Fauna de Operadores Vectoriales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

12 de febrero de 2021

Agenda: Fauna de Operadores Vectoriales

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Derivada direccional de campos escalares

- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos "instantes de tiempo", para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto: $\frac{\mathrm{d}\phi(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$;

Derivada direccional de campos escalares

- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos "instantes de tiempo", para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto: $\frac{\mathrm{d}\phi(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$;
- Donde $\boldsymbol{\nabla}\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}$.

Derivada direccional de campos escalares

- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos "instantes de tiempo", para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto: $\frac{\mathrm{d}\phi(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$;
- Donde $\boldsymbol{\nabla}\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}$.
- Si el parámetro es la longitud de arco s, la derivada total de ϕ con respecto a s será $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i(s), s) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$. Donde $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado

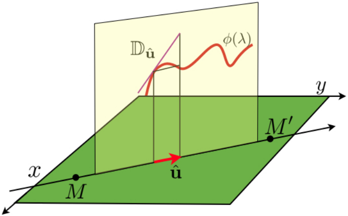
Derivada direccional de campos escalares

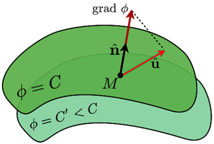
- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos "instantes de tiempo", para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:
$\frac{\mathrm{d}\phi(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$;
- Donde $\boldsymbol{\nabla}\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}$.
- Si el parámetro es la longitud de arco s, la derivada total de ϕ con respecto a s será $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i(s), s) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$. Donde $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado
- Dados dos puntos M y M' definiremos la derivada en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}} \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$ como:
$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi \equiv \text{lím}_{M' \to M} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{\left|\overrightarrow{M'M}\right|} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}$.

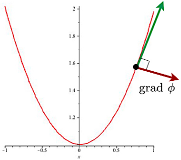
Derivada direccional de campos escalares

- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos "instantes de tiempo", para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto: $\frac{\mathrm{d}\phi(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi(x(t),y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$;
- Donde $\boldsymbol{\nabla}\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}$.
- Si el parámetro es la longitud de arco s, la derivada total de ϕ con respecto a s será $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i(s), s) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$. Donde $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado
- Dados dos puntos M y M' definiremos la derivada en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}} \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$ como: $\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi \equiv \lim_{M' \to M} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{\left|\overrightarrow{M'M}\right|} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}$.
- La derivada direccional indicará la tasa de cambio del campo escalar en la dirección que apuntemos. Es una generalización de la idea que surge de parametrizar la curva o de la derivada total respecto al tiempo.

Derivada direccional de campos escalares

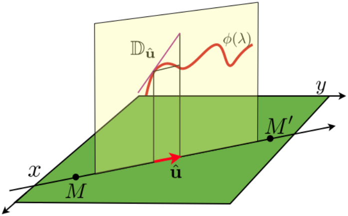


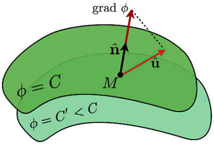


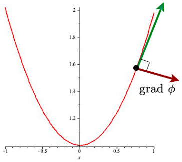


- La derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es $\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\boldsymbol{\nabla}\phi| \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\nabla}\phi, \hat{\mathbf{u}}}\right)$

Derivada direccional de campos escalares

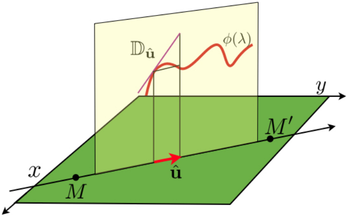


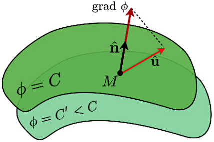


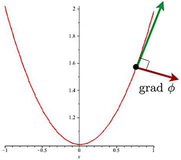


- La derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es $\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\boldsymbol{\nabla}\phi| \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\nabla}\phi, \hat{\mathbf{u}}}\right)$
- El gradiente es ortogonal a la superficie ¿por qué?. Entonces los vectores perpendiculares a él formarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.

Derivada direccional de campos escalares







- La derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es $\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\boldsymbol{\nabla}\phi| \cos\left(\widehat{\boldsymbol{\nabla}\phi, \hat{\mathbf{u}}}\right)$
- El gradiente es ortogonal a la superficie ¿por qué?. Entonces los vectores perpendiculares a él formarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.
- la derivada direccional es un escalar, por lo tanto, como $\hat{\mathbf{u}}$ es un vector, $\boldsymbol{\nabla}\phi(x, y)$ debe ser una 1−forma:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q^1}\left\langle \mathrm{e}^1\right| + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q^2}\left\langle \mathrm{e}^2\right| + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q^3}\left\langle \mathrm{e}^3\right| = \frac{\left\langle \mathrm{e}^i\right|}{h_{\tilde{i}}}\frac{\partial\phi}{\partial q^i} = \frac{\left\langle \mathrm{e}^i\right|}{h_{\tilde{i}}}\partial_i\phi \,.$$

Divergencia

- Si grad $\phi = (\frac{\langle \mathrm{e}_1|}{h_1}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{h_2}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{h_3}\frac{\partial}{\partial q^3})\phi$, podemos construir un funcional lineal $\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}$, con: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.

