, que pasan por x_1 y x_2 y que hacen que I adquiera un valor extremo, i.e., $\delta I = 0$.
- Entonces $I[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} f(y_i(x), y_i'(x), x) dx \Rightarrow \delta I = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, s$$

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$, donde se cumplan la restricción holónoma $g(x, y(x)) = 0$.

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$, donde se cumplan la restricción holónoma $g(x, y(x)) = 0$.
- Introducimos un multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ y el funcional modificado a extremar pasa a ser:
$$\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} (f(x, y(x), y'(x)) + \lambda(x)g(x, y(x))) dx.$$

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx$, donde se cumplan la restricción holónoma $g(x, y(x)) = 0$.
- Introducimos un multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ y el funcional modificado a extremar pasa a ser:
$$\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} (f(x, y(x), y'(x)) + \lambda(x)g(x, y(x))) dx.$$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange, modificadas por la presencia del multiplicador de Lagrange son: $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$ con la restricción anholónoma $g(x, y(x)) = 0$

- Consideremos el siguiente funcional

$$I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) dt, \text{ sujeto a la restricción } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

- Consideremos el siguiente funcional

$$I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) dt, \text{ sujeto a la restricción } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

- Construimos una acción modificada que incorpore la restricción

$$\tilde{I} = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right) dt$$

- Consideremos el siguiente funcional

$$I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) dt, \text{ sujeto a la restricción } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

- Construimos una acción modificada que incorpore la restricción

$$\tilde{I} = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right) dt$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = 2\lambda z$$

- Consideremos el siguiente funcional

$$I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) dt, \text{ sujeto a la restricción } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

- Construimos una acción modificada que incorpore la restricción

$$\tilde{I} = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right) dt$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = 2\lambda z$$

- Derivando la restricción

$$\frac{d^2}{dt^2} (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$$

- Consideremos el siguiente funcional

$$I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) dt, \text{ sujeto a la restricción } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

- Construimos una acción modificada que incorpore la restricción

$$\tilde{I} = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right) dt$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = 2\lambda z$$

- Derivando la restricción

$$\frac{d^2}{dt^2} (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$$

- Sustituyendo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ tendremos $2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\lambda R^2 = 0$ y despejamos $\lambda = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{R^2}$

- Consideremos el siguiente funcional

$$I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) dt, \text{ sujeto a la restricción } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

- Construimos una acción modificada que incorpore la restricción

$$\tilde{I} = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right) dt$$

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = 2\lambda z$$

- Derivando la restricción

$$\frac{d^2}{dt^2} (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$$

- Sustituyendo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ tendremos $2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\lambda R^2 = 0$ y despejamos $\lambda = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{R^2}$

- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = -2x \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{R^2}$ igual para y y para z . Las soluciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ extreman la acción \tilde{I}

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ , como una coordenada mas.

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ , como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vínculos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ , como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vínculos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.
- $\mathcal{L}[x^A(q^i, t), \dot{x}^A(q^i, \dot{q}^i, t), t, \lambda^\alpha] \equiv \mathcal{L}'[q^i, \dot{q}^i, t], A = 1, \dots, 3N; i = 1, \dots, n$ y $\alpha = 1, \dots, k$. Con $k = 3N - n$.

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ , como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vínculos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.
- $\mathcal{L} [x^A(q^i, t), \dot{x}^A(q^i, \dot{q}^i, t), t, \lambda^\alpha] \equiv \mathcal{L}' [q^i, \dot{q}^i, t], A = 1, \dots, 3N; i = 1, \dots, n$ y $\alpha = 1, \dots, k$. Con $k = 3N - n$.
- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$, dado que $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$.

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ , como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vínculos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.
- $\mathcal{L}[x^A(q^i, t), \dot{x}^A(q^i, \dot{q}^i, t), t, \lambda^\alpha] \equiv \mathcal{L}'[q^i, \dot{q}^i, t]$, $A = 1, \dots, 3N$; $i = 1, \dots, n$ y $\alpha = 1, \dots, k$. Con $k = 3N - n$.
- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$, dado que $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$.
- $\underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)}_{\mathcal{L}} \equiv \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta}_{\mathcal{L}'}$