Monedas y Conos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

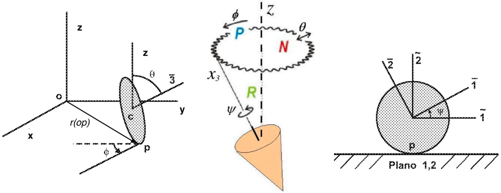
28 de abril de 2025

Agenda

1. Moneda que rueda sin deslizar
   - Ligaduras
   - El Lagrangeano
   - Energías cinética y potencial
   - Simetrías y Constantes de movimiento
2. Moneda en un plano inclinado
   - Planteamiento del problema
   - Coordenadas y ligaduras
   - Integración de ligaduras
   - Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano
3. Un cono que rueda en un plano horizontal
   - Coordenadas y ligaduras
   - Rodar sin deslizar y energía cinética

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

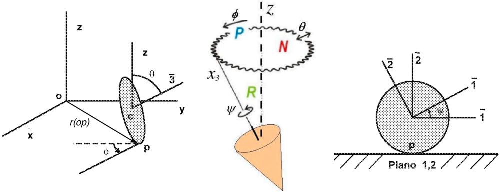
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.
Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

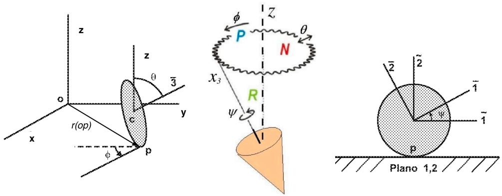
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.
Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

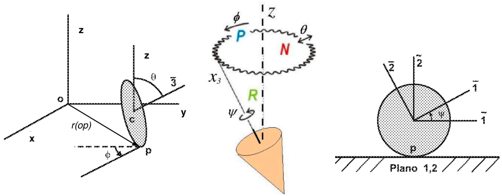
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.
Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.
Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi \cos\phi + \cos\psi \cos\theta \operatorname{sen}\phi)$; $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi - \cos\psi \cos\theta \cos\phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi \operatorname{sen}\theta$

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)$; $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi - \cos\psi\cos\theta\cos\phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi\operatorname{sen}\theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi \cos\phi + \cos\psi \cos\theta \operatorname{sen}\phi)$; $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi - \cos\psi \cos\theta \cos\phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi \operatorname{sen}\theta$
- Por su parte, $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)$; $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi - \cos\psi\cos\theta\cos\phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi\operatorname{sen}\theta$
- Por su parte, $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Es decir $\dot{x} + a\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - a\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + a\dot{\psi}\cos\phi = 0$; $\dot{y} + a\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\cos\theta + a\dot{\theta}\cos\phi\operatorname{sen}\theta + a\dot{\psi}\operatorname{sen}\phi = 0$; $\quad \dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$. Nótese que hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría respecto al eje $\hat{\mathbf{x}}_3$.

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta} \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta \quad$ y $\quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta} \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\, \theta \quad$ y $\quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \,\mathrm{sen}\,\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta} \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta \quad$ y $\quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Tendremos $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
$+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta} \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\,\theta \quad$ y $\quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Tendremos $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
$+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras
$T = \frac{1}{32}a^2M\Big(\dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi})\cos 2\theta$
$+8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2\Big)$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta} \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta \quad$ y $\quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Tendremos $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras
  $T = \frac{1}{32}a^2M\left(\dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi})\cos 2\theta\right.$
  $\left.+8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2\right)$
- Por su parte, la energía potencial $V = mgz = mga\operatorname{sen}\theta$

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right.$$
$$\left. + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$$

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4 \left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow$
  $\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right.$
  $\left. + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow$
  $\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$
- $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left(\dot{\phi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi}\right) = C_2$

