Sistemas integrables y caóticos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

25 de febrero de 2025

Agenda

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

1. Integrales del movimiento
2. Sistemas Integrables
3. Integrabilidad
4. Movimiento de una partícula en un potencial, arbitrario $V(x)$
   - El Lagrangeano, la Energía y los puntos de retorno
   - Los puntos de equilibrio, retorno y período
   - Pequeñas oscilaciones en potenciales arbitrarios
5. Recapitulando

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k\left(q_j, \dot{q}_j\right) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad $(n > s)$ se llama superintegrable.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k\left(q_j, \dot{q}_j\right) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad $(n > s)$ se llama superintegrable.
- El ejemplo más simple de sistema superintegrable es una partícula libre. Otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad $(n > s)$ se llama superintegrable.
- El ejemplo más simple de sistema superintegrable es una partícula libre. Otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional.
- Si un sistema con s grados de libertad tiene menos de s cantidades conservadas $(n < s)$, se denomina no integrable.

- Ejemplos de sistemas integrables
  - Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
  - Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \mathrm{cte}, n = 1$; es integrable.
  - Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = l_z = \text{cte}$, $C_2 = E = \text{cte}$, $n = 2$; es integrable.
  - Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo cuyo soporte gira en un círculo en plano vertical con velocidad angular constante: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo paramétrico cuya longitud varía en el tiempo: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Partícula libre es superintegrable: $s = 3; n = 4 : C_1 = E = \text{cte}$, $C_2 = p_x = \text{cte}$, $C_2 = p_y = \mathrm{cte}, C_2 = p_z = \mathrm{cte}$.

- Ejemplos de sistemas integrables
  - Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
  - Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \mathrm{cte}, n = 1$; es integrable.
  - Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = l_z = \text{cte}$, $C_2 = E = \text{cte}$, $n = 2$; es integrable.
  - Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo cuyo soporte gira en un círculo en plano vertical con velocidad angular constante: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo paramétrico cuya longitud varía en el tiempo: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Partícula libre es superintegrable: $s = 3; n = 4$: $C_1 = E = \text{cte}$, $C_2 = p_x = \text{cte}$, $C_2 = p_y = \mathrm{cte}, C_2 = p_z = \mathrm{cte}$.
- La integrabilidad es un tipo de simetría presente en varios sistemas dinámicos, y que conduce a una evolución regular (periódica o estacionaria) de las variables del sistema en el tiempo

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T\left(\dot{q}^2\right) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\mathrm{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q,

Integrabilidad

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T\left(\dot{q}^2\right) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\mathrm{ef}}\left(q\right)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva

Integrabilidad

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T\left(\dot{q}^2\right) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\mathrm{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.

Integrabilidad

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T\left(\dot{q}^2\right) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\mathrm{ef}}\,(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = cte$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,

$$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{a}\left(E - V_{\mathrm{ef}}(q)\right)} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{E - V_{\mathrm{ef}}(q)}} + \text{ cte.}$$

Integrabilidad

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T\left(\dot{q}^2\right) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\mathrm{ef}}\left(q\right)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = cte$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,
  $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{a}\left(E - V_{\mathrm{ef}}(q)\right)} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{E - V_{\mathrm{ef}}(q)}} + \text{ cte.}$
- En principio, se puede invertir $t(q)$ para obtener $q(t)$.

Integrabilidad

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T\left(\dot{q}^2\right) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\mathrm{ef}}\,(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = cte$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,
  $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{a}\left(E - V_{\mathrm{ef}}(q)\right)} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{E - V_{\mathrm{ef}}(q)}} + \text{ cte.}$
- En principio, se puede invertir $t(q)$ para obtener $q(t)$.
- Para que la solución $q(t)$ sea real, el movimiento puede ocurrir solamente para valores de q tales que $E \geq V_{\mathrm{ef}}(q)$.

Integrabilidad

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T\left(\dot{q}^2\right) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\mathrm{ef}}\left(q\right)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = cte$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,
  $\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{a}\left(E - V_{\mathrm{ef}}(q)\right)} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{E - V_{\mathrm{ef}}(q)}} + \text{ cte.}$
- En principio, se puede invertir $t(q)$ para obtener $q(t)$.
- Para que la solución $q(t)$ sea real, el movimiento puede ocurrir solamente para valores de q tales que $E \geq V_{\mathrm{ef}}(q)$.
- La condición de integrabilidad de sistemas unidimensionales permite calcular el período de movimientos oscilatorios en esos sistemas.

Movimiento de una partícula en un potencial $V(x)$

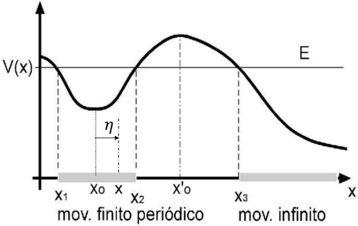
- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, con la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$

Movimiento de una partícula en un potencial $V(x)$

- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, con la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- La energía total constante es $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ y podemos integrar $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)} \Rightarrow t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V(x)}}$

- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, con la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- La energía total constante es $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ y podemos integrar $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)} \Rightarrow t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V(x)}}$
- Como $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$, el movimiento sólo puede ocurrir para $E \geq V(x)$.

- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, con la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$
- La energía total constante es $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ y podemos integrar $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)} \Rightarrow t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V(x)}}$
- Como $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$, el movimiento sólo puede ocurrir para $E \geq V(x)$.
- Los puntos de retorno son aquellos para $V(x) = E$. Es decir, x_1, x_2 y x_3 son puntos de retorno $V(x_1) = E, V(x_2) = E, V(x_3) = E$



- Los puntos de equilibrio $x = x_0$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$

Los puntos de equilibrio, retorno y período

- Los puntos de equilibrio $x = x_0$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$
- Un punto estático: velocidad y aceleración se anulan, $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.

