# Funciones de Bessel

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

4 de agosto de 2022

# Agenda funciones de Bessel

1. La Ecuación de Bessel y las series de Frobenious
   - Caso 1: $m_1 - m_2 = \nu \neq$ entero o semi-entero
   - Caso 2: $m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad \nu = 0.$
   - Caso 3a: $m_1 - m_2 = \nu =$ entero
   - Caso 3b: $m_1 - m_2 = \nu = (2n-1)/2$, semi-entero
2. Propiedades de las Funciones de Bessel
3. Sección
4. Sección
5. Sección
6. Recapitulando

# La Ecuación de Bessel

- La **Ecuación de Bessel** es $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, con $\nu \in \mathbb{R}$, con $x = 0$ un **polo regular** para $x^2y'' + xf_1(x)y' + f_2(x)y = 0$

# La Ecuación de Bessel

- La **Ecuación de Bessel** es $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, con $\nu \in \mathbb{R}$, con $x = 0$ un **polo regular** para $x^2y'' + xf_1(x)y' + f_2(x)y = 0$
- Proponemos $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e identificamos coeficientes en la expansiones $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

# La Ecuación de Bessel

- La **Ecuación de Bessel** es $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, con $\nu \in \mathbb{R}$, con $x = 0$ un **polo regular** para $x^2y'' + xf_1(x)y' + f_2(x)y = 0$
- Proponemos $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e identificamos coeficientes en la expansiones $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Entonces $f_1(x) = 1 \quad \Rightarrow b_0 = 1$ y
  $f_2 = -\nu^2 + x^2 \quad \Rightarrow c_0 = -\nu^2$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, los demás coeficientes $b$'s y $c$'s se anulan.

# La Ecuación de Bessel

- La **Ecuación de Bessel** es $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, con $\nu \in \mathbb{R}$, con $x = 0$ un **polo regular** para $x^2y'' + xf_1(x)y' + f_2(x)y = 0$
- Proponemos $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e identificamos coeficientes en la expansiones $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Entonces $f_1(x) = 1 \quad \Rightarrow b_0 = 1$ y $f_2 = -\nu^2 + x^2 \quad \Rightarrow c_0 = -\nu^2$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, los demás coeficientes $b$'s y $c$'s se anulan.
- La ecuación indicadora es $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \Rightarrow m(m-1) + m - \nu^2 = 0$ y sus raíces $m^2 = \nu^2 \Leftrightarrow m_{1,2} = \pm\nu$ .
- Claramente los valores de $\nu$ describen todos los casos posibles de Frobenius

$$m_1 - m_2 = 2\nu \Rightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 \neq \text{entero} \Rightarrow & \nu \neq \text{entero o semi-entero} \\ m_1 = m_2 = m \Rightarrow & \nu = 0 \\ m_1 - m_2 = \text{entero} \Rightarrow & \nu = \text{entero o semi-entero} \end{cases}$$

# Caso 1: $m_1 - m_2 = \nu \neq$ entero o semi-entero

- La solución general será de la forma $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$,

# Caso 1: $m_1 - m_2 = \nu \neq$ entero o semi-entero

- La solución general será de la forma $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$,
- donde $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$
  es la *Función de Bessel, de orden $\nu$ de primera especie*

# Caso 1: $m_1 - m_2 = \nu \neq$ entero o semi-entero

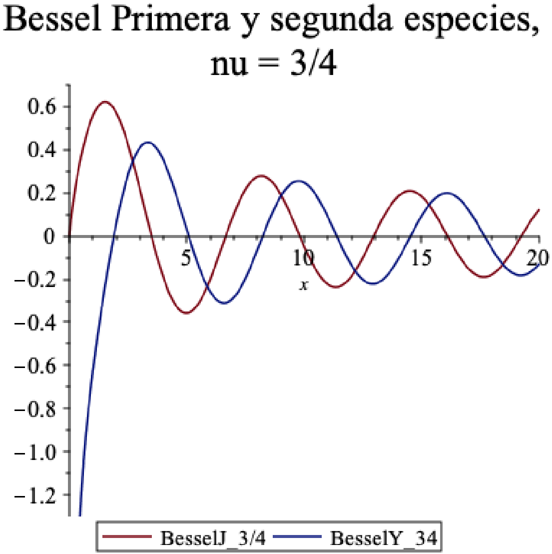
- La solución general será de la forma $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$,
- donde $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$
  es la *Función de Bessel, de orden $\nu$ de primera especie*
- y $J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$ para $x > 0$.

