

Polinomios de Legendre

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



3 de junio de 2022

- 1 Como decíamos ayer: Legendre *vía* Gram-Schmidt
- 2 Fórmula de Rodrigues
- 3 Ortogonalidad, norma y expansión de funciones
- 4 Ecuación diferencial
- 5 Relación de recurrencia y función generatriz
- 6 Recapitulando

- Un espacio de polinomios, \mathcal{P}^n , de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$, tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ con un producto interno $\langle \pi^i | \pi_j \rangle = \int_{-1}^1 dt \pi_i(t) \pi_j(t)$.

Los polinomios Legendre vía Gram-Schmidt

- Un espacio de polinomios, \mathcal{P}^n , de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$, tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ con un producto interno $\langle \pi^i | \pi_j \rangle = \int_{-1}^1 dt \pi_i(t) \pi_j(t)$.
- Entonces los polinomios de Legendre surgen a partir del método de ortogonalización de Gram-Schmidt

$ \pi_n\rangle$	$ P_n\rangle$	\hat{P}_n
1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
t	t	$\sqrt{\frac{3}{2}} t$
t^2	$t^2 - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3t^2 - 1)$
t^3	$t^3 - \frac{3}{5}t$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5t^3 - 3t)$
t^4	$t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{2}} (35t^4 - 30t^2 + 3)$
\vdots	\vdots	\vdots

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass**

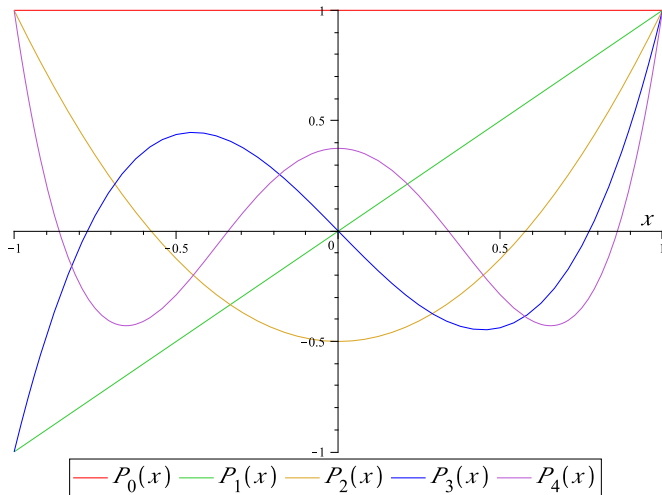
Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un n suficientemente grande y un ϵ suficientemente pequeño

$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass**
Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un n suficientemente grande y un ϵ suficientemente pequeño
$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$
- La base ortonormal de **Polinomios de Legendre** en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ vienen contruidos a partir de la Fórmula de Rodríguez $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $P_0(x) = 1$.

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass**
Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un n suficientemente grande y un ϵ suficientemente pequeño
 $|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$
- La base ortonormal de **Polinomios de Legendre** en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ vienen contruidos a partir de la Fórmula de Rodríguez $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ y $P_0(x) = 1$.
- Esto es:

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$



$P_n(x)$ tiene n raíces reales en el intervalo $(-1, 1)$

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

- La norma de los polinomios de Legendre es $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$.

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

- La norma de los polinomios de Legendre es $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$.
- Los Polinomios de Legendre son un conjunto completo de funciones y expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado

$$x \in [-1, 1], \text{ esto es } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^1 f(t)P_k(t)dt \right]}_{a_k} P_k(x).$$

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

- La norma de los polinomios de Legendre es $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$.
- Los Polinomios de Legendre son un conjunto completo de funciones y expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado

$$x \in [-1, 1], \text{ esto es } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^1 f(t)P_k(t)dt \right]}_{a_k} P_k(x).$$

- Esto es $f(x) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)dt + \frac{3}{2} \left[\int_{-1}^1 tf(t)dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[\int_{-1}^1 (3t^2 - 1)f(t)dt \right] P_2(x) + \\ & + \frac{7}{4} \left[\int_{-1}^1 (5t^3 - 3t)f(t)dt \right] P_3(x) + \\ & \frac{9}{16} \left[\int_{-1}^1 (35t^4 - 30t^2 + 3)f(t)dt \right] P_4(x) + \dots \end{aligned}$$

- Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0$$

- Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0$$

- ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones

n	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_0(x)}{dx} = 0$	$P_0(x) = 1$
1	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_1(x)}{dx} + 2 P_1(x) = 0$	$P_1(x) = x$
2	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_2(x)}{dx} + 6 P_2(x) = 0$	$P_2(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_3(x)}{dx} + 12 P_3(x) = 0$	$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t, x)$ de los polinomios de Legendre, es:
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t, x)$ de los polinomios de Legendre, es:
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo n .

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t, x)$ de los polinomios de Legendre, es:
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo n .
- Tienen una representación integral de la forma
$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right]^n d\varphi$$

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t, x)$ de los polinomios de Legendre, es:
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo n .
- Tienen una representación integral de la forma
$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right]^n d\varphi$$
- ecuaciones diferenciales equivalentes
 - Forma autoadjunta $[(1-x^2)y']' + \lambda(\lambda+1)y = 0$
 - Con $u = P_n(\cos(\theta))$, tenemos $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{du}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda+1)u = 0$
 - Con $u = \sqrt{\sin \theta} P_n(\cos \theta)$ tendremos $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2(\theta)} \right] u = 0$

En presentación consideramos

1