Momento angular de un cuerpo rígido

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

22 de abril de 2025

Agenda

1. Momento Angular de un cuerpo rígido
2. Generalidades para $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$
3. Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos
4. Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar
    - Angulos y velocidades
    - Ecuaciones de movimiento

Momento Angular de un cuerpo rígido

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.

Momento Angular de un cuerpo rígido

CONSTRUIMOS FUTURO

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.

Momento Angular de un cuerpo rígido

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$.
  Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

Momento Angular de un cuerpo rígido

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$. Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
$$L_i = \sum_j m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j m_j \left[\sum_k \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k x_{ij} x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j m_j \sum_k \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right] = \sum_k \Omega_k \sum_j m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$$

Momento Angular de un cuerpo rígido

- Escogemos el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j m_j \left[r_j^2 \mathbf{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$.
  Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
  $L_i = \sum_j m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k x_{kj} \Omega_k \right]$
  $L_i = \sum_j m_j \left[\sum_k \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k x_{ij} x_{kj} \Omega_k \right]$
  $L_i = \sum_j m_j \sum_k \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right] = \sum_k \Omega_k \sum_j m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$
- Finalmente $L_i = \sum_{k=1}^{3} I_{ik} \Omega_k \Leftrightarrow \mathbf{L} = I \mathbf{\Omega}$ ya que el tensor de inercia es $I_{ik} = \sum_j m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$

$\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$

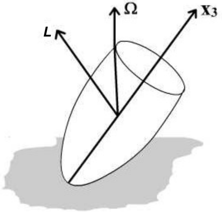
- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\Omega}$

$\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$

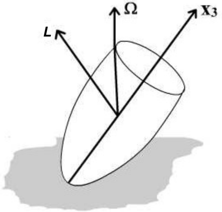
L y Ω

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



L y $\boldsymbol{\Omega}$

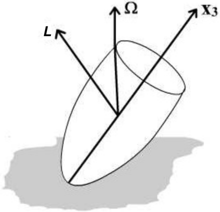
- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



- Si el vector $\boldsymbol{\Omega}$ posee solamente una componente sobre un eje x_k, tenemos $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,\hat{\mathbf{x}}_k$ y por lo tanto $\mathbf{L} = I_{kk}\Omega\,\hat{\mathbf{x}}_k$.

$\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{I} = I\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



- Si el vector $\boldsymbol{\Omega}$ posee solamente una componente sobre un eje x_k, tenemos $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,\hat{\mathbf{x}}_k$ y por lo tanto $\mathbf{L} = I_{kk}\Omega\,\hat{\mathbf{x}}_k$.
- Para cuerpos esféricos, $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, y $\mathbf{L} = I_{11}\boldsymbol{\Omega}$: $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$

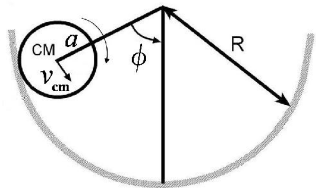
Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

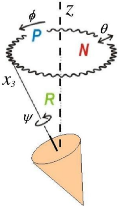
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

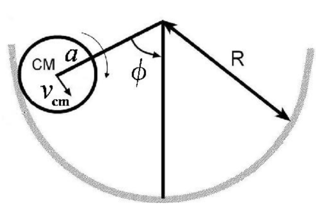
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas
- Los casos más simples son los que presentan simetrías: axial (trompos) o esférica

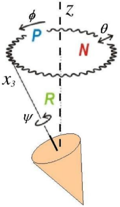
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.





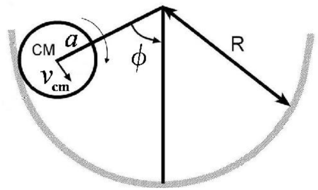
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

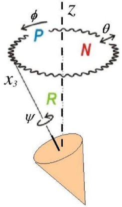




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

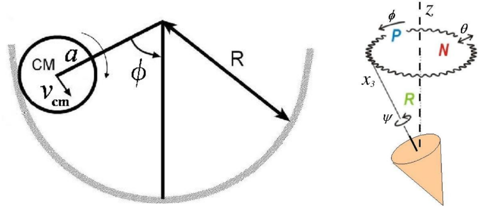




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.

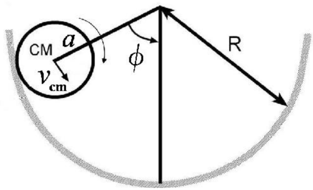
Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

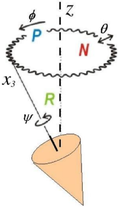
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.



- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

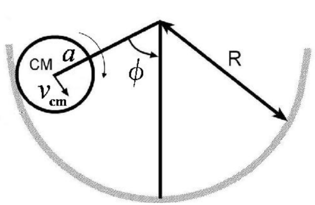


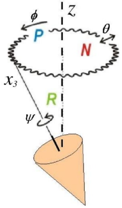


- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\rm cm} + T_{\rm rot}$.

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

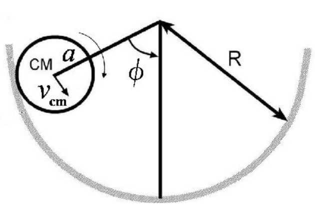


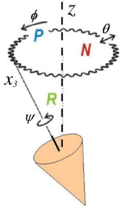


- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2$, con $v_{\mathrm{cm}} = (R - a)\dot{\phi}$

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.





- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2$, con $v_{\mathrm{cm}} = (R - a)\dot{\phi}$
- La energía cinética de rotación es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I_{33} \Omega_3^2$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$.

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.
- La ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple con frecuencia $\omega^2 = \frac{2g}{3(R-a)}$.