## Caso 1: $m_1 - m_2 = \nu \neq$ entero o semi-entero

- La solución general será de la forma $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$,
- donde $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ es la *Función de Bessel, de orden $\nu$ de primera especie*
- y $J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$ para $x > 0$.
- Esta última expresión también es válida para $\nu$ semi-entero, $\nu = n + \frac{1}{2}$. Si $x < 0$ se debe reemplazar $x^{-\nu}$ por $|x|^{-\nu}$.

- La solución general será de la forma $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$,
- donde $J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$ es la *Función de Bessel, de orden $\nu$ de primera especie*
- y $J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$ para $x > 0$.
- Esta última expresión también es válida para $\nu$ semi-entero, $\nu = n + \frac{1}{2}$. Si $x < 0$ se debe reemplazar $x^{-\nu}$ por $|x|^{-\nu}$.
- Hemos definido $\Gamma(z)$ como: $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv (z-1)! \equiv \prod(z-1)$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$ i.e. la generalización del factorial.

# Caso 1: $m_1 - m_2 = \nu \neq$ entero o semi-entero



# Caso 2: $m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad \nu = 0.$

- Recordemos que para este caso tendremos la ecuación $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

- Recordemos que para este caso tendremos la ecuación $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$
- La primera de las soluciones será $y_1(x) = a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \right] = a_0 J_0(x)$, donde $J_0(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden cero.

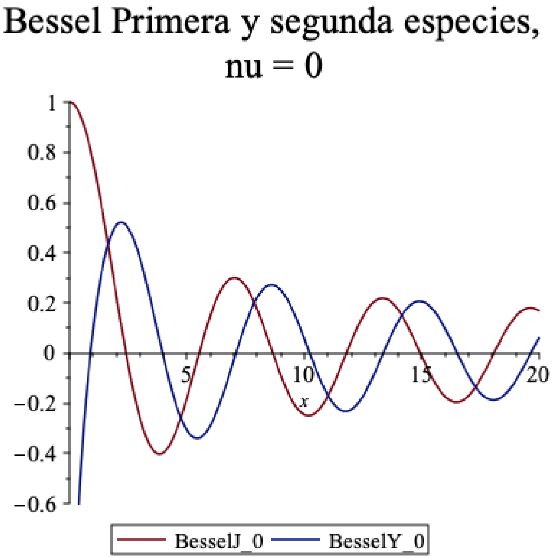
# Caso 2: $m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad \nu = 0.$

- Recordemos que para este caso tendremos la ecuación $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$
- La primera de las soluciones será $y_1(x) = a_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \right] = a_0 J_0(x)$, donde $J_0(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden cero.
- La propuesta para segunda solución será $y_2(x) = J_0(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ se sustituye en la ecuación $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$

## Caso 2: $m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad \nu = 0.$

- Recordemos que para este caso tendremos la ecuación $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$
- La primera de las soluciones será $y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\right] = a_0 J_0(x)$, donde $J_0(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden cero.
- La propuesta para segunda solución será $y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ se sustituye en la ecuación $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$
- La solución general se podrá escribir como: $y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 \left[J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} S_n \; x^{2n}\right]$ .

- Recordemos que para este caso tendremos la ecuación $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$
- La primera de las soluciones será $y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\right] = a_0 J_0(x)$, donde $J_0(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden cero.
- La propuesta para segunda solución será $y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ se sustituye en la ecuación $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$
- La solución general se podrá escribir como: $y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 \left[J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} S_n \; x^{2n}\right]$ .
- Reacomondando $Y_0(x)$ como la Función de Bessel de segunda especie, $y_2(x) \equiv Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left[\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right] J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} S_n \; x^{2n}\right]$, donde $\gamma = \lim_{n\to\infty}(S_n - \ln n) \approx 0{,}5772$ es la constante de Euler-Mascheroni con $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$



Bessel Primera y segunda especies,
nu = 0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
5
10
15
20
x
BesselJ_0
BesselY_0

# Caso 3: $m_1 - m_2 = \nu =$ entero

- Al igual que en el caso anterior si $\nu =$ entero, la solución general será $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$, una combinación de funciones de Bessel $J_\nu(x)$ y Neumann $Y_\nu(x)$

# Caso 3: $m_1 - m_2 = \nu =$ entero

- Al igual que en el caso anterior si $\nu =$ entero, la solución general será $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$, una combinación de funciones de Bessel $J_\nu(x)$ y Neumann $Y_\nu(x)$
- En general $Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$ para un $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Para $\alpha \to \nu$ entero, hacemos $Y_\nu(x) = \lim_{\alpha\to\nu} Y_\alpha(x)$.

