Ecuación de Difusión:
Promoviendo el Calor

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

3 de junio de 2022

Agenda de la Ecuación de Difusión

1. Ecuación del calor 1D $u_{xx} = \frac{1}{\alpha^2} u_t$
   - Separación de Variables
   - Condiciones de frontera
     - Condición homogénea de Dirichlet
     - Condición inhomogénea de Dirichlet
     - Condición de frontera inhomogénea general
2. Ecuación de Laplace en esféricas $\nabla^2_{\rho\theta\phi} u(\vec{r}, t) = 0$

Supongamos una barra de un material conductor de calor, cuyos extremos se mantienen a determinadas temperaturas. La ecuación que describe la distribución de temperatura en la barra es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t} \Leftrightarrow u_{xx} = \frac{1}{\alpha^2} u_t \quad \text{proponemos } u = X(x)T(t)$$

$u(x,t)$ es la distribución de la temperatura y α la difusión térmica.
Entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\dot{T}}{T} \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\dot{T}}{T}\,,$$

donde $u(x,t)|_0^L$ y $u_x(x,t)|_0^L$ están sujetas a algún tipo de condición de frontera y alguna distribución inicial para $u(x,0)$.
La solución más general será

$$u(x,t) = (A\cos(\lambda\, x) + B\,\mathrm{sen}(\lambda\, x))\exp(-\lambda^2\alpha^2 t)$$

Condiciones de frontera

- Prescripción de la temperatura o condición de Dirichlet $u(0, t) = \mathcal{T}_0(t)$ y $u(L, t) = \mathcal{T}_L(t)$

Condiciones de frontera

- Prescripción de la temperatura o condición de Dirichlet $u(0,t) = \mathcal{T}_0(t)$ y $u(L,t) = \mathcal{T}_L(t)$
- Prescripción del calor o condición de Neumann $u_x(0,t) = \mathcal{Q}_0(t)$ y $u_x(L,t) = \mathcal{Q}_L(t)$.
  Un caso particular es la condición aislada, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

Condiciones de frontera

- Prescripción de la temperatura o condición de Dirichlet $u(0,t) = \mathcal{T}_0(t)$ y $u(L,t) = \mathcal{T}_L(t)$
- Prescripción del calor o condición de Neumann $u_x(0,t) = \mathcal{Q}_0(t)$ y $u_x(L,t) = \mathcal{Q}_L(t)$.
  Un caso particular es la condición aislada, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$
- Prescripción mixta $u(0,t) = \mathcal{T}_0(t)$ y $u_x(L,t) = \mathcal{Q}_L(t)$ o $u_x(0,t) = \mathcal{Q}_0(t)$ y $u(L,t) = \mathcal{T}_L(t)$.
  Un caso particular es la condición de Robinson $u_x(0,t) = H\left(\mathcal{Q}_0(t) - \mathcal{T}_0(t)\right)$ y $u_x(L,t) = H\left(\mathcal{Q}_L(t) - \mathcal{T}_L(t)\right)$

Condiciones de frontera

- Prescripción de la temperatura o condición de Dirichlet $u(0,t) = \mathcal{T}_0(t)$ y $u(L,t) = \mathcal{T}_L(t)$
- Prescripción del calor o condición de Neumann $u_x(0,t) = \mathcal{Q}_0(t)$ y $u_x(L,t) = \mathcal{Q}_L(t)$.
  Un caso particular es la condición aislada, $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$
- Prescripción mixta $u(0,t) = \mathcal{T}_0(t)$ y $u_x(L,t) = \mathcal{Q}_L(t)$ o $u_x(0,t) = \mathcal{Q}_0(t)$ y $u(L,t) = \mathcal{T}_L(t)$.
  Un caso particular es la condición de Robinson $u_x(0,t) = H\left(\mathcal{Q}_0(t) - \mathcal{T}_0(t)\right)$ y $u_x(L,t) = H\left(\mathcal{Q}_L(t) - \mathcal{T}_L(t)\right)$
- Prescripción periódica $u(0,t) = u(L,t)$ y $u_x(0,t) = u_x(L,t)$

