Simetrías y cantidades conservadas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



25 de agosto de 2024

Agenda



- Variables conjugadas y cíclicas
 - Ejemplo: Partícula cono invertido
 - Ejemplo: Partícula en medio viscoso
- Teorema de Noether
 - Ejemplo: Coordenada cíclica
 - Ejemplo: Partícula en campo gravitatorio
- 3 Homogeneidad del espacio y conservación del momento lineal
- 4 Isotropía del espacio y conservación del momento angular
 - Ejemplo: Oscilador armónico bidimensional
- 6 Homogeneidad del tiempo y conservación de la energía
- $oldsymbol{6}$ Energía y Potenciales dependientes de las velocidades $V=V(q_j,\dot{q}_j,)$



• Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_i . También llamado momento canónico.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_{j},\dot{q}_{j},t\right)$, se define el momento conjugado, $p_{j}\left(q_{j},\dot{q}_{j},t\right)\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{j}}$ asociado a la coordenada generalizada q_{j} . También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_i . También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano \mathcal{L} de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener \dot{q}_i y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_i . También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano \mathcal{L} de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener \dot{q}_i y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada cíclica, q_i , es constante. Luego, la cantidad $p_i\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_i . También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano \mathcal{L} de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener \dot{q}_i y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada cíclica, q_i , es constante. Luego, la cantidad $p_i\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.
- Si una coordenada q_i es cíclica, entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, y la ecuación de Lagrange para esa coordenada cíclica q_i es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow p_i = \mathrm{cte}$.







• Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



• Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$





- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi})=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha+r^2\dot{\varphi}^2\right)-mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_{φ} asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{ cte }.$





- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_{φ} asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_{\varphi}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=$ cte .
- El momento angular de la partícula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$





- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_{φ} asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{ cte }.$
- El momento angular de la partícula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$
- La componente z es $\mathcal{L}_z = m(x\dot{y} y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} \equiv p_{\varphi} = \mathrm{cte}$, ya que $\begin{cases} x = r\cos\varphi, & \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\mathrm{sen}\,\varphi, & \dot{y} = \dot{r}\mathrm{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$







• Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} en un medio viscoso, con coeficiente de fricción α .

$$0 | \xrightarrow{\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

• Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$



$$F = -\alpha \mathbf{v}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \mathbf{v}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.



$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \\
\mathbf{0} \\
\end{array}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.



$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\bullet \\
\mathbf{v}
\end{array}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posición será $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$



$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \\
\mathbf{0} \\
\downarrow \\
\end{array}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posición será $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuación de movimiento, $m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}$



$$0 | \xrightarrow{\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante, $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$.
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posición será $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuación de movimiento, $m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}$
- Que es la Segunda Ley de Newton para la componente x de la fuerza $\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}$ ejercida por el fluido sobre la partícula.

Teorema de Noether



• Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.

Teorema de Noether



- Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformación infinitesimal representa una simetría del sistema, una simetría de la acción y se dice que la acción es invariante bajo esa transformación.

Teorema de Noether



- Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformación infinitesimal representa una simetría del sistema, una simetría de la acción y se dice que la acción es invariante bajo esa transformación.
- Teorema de Noether en Mecánica Clásica
 - Si la acción de un sistema es invariante bajo una transformación infinitesimal de coordenadas $q'_j = q_j + \delta q_j$ que cambia el Lagrangiano a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$, tal que $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f(q_j,t)}{\mathrm{d} t}$ para alguna función $f(q_j,t)$.
 - Entonces el Lagrangiano (y el sistema) $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ posee una simetría y la función $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j f$ constituye una cantidad conservada asociada a esa transformación.
 - ullet La cantidad ${\mathcal J}$ se denomina corriente de Noether.



• La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$



- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$



- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.



- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$



- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada



- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetrías y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.



- La transformación $q_j' = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetrías y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.
- Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales de segundo orden para las q_j , mientras que las cantidades conservadas $\mathcal{J}(q_j,\dot{q}_j,t)=cte$, son ecuaciones diferenciales de primer orden



• Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.



- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformación de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$



- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformación de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{0} \delta q_i = 0$
- ullet Por otro lado, la función f surge de $\delta \mathcal{L} = rac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$



- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformación de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la función f surge de $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada \mathcal{J} es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_j f = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i c = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{cte.}$

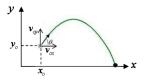


- Supongamos que la coordenada q_i es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformación de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la función f surge de $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada \mathcal{J} es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j f = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i c = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{cte.}$
- El momento conjugado p_i asociado a q_i es constante.

