Autovalores y Autovectores

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

1 de febrero de 2022

Agenda de Autovalores y Autovectores

Definiciones y ejemplos

- **Definición** $|\psi\rangle$ un autovector del operador $\mathbb{A}$ si se cumple que $\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$. Con λ (en general será un número complejo) es el autovalor del autovector $|\psi\rangle$

- **Definición** $|\psi\rangle$ un autovector del operador $\mathbb{A}$ si se cumple que $\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$. Con λ (en general será un número complejo) es el autovalor del autovector $|\psi\rangle$
- **Ejemplo: Reflexión respecto al plano** $\boldsymbol{xy}$**.** Si $\mathbb{R} : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$ es tal que $\mathbb{R}\,|\psi\rangle = \left|\tilde{\psi}\right\rangle$, una reflexión en el plano xy. Esto es
$\mathbb{R}\,|\mathrm{i}\rangle = |\mathrm{i}\rangle\,; \quad \mathbb{R}\,|\mathrm{j}\rangle = |\mathrm{j}\rangle\,; \quad \mathbb{R}\,|\mathrm{k}\rangle = -\,|\mathrm{k}\rangle\,,$
$|\mathrm{i}\rangle\,, |\mathrm{j}\rangle\,, |\mathrm{k}\rangle$ vectores unitarios cartesianos. Entonces $\forall\,|\Psi\rangle_{xy}$ será autovector de $\mathbb{R}$ con un autovalor $\lambda = 1$, mientras que cualquier otro vector $|\Phi\rangle \in \mathbf{V}^3$, que no esté en el plano, cumple con $|\Phi\rangle = c\,|\mathrm{k}\rangle$ y también será autovector de $\mathbb{R}$ pero esta vez con un autovalor $\lambda = -1$.

- **Definición** $|\psi\rangle$ un autovector del operador $\mathbb{A}$ si se cumple que $\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$. Con λ (en general será un número complejo) es el autovalor del autovector $|\psi\rangle$
- **Ejemplo: Reflexión respecto al plano** xy**.** Si $\mathbb{R} : \mathbf{V}^3 \to \mathbf{V}^3$ es tal que $\mathbb{R}|\psi\rangle = \left|\tilde{\psi}\right\rangle$, una reflexión en el plano xy. Esto es
$\mathbb{R}|\mathrm{i}\rangle = |\mathrm{i}\rangle; \quad \mathbb{R}|\mathrm{j}\rangle = |\mathrm{j}\rangle; \quad \mathbb{R}|\mathrm{k}\rangle = -|\mathrm{k}\rangle$,
$|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle, |\mathrm{k}\rangle$ vectores unitarios cartesianos. Entonces $\forall |\Psi\rangle_{xy}$ será autovector de $\mathbb{R}$ con un autovalor $\lambda = 1$, mientras que cualquier otro vector $|\Phi\rangle \in \mathbf{V}^3$, que no esté en el plano, cumple con $|\Phi\rangle = c|\mathrm{k}\rangle$ y también será autovector de $\mathbb{R}$ pero esta vez con un autovalor $\lambda = -1$.
- **Ejemplo: Rotaciones reales.** Un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana: $|\mathrm{i}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y $|\mathrm{j}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces si
$\mathbb{R}|a\rangle = \lambda|a\rangle \Rightarrow$ el ángulo de rotación $\theta = n\pi$ con n entero:
$\lambda = 1 \Leftrightarrow \theta = 2n\pi$ y $\lambda = -1 \Leftrightarrow \theta = (2n-1)\pi$.

- **Ejemplo: Rotaciones "complejas".** Consideramos el plano complejo donde cualquier vector en su forma polar es $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$. Entonces: $\mathbb{R}\,|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.