- Si $\operatorname{grad}\phi = \left(\frac{\langle e_1|}{h_1}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2|}{h_2}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3|}{h_3}\frac{\partial}{\partial q^3}\right)\phi$, podemos construir un funcional lineal $\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\langle e_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}$, con: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.
- El “producto interno entre una 1-forma, $\boldsymbol{\nabla}$ y un vector $\mathbf{a}$” de la forma

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle e_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}\right]\cdot\left[a^1\,|e_1\rangle + a^2\,|e_2\rangle + a^2\,|e_3\rangle\right] \\
&= \frac{\langle e_1|}{\mathcal{H}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|e_1\rangle + a^2\,|e_2\rangle + a^2\,|e_3\rangle\right]}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2|}{\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|e_1\rangle + a^2\,|e_2\rangle + a^2\,|e_3\rangle\right]}{\partial q^2} \\
&+ \frac{\langle e_3|}{\mathcal{G}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|e_1\rangle + a^2\,|e_2\rangle + a^2\,|e_3\rangle\right]}{\partial q^3}\,.
\end{aligned}
$$

Divergencia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Si grad $\phi = (\frac{\langle \mathrm{e}_1|}{h_1}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{h_2}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{h_3}\frac{\partial}{\partial q^3})\phi$, podemos construir un funcional lineal $\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}$, con: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.
- El "producto interno entre una 1-forma, $\boldsymbol{\nabla}$ y un vector $\mathbf{a}$" de la forma

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}\right]\cdot\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right] \\
&= \frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right]}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right]}{\partial q^2} \\
&+ \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right]}{\partial q^3}\,.
\end{aligned}
$$

- La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales div $\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(a^1(q^i)h_2h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(a^2(q^i)h_3h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial(a^3(q^i)h_1h_2)}{\partial q^3}\right]$.

- Si grad $\phi = (\frac{\langle \mathrm{e}_1|}{h_1}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{h_2}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{h_3}\frac{\partial}{\partial q^3})\phi$, podemos construir un funcional lineal $\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}$, con: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.
- El "producto interno entre una 1-forma, $\boldsymbol{\nabla}$ y un vector **a**" de la forma

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}\right]\cdot\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right] \\
&= \frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right]}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right]}{\partial q^2} \\
&+ \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\,|\mathrm{e}_1\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_2\rangle + a^2\,|\mathrm{e}_3\rangle\right]}{\partial q^3}\,.
\end{aligned}$$

- La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales
  $\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(a^1(q^i)h_2h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(a^2(q^i)h_3h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial(a^3(q^i)h_1h_2)}{\partial q^3}\right]$.
- Si consideremos el caso de coordenadas cartesianas: $\left\{q^i\right\} \to (x, y, z)$, donde la base $\{|\mathrm{e}_i\rangle\} \to \{|\mathrm{e}_x\rangle, |\mathrm{e}_y\rangle, |\mathrm{e}_z\rangle\}$ es constante, entonces
  $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial a^i(x^j)}{\partial x^i} \equiv \partial_i a^i(x^j) = \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}$.

Divergencia y flujo de un campo verctorial

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas div $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S$.

  Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div}\,\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \text{lím}_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \text{lím}_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a}\cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S$.

  Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

  $\mathrm{d}F = \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z-}$.

Divergencia y flujo de un campo verctorial

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas div $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S$.

  Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

  $\mathrm{d}F = \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z-}$.

- con lo cual $\mathrm{d}F = a_x(x + \mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - a_x(x, y, z)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + a_y(x, y + \mathrm{d}y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - a_y(x, y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z$

  $+ a_z(x, y, z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - a_z(x, y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div}\ \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \ \mathrm{d}S$.

  Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

  $\mathrm{d}F = \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z-}$.

- con lo cual $\mathrm{d}F = a_x(x + \mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - a_x(x, y, z)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + a_y(x, y + \mathrm{d}y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - a_y(x, y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z$

  $+a_z(x, y, z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - a_z(x, y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

- entonces $\mathrm{d}F = [a_x(x + \mathrm{d}x, y, z) - a_x(x, y, z)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [a_y(x, y + \mathrm{d}y, z) - a_y(x, y, z)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z +$

  $[a_z(x, y, z + \mathrm{d}z) - a_z(x, y, z)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas div $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S$.

  Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

  $\mathrm{d}F = \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z-}$.

- con lo cual $\mathrm{d}F = a_x(x + \mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - a_x(x, y, z)\mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + a_y(x, y + \mathrm{d}y, z)\mathrm{d}x \, \mathrm{d}z - a_y(x, y, z)\mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$

  $+a_z(x, y, z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - a_z(x, y, z)\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

- entonces $\mathrm{d}F = [a_x(x + \mathrm{d}x, y, z) - a_x(x, y, z)] \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[a_y(x, y + \mathrm{d}y, z) - a_y(x, y, z)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}z +$

  $[a_z(x, y, z + \mathrm{d}z) - a_z(x, y, z)] \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

- Desarrollando por Taylor las componentes tendremos

  $a_x(x + \mathrm{d}x, y, z) \approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x$; $a_y(x, y + \mathrm{d}y, z) \approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y$;

  $a_z(x, y, z + \mathrm{d}z) \approx a_z(x, y, z) + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z$.

