

# El Trompo de Lagrange

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



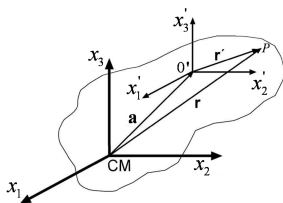
23 de mayo de 2025

## El Trompo de Lagrange

- 1 Teorema de los ejes paralelos en los momentos de inercia
- 2 Generalidades
- 3 El Lagrangeano
- 4 Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas
- 5 Primeras integrales
- 6 Potencial efectivo
- 7 Nutación y rotación
- 8 Recapitulando
- 9 Para la discusión

# Teorema de los ejes paralelos

Sea  $I_{ik}$  el tensor de inercia de un cuerpo rígido (un sistema de  $N$  partículas rígidamente unidas) en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  con origen en el centro de masa del cuerpo. Un sistema de coordenadas paralelas fijas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  cuyo origen  $O'$  se encuentra en una posición  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  con respecto al centro de masa del cuerpo. Entonces el tensor de inercia es  $I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j^N m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$ .



- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  con origen en el centro de masa del cuerpo, es

$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left( r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left( r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , con origen  $O'$  en una posición **a** respecto al centro de masa del cuerpo.

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left( r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , con origen  $O'$  en una posición  $\mathbf{a}$  respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto  $P$  respecto  $(x_1, x_2, x_3)$  es
$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow x_{ij} = a_i + x'_{ij}$$

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left( r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , con origen  $O'$  en una posición  $\mathbf{a}$  respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto  $P$  respecto  $(x_1, x_2, x_3)$  es
$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow x_{ij} = a_i + x'_{ij}$$
- Para  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , tenemos  $I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left( r_j'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k \right)$ , con
$$r_j'^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{a})^2 = r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_l a_l.$$

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left( r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , con origen  $O'$  en una posición  $\mathbf{a}$  respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto  $P$  respecto  $(x_1, x_2, x_3)$  es

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow x_{ij} = a_i + x'_{ij}$$

- Para  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , tenemos  $I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left( r_j'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k \right)$ , con
$$r_j'^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{a})^2 = r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_{il} a_l.$$

- Sustituyendo,

$$I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left[ \left( r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_{il} a_l \right) \delta_{ik} - (x_i - a_i)(x_k - a_k) \right]$$

$$\begin{aligned} I'_{ik} &= \sum_j^N m_j \left( r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right) + \sum_j^N m_j \left( a^2 \delta_{ik} - a_i a_k \right) \\ &\quad - 2 \sum_j^N m_j \sum_l^3 x_{il} a_l \delta_{ik} + \sum_j^N m_j x_i a_k + \sum_j^N m_j x_k a_i \end{aligned}$$



- Pero en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , tenemos

$$\sum_j^N m_j x_i a_k = a_k \left( \sum_j^N m_j x_{ij} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j x_k a_i = a_i \left( \sum_j^N m_j x_{kj} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j \sum_l^3 x_l a_l = \sum_l^3 a_l \left( \sum_j^N m_j x_{lj} \right) = 0.$$

- Pero en el sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , tenemos

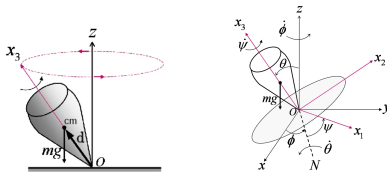
$$\sum_j^N m_j x_i a_k = a_k \left( \sum_j^N m_j x_{ij} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j x_k a_i = a_i \left( \sum_j^N m_j x_{kj} \right) = 0,$$

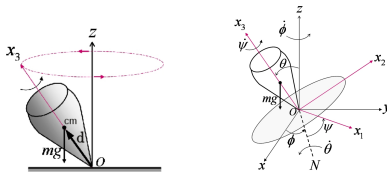
$$\sum_j^N m_j \sum_l^3 x_l a_l = \sum_l^3 a_l \left( \sum_j^N m_j x_{lj} \right) = 0.$$

- Luego tenemos,  $I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j^N m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$

- Consideremos un trompo de masa  $m$  en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior  $O$  está fijo.

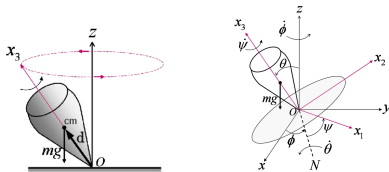


- Consideremos un trompo de masa  $m$  en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior  $O$  está fijo.
- Sea  $d$  la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo  $O$  hasta el centro de masa.



