

Fauna de Operadores Vectoriales, ∇

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



10 de febrero de 2021

- 1 Derivada direccional de campos escalares
- 2 Divergencia
- 3 Divergencia y flujo de un campo vectorial
- 4 Rotacionales, líneas de torbellino y superficies ortogonales
- 5 Circulación de un campo vectorial
- 6 Formulario del operador ∇
- 7 Laplaciano: campos escalares y vectoriales
- 8 Recapitulando

- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo”, para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:
$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial \phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial \phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} ;$$

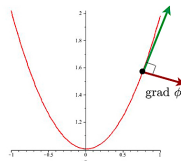
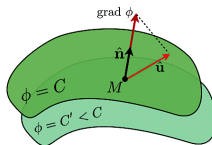
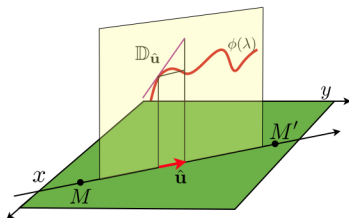
- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo”, para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:
$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt};$$
- Donde $\nabla\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$.

- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo”, para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:
$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt};$$
- Donde $\nabla\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$.
- Si el parámetro es la longitud de arco s , la derivada total de ϕ con respecto a s será $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi(x^i(s), s) \cdot \hat{\tau}$. Donde $\hat{\tau}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado

- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo”, para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:
$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt};$$
- Donde $\nabla\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$.
- Si el parámetro es la longitud de arco s , la derivada total de ϕ con respecto a s será $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi(x^i(s), s) \cdot \hat{\tau}$. Donde $\hat{\tau}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado
- Dados dos puntos M y M' definiremos la derivada en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}} \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$ como:
$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi \equiv \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{|\overrightarrow{M'M}|} = \frac{d\phi}{d\lambda} = \nabla\phi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

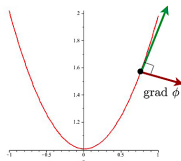
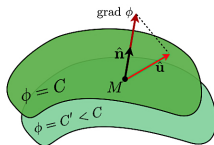
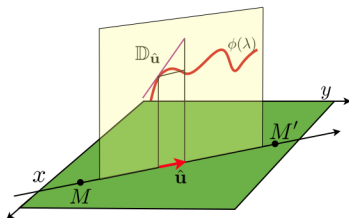
- Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo”, para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:
$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt};$$
- Donde $\nabla\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\mathbf{j}$, y $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$.
- Si el parámetro es la longitud de arco s , la derivada total de ϕ con respecto a s será $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi(x^i(s), s) \cdot \hat{\tau}$. Donde $\hat{\tau}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado
- Dados dos puntos M y M' definiremos la derivada en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}} \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$ como:
$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi \equiv \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{|\overrightarrow{M'M}|} = \frac{d\phi}{d\lambda} = \nabla\phi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$
- La derivada direccional indicará la tasa de cambio del campo escalar en la dirección que apuntemos. Es una generalización de la idea que surge de parametrizar la curva o de la derivada total respecto al tiempo.

Derivada direccional de campos escalares



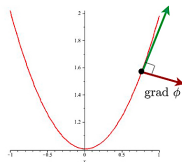
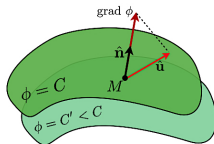
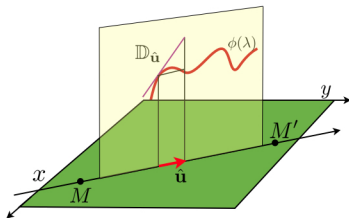
- La derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}} \phi = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\nabla \phi| \cos(\widehat{\nabla \phi, \hat{\mathbf{u}}})$$



- La derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}} \phi = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\nabla \phi| \cos(\widehat{\nabla \phi, \hat{\mathbf{u}}})$$
- El gradiente es ortogonal a la superficie ¿por qué?. Entonces los vectores perpendiculares a él formarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.



