Otra vez vectores:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

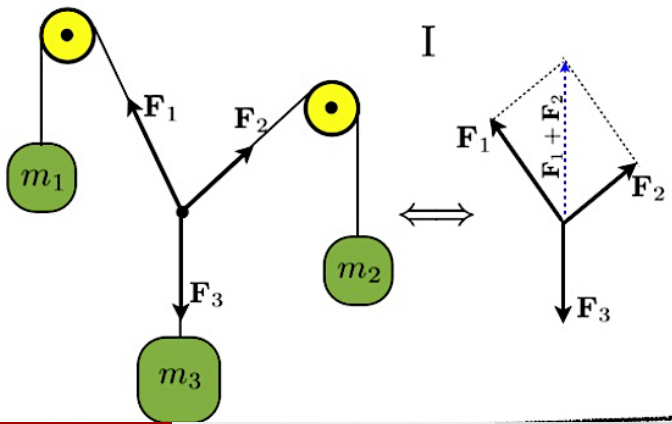
10 de octubre de 2022

Agenda

Escalares y Vectores

- **Escalares:** cantidades las cuales se representan con UN solo número. Ese número será el mismo en todos los sistemas de coordenadas. **Los escalares son independientes del sistema de coordenadas.**

- **Escalares:** cantidades las cuales se representan con UN solo número. Ese número será el mismo en todos los sistemas de coordenadas. **Los escalares son independientes del sistema de coordenadas.**
- **Vectores:** requieren de UN número, UNA dirección y UN sentido. Esas características (módulo, dirección y sentido) se preservarán en todos los sistemas de coordenadas. **Los vectores son independientes del sistema de coordenadas.**
  - Vectores Deslizantes
  - Vectores Atados



I
m_1
$\mathbf{F}_1$
$\mathbf{F}_2$
$\mathbf{F}_3$
m_2
m_3
$\Longleftrightarrow$
$\mathbf{F}_1$
$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$
$\mathbf{F}_2$
$\mathbf{F}_3$

Vectores atados

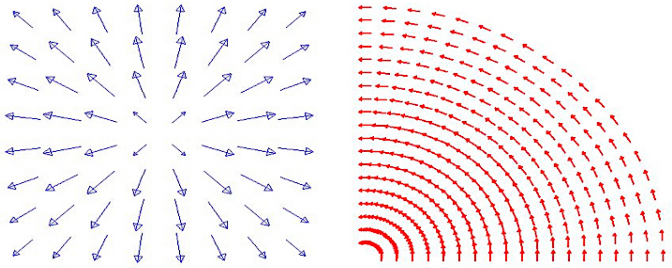


Figura: Vectores atados

Las propiedades (obvias) del álgebra de vectores son:

- La suma de vectores:
  - es cerrada $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$,
  - es conmutativa $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
  - es asociativa $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
  - tiene un único elemento neutro $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\forall\, \mathbf{a}$,
  - existe un elemento simétrico $-\mathbf{a}$ (uno para cada vector) tal que $\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{a})$,
  - es distributiva respecto a la multiplicación por números: $\alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.

Las propiedades (obvias) del álgebra de vectores son:

- La suma de vectores:
  - es cerrada $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$,
  - es conmutativa $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$,
  - es asociativa $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$,
  - tiene un único elemento neutro $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, $\forall\, \mathbf{a}$,
  - existe un elemento simétrico $-\mathbf{a}$ (uno para cada vector) tal que $\mathbf{0}=\mathbf{a}-\mathbf{a}\equiv\mathbf{a}+(-\mathbf{a})$,
  - es distributiva respecto a la multiplicación por números: $\alpha\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$.
- La multiplicación de números por vectores:
  - es conmutativa $\mathbf{a}\alpha=\alpha\mathbf{a}$,
  - es asociativa $\alpha\,(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\,\mathbf{a}$,
  - es distributiva $(\alpha+\beta)\,\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.

