

Hamilton Jacobi

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



3 de diciembre de 2024

1 Ecuación de Hamilton Jacobi

2 Hamilton-Jacobi y el Principio de Mínima Acción

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i) , las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i) , las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$, $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i) , las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$, $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$, $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i) , las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$, $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$, $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, tal que $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$, entonces existe una función generadora \mathcal{F} tal que $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + H = 0$

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i) , las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$, $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$, $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, tal que $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$, entonces existe una función generadora \mathcal{F} tal que $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + H = 0$
- Esta condición es la ecuación de Hamilton-Jacobi, para una \mathcal{F} .

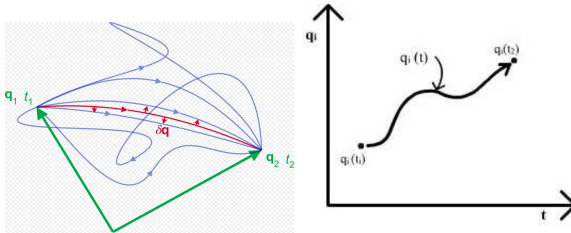
- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S .

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S .
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S .
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.
- La acción dependerá de las trayectorias y del tiempo, $S = S(q_i, t)$.



- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)$.

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + H(p_i, q_i, t) = 0$

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + H(p_i, q_i, t) = 0$
- Las cuales se pueden expresar mediante la ecuación
$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$$

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + H(p_i, q_i, t) = 0$
- Las cuales se pueden expresar mediante la ecuación $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir una transformación canónica.

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + H(p_i, q_i, t) = 0$
- Las cuales se pueden expresar mediante la ecuación $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir una transformación canónica.
- Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora de tipo $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$, tal que $P_i = \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i = \beta_i = \text{cte}$.