- La derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}} \phi = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\nabla \phi| \cos(\widehat{\nabla \phi, \hat{\mathbf{u}}})$$
- El gradiente es ortogonal a la superficie ¿por qué?. Entonces los vectores perpendiculares a él formarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.
- la derivada direccional es un escalar, por lo tanto, como $\hat{\mathbf{u}}$ es un vector, $\nabla \phi(x, y)$ debe ser una 1-forma:

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \langle \mathbf{e}^1 | + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \langle \mathbf{e}^2 | + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \langle \mathbf{e}^3 | = \frac{\langle \mathbf{e}^i |}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q^i} = \frac{\langle \mathbf{e}^i |}{h_i} \partial_i \phi.$$

- Si $\text{grad } \phi = \left(\frac{\langle \mathbf{e}_1 |}{h_1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathbf{e}_2 |}{h_2} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathbf{e}_3 |}{h_3} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \phi$, podemos construir un funcional lineal $\nabla \equiv \frac{\langle \mathbf{e}_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathbf{e}_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathbf{e}_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3}$, con:
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.

- Si $\text{grad } \phi = \left(\frac{\langle e_1 |}{h_1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{h_2} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{h_3} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \phi$, podemos construir un funcional lineal $\nabla \equiv \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3}$, con:
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.
- El “producto interno entre una 1-forma, ∇ y un vector \mathbf{a} ” de la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3} \right] \cdot [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle] \\ &= \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^2} \\ &\quad + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^3}. \end{aligned}$$

- Si $\text{grad } \phi = \left(\frac{\langle e_1 |}{h_1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{h_2} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{h_3} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \phi$, podemos construir un funcional lineal $\nabla \equiv \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3}$, con:
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.
- El “producto interno entre una 1-forma, ∇ y un vector \mathbf{a} ” de la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3} \right] \cdot [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle] \\ &= \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^2} \\ &\quad + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^3}. \end{aligned}$$

- La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(a^1(q^j) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(a^2(q^j) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial(a^3(q^j) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right].$$

- Si $\text{grad } \phi = \left(\frac{\langle e_1 |}{h_1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{h_2} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{h_3} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \phi$, podemos construir un funcional lineal $\nabla \equiv \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3}$, con:
 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.
- El “producto interno entre una 1-forma, ∇ y un vector \mathbf{a} ” de la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3} \right] \cdot [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle] \\ &= \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^2} \\ &\quad + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^3}. \end{aligned}$$

- La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales
 $\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(a^1(q^i) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(a^2(q^i) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial(a^3(q^i) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right].$
- Si consideremos el caso de coordenadas cartesianas: $\{q^i\} \rightarrow (x, y, z)$, donde la base $\{|e_i\rangle\} \rightarrow \{|e_x\rangle, |e_y\rangle, |e_z\rangle\}$ es constante, entonces
 $\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a^i(x^j)}{\partial x^i} \equiv \partial_i a^i(x^j) = \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z}.$

Divergencia y flujo de un campo vectorial

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div } \mathbf{a} = \frac{dF}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.

Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div } \mathbf{a} = \frac{dF}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.

Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z-}.$$

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div } \mathbf{a} = \frac{dF}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.

Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z-}.$$

- con lo cual $dF = a_x(x + dx, y, z)dy dz - a_x(x, y, z)dy dz + a_y(x, y + dy, z)dx dz - a_y(x, y, z)dx dz + a_z(x, y, z + dz)dx dy - a_z(x, y, z)dx dy$

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div } \mathbf{a} = \frac{dF}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.

Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z-}.$$

- con lo cual $dF = a_x(x + dx, y, z)dy dz - a_x(x, y, z)dy dz + a_y(x, y + dy, z)dx dz - a_y(x, y, z)dx dz + a_z(x, y, z + dz)dx dy - a_z(x, y, z)dx dy$

- entonces $dF = [a_x(x + dx, y, z) - a_x(x, y, z)] dydz + [a_y(x, y + dy, z) - a_y(x, y, z)] dx dz + [a_z(x, y, z + dz) - a_z(x, y, z)] dx dy$.

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div } \mathbf{a} = \frac{dF}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.

Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z-}.$$

- con lo cual $dF = a_x(x+dx, y, z)dy dz - a_x(x, y, z)dy dz + a_y(x, y+dy, z)dx dz - a_y(x, y, z)dx dz + a_z(x, y, z+dz)dx dy - a_z(x, y, z)dx dy$

- entonces $dF = [a_x(x+dx, y, z) - a_x(x, y, z)] dydz + [a_y(x, y+dy, z) - a_y(x, y, z)] dx dz + [a_z(x, y, z+dz) - a_z(x, y, z)] dx dy$.

- Desarrollando por Taylor las componentes tendremos

$$a_x(x+dx, y, z) \approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx; \quad a_y(x, y+dy, z) \approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy;$$

$$a_z(x, y, z+dz) \approx a_z(x, y, z) + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

- El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas $\text{div } \mathbf{a} = \frac{dF}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.

Es decir, la divergencia es el flujo por unidad de volumen.

- Como esta expresión es un escalar vale para cualquier sistema de coordenadas. Construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes cartesianos. El flujo por las seis caras será

$$dF = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}_{z-}.$$

- con lo cual $dF = a_x(x+dx, y, z)dy dz - a_x(x, y, z)dy dz + a_y(x, y+dy, z)dx dz - a_y(x, y, z)dx dz + a_z(x, y, z+dz)dx dy - a_z(x, y, z)dx dy$

- entonces $dF = [a_x(x+dx, y, z) - a_x(x, y, z)] dy dz + [a_y(x, y+dy, z) - a_y(x, y, z)] dx dz + [a_z(x, y, z+dz) - a_z(x, y, z)] dx dy$.

- Desarrollando por Taylor las componentes tendremos

$$a_x(x+dx, y, z) \approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx; \quad a_y(x, y+dy, z) \approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy; \\ a_z(x, y, z+dz) \approx a_z(x, y, z) + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

- Para obtener $dF = \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz dx dy$, y finalmente $F = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \equiv \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV$.

El Teorema de la Divergencia.

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\nabla \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \mathbf{i}_i = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \mathbf{i}_1 + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \mathbf{i}_2 + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \mathbf{i}_3$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\nabla \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \mathbf{i}_i = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \mathbf{i}_1 + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \mathbf{i}_2 + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \mathbf{i}_3$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

- El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial.

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\nabla \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \mathbf{i}_i = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \mathbf{i}_1 + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \mathbf{i}_2 + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \mathbf{i}_3$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

- El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial.
- Para un sistema de coordenadas ortogonales generalizado tendremos:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{|\mathbf{e}_1\rangle}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 a^3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(h_2 a^2)}{\partial q^3} \right] + \frac{|\mathbf{e}_2\rangle}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 a^1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(h_3 a^3)}{\partial q^1} \right] + \frac{|\mathbf{e}_3\rangle}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 a^2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(h_1 a^1)}{\partial q^2} \right].$$

- Como siempre la tríada de vectores base $\left\{ |\mathbf{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial q^j} \right\}$ y los factores de escala $h_i = \left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial q^i} \right\|$

- Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\nabla \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \mathbf{i} \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \mathbf{i} = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \mathbf{i} + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \mathbf{j} + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

- El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial.
- Para un sistema de coordenadas ortogonales generalizado tendremos:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{|\mathbf{e}_1\rangle}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 a^3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(h_2 a^2)}{\partial q^3} \right] + \frac{|\mathbf{e}_2\rangle}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 a^1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(h_3 a^3)}{\partial q^1} \right] + \frac{|\mathbf{e}_3\rangle}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 a^2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(h_1 a^1)}{\partial q^2} \right].$$

- Como siempre la tríada de vectores base $\left\{ |\mathbf{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \right\}$ y los factores de escala $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$

- Líneas de Torbellino** Si $d\mathbf{r} \propto \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ determina las líneas (de *torbellino*) perpendiculares al campo $\mathbf{a}(x, y, z)$.