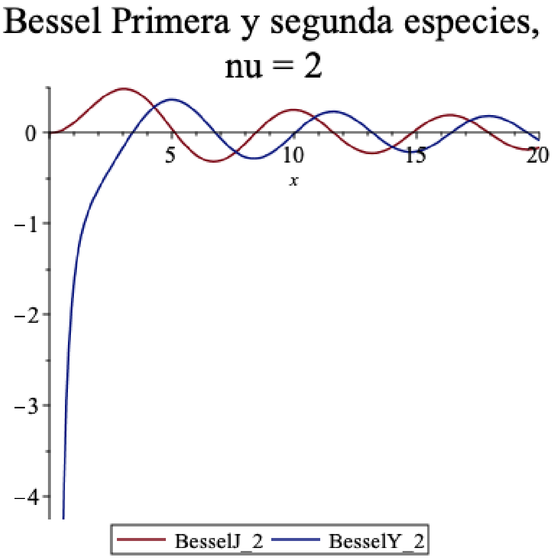
# Caso 3: $m_1 - m_2 = \nu =$ entero

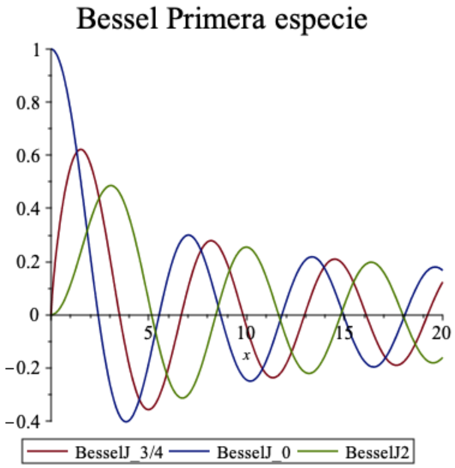
- Al igual que en el caso anterior si $\nu =$ entero, la solución general será $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$, una combinación de funciones de Bessel $J_\nu(x)$ y Neumann $Y_\nu(x)$
- En general $Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$ para un $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\alpha \to \nu$ entero, hacemos $Y_\nu(x) = \lim_{\alpha\to\nu} Y_\alpha(x)$.
- Si $\nu = k$ entero tendremos la función de Neumann como

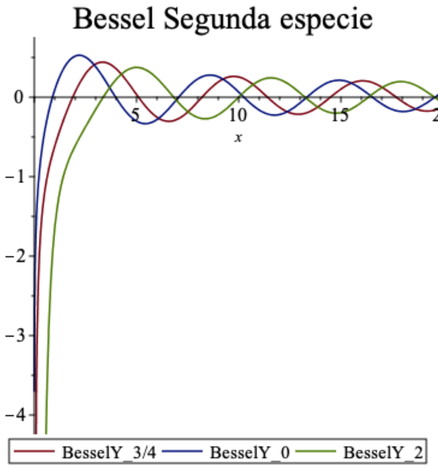
$$
\begin{aligned}
Y_k(x) \quad = \quad & -\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-n-1)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{S_k}{\pi k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k \\
& -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[S_n + S_{n+k}\right]}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} \\
& +\frac{2}{\pi}J_k(x)\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] ,
\end{aligned}
$$

otra vez con $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

# Caso 3: $m_1 - m_2 = \nu =$ entero




Bessel Primera especie
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
5
10
15
20
x
BesselJ_3/4
BesselJ_0
BesselJ2


Bessel Segunda especie
0
−1
−2
−3
−4
5
10
15
x
BesselY_3/4
BesselY_0
BesselY_2

# Caso 3b: $m_1 - m_2 = \nu = (2n-1)/2$, semi-entero

Para el caso de $\nu = (2n-1)/2$ la función de Bessel se relacionará con funciones elementales

- $\nu = 1/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + \frac{C_2 \cos(x)}{\sqrt{x}}$.

  Es decir: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}(x)$ y $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$,

## Caso 3b: $m_1 - m_2 = \nu = (2n-1)/2$, semi-entero

Para el caso de $\nu = (2n-1)/2$ la función de Bessel se relacionará con funciones elementales

- $\nu = 1/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + \frac{C_2 \cos(x)}{\sqrt{x}}$.
  Es decir: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x)$ y $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$,
- $\nu = 3/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{9}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1\, \mathrm{e}^{ix}(i+x)}{x^{3/2}} + \frac{C_2\, \mathrm{e}^{-ix}(i-x)}{x^{3/2}}$
  También $J_{3/2}(x) = -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \cos(x) \right]$.