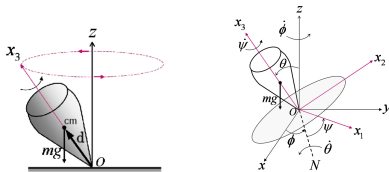
- Los momentos de inercia  $I_{11}^{\text{cm}} = I_{22}^{\text{cm}} \neq I_{33}^{\text{cm}}$  son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.

- Consideremos un trompo de masa  $m$  en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior  $O$  está fijo.
- Sea  $d$  la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo  $O$  hasta el centro de masa.



- Los momentos de inercia  $I_{11}^{\text{cm}} = I_{22}^{\text{cm}} \neq I_{33}^{\text{cm}}$  son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio  $(x, y, z)$  y el sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo, ambos con origen en  $O$ .

- Consideremos un trompo de masa  $m$  en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior  $O$  está fijo.
- Sea  $d$  la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo  $O$  hasta el centro de masa.



- Los momentos de inercia  $I_{11}^{cm} = I_{22}^{cm} \neq I_{33}^{cm}$  son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio  $(x, y, z)$  y el sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo, ambos con origen en  $O$ .
- Sea  $\mathbf{d} = (0, 0, d)$  la posición del centro de masa del trompo con respecto a  $O$  en el sistema  $(x_1, x_2, x_3)$ .

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo con origen en  $O$ , ubicado en  $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$  con respecto al centro de masa.



- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo con origen en  $O$ , ubicado en  $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$  con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema centrado en  $O$  son  $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$ .

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo con origen en  $O$ , ubicado en  $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$  con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema centrado en  $O$  son  $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$ .
- Por lo tanto  $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$ ,  $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$  y  $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo con origen en  $O$ , ubicado en  $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$  con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema centrado en  $O$  son  $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$ .
- Por lo tanto  $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$ ,  $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$  y  $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a  $O$ , es  $V = mgz = mgd \cos \theta$ .

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo con origen en  $O$ , ubicado en  $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$  con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema centrado en  $O$  son  $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$ .
- Por lo tanto  $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$ ,  $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$  y  $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a  $O$ , es  $V = mgz = mgd \cos \theta$ .
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo  $O$ ,  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo con origen en  $O$ , ubicado en  $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$  con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema centrado en  $O$  son  $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$ .
- Por lo tanto  $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$ ,  $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$  y  $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a  $O$ , es  $V = mgz = mgd \cos \theta$ .
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo  $O$ ,  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$
- Las componentes de la velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  fijo en el cuerpo con origen en  $O$ , ubicado en  $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$  con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  del sistema centrado en  $O$  son  $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$ .
- Por lo tanto  $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$ ,  $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$  y  $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a  $O$ , es  $V = mgz = mgd \cos \theta$ .
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo  $O$ ,  $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$
- Las componentes de la velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$
- El Lagrangiano del sistema es
$$\mathcal{L} = T_{\text{rot}} - V = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgd \cos \theta.$$

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas:  $\psi$  y  $\phi$ .

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas:  $\psi$  y  $\phi$ .
- La ecuación de Lagrange para  $\psi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$



- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas:  $\psi$  y  $\phi$ .
- La ecuación de Lagrange para  $\psi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para  $\phi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez  
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas:  $\psi$  y  $\phi$ .
- La ecuación de Lagrange para  $\psi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para  $\phi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez  
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$
- El torque externo del peso  $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$ , es perpendicular al plano  $(x_3, z)$ , al igual que el vector  $d\mathbf{L}$  del cambio de momento angular del trompo.

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas:  $\psi$  y  $\phi$ .
- La ecuación de Lagrange para  $\psi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para  $\phi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez  
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$
- El torque externo del peso  $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$ , es perpendicular al plano  $(x_3, z)$ , al igual que el vector  $d\mathbf{L}$  del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones  $\hat{\mathbf{x}}_3$  ni  $\hat{\mathbf{z}}$ , es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que  $L_3 = \text{cte}$  y  $L_z = \text{cte}$ .