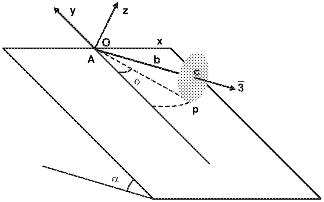
Simetrías y Constantes de movimiento

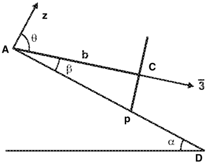
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right.$
  $\left. + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow$
  $\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$
- $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left(\dot{\phi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi}\right) = C_2$
- Por lo tanto $\dot{\phi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(-6C_1 + 4C_2\cos\theta + C_2\cos 2\theta + C_2)}{a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$
  $\dot{\psi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(4(2C_1 - 5C_2)\cos 2\theta + 32C_1\cos\theta + 8C_1 - 2C_2\cos 4\theta - 26C_2)}{8a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow$
  $\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$
- $p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left(\dot{\phi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi}\right) = C_2$
- Por lo tanto $\dot{\phi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(-6C_1 + 4C_2\cos\theta + C_2\cos 2\theta + C_2)}{a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$
  $\dot{\psi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(4(2C_1 - 5C_2)\cos 2\theta + 32C_1\cos\theta + 8C_1 - 2C_2\cos 4\theta - 26C_2)}{8a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$
- La ecuación de movimiento para θ es
  $10\ddot{\theta} + 4\dot{\phi}\dot{\psi}\sin^3\theta\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dot{\phi}^2(5\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \frac{8g}{a}\cos\theta = 0$

Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b. El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo α con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O, eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema $\tilde{S}$ origen también en O y eje $\tilde{3}$ en la direción AC. Encontrar las ecuaciones de movimiento para





Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi\operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

Coordenadas y ligaduras

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta; \quad y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi\operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene: $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta$, $\quad \dot{y} = b\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$, $\quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero : $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Con cual $b\dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3) = 0$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\, \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\, \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos\phi + \dot{\phi} \cos\phi \cos\theta - \dot{\theta} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta) = 0$, $\dot{y} + a(\dot{\psi} \operatorname{sen}\phi + \dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \dot{\theta} \cos\phi \operatorname{sen}\theta) = 0$ y $\quad \dot{z} - a\dot{\theta} \cos\theta = 0$. Hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría del cuerpo respecto a $\hat{\mathbf{x}}_3$.

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0,$
$\dot{y} + a(\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$ y $\quad \dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0.$
Hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría del cuerpo respecto a $\hat{\mathbf{x}}_3$.
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
$\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
$\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a}\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$ $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$ $\quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0,$ $\dot{y} + a(\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$ y $\quad \dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0.$ Hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría del cuerpo respecto a $\hat{\mathbf{x}}_3$.
- y usando las otras ecuaciones de ligadura $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos $\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a}\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$
- Donde hemos sustituido el valor de θ que implica $\mathrm{sen}\,\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}$ y $\cos\theta = a/\sqrt{a^2+b^2}$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\;\psi$;
  $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\,\text{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi;\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\;\psi;$ $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

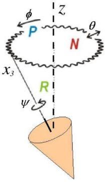
- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\,\text{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\;\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\text{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será $V = Mg(y\,\text{sen}\,\alpha + z\cos\alpha) \equiv Mgb(-\cos\phi\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha)$

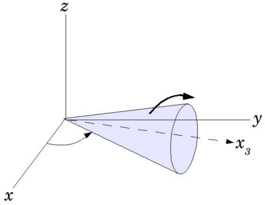
Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

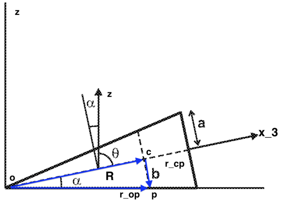
- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\,\text{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\;\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\text{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será $V = Mg(y\,\text{sen}\,\alpha + z\cos\alpha) \equiv Mgb(-\cos\phi\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha)$
- La ecuación de movimiento será $\ddot{\phi} = -g\,\text{sen}\,\alpha\frac{4\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{a^2+6b^2}\,\text{sen}\,\phi$