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k}, \text{ tendremos que}$$

$$\frac{dx}{b_x(x, y, z)} = \frac{dy}{b_y(x, y, z)} = \frac{dz}{b_z(x, y, z)} = d\lambda = \frac{dx}{(\partial_y a_z - \partial_z a_y)} = \frac{dy}{(\partial_z a_x - \partial_x a_z)} = \frac{dz}{(\partial_x a_y - \partial_y a_x)},$$

- $$\nabla \times \mathbf{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

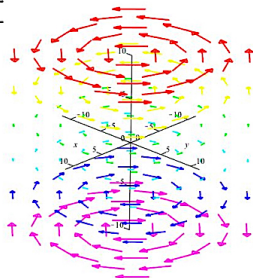
- $$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{|e_1\rangle}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 a^3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(h_2 a^2)}{\partial q^3} \right] + \frac{|e_2\rangle}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(h_1 a^1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(h_3 a^3)}{\partial q^1} \right] + \frac{|e_3\rangle}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 a^2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(h_1 a^1)}{\partial q^2} \right].$$

- $$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \mathbf{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \mathbf{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \mathbf{k}, \text{ tendremos que}$$

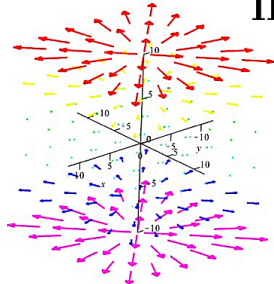
$$\frac{dx}{b_x(x,y,z)} = \frac{dy}{b_y(x,y,z)} = \frac{dz}{b_z(x,y,z)} = d\lambda = \frac{dx}{(\partial_{v_1} a_z - \partial_z a_v)} = \frac{dy}{(\partial_z a_x - \partial_x a_z)} = \frac{dz}{(\partial_x a_v - \partial_v a_x)},$$

- $$\mathbf{a} \cdot [\nabla \varphi \times \mathbf{a}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot [\varphi \nabla \times \mathbf{a}] = 0.$$

I



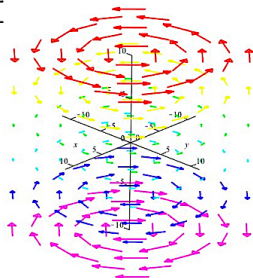
II



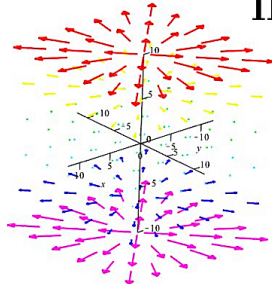
- La idea de circulación se puede generalizar para un campo vectorial genérico

$\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy , será $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [-r\sin(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}] d\varphi$.

I



II



- La idea de circulación se puede generalizar para un campo vectorial genérico

$\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy , será $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [-r\sin(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}] d\varphi$.

- en general podremos expresar la relación entre circulación y rotacional como

$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$. Esta relación constituye el Teorema de Stokes.

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy , será

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [-r\sin(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}] d\varphi.$$

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy , será

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [-r\sin(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}] d\varphi.$$

- Suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en el plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$:

$$a_x(x, y, 0) = a_x|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$

$$a_y(x, y, 0) = a_y|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$

- La integral de línea nos queda como

$$\begin{aligned} \Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} & \left[a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r\sin(\varphi) d\varphi + \\ & + \int_0^{2\pi} \left[a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r\cos(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy , será

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [-r\sin(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}] d\varphi.$$

- Suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en el plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$:

$$a_x(x, y, 0) = a_x|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$

$$a_y(x, y, 0) = a_y|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$

- La integral de línea nos queda como

$$\begin{aligned} \Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} & - \left[a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r\sin(\varphi) d\varphi + \\ & + \int_0^{2\pi} \left[a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r\cos(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

- Con los cual $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \pi r^2 \left\{ \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right\} + O(r^3)$.

- Detallemos la idea de circulación para un campo vectorial genérico $\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$. La integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy , será
$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [-r\sin(\varphi)\mathbf{i} + r\cos(\varphi)\mathbf{j}] d\varphi.$$
- Suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en el plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$:
$$a_x(x, y, 0) = a_x|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$
$$a_y(x, y, 0) = a_y|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots = a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots$$
- La integral de línea nos queda como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} - \left[a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r\sin(\varphi) d\varphi +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \left[a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r\sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r\cos(\varphi) d\varphi,$$