- Los puntos de equilibrio $x = x_0$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$
- Un punto estático: velocidad y aceleración se anulan, $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.
- Un punto de equilibrio x_0 es estable si $x = x_0 + \eta$, donde η es un pequeño desplazamiento, tiende a $x = x_0$ al aumentar el tiempo y corresponde a un mímino del potencial $V(x)$. Es decir
  $\left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} > 0, \quad x_0$ es un punto de equilibrio estable

Los puntos de equilibrio, retorno y período

- Los puntos de equilibrio $x = x_0$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$
- Un punto estático: velocidad y aceleración se anulan, $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.
- Un punto de equilibrio x_0 es estable si $x = x_0 + \eta$, donde η es un pequeño desplazamiento, tiende a $x = x_0$ al aumentar el tiempo y corresponde a un mímino del potencial $V(x)$. Es decir
  $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} > 0, \quad x_0$ es un punto de equilibrio estable
- Un punto de equilibrio es inestable si el potencial $V(x)$ presenta un máximo en ese punto. Entonces $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} < 0, \quad x_0$ es un punto de equilibrio inestable.

Los puntos de equilibrio, retorno y período

- Los puntos de equilibrio $x = x_0$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0$
- Un punto estático: velocidad y aceleración se anulan, $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.
- Un punto de equilibrio x_0 es estable si $x = x_0 + \eta$, donde η es un pequeño desplazamiento, tiende a $x = x_0$ al aumentar el tiempo y corresponde a un mímino del potencial $V(x)$. Es decir
  $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} > 0, \quad x_0$ es un punto de equilibrio estable
- Un punto de equilibrio es inestable si el potencial $V(x)$ presenta un máximo en ese punto. Entonces $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} < 0, \quad x_0$ es un punto de equilibrio inestable.
- El período de oscilación entre los puntos de retorno x_1 y x_2 es dos veces el intervalo de tiempo del movimiento entre esos puntos, $\tau_p(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - V(x)}}$

- Para un valor de x cerca de un punto de equilibrio estable x_0, el potencial $V(x)$ puede expresarse mediante una expansión de Taylor alrededor de $x = x_0$. Esto es $V(x) = V(x_0) + \cancelto{0}{\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$, donde $V(x_0)$ es un valor constante y el segundo término se anula debido a la condición de equilibrio.

Pequeñas oscilaciones en potenciales arbitrarios

- Para un valor de x cerca de un punto de equilibrio estable x_0, el potencial $V(x)$ puede expresarse mediante una expansión de Taylor alrededor de $x = x_0$. Esto es

  $$V(x) = V(x_0) + \cancelto{0}{\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \cdots,$$ donde

  $V(x_0)$ es un valor constante y el segundo término se anula debido a la condición de equilibrio.
- Consideremos un pequeño desplazamiento η alrededor de x_0, entonces $x = x_0 + \eta$ donde $\eta \to 0 \, (\eta/x_0 \ll 1)$.

Pequeñas oscilaciones en potenciales arbitrarios

- Para un valor de x cerca de un punto de equilibrio estable x_0, el potencial $V(x)$ puede expresarse mediante una expansión de Taylor alrededor de $x = x_0$. Esto es
$V(x) = V(x_0) + \cancelto{0}{\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \cdots$, donde $V(x_0)$ es un valor constante y el segundo término se anula debido a la condición de equilibrio.
- Consideremos un pequeño desplazamiento η alrededor de x_0, entonces $x = x_0 + \eta$ donde $\eta \to 0\, (\eta / x_0 \ll 1)$.
- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tendremos $V(x) = \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} K (x - x_0)^2$,
donde $K \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} = \text{ constante } > 0$

Pequeñas oscilaciones en potenciales arbitrarios

- Para un valor de x cerca de un punto de equilibrio estable x_0, el potencial $V(x)$ puede expresarse mediante una expansión de Taylor alrededor de $x = x_0$. Esto es
  $V(x) = V(x_0) + \cancelto{0}{\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \cdots$, donde $V(x_0)$ es un valor constante y el segundo término se anula debido a la condición de equilibrio.
- Consideremos un pequeño desplazamiento η alrededor de x_0, entonces $x = x_0 + \eta$ donde $\eta \to 0\,(\eta/x_0 \ll 1)$.
- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tendremos $V(x) = \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 = \frac{1}{2}K(x - x_0)^2$,
  donde $K \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} = \text{ constante } > 0$
- $V(x)$ posee la misma forma funcional del oscilador armónico.

Pequeñas oscilaciones en potenciales arbitrarios

- Para un valor de x cerca de un punto de equilibrio estable x_0, el potencial $V(x)$ puede expresarse mediante una expansión de Taylor alrededor de $x = x_0$. Esto es
  $V(x) = V(x_0) + \cancelto{0}{\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$, donde $V(x_0)$ es un valor constante y el segundo término se anula debido a la condición de equilibrio.
- Consideremos un pequeño desplazamiento η alrededor de x_0, entonces $x = x_0 + \eta$ donde $\eta \to 0\,(\eta/x_0 \ll 1)$.
- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tendremos $V(x) = \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 = \frac{1}{2}K(x - x_0)^2$,
  donde $K \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} = \text{ constante } > 0$
- $V(x)$ posee la misma forma funcional del oscilador armónico.
- Su ecuación de movimiento $m\ddot{\eta} = -K(x - x_0) = -K\eta$
  $\Rightarrow \ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0 \Rightarrow \omega^2 \equiv \frac{K}{m} = \frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0}$

Recapitulando

•