# Integrales complejas

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

20 de abril de 2021

# Agenda Integrales complejas

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \;\Rightarrow\; |z_j - z_{j-1}| \to 0 \;\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, f(z)\,.$

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$
- Es una integral de línea, ya que $z$ tiene “dos dimensiones” $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\ ,$

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z)$.
- Es una integral de línea, ya que $z$ tiene "dos dimensiones" $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$,
- Con las siguientes propiedades
  - $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ \left(f(z) + g(z)\right) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z g(z)$.
  - $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ K f(z) = K \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z)$ con $K$ una constante real o compleja.
  - $\int_a^b \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_b^a \mathrm{d}z\ f(z)$.
  - $\int_a^b \mathrm{d}z\ f(z) = \int_a^m \mathrm{d}z\ f(z) + \int_m^b \mathrm{d}z\ f(z)$.
  - $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ |f(z)| \leq ML$, donde $M = \max|f(z)|$ y $L$ la longitud de $\mathcal{C}$.
  - Esta última propiedad permite establecer cotas a las integrales complejas sin evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demostración $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) \Rightarrow$
$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)|\ |\Delta z_j| \leq M \sum_{j=1}^{n} |\Delta z_j| \leq ML\,.$$

# Teorema integral de Cauchy

El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \ f(z) = 0\,.$

# Teorema integral de Cauchy

El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$.
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$.

# Teorema integral de Cauchy

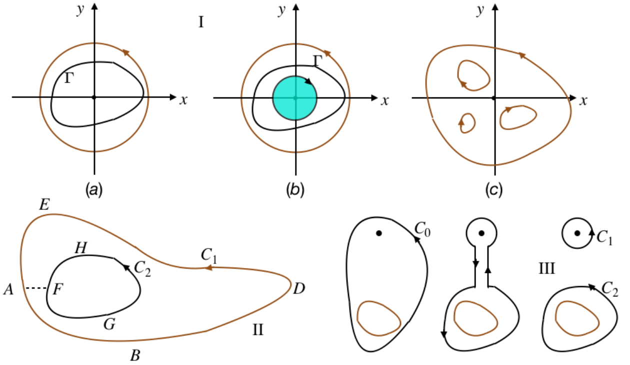
El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 0\,.$
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \; f(z) =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\,.$
- El Teorema de Stokes nos dice que $\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \oint_{\mathcal{C}} (p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x)\,,$

El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

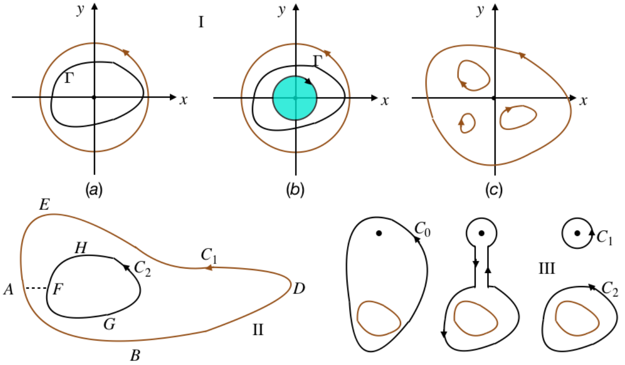
- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,.$
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\,.$
- El Teorema de Stokes nos dice que $\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \oint_{\mathcal{C}} (p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x)\,,$
- Si suponemos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, entonces tendremos que $\oint_{\mathcal{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_{\mathcal{C}} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y}\right) + i\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right) = 0\,,$

# Simple y Multiplemente Conexa




- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene “huecos”**

# Simple y Multiplemente Conexa




- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene “huecos”**
- Una región **Multiplemente conexa** es aquella que **tiene “huecos”**

# Observaciones y el Teorema de Morera

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv$ $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$

# Observaciones y el Teorema de Morera

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv$
$\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces
$\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv$ $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado. $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$

# Observaciones y el Teorema de Morera

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv$ $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.
  $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$
- Este resultado puede extenderse a regiones con $n$ huecos $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\mathcal{C}_j} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv$ $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.
  $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$
- Este resultado puede extenderse a regiones con $n$ huecos $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\mathcal{C}_j} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$
- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**
  Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

# Fórmula integral de Cauchy

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = f(z_0)\,.$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces $\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\,.$

# Fórmula integral de Cauchy

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = f(z_0)\,.$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces $\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\,.$
- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \to 0$ tendremos que $\text{lím}_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \text{lím}_{r\to 0} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)\,.$

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-z_0} = f(z_0)\,.$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\,.$
- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \to 0$ tendremos que $\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)\,.$
- Es válida para todo $z$: $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\,.$

# Fórmula integral de Cauchy

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = f(z_0)\,.$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\,.$
- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \to 0$ tendremos que $\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)\,.$
- Es válida para todo $z$: $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\,.$
- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}\,.$

# Recapitulando

En presentación consideramos

1. 