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas div $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S$.

  Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

  $\mathrm{d}F = \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{z-}$.

- con lo cual $\mathrm{d}F = a_x(x+\mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - a_x(x, y, z)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + a_y(x, y+\mathrm{d}y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - a_y(x, y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z$

  $+a_z(x, y, z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - a_z(x, y, z)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

- entonces $\mathrm{d}F = [a_x(x+\mathrm{d}x, y, z) - a_x(x, y, z)]\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[a_y(x, y+\mathrm{d}y, z) - a_y(x, y, z)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}z +$

  $[a_z(x, y, z+\mathrm{d}z) - a_z(x, y, z)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

- Desarrollando por Taylor las componentes tendremos

  $a_x(x+\mathrm{d}x, y, z) \approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x$; $\quad a_y(x, y+\mathrm{d}y, z) \approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y$;

  $a_z(x, y, z+\mathrm{d}z) \approx a_z(x, y, z) + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z$.

- Para obtener $\mathrm{d}F = \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, y finalmente

  $F = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}V \equiv \iiint_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a})\mathrm{d}V$.

  El Teorema de la Divergencia.

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk}\partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x^j}\mathbf{i}_i = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2)\,\mathbf{i}_1 + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3)\,\mathbf{i}_2 + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)\,\mathbf{i}_3$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right)\mathbf{i} + \left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right)\mathbf{j} + \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right)\mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como
  $$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \mathbf{i}_i = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \mathbf{i}_1 + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \mathbf{i}_2 + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \mathbf{i}_3$$
  $$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right) \mathbf{i} + \left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right) \mathbf{j} + \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} .$$
- El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial.

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=\varepsilon^{ijk}\partial_j a_k\mathbf{i}_i\equiv\varepsilon^{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x^j}\mathbf{i}_i=(\partial_2 a_3-\partial_3 a_2)\,\mathbf{i}_1+(\partial_3 a_1-\partial_1 a_3)\,\mathbf{i}_2+(\partial_1 a_2-\partial_2 a_1)\,\mathbf{i}_3$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=\left(\partial_y a_z-\partial_z a_y\right)\mathbf{i}+\left(\partial_z a_x-\partial_x a_z\right)\mathbf{j}+\left(\partial_x a_y-\partial_y a_x\right)\mathbf{k}\equiv\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}.$$

- El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial.

- Para un sistema de coordenadas ortogonales generalizado tendremos:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=\frac{|\mathrm{e}_1\rangle}{h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(h_3a^3\right)}{\partial q^2}-\frac{\partial\left(h_2a^2\right)}{\partial q^3}\right]+\frac{|\mathrm{e}_2\rangle}{h_1h_3}\left[\frac{\partial\left(h_1a^1\right)}{\partial q^3}-\frac{\partial\left(h_3a^3\right)}{\partial q^1}\right]+\frac{|\mathrm{e}_3\rangle}{h_1h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2a^2\right)}{\partial q^1}-\frac{\partial\left(h_1a^1\right)}{\partial q^2}\right].$$

- Como siempre la tríada de vectores base $\left\{|\mathrm{e}_j\rangle=\frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\}$ y los factores de escala $h_i=\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^i}\right\|$

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\nabla \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \mathbf{i}_i = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2)\, \mathbf{i}_1 + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3)\, \mathbf{i}_2 + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)\, \mathbf{i}_3$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right) \mathbf{i} + \left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right) \mathbf{j} + \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} .$$

- El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial.

- Para un sistema de coordenadas ortogonales generalizado tendremos:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{|\mathrm{e}_1\rangle}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial \left(h_3 a^3\right)}{\partial q^2} - \frac{\partial \left(h_2 a^2\right)}{\partial q^3} \right] + \frac{|\mathrm{e}_2\rangle}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial \left(h_1 a^1\right)}{\partial q^3} - \frac{\partial \left(h_3 a^3\right)}{\partial q^1} \right] + \frac{|\mathrm{e}_3\rangle}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial \left(h_2 a^2\right)}{\partial q^1} - \frac{\partial \left(h_1 a^1\right)}{\partial q^2} \right] .$$

- Como siempre la tríada de vectores base $\left\{ |\mathrm{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\}$ y los factores de escala $h_i = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \right\|$

- **Líneas de Torbellino** Si $\mathrm{d}\mathbf{r} \propto \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ determina las líneas (de *torbellino*) perpendiculares al campo $\mathbf{a}\,(x, y, z)$.