Vectores linealmente independientes

- Tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son *linealmente independientes* en $\mathbb{R}^3$ si se cumple que:

$$\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$$

Vectores linealmente independientes

- Tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son *linealmente independientes* en $\mathbb{R}^3$ si se cumple que:

$$\alpha \ \mathbf{a} + \beta \ \mathbf{b} + \gamma \ \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \, .$$

- Si no se cumple lo anterior diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos. Si por ejemplo $\gamma \neq 0$, entonces:

$$\alpha \ \mathbf{a} + \beta \ \mathbf{b} + \gamma \ \mathbf{c} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{c} = \bar{\alpha} \ \mathbf{a} + \bar{\beta} \ \mathbf{b} \, .$$

Vectores linealmente independientes

- Tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son *linealmente independientes* en $\mathbb{R}^3$ si se cumple que:

$$\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$$

- Si no se cumple lo anterior diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos. Si por ejemplo $\gamma \neq 0$, entonces:

$$\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} = \mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b}\ \Rightarrow\ \mathbf{c} = \bar{\alpha}\ \mathbf{a} + \bar{\beta}\ \mathbf{b}\,.$$

- Cuando un vector $\mathbf{c}$ se pueda expresar en términos de dos vectores linealmente independientes, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, por ejemplo: $\mathbf{c} = \xi^1\mathbf{a} + \xi^2\mathbf{b}$, diremos que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman una base para todos los vectores coplanares a éstos.

Producto escalar

Denominaremos producto escalar de dos vectores **a** y **b** a un escalar cuyo valor será igual al producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman:

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} \,.$$

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo.

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo.
- *El producto escalar es conmutativo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo.
- *El producto escalar es conmutativo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- *El producto escalar es distributivo*: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo.
- *El producto escalar es conmutativo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- *El producto escalar es distributivo*: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- *La multiplicación por un número*:$\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}$.

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo.
- *El producto escalar es conmutativo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- *El producto escalar es distributivo*: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- *La multiplicación por un número*:$\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}$.
- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \left(|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}\right)^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, ya que: $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} \leq 1$.

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo.
- *El producto escalar es conmutativo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- *El producto escalar es distributivo*: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- *La multiplicación por un número*:$\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}$.
- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \left(|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}\right)^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, ya que: $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} \leq 1$.
- *El teorema del coseno*. Si $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow$ $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)$,

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo.
- *El producto escalar es conmutativo*: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- *El producto escalar es distributivo*: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- *La multiplicación por un número*: $\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}$.
- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \left(|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}\right)^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, ya que: $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} \leq 1$.
- *El teorema del coseno*. Si $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow$ $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)$,
- *Perpendicularidad*: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \theta_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle} = 0$.

Producto vectorial

el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (realmente un pseudovector) con:

- El módulo de $\mathbf{c}$, será: $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \, |\mathbf{b}| \, \mathrm{sen}(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}$. El módulo de $\mathbf{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Producto vectorial

el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (realmente un pseudovector) con:

- El módulo de $\mathbf{c}$, será: $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}$. El módulo de $\mathbf{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
- tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y con sentido positivo cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponda al sentido antihorario.

Producto vectorial

el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (realmente un pseudovector) con:

- El módulo de $\mathbf{c}$, será: $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}$. El módulo de $\mathbf{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
- tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y con sentido positivo cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponda al sentido antihorario.
- *El producto vectorial es anticonmutativo*. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,

Producto vectorial

el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (realmente un pseudovector) con:

- El módulo de $\mathbf{c}$, será: $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}$. El módulo de $\mathbf{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
- tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y con sentido positivo cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponda al sentido antihorario.
- *El producto vectorial es anticonmutativo*. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
- *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma*. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

Producto vectorial

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (realmente un pseudovector) con:

- El módulo de $\mathbf{c}$, será: $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}$. El módulo de $\mathbf{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
- tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y con sentido positivo cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponda al sentido antihorario.
- *El producto vectorial es anticonmutativo.* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
- *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma.* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
- *Dos vectores serán colineales si su producto vectorial se anula.*

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \theta_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = 0 \;\Rightarrow\; |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = 0\,.$$

Si el módulo del vector es cero, obvio que es el vector nulo. Ahora bien, también de aquí deducimos que:

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$.

Producto triple o mixto

El número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:
$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \, |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.

- *Representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Donde $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ es el área de la base y la altura la proyección del vector $\mathbf{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, $|\mathbf{c}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.

Producto triple o mixto

El número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:
$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \, |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{b} \rangle}$.