Partícula en campo gravitatorio



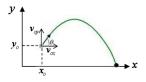
• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



Partícula en campo gravitatorio



• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$

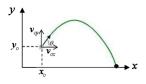


• El cambio en \mathcal{L} bajo la transformación de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg \delta y$

Partícula en campo gravitatorio



• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$

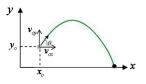


- El cambio en \mathcal{L} bajo la transformación de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg \delta y$
- Con lo cual $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow f = -mg t \delta y$

Partícula en campo gravitatorio



• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



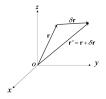
- El cambio en \mathcal{L} bajo la transformación de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg \delta y$
- Con lo cual $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow \quad f = -mg\,t\,\delta y$
- Con la cantidad conservada $\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta y f = \text{cte} \Rightarrow m\dot{y}\delta y + mgt\delta y = \text{cte} \Rightarrow \dot{y} + gt = \text{cte}$



• Consideremos un sistema de N partículas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$.

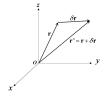


- Consideremos un sistema de N partículas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.





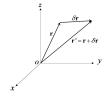
- Consideremos un sistema de N partículas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.



• Supongamos la transformación de coordenadas $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r}$, donde $\delta \mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes δx_j son constantes; i. e., $\delta \dot{\mathbf{r}} = 0$.



- Consideremos un sistema de N partículas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.



- Supongamos la transformación de coordenadas $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r}$, donde $\delta \mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes δx_j son constantes; i. e., $\delta \dot{\mathbf{r}} = 0$.
- Homogeneidad del espacio implica que la transformación infinitesimal no produce cambios en el Lagrangiano del sistema, $\delta \mathcal{L} = 0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ implica que f es constante.



• La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} - f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- $\bullet \ \, \mathsf{Donde} \,\, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- $\bullet \ \, \mathsf{Donde} \,\, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1 \, \alpha}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2 \, \alpha}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3 \, \alpha} \right)$
- Como $\delta {\bf r}$ es constante, ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\cal N} {\partial {\cal L} \over \partial \dot{{\bf r}}_{\alpha}} = {
 m cte}$
- ullet La cantidad ${f P}_{
 m T}$ es el momento lineal total del sistema.



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta {\bf r}$ es constante, ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} {\partial {\cal L} \over \partial {\dot {\bf r}}_{\alpha}} = {
 m cte}$
- ullet La cantidad ${f P}_{
 m T}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}m_{\alpha}\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^{2}-V\left(\mathbf{r}_{1},\mathbf{r}_{2},\ldots,\mathbf{r}_{N}\right)$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- ullet La cantidad ${f P}_{
 m T}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$

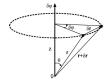


- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta {\bf r}$ es constante, ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\cal N} {\partial {\cal L} \over \partial \dot{{\bf r}}_{\alpha}} = {
 m cte}$
- ullet La cantidad ${f P}_{
 m T}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^{2} V\left(\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}, \dots, \mathbf{r}_{N}\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$
- El momento lineal de una partícula es ${f p}_{lpha}=m_{lpha}{f v}_{lpha}=rac{\partial {\cal L}}{\partial \dot{{f r}}_{lpha}}$



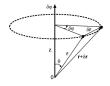
- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta {\bf r}$ es constante, ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\cal N} {\partial {\cal L} \over \partial \dot{{\bf r}}_{\alpha}} = {
 m cte}$
- ullet La cantidad $oldsymbol{P}_{\mathrm{T}}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$
- El momento lineal de una partícula es ${f p}_{lpha}=m_{lpha}{f v}_{lpha}=rac{\partial {\cal L}}{\partial {\dot {f r}}_{lpha}}$
- En un sistema donde existe simetría translacional en una dirección espacial, la componente del momento lineal total del sistema en esa dirección se conserva.





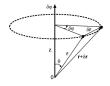


• Consideremos una partícula en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a O y una rotación infinitesimal del vector \mathbf{r} alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



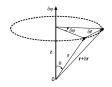
• Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.





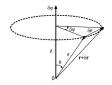
- Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la partícula transformado por la rotación infinitesimal es ${\bf r}'={\bf r}+\delta{\bf r}$





- Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la partícula transformado por la rotación infinitesimal es ${\bf r}'={\bf r}+\delta{\bf r}$
- Sonde $\delta \mathbf{r}$ tiene dirección perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta \varphi)$ y magnitud $\delta r = r \sin \theta \delta \varphi$, con θ es el ángulo entre $\delta \varphi$ y r. Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$





- Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la partícula transformado por la rotación infinitesimal es ${\bf r}'={\bf r}+\delta {\bf r}$
- Sonde $\delta \mathbf{r}$ tiene dirección perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta \varphi)$ y magnitud $\delta r = r \sin \theta \delta \varphi$, con θ es el ángulo entre $\delta \varphi$ y r. Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$
- Consideremos a continuación un sistema de N partículas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha}, \alpha=1,\ldots,N$, sujeto a una rotación infinitesimal $\delta \varphi$



• El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.



