Transformadas de Fourier Discretas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

4 de mayo de 2022

Agenda Transformadas de Fourier Discretas

Si el período es T genérico, definimos una serie de Fourier como

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)+b_n\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]\quad \text{con}\quad \left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t\ f(t) \\ a_n & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}x\ f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t\ f(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\end{array}\right.$$

Las integrales no se pueden resolver analíticamente entonces convertimos integrales en sumatorias. Pero primero

- Dividimos el intervalo $T=Nh$ en $N+1$ segmentos de ancho $h=t_{i+1}-t_i$, entonces $(t_0,\ldots,t_0+T)\underbrace{\rightarrow}_{N+1}(t_0,\ldots,t_N)$

Si el período es T genérico, definimos una serie de Fourier como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0 = & \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \; f(t) \\ a_n = & \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x \; f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n = & \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \; f(t) \; \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{cases}$$

Las integrales no se pueden resolver analíticamente entonces convertimos integrales en sumatorias. Pero primero

- Dividimos el intervalo $T = Nh$ en $N+1$ segmentos de ancho $h = t_{i+1} - t_i$, entonces $(t_0, \ldots, t_0 + T) \underbrace{\rightarrow}_{N+1} (t_0, \ldots, t_N)$
- Supondremos $f(t)$ periódica $f(t_0) = f(t_{t_0+T}) \equiv f(t_N) = f_i$ con $i = 0, \ldots, N$

Con lo cual como $T = Nh$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t) \Rightarrow a_0 \approx \frac{2h}{T}\sum_{i=1}^{N} f_i = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x\ f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad \Rightarrow a_n \approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \cos\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad \Rightarrow b_n \approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)$$

Entonces

$$f(t) = \frac{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \cos\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\cos\left(\frac{2\pi nt}{Nh}\right) + \left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{Nh}\right)\right]$$

Finalmente

$$f_m = \frac{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i}{2} + \sum_{n=1}^{\mathbf{N}}\left[\left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \cos\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\cos\left(\frac{2\pi nt_m}{Nh}\right) + \left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_m}{Nh}\right)\right]$$

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

- Entonces $f(t_m) \equiv f_m = \sum_{n=0}^{N} C_n e^{i\omega_n t_m} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t_0} & e^{i\omega_1 t_0} & \cdots & e^{i\omega_N t_0} \\ e^{i\omega_0 t_1} & e^{i\omega_1 t_1} & \cdots & e^{i\omega_N t_1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ e^{i\omega_0 t_N} & e^{i\omega_1 t_N} & \cdots & e^{i\omega_N t_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

- Entonces $f(t_m) \equiv f_m = \sum_{n=0}^{N} C_n e^{i\omega_n t_m} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t_0} & e^{i\omega_1 t_0} & \cdots & e^{i\omega_N t_0} \\ e^{i\omega_0 t_1} & e^{i\omega_1 t_1} & \cdots & e^{i\omega_N t_1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ e^{i\omega_0 t_N} & e^{i\omega_1 t_N} & \cdots & e^{i\omega_N t_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

- Es decir, en notación vectorial

$$\mathbf{f} = \mathbb{T}\mathbf{C} \quad \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{f}$$

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

- Entonces $f(t_m) \equiv f_m = \sum_{n=0}^{N} C_n e^{i\omega_n t_m} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t_0} & e^{i\omega_1 t_0} & \cdots & e^{i\omega_N t_0} \\ e^{i\omega_0 t_1} & e^{i\omega_1 t_1} & \cdots & e^{i\omega_N t_1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ e^{i\omega_0 t_N} & e^{i\omega_1 t_N} & \cdots & e^{i\omega_N t_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

- Es decir, en notación vectorial

$$\mathbf{f} = \mathbb{T}\mathbf{C} \quad \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{f}$$

- $T = Nh = 2^\eta h$ tendremos FFT, pasamos de $(N+1)^2$ operaciones a $(N+1)\log_2(N+1)$

Aliasing o efecto Nyquist

- El *aliasing* o efecto Nyquist es la confusión que hace que dos señales diferentes, al ser submuestreadas, se vuelvan indistinguibles (son *alias* entre sí).

- Las frecuencias f y $f - 2s$ producen la misma transformada discreta y no podríamos determinar la existencia de dos frecuencias.
- Para evitar el *aliasing* queremos que no existan frecuencias $f > \frac{s}{2}$ en nuestra señal de entrada. Esta exigencia se conoce como el *criterio de Nyquist*.

Aliasing o efecto Nyquist

- El *aliasing* o efecto Nyquist es la confusión que hace que dos señales diferentes, al ser submuestreadas, se vuelvan indistinguibles (son *alias* entre sí).
- Cuando discretizamos una señal y queremos construir su transformada discreta de Fourier el muestreo es clave.

- Las frecuencias f y $f - 2s$ producen la misma transformada discreta y no podríamos determinar la existencia de dos frecuencias.
- Para evitar el *aliasing* queremos que no existan frecuencias $f > \frac{s}{2}$ en nuestra señal de entrada. Esta exigencia se conoce como el *criterio de Nyquist*.

