

Campos Tensoriales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



7 de febrero de 2022

- 1 Generalidades
- 2 Ejemplos de Campos Tensoriales
- 3 Campos escalares y superficies
- 4 Campos vectoriales y curvas integrales
- 5 Flujo de campos vectoriales
- 6 Recapitulando

- La dependencia funcional de los vectores puede recaer en sus componentes, su base o en ambas

$$\mathbf{a}(t) = a^k(t)\mathbf{e}_k(t) = \tilde{a}^m\tilde{\mathbf{e}}_m(t) = \bar{a}^n(t)\bar{\mathbf{e}}_n.$$

- La dependencia funcional de los vectores puede recaer en sus componentes, su base o en ambas

$$\mathbf{a}(t) = a^k(t)\mathbf{e}_k(t) = \tilde{a}^m\tilde{\mathbf{e}}_m(t) = \bar{a}^n(t)\bar{\mathbf{e}}_n.$$
- Lo generalizamos para tensores y distinguimos los mismos tres casos:

- bases constantes y componentes variables** $T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle w^i(1) | \otimes \langle u^j(2) | \otimes \dots \otimes \langle v^k(m) | \otimes | x_m(1) \rangle \otimes | y_n(2) \rangle \otimes \dots \otimes | z_l(n) \rangle ;$
- bases variables y componentes constantes** $\check{T}_{ij\dots k}^{mn\dots l} \langle \check{w}^i(1) |_{(t)} \otimes \langle \check{u}^j(2) |_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \check{v}^k(m) |_{(t)} \otimes | \check{x}_m(1) \rangle_{(t)} \otimes | \check{y}_n(2) \rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes | \check{z}_l(n) \rangle_{(t)} ,$
- y, finalmente **ambas (bases y componentes) variables**
 $T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle \check{w}^i(1) |_{(t)} \otimes \langle \check{u}^j(2) |_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \check{v}^k(m) |_{(t)} \otimes | \check{x}_m(1) \rangle_{(t)} \otimes | \check{y}_n(2) \rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes | \check{z}_l(n) \rangle_{(t)} .$

Al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese.

- La dependencia funcional de los vectores puede recaer en sus componentes, su base o en ambas

$$\mathbf{a}(t) = a^k(t)\mathbf{e}_k(t) = \tilde{a}^m\tilde{\mathbf{e}}_m(t) = \bar{a}^n(t)\bar{\mathbf{e}}_n.$$
- Lo generalizamos para tensores y distinguimos los mismos tres casos:

- bases constantes y componentes variables** $T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle w^i(1) | \otimes \langle u^j(2) | \otimes \dots \otimes \langle v^k(m) | \otimes | x_m(1) \rangle \otimes | y_n(2) \rangle \otimes \dots \otimes | z_l(n) \rangle ;$
- bases variables y componentes constantes** $\check{T}_{ij\dots k}^{mn\dots l} \langle \check{w}^i(1) |_{(t)} \otimes \langle \check{u}^j(2) |_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \check{v}^k(m) |_{(t)} \otimes | \check{x}_m(1) \rangle_{(t)} \otimes | \check{y}_n(2) \rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes | \check{z}_l(n) \rangle_{(t)} ,$
- y, finalmente **ambas (bases y componentes) variables**
 $T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle \check{w}^i(1) |_{(t)} \otimes \langle \check{u}^j(2) |_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \check{v}^k(m) |_{(t)} \otimes | \check{x}_m(1) \rangle_{(t)} \otimes | \check{y}_n(2) \rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes | \check{z}_l(n) \rangle_{(t)} .$

Al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese.

- Si el tensor NO depende de un solo parámetro $\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots ; \bullet, \bullet, \dots]_{(t)}$, sino es función de otro tensor : $\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots ; \bullet, \bullet, \dots]_{(\mathbf{G}[\circ, \circ, \dots ; \bullet, \bullet, \dots])}$, será un **un campo tensorial**.

Si consideramos la base constante, y un único parámetro tendremos:

- **Campos homogéneos:**

Función : $\varphi = \varphi(t)$

Vector : $|r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \rightsquigarrow r^i(t)$

Tensor : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \rightsquigarrow T^{mn\dots l}_{ij\dots k}(t)$

Si consideramos la base constante, y un único parámetro tendremos:

- **Campos homogéneos:**

Función : $\varphi = \varphi(t)$

Vector : $|r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \rightsquigarrow r^i(t)$

Tensor : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \rightsquigarrow T^{mn\dots l}_{ij\dots k}(t)$

- **Campos constantes o estacionarios: $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}(t)$**

Campo Escalar : $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$

Campo Vectorial : $|a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightsquigarrow a^i(\mathbf{r})$

Campo Tensorial : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T^{mn\dots l}_{ij\dots k}(\mathbf{r})$

Si consideramos la base constante, y un único parámetro tendremos:

- **Campos homogéneos:**

Función : $\varphi = \varphi(t)$

Vector : $|r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \rightsquigarrow r^i(t)$

Tensor : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \rightsquigarrow T^{mn\dots l}_{ij\dots k}(t)$

