Cuerpo Rígido: ángulos y velocidades de Euler

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

22 de abril de 2025

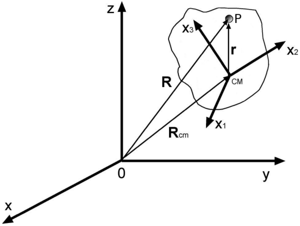
Agenda

Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas

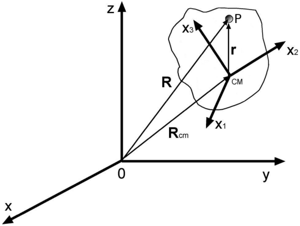
Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio respecto al centro de masa.



Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio respecto al centro de masa.



- Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:
  - Un sistema inercial o de laboratorio, denotado por (x, y, z) y con origen en un punto fijo O
  - Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa (CM), identificado por (x_1, x_2, x_3)

Desplazamiento general del cuerpo rígido

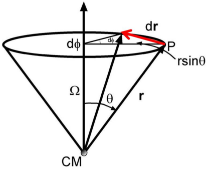
- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).

Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\rm cm} + \mathbf{r}$

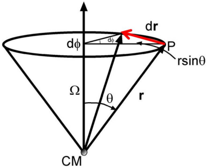
Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\rm cm} + \mathbf{r}$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\rm cm} + d\mathbf{r}$



Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\rm cm} + \mathbf{r}$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\rm cm} + d\mathbf{r}$



- Un cambio infinitesimal $d\mathbf{r}$ sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector $\mathbf{r}$, no a un cambio de su magnitud

Velocidades en un cuerpo rígido

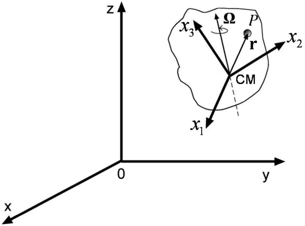
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.

Velocidades en un cuerpo rígido

- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \,\text{sen}\, \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$

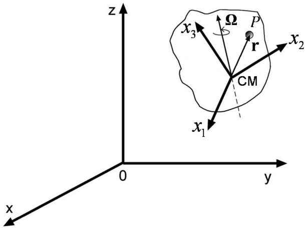
Velocidades en un cuerpo rígido

- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



Velocidades en un cuerpo rígido

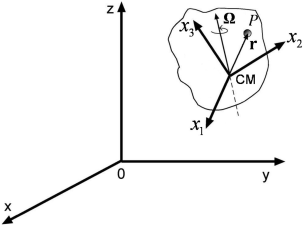
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen}\theta)d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),
  $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),
  $\mathbf{\Omega} = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.

Velocidades en un cuerpo rígido

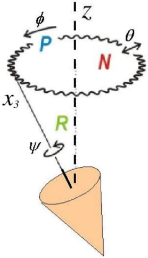
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \,\mathrm{sen}\, \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



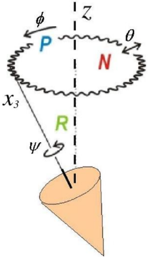
- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),
  $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),
  $\mathbf{\Omega} = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.
- La dirección de la velocidad angular instantánea $\mathbf{\Omega}$ es la misma que la del vector $d\phi$

Precesión, nutación y rotación

- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,



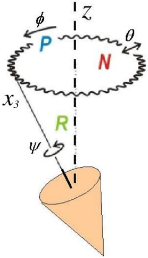
- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - **nutación:** inclinación con respecto al eje fijo y



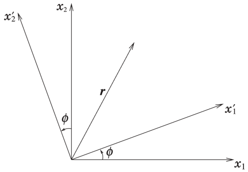
-
  - **Angulo Euler de precesión**, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - **Angulo Euler de nutación**, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3.

Precesión, nutación y rotación

- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - **nutación:** inclinación con respecto al eje fijo y
  - **rotación:** rotación del cuerpo sobre sí mismo.

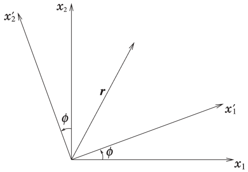


-
  - **Angulo Euler de precesión**, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - **Angulo Euler de nutación**, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3.
  - **Angulo Euler de rotación**, $\psi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje x_3, sobre el plano (x_1, x_2), medido desde N a x_1.