Aliasing o efecto Nyquist

- El *aliasing* o efecto Nyquist es la confusión que hace que dos señales diferentes, al ser submuestreadas, se vuelvan indistinguibles (son *alias* entre sí).
- Cuando discretizamos una señal y queremos construir su transformada discreta de Fourier el muestreo es clave.
- Si lo hacemos con pocos puntos ($\Delta t \gg 1$) somos incapaces de reconstruir su frecuencia.

- Las frecuencias f y $f - 2s$ producen la misma transformada discreta y no podríamos determinar la existencia de dos frecuencias.
- Para evitar el *aliasing* queremos que no existan frecuencias $f > \frac{s}{2}$ en nuestra señal de entrada. Esta exigencia se conoce como el *criterio de Nyquist*.

Aliasing o efecto Nyquist

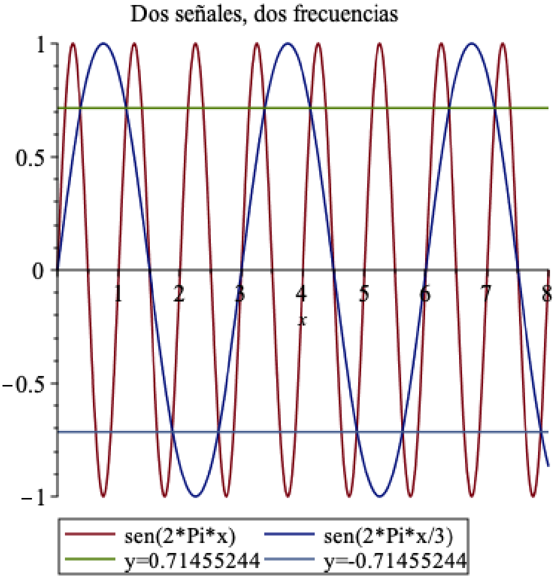
- El *aliasing* o efecto Nyquist es la confusión que hace que dos señales diferentes, al ser submuestreadas, se vuelvan indistinguibles (son *alias* entre sí).
- Cuando discretizamos una señal y queremos construir su transformada discreta de Fourier el muestreo es clave.
- Si lo hacemos con pocos puntos ($\Delta t \gg 1$) somos incapaces de reconstruir su frecuencia.
- Las frecuencias altas requieren un muestreo de la señal con pequeños pasos de tiempo.

- Las frecuencias f y $f - 2s$ producen la misma transformada discreta y no podríamos determinar la existencia de dos frecuencias.
- Para evitar el *aliasing* queremos que no existan frecuencias $f > \frac{s}{2}$ en nuestra señal de entrada. Esta exigencia se conoce como el *criterio de Nyquist*.

Aliasing o efecto Nyquist

- El *aliasing* o efecto Nyquist es la confusión que hace que dos señales diferentes, al ser submuestreadas, se vuelvan indistinguibles (son *alias* entre sí).
- Cuando discretizamos una señal y queremos construir su transformada discreta de Fourier el muestreo es clave.
- Si lo hacemos con pocos puntos ($\Delta t \gg 1$) somos incapaces de reconstruir su frecuencia.
- Las frecuencias altas requieren un muestreo de la señal con pequeños pasos de tiempo.
- El *aliasing* se produce cuando una señal que contiene la frecuencia f se muestrea con una tasa de $t_m = \frac{N}{T} \leq \frac{f}{2}$
- Las frecuencias f y $f - 2s$ producen la misma transformada discreta y no podríamos determinar la existencia de dos frecuencias.
- Para evitar el *aliasing* queremos que no existan frecuencias $f > \frac{s}{2}$ en nuestra señal de entrada. Esta exigencia se conoce como el *criterio de Nyquist*.

Aliasing o efecto Nyquist



Señal y Ruido 1/2

- Toda señal tiene una componente de ruido: $y(t) = s(t) + r(t)$.

Señal y Ruido 1/2

- Toda señal tiene una componente de ruido: $y(t) = s(t) + r(t)$.
- El ruido $r(t)$ es una función aleatoria que no correlacionada con $s(t)$.

- Toda señal tiene una componente de ruido: $y(t) = s(t) + r(t)$.
- El ruido $r(t)$ es una función aleatoria que no correlacionada con $s(t)$.
- Definiremos *la correlación* entre dos funciones arbitrarias $x(t)$ y $y(t)$ como $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t)$

Señal y Ruido 1/2

- Toda señal tiene una componente de ruido: $y(t) = s(t) + r(t)$.
- El ruido $r(t)$ es una función aleatoria que no correlacionada con $s(t)$.
- Definiremos *la correlación* entre dos funciones arbitrarias $x(t)$ y $y(t)$ como $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t)$
- Si ambas funciones, $x(t)$ y $y(t)$, oscilan independientemente en t, es igualmente probable que el integrando sea positivo como negativo.