- Con los cual $\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \pi r^2 \left\{ \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right\} + O(r^3)$.
- y en general, haciendo $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi r^2}$, podremos expresar la relación entre circulación y rotacional como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS. \text{ Esta relación constituye el Teorema de Stokes.}$$

- El operador *nabla*, ∇ , actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, \mathbf{a} y \mathbf{b} dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$\nabla(\varphi + \chi\psi) = \nabla\varphi + \nabla(\chi\psi) = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi + \chi\nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{b}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\varphi\mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla\varphi \times \mathbf{b} + \varphi\nabla \times \mathbf{b},$$

- El operador *nabla*, ∇ , actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, \mathbf{a} y \mathbf{b} dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi + \chi\psi) &= \nabla\varphi + \nabla(\chi\psi) = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi + \chi\nabla\psi \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{b} \\ \nabla \times (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\varphi\mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla\varphi \times \mathbf{b} + \varphi\nabla \times \mathbf{b},\end{aligned}$$

- Si consideramos las cantidades $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tendremos

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \left[\partial^i (a^j b_j) \right] \mathbf{e}_i = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \partial^i (\varepsilon_{ijk} a^j b^k) = (\varepsilon_{ijk} \partial^i a^j) b^k + (\varepsilon_{ijk} \partial^i b^k) a^j = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}\end{aligned}$$

- El operador *nabla*, ∇ , actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, \mathbf{a} y \mathbf{b} dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi + \chi\psi) &= \nabla\varphi + \nabla(\chi\psi) = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi + \chi\nabla\psi \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{b} \\ \nabla \times (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\varphi\mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla\varphi \times \mathbf{b} + \varphi\nabla \times \mathbf{b},\end{aligned}$$

- Si consideramos las cantidades $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tendremos

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \left[\partial^i (a^j b_j) \right] \mathbf{e}_i = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \partial^i (\varepsilon_{ijk} a^j b^k) = (\varepsilon_{ijk} \partial^i a^j) b^k + (\varepsilon_{ijk} \partial^i b^k) a^j = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}\end{aligned}$$

- Si consideramos funciones compuestas $\psi = \psi(\chi(\mathbf{r}))$ y $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))$, tendremos

$$\nabla\psi(\chi(\mathbf{r})) = \frac{d\psi}{d\chi} \nabla\chi; \quad \nabla \cdot \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \nabla\chi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}; \quad \nabla \times \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = (\nabla\chi) \times \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}.$$

- El operador *nabla*, ∇ , actúa como un funcional lineal. Dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, \mathbf{a} y \mathbf{b} dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi + \chi\psi) &= \nabla\varphi + \nabla(\chi\psi) = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi + \chi\nabla\psi \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{b} \\ \nabla \times (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\varphi\mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla\varphi \times \mathbf{b} + \varphi\nabla \times \mathbf{b},\end{aligned}$$

- Si consideramos las cantidades $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tendremos

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \left[\partial^i (a^j b_j) \right] \mathbf{e}_i = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \partial^i (\varepsilon_{ijk} a^j b^k) = (\varepsilon_{ijk} \partial^i a^j) b^k + (\varepsilon_{ijk} \partial^i b^k) a^j = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}\end{aligned}$$

- Si consideramos funciones compuestas $\psi = \psi(\chi(\mathbf{r}))$ y $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))$, tendremos

$$\nabla\psi(\chi(\mathbf{r})) = \frac{d\psi}{d\chi} \nabla\chi; \quad \nabla \cdot \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \nabla\chi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}; \quad \nabla \times \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = (\nabla\chi) \times \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}.$$

- La demostración para $\nabla \cdot \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \nabla\chi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}$, es simpática. Utilizamos la estrategia de Taylor y expandimos el

campo vectorial alrededor de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}_0) + \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \Big|_{\mathbf{r}_0} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \Big|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 + \dots$

Aplicando la divergencia a ambos miembros queda como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla \cdot [\mathbf{a}(\mathbf{r}_0)] + \nabla \cdot \left[\frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \Big|_{\mathbf{r}_0} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) \right] + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \Big|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 \right] + \dots \text{ con lo cual} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}) + (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 \frac{d^3\mathbf{a}}{d\chi^3} \Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}) + \dots\end{aligned}$$

Esta relación vale siempre, en particular para $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$: $\nabla \cdot \mathbf{a}|_{\mathbf{r}_0} = \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r}_0) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \cdot \nabla\chi(\mathbf{r})$

- Consideremos un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$.