- **Ejemplo: Rotaciones "complejas".** Consideramos el plano complejo donde cualquier vector en su forma polar es $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$. Entonces: $\mathbb{R}\,|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}\,|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.
- **Ejemplo: Proyectores.** Dado $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ y con una ecuación de autovalores, $P_\psi\,|\varphi\rangle = \lambda\ |\varphi\rangle$, para un $|\varphi\rangle$ arbitrario
  1. Si $|\psi\rangle$ es colineal con $|\varphi\rangle$, entonces $|\psi\rangle \propto |\varphi\rangle$ y consecuentemente $P_\psi\,|\varphi\rangle = P_\psi(\alpha\,|\psi\rangle) = (|\psi\rangle\langle\psi|)\,(\alpha\,|\psi\rangle) \ \Rightarrow \tilde{\lambda}\,|\psi\rangle$, con $\tilde{\lambda} = \alpha\,\langle\psi\,|\psi\rangle$
  2. Si ahora el $|\varphi\rangle$ es ortogonal a $|\psi\rangle\,, \langle\psi\,|\varphi\rangle = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 0$,

Entonces el espectro del operador $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es 0 y 1. El primero es degenerado y el segundo es simple.

- **Ejemplo: Rotaciones "complejas".** Consideramos el plano complejo donde cualquier vector en su forma polar es $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$. Entonces: $\mathbb{R}|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}|z\rangle$, si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.
- **Ejemplo: Proyectores.** Dado $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ y con una ecuación de autovalores, $P_\psi|\varphi\rangle = \lambda\ |\varphi\rangle$, para un $|\varphi\rangle$ arbitrario
  1. Si $|\psi\rangle$ es colineal con $|\varphi\rangle$, entonces $|\psi\rangle \propto |\varphi\rangle$ y consecuentemente $P_\psi|\varphi\rangle = P_\psi(\alpha|\psi\rangle) = (|\psi\rangle\langle\psi|)(\alpha|\psi\rangle) \Rightarrow \tilde{\lambda}|\psi\rangle$, con $\tilde{\lambda} = \alpha\langle\psi|\psi\rangle$
  2. Si ahora el $|\varphi\rangle$ es ortogonal a $|\psi\rangle, \langle\psi|\varphi\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0$,

  Entonces el espectro del operador $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es 0 y 1. El primero es degenerado y el segundo es simple.
- **Ejemplo: El operador diferenciación.** Consideremos el operador $\mathbb{D}|f\rangle \rightarrow D(f) = f'$. Los autovectores del operador diferenciación satisfacen la ecuación: $\mathbb{D}|f\rangle = \lambda|f\rangle \rightarrow D(f)(x) = f'(x) = \lambda f(x)$. La solución es una exponencial: $|f\rangle \rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, donde la $f(x)$ se denomina *autofunción* del operador.

- Autovalores, autovectores e independencia lineal
  $\{|\psi_1\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ autovectores de $\mathbb{A} : \mathbf{V}^m \rightarrow \mathbf{V}^n$. Si existen k autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$, **distintos** correspondientes a cada autovector $|\psi_j\rangle$, entonces los $\{|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_k\rangle\}$ **son linealmente independientes** y por lo tanto $\{|\psi_i\rangle\}$ es base

- Autovalores, autovectores e independencia lineal $\{|\psi_1\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ autovectores de $\mathbb{A} : \mathbf{V}^m \to \mathbf{V}^n$. Si existen k autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$, **distintos** correspondientes a cada autovector $|\psi_j\rangle$, entonces los $\{|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_k\rangle\}$ **son linealmente independientes** y por lo tanto $\{|\psi_i\rangle\}$ es base
- La representación matricial del operador $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^n$ en la base de autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ es diagonal:

$$\left\langle \psi^i \right| \mathbb{A} \left| \psi_j \right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right) .$$

(continuará...)

El polinomio característico 1/3

- La representación matricial de la ecuación de autovalores es diagonal si existe una base ortogonal:

$$\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle \Rightarrow \{\left|\mathrm{e}_i\right\rangle\}\left\langle \mathrm{e}^i\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{e}_j\right\rangle\left\langle \mathrm{e}^j \,\middle|\psi\right\rangle = \lambda\left\langle \mathrm{e}^i \,\middle|\psi\right\rangle \Rightarrow A^i_j\, c^j = \lambda c^i\,,$$

la base ortonormal, $\{\left|\mathrm{e}_i\right\rangle\}$, genera una representación diagonal de $\mathbb{A}$, y entonces $A^i_j \propto \delta^i_j$.