Señal y Ruido 1/2

- Toda señal tiene una componente de ruido: $y(t) = s(t) + r(t)$.
- El ruido $r(t)$ es una función aleatoria que no correlacionada con $s(t)$.
- Definiremos *la correlación* entre dos funciones arbitrarias $x(t)$ y $y(t)$ como $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t)$
- Si ambas funciones, $x(t)$ y $y(t)$, oscilan independientemente en t, es igualmente probable que el integrando sea positivo como negativo.
- Las señales interfieren destructivamente y producen $c(\tau) \ll 1$ o interfieren constructivamente y el valor de $c(\tau) \gg 1$ será significativo.

Señal y Ruido 1/2

- Toda señal tiene una componente de ruido: $y(t) = s(t) + r(t)$.
- El ruido $r(t)$ es una función aleatoria que no correlacionada con $s(t)$.
- Definiremos *la correlación* entre dos funciones arbitrarias $x(t)$ y $y(t)$ como $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t)$
- Si ambas funciones, $x(t)$ y $y(t)$, oscilan independientemente en t, es igualmente probable que el integrando sea positivo como negativo.
- Las señales interfieren destructivamente y producen $c(\tau) \ll 1$ o interfieren constructivamente y el valor de $c(\tau) \gg 1$ será significativo.
- Las trasformadas de fourier de $c(\tau)$, $y^*(t)$ y $x(t+\tau)$ serán $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'' C(\omega'') \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'' t}}{\sqrt{2\pi}}$, $y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, Y^*(\omega) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$, y $x(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' X\left(\omega'\right) \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$.

Señal y Ruido 2/2

- $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t) \Rightarrow$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'\, Y^*(\omega)X\left(\omega'\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} 2\pi\delta\left(\omega' - \omega\right)$

Señal y Ruido 2/2

- $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t) \Rightarrow$
  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'\, Y^*(\omega)X(\omega')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} 2\pi\delta(\omega' - \omega)$
- $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, Y^*(\omega)X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$
  $\Rightarrow C(\omega) = \sqrt{2\pi}\, Y^*(\omega)X(\omega)$

- $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t) \Rightarrow$
  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'\, Y^*(\omega)X(\omega')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} 2\pi\delta(\omega' - \omega)$
- $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, Y^*(\omega)X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$
  $\Rightarrow C(\omega) = \sqrt{2\pi}\, Y^*(\omega)X(\omega)$
- Si construimos la función de Autocorrelación tendremos
  $A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)y(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)y(t)\,.$

Señal y Ruido 2/2

- $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t) \Rightarrow$
  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'\, Y^*(\omega)X(\omega')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} 2\pi\delta(\omega' - \omega)$
- $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, Y^*(\omega)X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$
  $\Rightarrow C(\omega) = \sqrt{2\pi}\, Y^*(\omega)X(\omega)$
- Si construimos la función de Autocorrelación tendremos
  $A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)y(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)y(t)\,.$
- Por otro lado expresamos la transformada de fourier de
  $y(t) = s(t) + n(t)$

  $$Y(\omega) = S(\omega) + R(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} S(\omega) \\ R(\omega) \end{array}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \left[\begin{array}{c} s(t) \\ r(t) \end{array}\right] \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$$

- $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t) \Rightarrow$
  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'\, Y^*(\omega)X(\omega')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} 2\pi\delta(\omega' - \omega)$
- $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, Y^*(\omega)X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$
  $\Rightarrow C(\omega) = \sqrt{2\pi}\, Y^*(\omega)X(\omega)$
- Si construimos la función de Autocorrelación tendremos
  $A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)y(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)y(t)\,.$
- Por otro lado expresamos la transformada de fourier de
  $y(t) = s(t) + n(t)$
  $$Y(\omega) = S(\omega) + R(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} S(\omega) \\ R(\omega) \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \left[\begin{array}{c} s(t) \\ r(t) \end{array} \right] \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$$
- y la autocorrelación de la señal mas ruido será
  $A_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t[s(t)s(t+\tau) + 2s(t)r(t+\tau) + r(t)r(t+\tau)]$
  $A_y(\tau) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, s(t)s(t+\tau) \equiv A_s(\tau).$

Señal y Ruido 2/2

- $c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)x(t) \Rightarrow$
  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'\, Y^*(\omega)X(\omega')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} 2\pi\delta(\omega'-\omega)$
- $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, Y^*(\omega)X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$
  $\Rightarrow C(\omega) = \sqrt{2\pi}\, Y^*(\omega)X(\omega)$
- Si construimos la función de Autocorrelación tendremos
  $A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t)y(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau)y(t)\,.$
- Por otro lado expresamos la transformada de fourier de
  $y(t) = s(t) + n(t)$
  $$Y(\omega) = S(\omega) + R(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} S(\omega) \\ R(\omega) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$$
- y la autocorrelación de la señal mas ruido será
  $A_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t[s(t)s(t+\tau) + 2s(t)r(t+\tau) + r(t)r(t+\tau)]$
  $A_y(\tau) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, s(t)s(t+\tau) \equiv A_s(\tau).$
- La autocorrelación de la señal ruidosa $A(\omega) = \sqrt{2\pi}|S(\omega)|^2$ nos provee el espectro de potencia, $|S(\omega)|^2$ de la señal pura