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas:  $\psi$  y  $\phi$ .
- La ecuación de Lagrange para  $\psi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para  $\phi$  (cíclica) es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez  
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$
- El torque externo del peso  $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$ , es perpendicular al plano  $(x_3, z)$ , al igual que el vector  $d\mathbf{L}$  del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones  $\hat{\mathbf{x}}_3$  ni  $\hat{\mathbf{z}}$ , es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que  $L_3 = \text{cte}$  y  $L_z = \text{cte}$ .
- La energía se conserva  
$$E = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgd \cos \theta = \text{cte.}$$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (  $\psi, \phi$  y  $\theta$  ) y tres cantidades conservadas (  $L_3, L_z$  y  $E$  ).

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (  $\psi, \phi$  y  $\theta$  ) y tres cantidades conservadas (  $L_3, L_z$  y  $E$  ).
- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33} \dot{\phi} \cos \theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left( E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (  $\psi, \phi$  y  $\theta$  ) y tres cantidades conservadas (  $L_3, L_z$  y  $E$  ).
- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33} \dot{\phi} \cos \theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left( E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$$

- Podemos reescribir  $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta) = \text{cte}$ , con

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (  $\psi, \phi$  y  $\theta$  ) y tres cantidades conservadas (  $L_3, L_z$  y  $E$  ).

- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33} \dot{\phi} \cos \theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left( E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$$

- Podemos reescribir  $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta) = \text{cte}$ , con

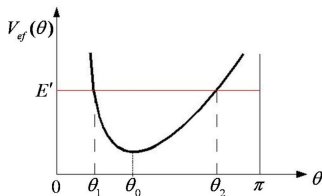
$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

- Es un problema unidimensional para la coordenada  $\theta$ , con un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(\theta)$

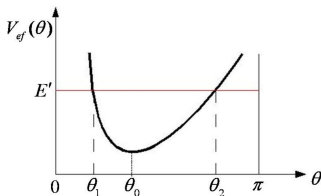


# El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

- El potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(\theta)$  tiene un mínimo para  $\theta_0$  en  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$

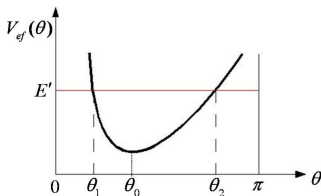


- El potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(\theta)$  tiene un mínimo para  $\theta_0$  en  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo  $\theta$  posibles ocurren para valores  $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$

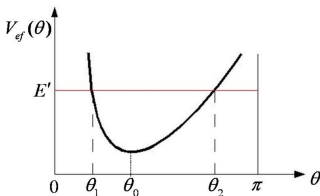
- El potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(\theta)$  tiene un mínimo para  $\theta_0$  en  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo  $\theta$  posibles ocurren para valores  $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son soluciones de la ecuación

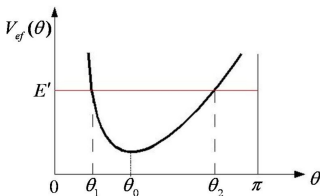
$$E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

- El potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(\theta)$  tiene un mínimo para  $\theta_0$  en  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo  $\theta$  posibles ocurren para valores  $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son soluciones de la ecuación
$$E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$
- La nutación ocurre en el intervalo  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

- El potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(\theta)$  tiene un mínimo para  $\theta_0$  en  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo  $\theta$  posibles ocurren para valores  $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son soluciones de la ecuación

$$E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

- La nutación ocurre en el intervalo  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- De la energía obtuvimos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}{I_{11}}}, \Rightarrow t(\theta) = \sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$$

- El período de nutación es  $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$

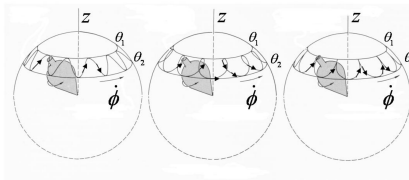
- El período de nutación es  $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión  $\dot{\phi}$ , puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , dependiendo del signo de  $(L_z - L_3 \cos \theta)$

- El período de nutación es  $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión  $\dot{\phi}$ , puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , dependiendo del signo de  $(L_z - L_3 \cos \theta)$
- Cuando  $\dot{\phi} > 0$  siempre  $(L_z > L_3 \cos \theta, \forall \theta)$ .



- El período de nutación es  $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión  $\dot{\phi}$ , puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , dependiendo del signo de  $(L_z - L_3 \cos \theta)$
- Cuando  $\dot{\phi} > 0$  siempre  $(L_z > L_3 \cos \theta, \forall \theta)$ .
- Cuando  $\dot{\phi}$  cambia de signo en  $\theta_1$  ó en  $\theta_2$ , dependiendo del signo de la cantidad  $(L_z - L_3 \cos \theta_{1,2})$  (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).