$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right) \mathbf{i} + \left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right) \mathbf{j} + \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right) \mathbf{k}$, tendremos que

$$\frac{\mathrm{d}x}{b_x(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}y}{b_y(x,y.z)} = \frac{\mathrm{d}z}{b_z(x,y.z)} = \mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}x}{(\partial_y a_z - \partial_z a_y)} = \frac{\mathrm{d}y}{(\partial_z a_x - \partial_x a_z)} = \frac{\mathrm{d}z}{(\partial_x a_y - \partial_y a_x)} ,$$

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=\varepsilon^{ijk}\partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x^j}\mathbf{i}_i=(\partial_2 a_3-\partial_3 a_2)\,\mathbf{i}_1+(\partial_3 a_1-\partial_1 a_3)\,\mathbf{i}_2+(\partial_1 a_2-\partial_2 a_1)\,\mathbf{i}_3$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=\left(\partial_y a_z-\partial_z a_y\right)\mathbf{i}+\left(\partial_z a_x-\partial_x a_z\right)\mathbf{j}+\left(\partial_x a_y-\partial_y a_x\right)\mathbf{k}\equiv\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}.$$
- El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial.
- Para un sistema de coordenadas ortogonales generalizado tendremos:
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=\frac{|\mathrm{e}_1\rangle}{h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(h_3a^3\right)}{\partial q^2}-\frac{\partial\left(h_2a^2\right)}{\partial q^3}\right]+\frac{|\mathrm{e}_2\rangle}{h_1h_3}\left[\frac{\partial\left(h_1a^1\right)}{\partial q^3}-\frac{\partial\left(h_3a^3\right)}{\partial q^1}\right]+\frac{|\mathrm{e}_3\rangle}{h_1h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2a^2\right)}{\partial q^1}-\frac{\partial\left(h_1a^1\right)}{\partial q^2}\right].$$
- Como siempre la tríada de vectores base $\left\{|\mathrm{e}_j\rangle=\frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\}$ y los factores de escala $h_i=\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^i}\right\|$
- **Líneas de Torbellino** Si $\mathrm{d}\mathbf{r}\propto\mathbf{b}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}$ determina las líneas (de *torbellino*) perpendiculares al campo $\mathbf{a}(x,y,z)$.
$$\mathbf{b}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\left(\partial_y a_z-\partial_z a_y\right)\mathbf{i}+\left(\partial_z a_x-\partial_x a_z\right)\mathbf{j}+\left(\partial_x a_y-\partial_y a_x\right)\mathbf{k}\,,$$ tendremos que
$$\frac{\mathrm{d}x}{b_x(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{b_y(x,y.z)}=\frac{\mathrm{d}z}{b_z(x,y.z)}=\mathrm{d}\lambda=\frac{\mathrm{d}x}{(\partial_y a_z-\partial_z a_y)}=\frac{\mathrm{d}y}{(\partial_z a_x-\partial_x a_z)}=\frac{\mathrm{d}z}{(\partial_x a_y-\partial_y a_x)}\,,$$
- **Superficies ortogonales a líneas de campo** Supongamos una función $\varphi=\varphi(x,y,z)$. Por lo tanto:

$\boldsymbol{\nabla}\varphi\propto\mathbf{a}\propto\mathrm{d}\mathbf{r}\quad\Rightarrow\boldsymbol{\nabla}\times[\varphi\mathbf{a}]=\boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{a}+\varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=0$. Proyectando sobre el vector $\mathbf{a}$ nos queda

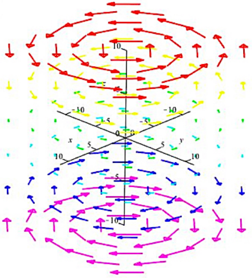
$\mathbf{a}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{a}]+\mathbf{a}\cdot[\varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}]=0$. la condición necesaria y suficiente para que las líneas de flujo de un campo vectorial

$\mathbf{a}(x,y,z)$ sean perpendiculares a un conjunto de superficies $\varphi=\varphi(x,y,z)$ serán cualquiera de éstas condiciones

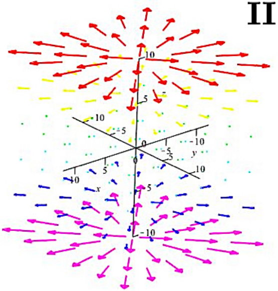
$\mathbf{a}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{a}]=0\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{a}\cdot[\varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}]=0$.

Rotacionales, líneas de torbellino y superficies ortogonales

I

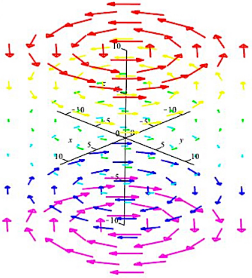


II

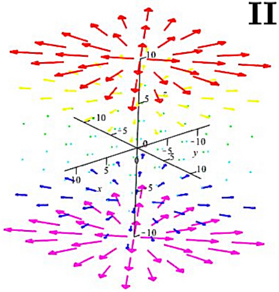


- La idea de circulación se puede generalizar para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r, en el plano xy, será $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}\right] \cdot [-r\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}]\, \mathrm{d}\varphi$.