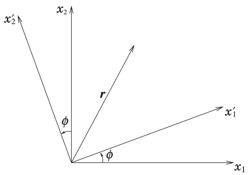


- En general

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\phi + x_2 \operatorname{sen}\phi \\ x_2' &= -x_1 \operatorname{sen}\phi + x_2 \cos\phi \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



- En general
$$\left.\begin{array}{l} x_1' = x_1 \cos\phi + x_2 \operatorname{sen}\phi \\ x_2' = -x_1 \operatorname{sen}\phi + x_2 \cos\phi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
- Es decir, $\mathbf{r}' = \mathbb{A}_\phi \mathbf{r}$, con $\mathbb{A}_\phi$ operadores ortogonales (Unitarios). $\mathbb{A}_{-\phi} = \mathbb{A}_\phi^T$ y $\mathbb{A}_\phi \mathbb{A}_\phi^T = \mathbb{I}$. Además $\mathbb{A}_\phi \mathbb{B}_\gamma = \mathbb{C}_{\phi\gamma}$, con $\mathbb{C}_{\phi\gamma}^T = \mathbb{C}_{\phi\gamma}^{-1}$



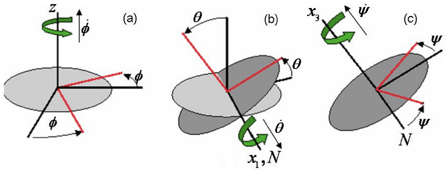
- En general
$$\left.\begin{array}{l} x_1' = x_1 \cos\phi + x_2 \operatorname{sen}\phi \\ x_2' = -x_1 \operatorname{sen}\phi + x_2 \cos\phi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
- Es decir, $\mathbf{r}' = \mathbb{A}_\phi \mathbf{r}$, con $\mathbb{A}_\phi$ operadores ortogonales (Unitarios). $\mathbb{A}_{-\phi} = \mathbb{A}_\phi^T$ y $\mathbb{A}_\phi \mathbb{A}_\phi^T = \mathbb{I}$. Además $\mathbb{A}_\phi \mathbb{B}_\gamma = \mathbb{C}_{\phi\gamma}$, con $\mathbb{C}_{\phi\gamma}^T = \mathbb{C}_{\phi\gamma}^{-1}$
- Los operadores ortogonales, $\mathbb{A}_\phi$, forman el grupo $\mathbf{O}(n)$
  - Cerrado $\mathbb{A}_\phi$ ortogonal y $\mathbb{B}_\gamma$ ortogonal, $\mathbb{A}_\phi \mathbb{B}_\gamma = \mathbb{C}_{\phi\gamma}$ ortogonal
  - Inverso $\forall \mathbb{A}_\phi \quad \exists!\ \mathbb{A}_{-\phi} \ni \mathbb{A}_\phi \mathbb{A}_{-\phi} \equiv \mathbb{A}_\phi \mathbb{A}_\phi^{-1} \equiv \mathbb{A}_\phi \mathbb{A}_\phi^T = \mathbb{I}$
  - Neutro $\exists!\ \mathbb{I} \ \ni \mathbb{A}_\phi \mathbb{I} = \mathbb{I} \mathbb{A}_\phi = \mathbb{A}_\phi$
  - Asociativa $(\mathbb{A}_\phi \mathbb{B}_\gamma)\mathbb{D}_\theta = \mathbb{A}_\phi(\mathbb{B}_\gamma \mathbb{D}_\theta)$

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).

Del sistema Centro de Masa al Laboratorio 1/2

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).
- Si r^j son las componentes del vector posición de un punto en respecto sistema laboratorio, S_{xyz} y $\tilde{r}^i$ las de un punto respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}_{x_1 x_2 x_3}$, tendremos un par de transformaciones tales que $\tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j \, r^j$ y $r^j = U^j_i \, \tilde{r}^i$. Además, $\tilde{U}^i_k U^k_j = \delta^i_j \Leftrightarrow \tilde{U}^i_k = (U^i_k)^{-1}$

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler $(\phi,\ \theta,\ \psi)$.
- Si r^j son las componentes del vector posición de un punto en respecto sistema laboratorio, S_{xyz} y $\tilde{r}^i$ las de un punto respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$, tendremos un par de transformaciones tales que $\tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\, r^j$ y $r^j = U^j_i\, \tilde{r}^i$. Además, $\tilde{U}^i_k U^k_j = \delta^i_j \Leftrightarrow \tilde{U}^i_k = (U^i_k)^{-1}$
- Rotamos tres veces $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$ respecto a $S_{x,y,z}$.



$$\tilde{U}^i_j(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{U}^i_j(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\tilde{U}^i_j(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices de Euler

- En general componemos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Matrices de Euler

- En general componemos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

Matrices de Euler

- En general componemos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

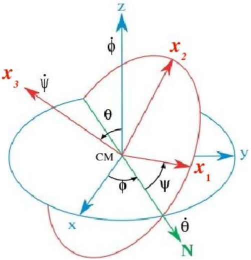
$$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

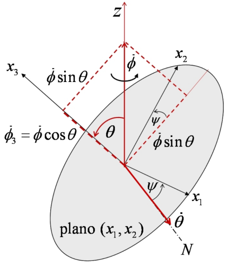
Matrices de Euler

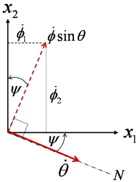
- En general componemos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$
$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$
- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.
- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}^{T}_{\psi\theta\phi}$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.