El polinomio característico 1/3

- La representación matricial de la ecuación de autovalores es diagonal si existe una base ortogonal:

$$\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle \Rightarrow \{\left|\mathrm{e}_i\right\rangle\}\left\langle \mathrm{e}^i\right|\mathbb{A}\left|\mathrm{e}_j\right\rangle\left\langle \mathrm{e}^j\ \right|\psi\rangle = \lambda\left\langle \mathrm{e}^i\ \right|\psi\rangle \Rightarrow A^i_j\ c^j = \lambda c^i\,,$$

  la base ortonormal, $\{\left|\mathrm{e}_i\right\rangle\}$, genera una representación diagonal de $\mathbb{A}$, y entonces $A^i_j \propto \delta^i_j$.
- Entonces $A^i_j\ c^j = \lambda c^i \Rightarrow \left(A^i_j - \lambda\delta^i_j\right) c^j = 0 \Rightarrow \det\left|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}\right| = 0$ Es la ecuación característica (o secular) y a partir de ella emergen los autovalores del operador $\mathbb{A}$:

$$\det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = \begin{vmatrix} A^1_1 - \lambda & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 - \lambda & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det\left|\left\langle \mathrm{e}^{i}\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{e}_{j}\right\rangle\right| = \det\left|\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^{l}\right| \mathbb{A}\left|\tilde{\mathrm{e}}_{m}\right\rangle\right|$.

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det\left|\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_j\rangle\right| = \det\left|\langle \tilde{\mathrm{e}}^l \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det \left| \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle \right| = \det \left| \langle \tilde{\mathrm{e}}^l | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_m \rangle \right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.
- Las raíces podrán ser: n reales y distintas, m reales, distintas y k iguales, con $m = n - k$ o algunas imaginarias

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det \left|\left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_j\right\rangle\right| = \det \left|\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^l \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_m\right\rangle\right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.
- Las raíces podrán ser: n reales y distintas, m reales, distintas y k iguales, con $m = n - k$ o algunas imaginarias
- Para el caso de n raíces reales y distintas. Los n autovalores distintos, estarán asociados a n autovectores también distintos.

$$P(\lambda) = \det \left|A^i_j - \lambda \delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det\left|\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_j\rangle\right| = \det\left|\langle \tilde{\mathrm{e}}^l \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.
- Las raíces podrán ser: n reales y distintas, m reales, distintas y k iguales, con $m = n - k$ o algunas imaginarias
- Para el caso de n raíces reales y distintas. Los n autovalores distintos, estarán asociados a n autovectores también distintos.

$$P(\lambda) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

- Un operador $\mathbb{A}$ con una representación matricial $n \times n$, con n autovalores distintos, asociados a n autovectores linealmente independientes generarán una representación matricial diagonal. $\langle \psi^i \right| \mathbb{A} \left|\psi_j\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.

El polinomio característico 3/3

- Si las raíces del polinomio característico presentan algún grado de multiplicidad, el polinomio característico podrá factorizarse como:

$$P(\lambda) = \det \left| A^i_j - \lambda \delta^i_j \right| = (\lambda - \lambda_1)^k (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m).$$

Existirán $m = n - k$ raíces simples asociadas con $m = n - k$ autovectores linealmente independientes

El polinomio característico 3/3

- Si las raíces del polinomio característico presentan algún grado de multiplicidad, el polinomio característico podrá factorizarse como:

$$P(\lambda) = \det \left| A^i_j - \lambda \delta^i_j \right| = (\lambda - \lambda_1)^k (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m).$$

  Existirán $m = n - k$ raíces simples asociadas con $m = n - k$ autovectores linealmente independientes

- El autovalor λ_1, con multiplicidad k podrá ser asociado con $1, 2, \cdots$ hasta k autovectores linealmente independientes.