I



II



- La idea de circulación se puede generalizar para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x,y,z)\mathbf{i} + a_y(x,y,z)\mathbf{j} + a_z(x,y,z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r, en el plano xy, será $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[a_x(x,y,z)\mathbf{i} + a_y(x,y,z)\mathbf{j} + a_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot \left[-r\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}\right] \mathrm{d}\varphi$.
- en general podremos expresar la relación entre circulación y rotacional como $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S$. Esta relación constituye el Teorema de Stokes.

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r, en el plano xy, será

  $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}\right] \cdot [-r\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}]\, \mathrm{d}\varphi$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x,y,z)\mathbf{i}+a_y(x,y,z)\mathbf{j}+a_z(x,y,z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r, en el plano xy, será
$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[a_x(x,y,z)\mathbf{i}+a_y(x,y,z)\mathbf{j}+a_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\cdot\left[-r\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}\right]\mathrm{d}\varphi .$
- Suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en al plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$:
$$a_x\,(x,y,0) = \left. a_x\right|_{r=0} + x\left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + y\left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots = \left. a_x\right|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots$$
$$a_y\,(x,y,0) = \left. a_y\right|_{r=0} + x\left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + y\left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots = \left. a_y\right|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots$$
- La integral de línea nos queda como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -\left[\left. a_x\right|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0}\right] r\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi +$$
$$+\int_0^{2\pi}\left[\left. a_y\right|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0}\right] r\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\,,$$

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r, en el plano xy, será
$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}\right] \cdot \left[-r\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}\right] \mathrm{d}\varphi$.
- Suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en al plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$:

$$a_x\,(x, y, 0) = \left. a_x\right|_{r=0} + x \left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + y \left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots = \left. a_x\right|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi) \left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots$$

$$a_y\,(x, y, 0) = \left. a_y\right|_{r=0} + x \left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + y \left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots = \left. a_y\right|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi) \left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots$$

- La integral de línea nos queda como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} - \left[\left. a_x\right|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi) \left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0}\right] r\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \left[\left. a_y\right|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi) \left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0}\right] r\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\,,$$

- Con los cual $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \pi r^2 \left\{ \left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} - \left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0} \right\} + O\left(r^3\right)$.

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x,y,z)\mathbf{i}+a_y(x,y,z)\mathbf{j}+a_z(x,y,z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r, en el plano xy, será
$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[a_x(x,y,z)\mathbf{i}+a_y(x,y,z)\mathbf{j}+a_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\cdot\left[-r\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}\right]\mathrm{d}\varphi$.
- Suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en al plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$:

$$a_x\,(x,y,0) = a_x|_{r=0} + x\left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + y\left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots = a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots$$

$$a_y\,(x,y,0) = a_y|_{r=0} + x\left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + y\left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots = a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0} + \cdots$$

- La integral de línea nos queda como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -\left[a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0}\right] r\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi +$$

$$+\int_0^{2\pi}\left[a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\left.\frac{\partial a_y}{\partial y}\right|_{r=0}\right] r\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\,,$$

- Con los cual $\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \pi r^2\left\{\left.\frac{\partial a_y}{\partial x}\right|_{r=0} - \left.\frac{\partial a_x}{\partial y}\right|_{r=0}\right\} + O\left(r^3\right)$.
- y en general, haciendo $\lim_{r\to 0}\frac{\Gamma}{\pi r^2}$, podremos expresar la relación entre circulación y rotacional como
$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S$. Esta relación constituye el Teorema de Stokes.

Formulario del operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$

- El operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$, actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, **a** y **b** dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\varphi + \chi\psi) &= \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla}(\chi\psi) = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \psi\boldsymbol{\nabla}\chi + \chi\boldsymbol{\nabla}\psi \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} + \varphi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{b} \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\mathbf{b}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{b} + \varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}\,,
\end{aligned}
$$

Formulario del operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$

- El operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$, actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, **a** y **b** dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\varphi + \chi\psi) &= \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla}(\chi\psi) = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \psi\boldsymbol{\nabla}\chi + \chi\boldsymbol{\nabla}\psi \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} + \varphi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{b} \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\mathbf{b}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{b} + \varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}\,,
\end{aligned}$$

- Si consideramos las cantidades $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ tendremos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \left[\partial^i\left(a^j b_j\right)\right]\mathbf{e}_i = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \partial^i\left(\varepsilon_{ijk}\,a^j b^k\right) = \left(\varepsilon_{ijk}\partial^i a^j\right)b^k + \left(\varepsilon_{ijk}\partial^i b^k\right)a^j = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}) \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} - \mathbf{b}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Formulario del operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$

- El operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$, actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\varphi+\chi\psi) &= \boldsymbol{\nabla}\varphi+\boldsymbol{\nabla}(\chi\psi)=\boldsymbol{\nabla}\varphi+\psi\boldsymbol{\nabla}\chi+\chi\boldsymbol{\nabla}\psi \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}+\varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}+\varphi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b}+\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{b} \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}+\varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}+\boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\mathbf{b})=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}+\boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{b}+\varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}\,,
\end{aligned}$$