- En general componemos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$
$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$
- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.
- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}^{T}_{\psi\theta\phi}$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.
- $\tilde{\mathbb{U}}^{-1} = \tilde{\mathbb{U}}^{T} = \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Componentes y velocidades angulares







En general $\mathbf{\Omega} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\psi}\hat{\psi}$

Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\,\mathrm{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$

Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}$ sen ψ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}$ sen $\theta)$ sen ψ, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}$ sen $\theta) \cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.

Velocidad $\mathbf{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \,\mathrm{sen}\, \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \,\mathrm{sen}\, \theta) \,\mathrm{sen}\, \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \,\mathrm{sen}\, \theta) \cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\mathbf{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.

Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta)\,\text{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta) \cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\boldsymbol{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.
- Para cada componente $\tilde{\Omega}_i$, respecto al sistema centro de masa, tenemos $\tilde{\Omega}_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad i = 1, 2, 3.$
  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\,\text{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi$
  $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$

- Las matrices de Euler, $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}$, nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema CM $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.

Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$

- Las matrices de Euler, $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}$, nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema CM $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.
- $$\begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$$

Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Las matrices de Euler, $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}$, nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema CM $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.
- $$\begin{pmatrix}\Omega^1\\ \Omega^2\\ \Omega^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi\\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\Omega}^1\\ \tilde{\Omega}^2\\ \tilde{\Omega}^3\end{pmatrix}$$
- Dado que para el centro de masa
  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi$
  $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$

- Las matrices de Euler, $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}$, nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema CM $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.
- $\begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$
- Dado que para el centro de masa
  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi$
  $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Tendremos para el sistema laboratorio
  $\Omega^1 = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$
  $\Omega^2 = \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi - \dot{\psi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta$
  $\Omega^3 = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta$

Productos escalares

- En general tenemos que $\mathbf{\Omega} = \Omega^1\hat{\mathbf{x}} + \Omega^2\hat{\mathbf{y}} + \Omega^3\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} + \tilde{\Omega}^2\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} + \tilde{\Omega}^3\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3}$

Productos escalares

- En general tenemos que $\mathbf{\Omega} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto
  $\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$
  $\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$
  $\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$

Productos escalares

- En general tenemos que $\boldsymbol{\Omega} = \Omega^1\hat{\mathbf{x}} + \Omega^2\hat{\mathbf{y}} + \Omega^3\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1\hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2\hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3\hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto
$$\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1\tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2\tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3\tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1\tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2\tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3\tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1\tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2\tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3\tilde{\Omega}^3$$
- $$\begin{pmatrix}\Omega^1\\ \Omega^2\\ \Omega^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi\\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\Omega}^1\\ \tilde{\Omega}^2\\ \tilde{\Omega}^3\end{pmatrix}$$

Productos escalares

- En general tenemos que $\boldsymbol{\Omega} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto
$$\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$$
- $$\begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$$
- Identificando en la matriz tendremos
$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 = \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi;$$
$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 = -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi; \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\ ;$$
$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 = \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi;$$
$$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 = -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi; \quad \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 = -\operatorname{sen}\theta\cos\phi;$$
$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 = \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta; \quad \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 = \cos\psi\operatorname{sen}\theta; \quad \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 = \cos\theta.$$

Vectores unitarios

- Más aún si $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\hat{\mathbf{z}}$ y al proyectarla tendremos que $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto expresamos $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)\hat{\mathbf{z}}$

- Más aún si $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\hat{\mathbf{z}}$ y al proyectarla tendremos que $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto expresamos $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)\hat{\mathbf{z}}$
- Del mismo modo $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{z}}$. Con lo cual $\hat{\mathbf{x}}_2 = (-\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos\psi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{z}}$

Vectores unitarios

- Más aún si $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\hat{\mathbf{z}}$ y al proyectarla tendremos que $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto expresamos $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)\hat{\mathbf{z}}$
- Del mismo modo $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{z}}$. Con lo cual $\hat{\mathbf{x}}_2 = (-\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos\psi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{z}}$
- Finalmente $\hat{\mathbf{x}}_3 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{z}}$. Finalmente, $\hat{\mathbf{x}}_3 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{x}} - \operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$

Recapitulando

- **Cuerpo rígido**: sistema de partículas con distancias relativas fijas.