Coordenadas y ligaduras

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

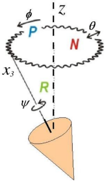


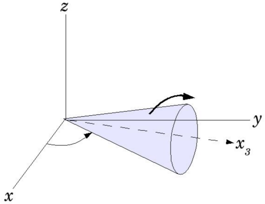


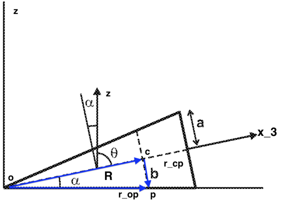


- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

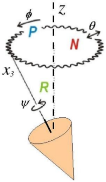


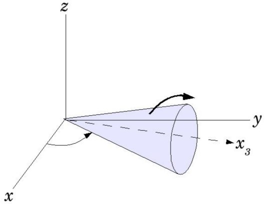


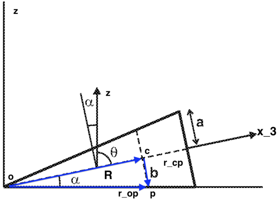


- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

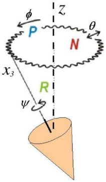


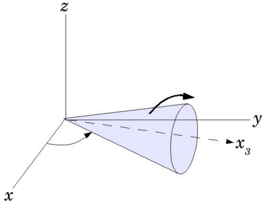


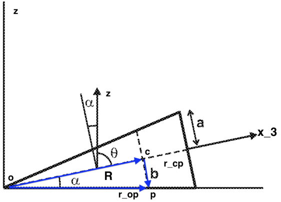


- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

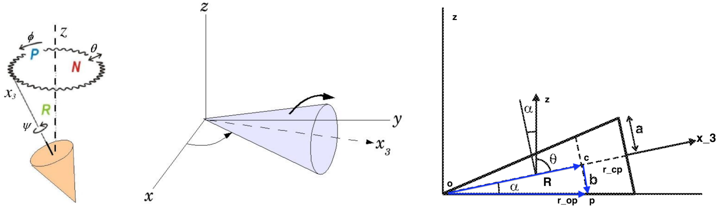






- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,

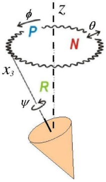
Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

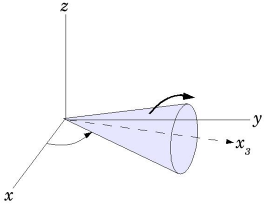


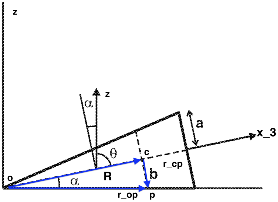
- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Con lo cual $x = \frac{3h}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad y = \frac{3h}{4}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \quad z = \frac{3h}{4}\cos\theta$,

Coordenadas y ligaduras

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).







- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Con lo cual $x = \frac{3h}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad y = \frac{3h}{4}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \quad z = \frac{3h}{4}\cos\theta$,
- Derivando $\dot{x} = -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \quad \dot{y} = \frac{3h}{4}\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta \quad \dot{z} = 0$

Rodar sin deslizar y energía cinética

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

Rodar sin deslizar y energía cinética

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$ $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$

Rodar sin deslizar y energía cinética

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\quad a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Por otro lado para el centro de masa $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}\;\psi \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\cos\psi \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\quad a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Por otro lado para el centro de masa
  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}\;\psi \qquad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\cos\psi \qquad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Entonces, rodar sin deslizar se convierte en
  $\dot{x} + b\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\cos\phi = 0 \qquad \dot{y} + b\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$

Rodar sin deslizar y energía cinética

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
  $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- Por otro lado para el centro de masa
  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}\;\psi \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\cos\psi \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Entonces, rodar sin deslizar se convierte en
  $\dot{x} + b\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\cos\phi = 0 \quad \dot{y} + b\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$
- Finalmente la energía cinética es
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{I_{11}}{2}\left[(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2\right] + \frac{I_{33}}{2}(\Omega^3)^2$
  $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{I_{11}}{2}\dot{\phi}^2\cos^2\alpha + \frac{I_{33}}{2}(\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \dot{\psi})^2$