- **Campos constantes o estacionarios: $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}(t)$**

Campo Escalar : $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$

Campo Vectorial : $|a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightsquigarrow a^i(\mathbf{r})$

Campo Tensorial : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T^{mn\dots l}_{ij\dots k}(\mathbf{r})$

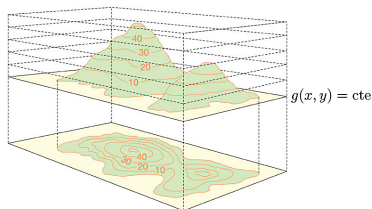
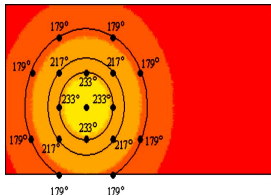
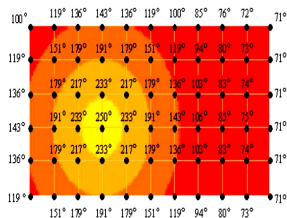
- **Campos variables o no estacionarios**

Campo Escalar : $\varphi = \varphi(\mathbf{r}(t), t)$

Campo Vectorial : $|a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) \rightsquigarrow a^i(\mathbf{r}(t), t)$

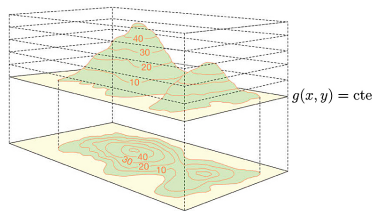
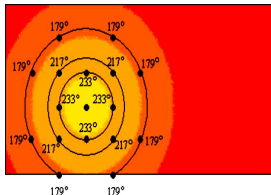
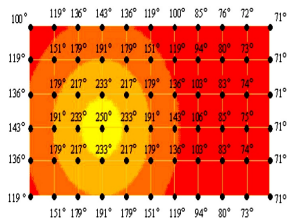
Campo Tensorial : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T^{mn\dots l}_{ij\dots k}(\mathbf{r}(t), t)$

- Un campo escalar es toda función escalar, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de argumento vectorial $\phi = \phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \phi = \phi(x^i) = \phi(\tilde{x}^i)$.



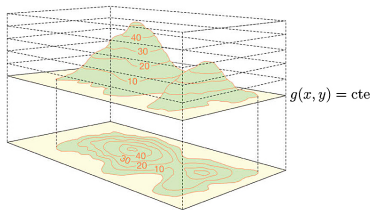
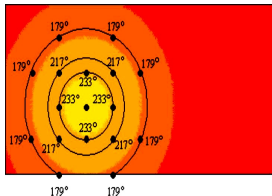
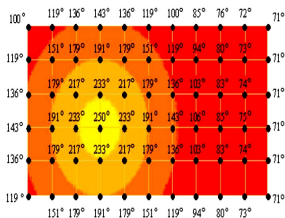
$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10 - (y-2)^2/10}$, ilustra un campo escalar
Mapa o diagrama de temperaturas.

- Un campo escalar es toda función escalar, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de argumento vectorial $\phi = \phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \phi = \phi(x^i) = \phi(\tilde{x}^i)$.
- Un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento.



$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10 - (y-2)^2/10}$, ilustra un campo escalar
Mapa o diagrama de temperaturas.

- Un campo escalar es toda función escalar, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de argumento vectorial $\phi = \phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \phi = \phi(x^i) = \phi(\tilde{x}^i)$.
- Un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento.
- Un campo escalar $\phi = \phi(x^1, x^2)$ definirá diferentes superficies si la representamos en \mathbb{R}^3 de la forma: $x^3 = \phi(x^1, x^2)$



$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10 - (y-2)^2/10}$, ilustra un campo escalar
Mapa o diagrama de temperaturas.

- Un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de varias variables, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, A cada punto del espacio se le asigna un vector.

- Un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de varias variables, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, A cada punto del espacio se le asigna un vector.
- A las líneas construidas a partir de los vectores tangentes se les dominan *líneas de campo*, *curvas integrales*, *líneas de flujo* o de *corriente*. Consideremos el caso bidimensional

$$d\mathbf{r} \propto \mathbf{A}(x, y) = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{dx}{A_x(x, y)} = \frac{dy}{A_y(x, y)}.$$

Entonces las *líneas de flujo* o *curvas integrales* del campo serán

$$\mathbf{A}(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{A_y(x, y)}{A_x(x, y)} \Rightarrow y(x) = \int \frac{A_y(x, y)}{A_x(x, y)} dx.$$

- Un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de varias variables, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, A cada punto del espacio se le asigna un vector.
- A las líneas construidas a partir de los vectores tangentes se les dominan *líneas de campo*, *curvas integrales*, *líneas de flujo* o de *corriente*. Consideremos el caso bidimensional

$$d\mathbf{r} \propto \mathbf{A}(x, y) = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j} \Rightarrow \frac{dx}{A_x(x, y)} = \frac{dy}{A_y(x, y)}.$$