- El período de nutación es  $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión  $\dot{\phi}$ , puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , dependiendo del signo de  $(L_z - L_3 \cos \theta)$
- Cuando  $\dot{\phi} > 0$  siempre  $(L_z > L_3 \cos \theta, \forall \theta)$ .
- Cuando  $\dot{\phi}$  cambia de signo en  $\theta_1$  ó en  $\theta_2$ , dependiendo del signo de la cantidad  $(L_z - L_3 \cos \theta_{1,2})$  (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).
- Cuando  $\dot{\phi} = 0$  en  $\theta_1$  ó en  $\theta_2$  ( $L_z = L_3 \cos \theta_{1,2}$ ).



- **El Lagrangiano del Trompo:** Sistema con eje de simetría/punto fijo
  - Energía cinética:  $T = \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$
  - Energía potencial:  $V = mgd \cos \theta$
  - Lagrangiano:  $\mathcal{L} = T - V$

- **El Lagrangiano del Trompo:** Sistema con eje de simetría/punto fijo
  - Energía cinética:  $T = \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$
  - Energía potencial:  $V = mgd \cos \theta$
  - Lagrangiano:  $\mathcal{L} = T - V$
- **Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas**
  - Coordenadas generalizadas:  $\theta, \phi, \psi$ ; Coordenadas cíclicas:  $\phi, \psi$
  - C cantidades conservadas:  $L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$ ,  
 $L_z = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi} \cos \theta$ ,  $\mathcal{E} = T + V$

- **El Lagrangiano del Trompo:** Sistema con eje de simetría/punto fijo

- Energía cinética:  $T = \frac{1}{2} I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$
- Energía potencial:  $V = mgd \cos \theta$
- Lagrangiano:  $\mathcal{L} = T - V$

- **Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas**

- Coordenadas generalizadas:  $\theta, \phi, \psi$ ; Coordenadas cíclicas:  $\phi, \psi$
- Cantidades conservadas:  $L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$ ,  
 $L_z = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi} \cos \theta$ ,  $\mathcal{E} = T + V$

- **Primeras integrales**

- $\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$ ,  $\dot{\psi} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$
- $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left( E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$

- **El Lagrangiano del Trompo:** Sistema con eje de simetría/punto fijo

- Energía cinética:  $T = \frac{1}{2} I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$
- Energía potencial:  $V = mgd \cos \theta$
- Lagrangiano:  $\mathcal{L} = T - V$

- **Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas**

- Coordenadas generalizadas:  $\theta, \phi, \psi$ ; Coordenadas cíclicas:  $\phi, \psi$
- Cantidades conservadas:  $L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$ ,  
 $L_z = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi} \cos \theta$ ,  $\mathcal{E} = T + V$

- **Primeras integrales**

- $\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$ ,  $\dot{\psi} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$
- $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left( E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2 I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$

- **Potencial Efectivo:** Se define  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \frac{L_3^2}{2 I_{33}}$

- Energía efectiva:  $\mathcal{E}' = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta)$
- Potencial efectivo:  $V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$

## • Nutación y Rotación

- Movimiento unidimensional en  $\theta$  entre puntos de retorno  $\theta_1$ , y  $\theta_2$
- Periodo de nutación:  $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{\mathcal{E}' - V_{\text{ef}}(\theta)}}$
- Comportamiento de  $\dot{\phi}$ :
  - $\dot{\phi} > 0$  si  $L_z > L_3 \cos \theta \forall \theta$
  - $\dot{\phi} = 0$  en  $\theta_i$  si  $L_z = L_3 \cos \theta_i$
  - Puede cambiar de signo si  $L_z < L_3 \cos \theta$  en algún intervalo

## El péndulo esférico rígido

Consideramos una barra rígida de masa  $M$  y longitud  $\ell$ , que cuelga fija por un extremo. El sistema se puede mover libremente bajo la acción de gravedad generando un hemisferio.

- Determine el Lagrangiano del sistema.
- Determine si existen coordenadas cíclicas y sus cantidades conservadas
- Identifique las primeras integrales
- Determine la condición sobre  $p_\phi$  para que la barra oscile en un plano
- Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema
- Considere un movimiento con ángulos pequeños e integre las ecuaciones de movimiento