Condición de Dirichlet

$$\text{Consideremos el caso } \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\dot{T}}{T} \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda^2 = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\dot{T}}{T}\,,$$

con $X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$ y una distribución inicial de temperatura es $X(x)T(0) = f(x)$, entonces

$$X'' + \lambda^2 X = 0\,, \text{ con } X(0) = X(L) = 0 \Rightarrow X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\dot{T} + \lambda_n^2\alpha^2 T = 0 \Rightarrow T_n(t) = \exp\left(-\frac{n\pi\alpha^2}{L}t\right) \quad \text{con } \lambda_n^2 = \frac{n\pi}{L}$$

$$\text{entonces } u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{n\pi\alpha^2}{L}t\right)$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Rightarrow \mathcal{A}_m = \int_0^L \mathrm{d}x\, f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

Condición inhomogénea de Dirichlet 1/3

Para *condiciones de frontera inhomogéneas*: $u(0,t) = \mathcal{G}_0(t)$ y $u(L,t) = \mathcal{G}_L(t)$ proponemos $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, con

$$w(x,t) = \mathcal{G}_0(t) + \frac{x}{L}\left(\mathcal{G}_L(t) - \mathcal{G}_0(t)\right)$$

y $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, una solución de $v_{xx} = \frac{1}{\alpha^2} v_t$ con condiciones de frontera homogéneas: $v(0,t) = v(L,t) = 0$.
Consideremos el siguiente ejemplo

$$u_{xx} - u_t = \mathrm{sen}(3x)\exp(-t) \;\text{ para } 0 \leq x \leq \pi \text{ y } t > 0 \text{ con}$$

$$u(0,t) = 0; \quad u(\pi,t) = 1 \quad \text{y} \quad u(x,0) = f(x). \text{ Claramente,}$$

$$v_{xx} - v_t = \mathrm{sen}(3x)\exp(-t) \text{ donde}$$

$$w(x,t) = \frac{x}{\pi}; \quad \text{con: } v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \text{ y } v(x,0) = f(x) - \frac{x}{\pi}$$

$v(x,t) = X(x)T(t)$ para $v_{xx} - v_t = \operatorname{sen}(3x)\exp(-t)$ entonces

$$X'' + n^2 X = 0\,,\ \operatorname{con} X(0) = X(\pi) = 0 \Rightarrow X_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$$

por lo que $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)\, T_n(t)$

$$\text{Entonces} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx) \left(\dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) \right) = \operatorname{sen}(3x)\exp(-t)\,.$$

$$\text{Así} \quad \dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) = \begin{cases} 0 & n \neq 3 \text{ con } n > 0 \\ \exp(-t) & n = 3 \end{cases} \qquad \text{y}$$

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)\, T_n(0) \quad \text{donde}$$

$$T_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \left(f(x) - \frac{x}{\pi} \right) \operatorname{sen}(nx)$$

Si $n \neq 3$ entonces $T_n(t) = T_n(0)\exp(-n^2 t)$
Si $n = 3$

$$\dot{T}_3(t) + 9T_3(t) = \exp(-t) \Rightarrow T_3(t) = T_3(0)\exp(-9t) + \frac{\exp(-t)}{8}$$

Finalmente, la solución será

$$\begin{aligned} u(x,t) = \quad & \tfrac{x}{\pi} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)\, T_n(t) \\ = \quad & \tfrac{x}{\pi} + \operatorname{sen}(x)\, T_1(0)\exp(-t) + \operatorname{sen}(2x)\, T_2(0)\exp(-4t) + \\ & + \operatorname{sen}(3x)\left(T_3(0)\exp(-9t) + \tfrac{\exp(-t)}{8}\right) + \\ & + \textstyle\sum_{n=4}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)\, T_n(0)\exp(-n^2 t) \end{aligned}$$

Condición de frontera inhomogénea general 1/3

Ecuación diferencial parabólica inhomogenea con condiciones de frontera inhomogéneas.
Dada la ecuación diferencial

$$\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)u_t - \{(\mathcal{P}(x)u_x)_x + \mathcal{Q}(x)u\} = \mathcal{F}(x,y) \text{ para } a \leq x \leq b, \quad t \geq 0$$

con condiciones de frontera inhomogéneas

$$\alpha u(a,t) + \beta u_x(a,t) = \mathcal{G}_a(t) \quad \text{y} \quad \gamma u(b,t) + \delta u_x(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$$

y la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, en general proponemos una solución de la forma