- Si consideramos las cantidades $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ tendremos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \left[\partial^i\left(a^j b_j\right)\right]\mathbf{e}_i=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \partial^i\left(\varepsilon_{ijk}\,a^j b^k\right)=\left(\varepsilon_{ijk}\partial^i a^j\right)b^k+\left(\varepsilon_{ijk}\partial^i b^k\right)a^j=(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}) \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a}-\mathbf{b}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b}
\end{aligned}$$

- Si consideramos funciones compuestas $\psi=\psi(\chi(\mathbf{r}))$ y $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))$, tendremos

$$\boldsymbol{\nabla}\psi(\chi(\mathbf{r}))=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\chi}\boldsymbol{\nabla}\chi;\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))=\boldsymbol{\nabla}\chi\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi};\quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))=(\boldsymbol{\nabla}\chi)\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}.$$

Formulario del operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$, actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\varphi+\chi\psi) &= \boldsymbol{\nabla}\varphi+\boldsymbol{\nabla}(\chi\psi)=\boldsymbol{\nabla}\varphi+\psi\boldsymbol{\nabla}\chi+\chi\boldsymbol{\nabla}\psi\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}+\varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}+\varphi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b}+\boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{b}\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}+\varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}+\boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\mathbf{b})=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}+\boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{b}+\varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}\,,
\end{aligned}$$

- Si consideramos las cantidades $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ tendremos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \left[\partial^i\left(a^j b_j\right)\right]\mathbf{e}_i=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \partial^i\left(\varepsilon_{ijk}\,a^j b^k\right)=\left(\varepsilon_{ijk}\partial^i a^j\right)b^k+\left(\varepsilon_{ijk}\partial^i b^k\right)a^j=(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b})\\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a}-\mathbf{b}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b}
\end{aligned}$$

- Si consideramos funciones compuestas $\psi=\psi(\chi(\mathbf{r}))$ y $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))$, tendremos

$$\boldsymbol{\nabla}\psi(\chi(\mathbf{r}))=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\chi}\boldsymbol{\nabla}\chi;\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))=\boldsymbol{\nabla}\chi\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi};\quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))=(\boldsymbol{\nabla}\chi)\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}.$$

- La demostración para $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))=\boldsymbol{\nabla}\chi\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}$, es simpática. Utilizamos la estrategia de Taylor y expandimos el campo vectorial alrededor de $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{r}_0)+\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}(\chi(\mathbf{r})-\chi(\mathbf{r}_0))+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^2}\right|_M(\chi(\mathbf{r})-\chi(\mathbf{r}_0))^2+\cdots$.
Aplicando la divergencia a ambos miembros queda como
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\boldsymbol{\nabla}\cdot[\mathbf{a}(\mathbf{r}_0)]+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}(\chi(\mathbf{r})-\chi(\mathbf{r}_0))\right]+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^2}\right|_M(\chi(\mathbf{r})-\chi(\mathbf{r}_0))^2\right]+\cdots$ con lo cual
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi(\mathbf{r})+(\chi(\mathbf{r})-\chi(\mathbf{r}_0))\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^2}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi(\mathbf{r})+\frac{1}{2}(\chi(\mathbf{r})-\chi(\mathbf{r}_0))^2\left.\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^3}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi(\mathbf{r})+\cdots$
Esta relación vale siempre, en particular para $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$: $\left.\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}\right|_{\mathbf{r}_0}=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi(\mathbf{r}_0)\quad\Rightarrow\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi(\mathbf{r})$

- **Consideremos un campo escalar** $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi$.

Laplaciano: campos escalares y vectoriales

- **Consideremos un campo escalar** $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi = \boldsymbol{\nabla}^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta \left(\phi + C\psi\right) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta \left(\phi\psi\right) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden

Laplaciano: campos escalares y vectoriales

- **Consideremos un campo escalar** $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi$.

- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta\left(\phi + C\psi\right) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta\left(\phi\psi\right) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden

- **Consideremos un campo vectorial a** $= \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta\ \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\right) - \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\right)$. En coordenadas cartesianas es

$$\Delta\ \mathbf{a} = \left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right) - \left(\partial^i\partial_j a^j - \partial_j\partial^j a^i\right)\right]\mathbf{i}_i \quad \Longrightarrow \quad \Delta\mathbf{a} = \left(\partial_j\partial^j a^i\right)\mathbf{i}_i \equiv \left(\Delta a^i\right)\mathbf{i}_i \ .$$

Laplaciano: campos escalares y vectoriales

- **Consideremos un campo escalar** $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta\left(\phi + C\psi\right) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta\left(\phi\psi\right) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden
- **Consideremos un campo vectorial a** $= \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta\ \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\right) - \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\right)$. En coordenadas cartesianas es $\Delta\ \mathbf{a} = \left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right) - \left(\partial^i\partial_j a^j - \partial_j\partial^j a^i\right)\right]\mathbf{i}_i \quad \Longrightarrow \quad \Delta\mathbf{a} = \left(\partial_j\partial^j a^i\right)\mathbf{i}_i \equiv \left(\Delta a^i\right)\mathbf{i}_i$.
- El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir $\Delta\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\Delta\phi\right); \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\Delta\mathbf{a}\right) = \Delta\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\right); \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \left(\Delta\ \mathbf{a}\right) = \Delta\left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\right)$.