# Caso 3b: $m_1 - m_2 = \nu = (2n-1)/2$, semi-entero

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Para el caso de $\nu = (2n-1)/2$ la función de Bessel se relacionará con funciones elementales

- $\nu = 1/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + \frac{C_2 \cos(x)}{\sqrt{x}}$.
  Es decir: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x)$ y $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$,
- $\nu = 3/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{9}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \, \mathrm{e}^{ix}(i+x)}{x^{3/2}} + \frac{C_2 \, \mathrm{e}^{-ix}(i-x)}{x^{3/2}}$
  También $J_{3/2}(x) = -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \cos(x)\right]$.
- $\nu = 5/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{25}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \, \mathrm{e}^{ix}(x^2+3ix-3)}{x^{5/2}} - \frac{C_2 \, \mathrm{e}^{-ix}(x^2-3ix-3)}{x^{5/2}}$. Igualmente, tendremos
  $J_{5/2}(x) = -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x} J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3\operatorname{sen}(x)}{x^2} - \frac{3\cos(x)}{x} - \operatorname{sen}(x)\right]$

Para el caso de $\nu = (2n-1)/2$ la función de Bessel se relacionará con funciones elementales

- $\nu = 1/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} + \frac{C_2 \cos(x)}{\sqrt{x}}$.
  Es decir: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}(x)$ y $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$,
- $\nu = 3/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{9}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \mathrm{e}^{ix}(i+x)}{x^{3/2}} + \frac{C_2 \mathrm{e}^{-ix}(i-x)}{x^{3/2}}$
  También $J_{3/2}(x) = -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \cos(x)\right]$.
- $\nu = 5/2 \Rightarrow y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{25}{4x^2}\right) y = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow y(x) = \frac{C_1 \mathrm{e}^{ix}(x^2+3ix-3)}{x^{5/2}} - \frac{C_2 \mathrm{e}^{-ix}(x^2-3ix-3)}{x^{5/2}}$. Igualmente, tendremos
  $J_{5/2}(x) = -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x} J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3\operatorname{sen}(x)}{x^2} - \frac{3\cos(x)}{x} - \operatorname{sen}(x)\right]$
- En general

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n} \left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \qquad n = -1, -2, -3, \cdots$$

- Otras formas de la ecuación de Bessel
  1. $u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}\, u'(x) + \left[\left(\beta\nu\, x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2-k^2\nu^2}{x^2}\right]\, u(x) = 0$, con $u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$
  2. $v''(x) + \alpha x^{\nu}\; v(x) = 0$, con $v(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\, x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$

# Propiedades de las Funciones de Bessel 1/3

- Otras formas de la ecuación de Bessel
  1. $u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}\, u'(x) + \left[\left(\beta\nu\, x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2-k^2\nu^2}{x^2}\right]\, u(x) = 0\,$, con $u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$
  2. $v''(x) + \alpha x^{\nu}\ \ v(x) = 0$, con $v(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\, x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$
- Relaciones de recurrencia

  $xJ_{k+1}(x) - 2k\ J_k(x) + xJ_{k-1}(x) = 0$ y $J_{k+1}(x) + 2J_k'(x) - J_{k-1}(x) = 0$

# Propiedades de las Funciones de Bessel 1/3

- Otras formas de la ecuación de Bessel
  1. $u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}\, u'(x) + \left[ \left(\beta\nu\, x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - k^2\nu^2}{x^2} \right] u(x) = 0$, con $u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$
  2. $v''(x) + \alpha x^{\nu}\; v(x) = 0$, con $v(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\, x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$
- Relaciones de recurrencia
  $xJ_{k+1}(x) - 2k\; J_k(x) + xJ_{k-1}(x) = 0$ y $J_{k+1}(x) + 2J'_k(x) - J_{k-1}(x) = 0$
- Reflexión $J_{-k}(x) = (-1)^k\, J_k(x)$

# Propiedades de las Funciones de Bessel 1/3

- Otras formas de la ecuación de Bessel
  1. $u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}\, u'(x) + \left[ \left(\beta\nu\, x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2-k^2\nu^2}{x^2} \right] u(x) = 0$, con $u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$
  2. $v''(x) + \alpha x^{\nu}\; v(x) = 0$, con $v(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}} \left( \frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\, x^{1+\frac{\nu}{2}} \right)$
- Relaciones de recurrencia
  $xJ_{k+1}(x) - 2k\, J_k(x) + xJ_{k-1}(x) = 0$ y $J_{k+1}(x) + 2J_k'(x) - J_{k-1}(x) = 0$
- Reflexión $J_{-k}(x) = (-1)^k\, J_k(x)$
- Función Generatriz $\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\; t^n$.

