

Partícula en un Campo electromagnético

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



28 de agosto de 2024

- 1 Fuerza de Lorentz una *una fuerza generalizada*
- 2 El potencial vector
- 3 Sección

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y de velocidades.

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y de velocidades.
- La fuerza de Lorentz constituye una fuerza generalizada

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- y también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- y también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- y también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- Hemos utilizado $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