Laplaciano: campos escalares y vectoriales

- **Consideremos un campo escalar** $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta\left(\phi + C\psi\right) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta\left(\phi\psi\right) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden
- **Consideremos un campo vectorial a** $= \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta\ \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\right) - \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\right)$. En coordenadas cartesianas es
  $$\Delta\ \mathbf{a} = \left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right) - \left(\partial^i\partial_j a^j - \partial_j\partial^j a^i\right)\right]\mathbf{i}_i \quad \Longrightarrow \quad \Delta\mathbf{a} = \left(\partial_j\partial^j a^i\right)\mathbf{i}_i \equiv \left(\Delta a^i\right)\mathbf{i}_i \,.$$
- El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir
  $$\Delta\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\Delta\phi\right); \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\Delta\mathbf{a}\right) = \Delta\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\right); \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \left(\Delta\ \mathbf{a}\right) = \Delta\left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\right) \,.$$
- Un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ de denomina un campo laplaciano si es irrotacional: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = 0$ y solenoidal: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} = 0$. en todo punto del campo.

Laplaciano: campos escalares y vectoriales

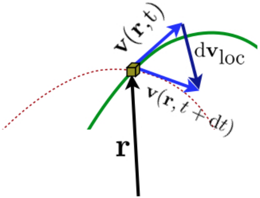
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

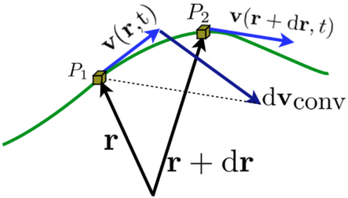
- **Consideremos un campo escalar** $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \equiv \boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta\left(\phi + C\psi\right) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta\left(\phi\psi\right) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\boldsymbol{\nabla}\psi \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden
- **Consideremos un campo vectorial** $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta\ \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\right) - \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\right)$. En coordenadas cartesianas es
  $\Delta\ \mathbf{a} = \left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right) - \left(\partial^i\partial_j a^j - \partial_j\partial^j a^i\right)\right]\mathbf{i}_i \quad \Longrightarrow \quad \Delta\mathbf{a} = \left(\partial_j\partial^j a^i\right)\mathbf{i}_i \equiv \left(\Delta a^i\right)\mathbf{i}_i$.
- El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir
  $\Delta\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\Delta\phi\right); \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\Delta\mathbf{a}\right) = \Delta\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}\right); \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \left(\Delta\ \mathbf{a}\right) = \Delta\left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}\right)$.
- Un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ de denomina un campo laplaciano si es irrotacional: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = 0$ y solenoidal: $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} = 0$. en todo punto del campo.
- Un campo laplaciano es un potencial, es decir: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\phi$, y queda completamente determinado por el potencial escalar que satisface la ecuación de Laplace $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\Delta}\phi = 0$.

Derivadas direccionales de campos vectoriales

- Inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}$, esto es $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathbf{u} = u^i \partial_i \varphi \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} a^i = u^j \partial_j a^i$
$\Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle} |a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}(\circ) \equiv \frac{\mathrm{d}(\circ)}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})(\circ) \equiv u^i \partial_i (\circ)$.

- Inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}$, esto es $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\phi = \nabla\phi\cdot\mathbf{u} = u^i\partial_i\varphi \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u} = \mathbf{u}\cdot\nabla a^i = u^j\partial_j a^i$ $\Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,|a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,(\circ) \equiv \frac{\mathrm{d}(\circ)}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,(\circ) \equiv u^i\partial_i\,(\circ)$.
- **Ejemplo: El campo de aceleraciones de un fluido.** $\lim_{M'\to M}\frac{\mathbf{v}\left(M'\right)-\mathbf{v}(M)}{M'-M} \equiv \lim_{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r},t)-\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r},t+\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}$ $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$, y en coordenadas cartesianas: $a^i = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\nabla\right)v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}$, con $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$

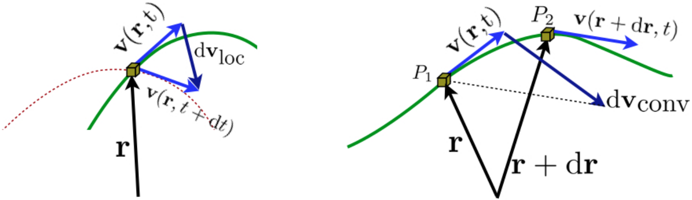




- Este cambio en el campo vectorial proviene de dos contribuciones. Una, local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad, **v**, en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).