El polinomio característico 3/3

- Si las raíces del polinomio característico presentan algún grado de multiplicidad, el polinomio característico podrá factorizarse como:

$$P(\lambda) = \det \left| A^i_j - \lambda \delta^i_j \right| = (\lambda - \lambda_1)^k (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m).$$

  Existirán $m = n - k$ raíces simples asociadas con $m = n - k$ autovectores linealmente independientes

- El autovalor λ_1, con multiplicidad k podrá ser asociado con $1, 2, \cdots$ hasta k autovectores linealmente independientes.
- El autovalor λ_1, estará asociado a un subespacio vectorial, denominado autoespacio $\mathbf{S}_{\lambda_1}$ tal que $\dim(\mathbf{S}_{\lambda_1}) \leq$ grado de multiplicidad del autovalor λ_1

Siempre se cumple que

$$\left.\begin{array}{ccc}\mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|\mathrm{u}_i\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right\rangle\right. \\ \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j\right| & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right\rangle\right. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right\rangle\right. .$$

- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, $(i \neq j)$ entonces los autovectores serán ortogonales, $\left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right\rangle\right. \propto \delta_i^j$.

Siempre se cumple que

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left|\mathrm{u}_i\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \\ \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j\right| & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle .$$

- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, $(i \neq j)$ entonces los autovectores serán ortogonales, $\left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \propto \delta_i^j$.
- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son los mismos, $(i = j)$ entonces los autovalores son reales: $\lambda_i = \lambda_i^*$.

Siempre se cumple que

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \; \left|\mathrm{u}_i\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \\ \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j\right| & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \,.$$

- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, $(i \neq j)$ entonces los autovectores serán ortogonales, $\left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \propto \delta_i^j$.
- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son los mismos, $(i = j)$ entonces los autovalores son reales: $\lambda_i = \lambda_i^*$.
- Si $\mathbb{A}$ es unitario, $\mathbb{A} \equiv \mathbb{U}$, se cumple que $\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^{-1}$ entonces

$$\mathbb{U}\left|\psi_j\right\rangle = \lambda_j \left|\psi_j\right\rangle \Rightarrow \left\langle \psi^j\right| \mathbb{U}^\dagger \mathbb{U}\left|\psi_j\right\rangle = 1 = \lambda_j^* \lambda_j \;\Rightarrow\; \lambda_j = e^{i\varphi_j}\,,$$

con φ_u una función real.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $\left|\psi\right\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $\left|\psi\right\rangle$.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $|\psi\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $|\psi\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $|\psi\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $|\psi\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle$ en la base de autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ es diagonal con los autovalores: $\left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $\left|\psi\right\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $\left|\psi\right\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle$ en la base de autovectores $\{\left|\psi_i\right\rangle\}$ es diagonal con los autovalores: $\left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.
4. Los autovalores (y después los autovectores) se calculan a mediante el polinomio característico $P\left(\lambda\right) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $\left|\psi\right\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $\left|\psi\right\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle$ en la base de autovectores $\{\left|\psi_i\right\rangle\}$ es diagonal con los autovalores: $\left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.
4. Los autovalores (y después los autovectores) se calculan a mediante el polinomio característico $P\left(\lambda\right) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n).$
5. Los autovalores pueden ser n simples o individuales $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $\left|\psi\right\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $\left|\psi\right\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle$ en la base de autovectores $\{\left|\psi_i\right\rangle\}$ es diagonal con los autovalores:
$\left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.
4. Los autovalores (y después los autovectores) se calculan a mediante el polinomio característico
$P\left(\lambda\right) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$.
5. Los autovalores pueden ser n simples o individuales
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$
6. Los autovalores pueden ser $m = n - k$ con al menos k-degeneraciones
$P\left(\lambda\right) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)^k(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m)$.

Ejercicios para la discusión

1. Si $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ son autovectores del operador lineal $\mathbb{A}$ con distintos autovalores λ_1 y λ_2, respectivamente. Muestre que $\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle$ $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$ no es un autovector de $\mathbb{A}$.
2. Considere las siguientes representaciones matriciales de operadores
$$\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \quad \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ y}$$
encuentre sus autovalores y autovectores
3. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados y un operador unitario definido como: $\mathbb{U} = \mathbb{A} + i\mathbb{B}$. Muestre que
   1. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan, $[\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$, los autovectores de $\mathbb{A}$ también lo son de $\mathbb{B}$.
   2. Si $\mathbb{U}\,|v_i\rangle = \mu_i\,|v_i\rangle$, entonces $|\mu_i| = 1$.