# Propiedades de las Funciones de Bessel 1/3

- Otras formas de la ecuación de Bessel
  1. $u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}\, u'(x) + \left[\left(\beta\nu\, x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2-k^2\nu^2}{x^2}\right]\, u(x) = 0$, con $u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$
  2. $v''(x) + \alpha x^{\nu}\ v(x) = 0$, con $v(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\, x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$
- Relaciones de recurrencia
  $xJ_{k+1}(x) - 2k\ J_k(x) + xJ_{k-1}(x) = 0$ y $J_{k+1}(x) + 2J'_k(x) - J_{k-1}(x) = 0$
- Reflexión $J_{-k}(x) = (-1)^k\, J_k(x)$
- Función Generatriz $\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ t^n$.
- "Ortogonalidad" de las funciones de Bessel.
  Si $J_k(\beta_i) = 0$, entonces $\int_0^1 xJ_k(\beta_i x)J_k(\beta_j x)\mathrm{d}x \propto \delta_{ij}$,
  o en coordenadas cilíndricas $\int_0^a \rho J_{\nu}\left(\alpha_{\nu i}\frac{\rho}{a}\right) J_{\nu}\left(\alpha_{\nu j}\frac{\rho}{a}\right) d\rho =\propto \delta_{ij}$, con $J_k(\alpha_{\nu i}) = 0$.

# Propiedades de las Funciones de Bessel 1/3

- Otras formas de la ecuación de Bessel
  1. $u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}\, u'(x) + \left[\left(\beta\nu\, x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2-k^2\nu^2}{x^2}\right]\, u(x) = 0$, con $u(x) = x^\alpha Z_k(\beta x^\nu)$
  2. $v''(x) + \alpha x^\nu\ v(x) = 0$, con $v(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\, x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$
- Relaciones de recurrencia
  $xJ_{k+1}(x) - 2k\ J_k(x) + xJ_{k-1}(x) = 0$ y $J_{k+1}(x) + 2J'_k(x) - J_{k-1}(x) = 0$
- Reflexión $J_{-k}(x) = (-1)^k\, J_k(x)$
- Función Generatriz $\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ t^n$.
- "Ortogonalidad" de las funciones de Bessel.
  Si $J_k(\beta_i) = 0$, entonces $\int_0^1 xJ_k(\beta_i x)J_k(\beta_j x)\mathrm{d}x \propto \delta_{ij}$,
  o en coordenadas cilíndricas $\int_0^a \rho J_\nu\left(\alpha_{\nu i}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu j}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \propto \delta_{ij}$, con $J_k(\alpha_{\nu i}) = 0$.
- con una "norma" definida $\int_0^a \rho\left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu i}}{a}\rho\right)\right]^2 d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu i}\right)\right]^2$

# Propiedades de las Funciones de Bessel 1/3

- Otras formas de la ecuación de Bessel
  1. $u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}\, u'(x) + \left[\left(\beta\nu\, x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2-k^2\nu^2}{x^2}\right]\, u(x) = 0$, con $u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$
  2. $v''(x) + \alpha x^{\nu}\ v(x) = 0$, con $v(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\, x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$
- Relaciones de recurrencia
  $xJ_{k+1}(x) - 2k\ J_k(x) + xJ_{k-1}(x) = 0$ y $J_{k+1}(x) + 2J'_k(x) - J_{k-1}(x) = 0$
- Reflexión $J_{-k}(x) = (-1)^k\, J_k(x)$
- Función Generatriz $\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ t^n$.
- "Ortogonalidad" de las funciones de Bessel.
  Si $J_k(\beta_i) = 0$, entonces $\int_0^1 xJ_k(\beta_i x)J_k(\beta_j x)\mathrm{d}x \propto \delta_{ij}$,
  o en coordenadas cilíndricas $\int_0^a \rho J_\nu\left(\alpha_{\nu i}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu j}\frac{\rho}{a}\right) d\rho =\propto \delta_{ij}$, con $J_k(\alpha_{\nu i}) = 0$.
- con una "norma" definida $\int_0^a \rho\left[J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu i}}{a}\rho\right)\right]^2 d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu i}\right)\right]^2$
- Representación Integral $J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\cos(n\theta) - x\mathrm{sen}(\theta))\ \mathrm{d}\theta$

# Título transparencia

- 
- 
- 

# Título transparencia

- 
- 
- 

# Título transparencia

# Recapitulando

En presentación consideramos

1.