Derivadas direccionales de campos vectoriales

- Inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}$, esto es $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{u} = u^i\partial_i\varphi \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u} = \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}a^i = u^j\partial_j a^i$ $\Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,|a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,(\circ) \equiv \frac{\mathrm{d}(\circ)}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,(\circ) \equiv u^i\partial_i\,(\circ)$.
- **Ejemplo: El campo de aceleraciones de un fluido.** $\lim_{M'\to M}\frac{\mathbf{v}\left(M'\right)-\mathbf{v}(M)}{M'-M} \equiv \lim_{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r},t)-\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r},t+\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}$ $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$, y en coordenadas cartesianas: $a^i = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}$, con $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$



- Este cambio en el campo vectorial proviene de dos contribuciones. Una, local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad, $\mathbf{v}$, en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).
- La contribución local proviene de la variación del vector (por la dependencia temporal) alrededor del punto, sin importar la dirección que sigue al partícula y la contribución convectiva proviene de la inhomogeneidad del campo de velocidades

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir

$$|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$$

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir

  $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$

- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir

  $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$

- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$

- es decir: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$.

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir
$|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- es decir: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$.
- Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden. La derivada covariante de un vector covariante es $A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$, y la derivada covariante de un vector contravariante es $A^i{}_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$.

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir
  $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,,$ y $\left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- es decir: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}\,.$
- Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden. La derivada covariante de un vector covariante es $A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$, y la derivada covariante de un vector contravariante es $A^i{}_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$.
- Entonces $A_{i;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$ y, equivalentemente $A^i{}_{;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)$, y $\left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- es decir: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$.
- Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden. La derivada covariante de un vector covariante es $A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$, y la derivada covariante de un vector contravariante es $A^i{}_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$.
- Entonces $A_{i;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$ y, equivalentemente $A^i{}_{;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$
- Las cantidades vectoriales $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores base $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)^i \mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)\mathbf{e}_i \equiv \Gamma^i_{jk}\mathbf{e}_i$ donde hemos introducido la siguiente notación: $\Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ y de manera equivalente: $\Gamma^j_{ik} = \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k}$. Estas cantidades se denominan *Símbolos de Christoffel del segundo tipo*

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i\mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i\mathrm{d}A_i + A_i\mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i\mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i\mathrm{d}A^i + A^i\mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- es decir: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k\frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$.
- Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden. La derivada covariante de un vector covariante es $A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$, y la derivada covariante de un vector contravariante es $A^i{}_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$.
- Entonces $A_{i;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\cdot\mathbf{e}_i = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} + A_k\frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j}\otimes\mathbf{e}_i$ y, equivalentemente $A^i{}_{;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\otimes\mathbf{e}^i = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^k\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}\otimes\mathbf{e}^i$
- Las cantidades vectoriales $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores base $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)^i\mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}^i\otimes\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)\mathbf{e}_i \equiv \Gamma^i_{jk}\mathbf{e}_i$ donde hemos introducido la siguiente notación: $\Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^i\otimes\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ y de manera equivalente: $\Gamma^j_{ik} = \mathbf{e}_i\otimes\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k}$. Estas cantidades se denominan *Símbolos de Christoffel del segundo tipo*

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir
  $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)$, y $\left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- es decir: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$.
- Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden. La derivada covariante de un vector covariante es $A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$, y la derivada covariante de un vector contravariante es $A^i{}_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$.
- Entonces $A_{i;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$ y, equivalentemente $A^i{}_{;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$
- Las cantidades vectoriales $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores base $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)^i \mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)\mathbf{e}_i \equiv \Gamma^i_{jk}\mathbf{e}_i$ donde hemos introducido la siguiente notación: $\Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ y de manera equivalente: $\Gamma^j_{ik} = \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k}$. Estas cantidades se denominan *Símbolos de Christoffel del segundo tipo*
- Por lo tanto, $A_{i;j} = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \Gamma^k_{ji}A_k = \partial_j A_i - \Gamma^k_{ji}A_k$ y $A^i{}_{;j} = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + \Gamma^i_{jk}A^k = \partial_j A^i + \Gamma^i_{jk}A^k$.

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir
  $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,,\quad$ y $\quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- Entonces el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ es para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- es decir: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$.
- Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden. La derivada covariante de un vector covariante es $A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$, y la derivada covariante de un vector contravariante es $A^i{}_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$.
- Entonces $A_{i;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$ y, equivalentemente $A^i{}_{;j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$
- Las cantidades vectoriales $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores base
  $\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)^i \mathbf{e}_i = \left(\mathbf{e}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)\mathbf{e}_i \equiv \Gamma^i_{jk}\mathbf{e}_i$ donde hemos introducido la siguiente notación: $\Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k}$ y de manera equivalente: $\Gamma^j_{ik} = \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k}$. Estas cantidades se denominan *Símbolos de Christoffel del segundo tipo*
- Por lo tanto, $A_{i;j} = \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \Gamma^k_{ji}A_k = \partial_j A_i - \Gamma^k_{ji}A_k$ y $A^i{}_{;j} = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} + \Gamma^i_{jk}A^k = \partial_j A^i + \Gamma^i_{jk}A^k$.
- La derivada covariante de un campo vectorial toma en cuenta el cambio en el campo mismo, a medida que nos movemos a lo largo de las curvas coordenadas, y también da cuenta de como cambian las bases.

Recapitulando

- LZZZZZZ