- *Representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Donde $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ es el área de la base y la altura la proyección del vector $\mathbf{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, $|\mathbf{c}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{b} \rangle}$.
- *Es cíclico respecto a sus factores.*
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$.

Producto triple o mixto

El número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:
$V = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\,|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|\cos(\theta)_{\langle \mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle}$.

- *Representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Donde $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ es el área de la base y la altura la proyección del vector $\mathbf{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, $|\mathbf{c}|\cos(\theta)_{\langle \mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle}$.
- *Es cíclico respecto a sus factores.* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}$.
- *Se anula cuando se repite alguno de sus factores.* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0$. Claramente, si $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\perp\mathbf{a} \;\Rightarrow\; (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = 0$.

Producto triple o mixto

El número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:
$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \, |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.

- *Representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Donde $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ es el área de la base y la altura la proyección del vector $\mathbf{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, $|\mathbf{c}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.
- *Es cíclico respecto a sus factores.*
  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$.
- *Se anula cuando se repite alguno de sus factores.*
  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. Claramente, si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \;\Rightarrow\; (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$.
- *Si los tres vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$ *son coplanares (linealmente dependientes) entonces:* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Producto triple o mixto

El número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:
$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \, |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.

- *Representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Donde $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ es el área de la base y la altura la proyección del vector $\mathbf{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, $|\mathbf{c}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.
- *Es cíclico respecto a sus factores.*
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$.
- *Se anula cuando se repite alguno de sus factores.*
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. Claramente, si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \;\Rightarrow\; (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$.
- *Si los tres vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$ *son coplanares (linealmente dependientes) entonces:* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.
- Tres vectores $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0$, son linealmente independientes y forman una base levógira (contraria al giro de las manecillas del reloj) si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$ y dextrógira (la convencional base de la mano derecha) si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$.

Recapitulando

1. Vectores geométricos (módulo, dirección, sentido): dezlizantes y atados

Recapitulando

1. Vectores geométricos (módulo, dirección, sentido): dezlizantes y atados
2. Algebra (obvia) de vectores: suma y multiplicación por un número

Recapitulando

1. Vectores geométricos (módulo, dirección, sentido): dezlizantes y atados
2. Algebra (obvia) de vectores: suma y multiplicación por un número
3. Independencia lineal $\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$

1. Vectores geométricos (módulo, dirección, sentido): dezlizantes y atados
2. Algebra (obvia) de vectores: suma y multiplicación por un número
3. Independencia lineal $\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$
4. Producto escalar $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}\,.$
   Geometría (ángulo entre vectores), perpendicularidad, Teorema del coseno, Teorema de Pitágoras.

Recapitulando

1. Vectores geométricos (módulo, dirección, sentido): dezlizantes y atados
2. Algebra (obvia) de vectores: suma y multiplicación por un número
3. Independencia lineal $\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$
4. Producto escalar $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}\,.$
   Geometría (ángulo entre vectores), perpendicularidad, Teorema del coseno, Teorema de Pitágoras.
5. Producto vectorial: Orientación de Planos, Pseudovector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Recapitulando

1. Vectores geométricos (módulo, dirección, sentido): dezlizantes y atados
2. Algebra (obvia) de vectores: suma y multiplicación por un número
3. Independencia lineal $\alpha\ \mathbf{a} + \beta\ \mathbf{b} + \gamma\ \mathbf{c} = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$
4. Producto escalar $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}\,.$
   Geometría (ángulo entre vectores), perpendicularidad, Teorema del coseno, Teorema de Pitágoras.
5. Producto vectorial: Orientación de Planos, Pseudovector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$
6. Triple producto mixto: Volumen, pseudoescalares:
   $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\,|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b} \rangle}\,.$

Para la discusión

1. Dada una base ortonormal $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ y los siguientes vectores:

$$\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\,.$$

Queremos comprobar si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ forman una base.

Para la discusión

1. Dada una base ortonormal $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ y los siguientes vectores:

$$\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\,.$$

   Queremos comprobar si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ forman una base.

2. Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ del ejemplo anterior forman una base, podemos expresar otros vectores en términos de esta base. Tomemos, por ejemplo, los vectores: $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{e} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$, expresemos estos dos vectores en términos de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.