Recapitulando

- **Cuerpo rígido**: sistema de partículas con distancias relativas fijas.
- El movimiento se descompone en: **Traslación** centro de masa; **Rotación** alrededor del centro de masa

Recapitulando

- **Cuerpo rígido**: sistema de partículas con distancias relativas fijas.
- El movimiento se descompone en: **Traslación** centro de masa; **Rotación** alrededor del centro de masa
- **Sistemas Laboratorio/Inercial** (x, y, z);
  Sistema del centro de masa (x_1, x_2, x_3).

Recapitulando

- **Cuerpo rígido**: sistema de partículas con distancias relativas fijas.
- El movimiento se descompone en: **Traslación** centro de masa; **Rotación** alrededor del centro de masa
- **Sistemas Laboratorio/Inercial** (x, y, z);
  Sistema del centro de masa (x_1, x_2, x_3).
- **Descripción de la orientación respecto al CM:** Se utilizan los **ángulos de Euler** (ϕ, θ, ψ):
  - ϕ (precesión): rotación alrededor del eje z del Sistema Laboratorio
  - θ (nutación): inclinación del eje z al eje x_3
  - ψ (rotación): giro alrededor del eje x_3

Recapitulando

- **Cuerpo rígido**: sistema de partículas con distancias relativas fijas.
- El movimiento se descompone en: **Traslación** centro de masa; **Rotación** alrededor del centro de masa
- **Sistemas Laboratorio/Inercial** (x, y, z);
  Sistema del centro de masa (x_1, x_2, x_3).
- **Descripción de la orientación respecto al CM:** Se utilizan los **ángulos de Euler** (ϕ, θ, ψ):
  - ϕ (precesión): rotación alrededor del eje z del Sistema Laboratorio
  - θ (nutación): inclinación del eje z al eje x_3
  - ψ (rotación): giro alrededor del eje x_3
- Velocidad angular $\mathbf{\Omega}$: Velocidad de un punto: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$

- **Cuerpo rígido**: sistema de partículas con distancias relativas fijas.
- El movimiento se descompone en: **Traslación** centro de masa; **Rotación** alrededor del centro de masa
- **Sistemas Laboratorio/Inercial** (x, y, z); **Sistema del centro de masa** (x_1, x_2, x_3).
- **Descripción de la orientación respecto al CM:** Se utilizan los **ángulos de Euler** (ϕ, θ, ψ):
  - ϕ (precesión): rotación alrededor del eje z del Sistema Laboratorio
  - θ (nutación): inclinación del eje z al eje x_3
  - ψ (rotación): giro alrededor del eje x_3
- Velocidad angular $\mathbf{\Omega}$: Velocidad de un punto: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$
- $\mathbf{\Omega}$ en el sistema CM: $\begin{cases} \tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi \\ \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{cases}$

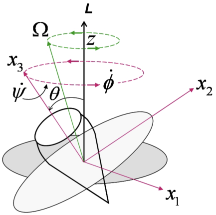
Recapitulando 2/2

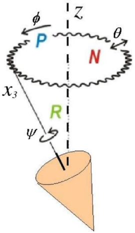
- **Transformaciones entre sistemas de coordenadas:**
  - Los operadores de rotación $\tilde{\mathbb{U}}_\phi, \tilde{\mathbb{U}}_\theta, \tilde{\mathbb{U}}_\psi$ conectan los sistemas
  - Transformación total: $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_\psi \tilde{\mathbb{U}}_\theta \tilde{\mathbb{U}}_\phi$
  - Los operadores son **ortogonales**: $\tilde{\mathbb{U}}^{-1} = \tilde{\mathbb{U}}^T$

- **Transformaciones entre sistemas de coordenadas:**
  - Los operadores de rotación $\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}, \tilde{\mathbb{U}}_{\theta}, \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}$ conectan los sistemas
  - Transformación total: $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$
  - Los operadores son **ortogonales**: $\tilde{\mathbb{U}}^{-1} = \tilde{\mathbb{U}}^{T}$
- **Interpretación física:**
  - Los ángulos de Euler describen la **orientación**
  - Las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ gobiernan la **dinámica rotacional**
  - Las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ son fundamentales para derivar las **ecuaciones de Euler** y analizar estabilidad y movimiento de trompos y giróscopos

Para la discusión

Un rotor simétrico (un trompo ideal) tiene momentos de inercia respecto a sus ejes principales dados por: $I_1 = I_2 = I \neq I_3$. El rotor gira libremente en el espacio, sin estar sometido a torques externos. Su orientación se describe mediante los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ). Inicialmente, el cuerpo gira con una velocidad angular constante $\dot{\psi}_0$ alrededor del eje de simetría x_3, formando un ángulo fijo θ_0 con respecto al eje vertical z.





Escriba la expresión de las componentes de la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ del rotor, en términos de los ángulos de Euler. 1) respecto al CM
2) Respecto al Sistema Laboratorio