Entonces las *líneas de flujo* o *curvas integrales* del campo serán

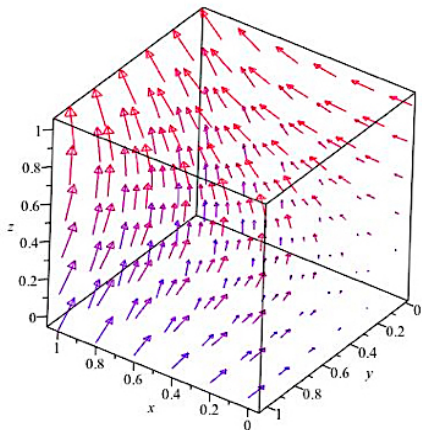
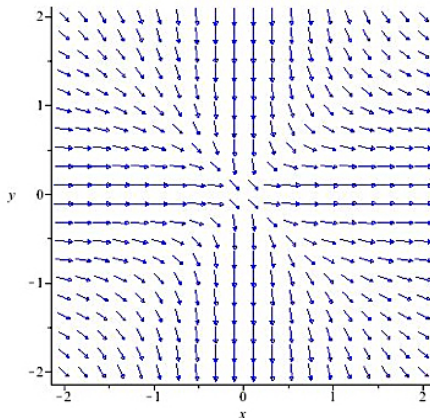
$$\mathbf{A}(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{A_y(x, y)}{A_x(x, y)} \Rightarrow y(x) = \int \frac{A_y(x, y)}{A_x(x, y)} dx.$$

- A las trayectorias ortogonales a estas líneas se les denomina *líneas equipotenciales*. $\mathbf{A}^\perp(x, y) \cdot \mathbf{A}(x, y) = 0 \Rightarrow$

$$A_x(x, y)A_x^\perp(x, y) + A_y(x, y)A_y^\perp(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{A_x(x, y)}{A_y(x, y)} = -\frac{A_y^\perp(x, y)}{A_x^\perp(x, y)}.$$

$$\text{Finalmente } \frac{dy}{dx} = -\frac{A_y^\perp(x, y)}{A_x^\perp(x, y)} \Rightarrow y(x) = -\int \frac{A_y^\perp(x, y)}{A_x^\perp(x, y)} dx.$$

Campos vectoriales y curvas integrales



- Consideremos una superficie infinitesimal $d\mathbf{S} = \|d\mathbf{S}\| \hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal a esa superficie S . Entonces, el flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $d\mathbf{S}$ es
$$dF = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS \Rightarrow F = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} dS.$$

- Consideremos una superficie infinitesimal $d\mathbf{S} = \|d\mathbf{S}\| \hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal a esa superficie S . Entonces, el flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $d\mathbf{S}$ es
$$dF = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS \Rightarrow F = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} dS.$$
- $F = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, es el flujo total. Un escalar independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas puede expresarse como
$$dF = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = A^1 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^1}) + A^2 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^2}) + A^3 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^3}).$$

- Consideremos una superficie infinitesimal $d\mathbf{S} = \|d\mathbf{S}\| \hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal a esa superficie S . Entonces, el flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $d\mathbf{S}$ es
$$dF = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS \Rightarrow F = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} dS.$$
- $F = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, es el flujo total. Un escalar independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas puede expresarse como
$$dF = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = A^1 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^1}) + A^2 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^2}) + A^3 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^3}).$$
- El flujo será máximo cuando el campo es paralelo a $d\mathbf{S}$ y nulo cuando el campo es paralelo a $d\mathbf{S}$.

- Consideremos una superficie infinitesimal $d\mathbf{S} = \|d\mathbf{S}\| \hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal a esa superficie S . Entonces, el flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $d\mathbf{S}$ es
$$dF = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS \Rightarrow F = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} dS.$$
- $F = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, es el flujo total. Un escalar independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas puede expresarse como
$$dF = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = A^1 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^1}) + A^2 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^2}) + A^3 \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s A^3}).$$
- El flujo será máximo cuando el campo es paralelo a $d\mathbf{S}$ y nulo cuando el campo es paralelo a $d\mathbf{S}$.
- la cantidad de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo viene dada por $dF = \left(\|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s \mathbf{v}}) \right) dS = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow F = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \iint_S v_{\hat{\mathbf{n}}} dS.$

• Campos tensoriales

Campo Escalar : $\varphi = \varphi(\mathbf{r}(t), t)$

Campo Vectorial : $|a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) \rightsquigarrow a^i(\mathbf{r}(t), t)$

Campo Tensorial : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\mathbf{r}(t), t)$

- **Campos tensoriales**

Campo Escalar : $\varphi = \varphi(\mathbf{r}(t), t)$

Campo Vectorial : $|a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) \rightsquigarrow a^i(\mathbf{r}(t), t)$

Campo Tensorial : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\mathbf{r}(t), t)$

- Un campo escalar $\phi = \phi(x^1, x^2)$ definirá diferentes superficies si la representamos en \mathbb{R}^3 de la forma: $x^3 = \phi(x^1, x^2)$.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

9 / 9