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \quad \text{con } w(x,t) \text{ una función conocida}$$

$$\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)v_t - \{(\mathcal{P}(x)v_x)_x + \mathcal{Q}(x)v\} = \tilde{\mathcal{F}}(x,y)$$

con condiciones de frontera homogéneas

Condición de frontera inhomogénea general 2/3

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \quad \text{con } w(x,t) \text{ una función conocida}$$

$$\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)v_t - \{(\mathcal{P}(x)v_x)_x + \mathcal{Q}(x)v\} = \tilde{\mathcal{F}}(x,y)$$

con condiciones de frontera homogéneas

$$\tilde{\alpha}v(a,t) + \tilde{\beta}v_x(a,t) = 0\,, \quad \tilde{\gamma}v(b,t) + \tilde{\delta}v_x(b,t) = 0 \quad \text{y} \quad v(x,0) = \tilde{f}(x)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{F}}(x,y) = \mathcal{F}(x,y) - \mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)w_t - \{(\mathcal{P}(x)w_x)_x + \mathcal{Q}(x)w\}$$

y $\tilde{f}(x) = f(x) - w(x,0)$, y ajustamos la función $w(x,y)$

$$w(x,y) = \left(A_0 + A_1x + A_2x^2\right)\mathcal{G}_a(t) + \left(B_0 + B_1x + B_2x^2\right)\mathcal{G}_b(t)$$

y la forma de $w(x,t)$ queda

- $u(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones Dirichlet)

$$w(x,t) = \mathcal{G}_a(t) + \frac{x}{b-a}\left(\mathcal{G}_b(t) - \mathcal{G}_a(t)\right)$$

Condición de frontera inhomogénea general 2/3

y la forma de $w(x,t)$ queda

- $u(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones Dirichlet)

$$w(x,t) = \mathcal{G}_a(t) + \frac{x}{b-a}\left(\mathcal{G}_b(t) - \mathcal{G}_a(t)\right)$$

- $u_x(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u_x(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones Neumamm)

$$w(x,t) = x\mathcal{G}_a(t) + \frac{x^2}{2(b-a)}\left(\mathcal{G}_b(t) - \mathcal{G}_a(t)\right)$$

Condición de frontera inhomogénea general 2/3

y la forma de $w(x,t)$ queda

- $u(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones Dirichlet)

$$w(x,t) = \mathcal{G}_a(t) + \frac{x}{b-a}\left(\mathcal{G}_b(t) - \mathcal{G}_a(t)\right)$$

- $u_x(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u_x(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones Neumamm)

$$w(x,t) = x\mathcal{G}_a(t) + \frac{x^2}{2(b-a)}\left(\mathcal{G}_b(t) - \mathcal{G}_a(t)\right)$$

- $u(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u_x(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones mixta 1)

$$w(x,t) = \mathcal{G}_a(t) + x\mathcal{G}_b(t)$$

Condición de frontera inhomogénea general 2/3

y la forma de $w(x,t)$ queda

- $u(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones Dirichlet)

$$w(x,t) = \mathcal{G}_a(t) + \frac{x}{b-a}\left(\mathcal{G}_b(t) - \mathcal{G}_a(t)\right)$$

- $u_x(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u_x(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones Neumamm)

$$w(x,t) = x\mathcal{G}_a(t) + \frac{x^2}{2(b-a)}\left(\mathcal{G}_b(t) - \mathcal{G}_a(t)\right)$$

- $u(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u_x(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones mixta 1)

$$w(x,t) = \mathcal{G}_a(t) + x\mathcal{G}_b(t)$$

- $u_x(a,t) = \mathcal{G}_a(t)$ y $u(b,t) = \mathcal{G}_b(t)$ (Condiciones mixta 2)

$$w(x,t) = (x-(b-a))\mathcal{G}_a(t) + \mathcal{G}_b(t)$$

Consideremos

$$\nabla^2_{\rho\theta t} u(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(r, \vec{t})}{\partial t^2} \Leftrightarrow u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = \frac{1}{v^2} u_{tt}$$