Transformadas de Fourier Discretas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

24 de mayo de 2021

Agenda Transformadas de Fourier Discretas

1. De integrales a sumatorias
2. Series discretas complejas

Si el período es T genérico, definimos una serie de Fourier como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t) \\ a_n & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x\ f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{array} \right.$$

Las integrales no se pueden resolver analíticamente entonces convertimos integrales en sumatorias. Pero primero

- Dividimos el intervalo $T = Nh$ en $N+1$ segmentos de ancho $h = t_{i+1} - t_i$, entonces $(t_0, \ldots, t_0 + T) \underbrace{\rightarrow}_{N+1} (t_0, \ldots, t_N)$

Series de Fourier Discretas

Si el período es T genérico, definimos una serie de Fourier como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t) \\ a_n & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x\ f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n & = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{array}\right.$$

Las integrales no se pueden resolver analíticamente entonces convertimos integrales en sumatorias. Pero primero

- Dividimos el intervalo $T = Nh$ en $N+1$ segmentos de ancho $h = t_{i+1} - t_i$, entonces $(t_0, \ldots, t_0 + T) \underbrace{\rightarrow}_{N+1} (t_0, \ldots, t_N)$
- Supondremos $f(t)$ periódica $f(t_0) = f(t_{t_0+T}) \equiv f(t_N) = f_i$ con $i = 0, \ldots, N$

De integrales a sumatorias

Con lo cual como $T = Nh$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\; f(t) \quad \Rightarrow a_0 \approx \frac{2h}{T}\sum_{i=1}^{N} f_i = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x\; f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad \Rightarrow a_n \approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \cos\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\; f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad \Rightarrow b_n \approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)$$

Entonces

$$f(t) = \frac{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\cos\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\cos\left(\frac{2\pi nt}{Nh}\right) + \left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{Nh}\right)\right]$$

Finalmente

$$f_m = \frac{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i}{2} + \sum_{n=1}^{\mathbf{N}}\left[\left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\cos\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\cos\left(\frac{2\pi nt_m}{Nh}\right) + \left\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_i}{Nh}\right)\right\}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt_m}{Nh}\right)\right]$$

Series discretas complejas

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

Series discretas complejas

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

- Entonces $f(t_m) \equiv f_m = \sum_{n=0}^{N} C_n e^{i\omega_n t_m} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t_0} & e^{i\omega_1 t_0} & \cdots & e^{i\omega_N t_0} \\ e^{i\omega_0 t_1} & e^{i\omega_1 t_1} & \cdots & e^{i\omega_N t_1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ e^{i\omega_0 t_N} & e^{i\omega_1 t_N} & \cdots & e^{i\omega_N t_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

- Entonces $f(t_m) \equiv f_m = \sum_{n=0}^{N} C_n e^{i\omega_n t_m} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t_0} & e^{i\omega_1 t_0} & \cdots & e^{i\omega_N t_0} \\ e^{i\omega_0 t_1} & e^{i\omega_1 t_1} & \cdots & e^{i\omega_N t_1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ e^{i\omega_0 t_N} & e^{i\omega_1 t_N} & \cdots & e^{i\omega_N t_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

- Es decir, en notación vectorial

$$\mathbf{f} = \mathbb{T}\mathbf{C} \quad \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{f}$$

- Siempre podremos expresar la serie de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t},$$

donde $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ el espectro vendrá dado por $|C_n|^2$

- Entonces $f(t_m) \equiv f_m = \sum_{n=0}^{N} C_n e^{i\omega_n t_m} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t_0} & e^{i\omega_1 t_0} & \cdots & e^{i\omega_N t_0} \\ e^{i\omega_0 t_1} & e^{i\omega_1 t_1} & \cdots & e^{i\omega_N t_1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ e^{i\omega_0 t_N} & e^{i\omega_1 t_N} & \cdots & e^{i\omega_N t_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

- Es decir, en notación vectorial

$$\mathbf{f} = \mathbb{T}\mathbf{C} \quad \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{f}$$

- $T = Nh = 2^\eta h$ tendremos FFT, pasamos de $(N+1)^2$ operaciones a $(N+1)\log_2(N+1)$