- El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$



- El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j}_{\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j}_{\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$



- El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$ y $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$



- El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \mathbf{y} \ \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.



- El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$ y $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.
- Como $\delta \varphi$ es constante, $\mathbf{L}_T \equiv \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte.}$ La cantidad vectorial \mathbf{L}_T es el momento angular total del sistema.



- El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta {\bf r}_{\alpha} = \delta \varphi \times {\bf r}_{\alpha}$.
- La isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$ y $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.
- Como $\delta \varphi$ es constante, $\mathbf{L}_T \equiv \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte.}$ La cantidad vectorial \mathbf{L}_T es el momento angular total del sistema.
- Si un sistema posee simetría rotacional alrededor de un eje, se conserva la componente del momento angular en esa dirección.



• Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de \mathcal{L} bajo esta transformación infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de \mathcal{L} bajo esta transformación infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de \mathcal{L} bajo esta transformación infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_i, t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de $\mathcal L$ bajo esta transformación infinitesimal es $\delta \mathcal L = \sum_i \frac{\partial \mathcal L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot x_i} \delta \dot x_i = k x y \delta \varphi k y x \delta \varphi m \dot x \dot y \delta \varphi + m \dot y \dot x \delta \varphi = 0$
- La condición $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$
- Como $\delta \varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de \mathcal{L} bajo esta transformación infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_i, t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$
- Como $\delta \varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{2} k r^2$ y la coordenada φ es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a la fuerza elástica de constante $k \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de \mathcal{L} bajo esta transformación infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$
- Como $\delta \varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}kr^2$ y la coordenada φ es cíclica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$
- El momento conjugado $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{cte.}$

Conservación de la energía



 Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende explícitamente de $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal L$ no depende explícitamente de $t: \mathcal L = \mathcal L(q_j, \dot q_j)$.
- El cambio total de \mathcal{L} será $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende explícitamente de $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de \mathcal{L} será $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal L$ no depende explícitamente de $t:\mathcal L=\mathcal L\left(q_j,\dot q_j\right)$.
- El cambio total de \mathcal{L} será $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende explícitamente de $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de \mathcal{L} será $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$
- Con lo cual $\frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} \right] = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} = \text{ cte.}$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano $\mathcal L$ no depende explícitamente de $t:\mathcal L=\mathcal L\left(q_j,\dot q_j\right)$.
- El cambio total de \mathcal{L} será $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} \right] = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} = \text{ cte.}$
- ullet La energía es la cantidad escalar $E\left(q_j,\dot{q}_j,t
 ight)\equiv\sum_{j=1}^srac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j-\mathcal{L}$



• Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como

$$E\left(q_{j},\dot{q}_{j}
ight)=\sum_{j=1}^{s}rac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}rac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\sum_{j=1}^{s}rac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\left(\mathcal{T}-V
ight)$$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T\left(\dot{q}_{1},\ldots,\dot{q}_{s}
ight)=rac{1}{2}\sum_{ij}^{s}\mathcal{T}_{ij}\dot{q}_{i}\dot{q}_{j}\Rightarrow\sum_{j}^{s}rac{\partial T}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}=\left(\sum_{j}^{s}\mathcal{T}_{jj}\dot{q}_{j}
ight)\dot{q}_{j}=2T$$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como $F(q_i, \dot{q}_i) = \sum^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \cdot \mathcal{L} = \sum^s \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \sum^s \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot (T V)$

$$E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$$

Como en general

$$T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^s \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j^s \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j\right) \dot{q}_j = 2T$$

Entonces

$$E\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)=2T-\sum_{j=1}^{s}rac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-T+V=T+V-\sum_{j=1}^{s}rac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}$$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como $E(q_i, \dot{q}_i) \sum^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i} \dot{q}_i \mathcal{L} \sum^s \frac{\partial T}{\partial i} \dot{q}_i \sum^s \frac{\partial V}{\partial i} \dot{q}_i (T V)$
- $E\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\left(T-V\right)$ Como en general
- $T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^s \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j^s \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j\right) \dot{q}_j = 2T$
- Entonces $E\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)=2T-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-T+V=T+V-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}$
- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total, $E\left(q_j,\dot{q}_j\right)=T+V$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^s \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j^s \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j\right) \dot{q}_j = 2T$$

Entonces

$$E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total, $E\left(q_j,\dot{q}_j\right)=T+V$
- Si $V = V(q_j, \dot{q}_j)$, la función de energía contiene términos adicionales a T + V.