- Consideremos un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta(\phi + C\psi) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi \cdot \nabla\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden

- Consideremos un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta(\phi + C\psi) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi \cdot \nabla\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden
- Consideremos un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$. En coordenadas cartesianas es
$$\Delta \mathbf{a} = \left[\partial^i (\partial^j a_j) - (\partial^i \partial_j a^j - \partial_j \partial^i a^j) \right] \mathbf{i}_i \implies \Delta \mathbf{a} = (\partial_j \partial^j a^i) \mathbf{i}_i \equiv (\Delta a^i) \mathbf{i}_i.$$

- Consideremos un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta(\phi + C\psi) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi \cdot \nabla\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden
- Consideremos un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$. En coordenadas cartesianas es
$$\Delta \mathbf{a} = \left[\partial^i (\partial^j a_j) - (\partial^i \partial_j a^j - \partial_j \partial^i a^j) \right] \mathbf{i}_i \implies \Delta \mathbf{a} = (\partial_j \partial^j a^i) \mathbf{i}_i \equiv (\Delta a^i) \mathbf{i}_i.$$
- El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir
$$\Delta(\nabla \phi) = \nabla(\Delta \phi); \quad \nabla \cdot (\Delta \mathbf{a}) = \Delta(\nabla \cdot \mathbf{a}); \quad \nabla \times (\Delta \mathbf{a}) = \Delta(\nabla \times \mathbf{a}).$$

- Consideremos un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta(\phi + C\psi) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi \cdot \nabla\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden
- Consideremos un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$. En coordenadas cartesianas es
$$\Delta \mathbf{a} = \left[\partial^i (\partial^j a_j) - (\partial^i \partial_j a^j - \partial_j \partial^i a^j) \right] \mathbf{i}_i \implies \Delta \mathbf{a} = (\partial_j \partial^j a^i) \mathbf{i}_i \equiv (\Delta a^i) \mathbf{i}_i.$$
- El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir
$$\Delta(\nabla \phi) = \nabla(\Delta \phi); \quad \nabla \cdot (\Delta \mathbf{a}) = \Delta(\nabla \cdot \mathbf{a}); \quad \nabla \times (\Delta \mathbf{a}) = \Delta(\nabla \times \mathbf{a}).$$
- Un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ se denomina un campo laplaciano si es irrotacional: $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ y solenoidal: $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ en todo punto del campo.

- Consideremos un campo escalar $\phi = \phi(x, y, z)$. El laplaciano, $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \Delta$, es un operador escalar y en coordenadas cartesianas puede expresarse como: $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$.
- Fácilmente, podemos demostrar que es un operador diferencial lineal: $\Delta(\phi + C\psi) = \Delta\phi + C\Delta\psi$, y $\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi \cdot \nabla\phi$, y su importancia reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden
- Consideremos un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Definiremos el laplaciano de un campo vectorial como $\Delta \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$. En coordenadas cartesianas es
$$\Delta \mathbf{a} = \left[\partial^i \left(\partial^j a_j \right) - \left(\partial^i \partial_j a^j - \partial_j \partial^i a^j \right) \right] \mathbf{i}_i \implies \Delta \mathbf{a} = \left(\partial_j \partial^j a^i \right) \mathbf{i}_i \equiv \left(\Delta a^i \right) \mathbf{i}_i.$$
- El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir
$$\Delta(\nabla \phi) = \nabla(\Delta \phi); \quad \nabla \cdot (\Delta \mathbf{a}) = \Delta(\nabla \cdot \mathbf{a}); \quad \nabla \times (\Delta \mathbf{a}) = \Delta(\nabla \times \mathbf{a}).$$
- Un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ se denomina un campo laplaciano si es irrotacional: $\nabla \times \mathbf{a} = 0$ y solenoidal: $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ en todo punto del campo.
- Un campo laplaciano es un potencial, es decir: $\nabla \times \mathbf{a} = 0 \implies \mathbf{a} = \nabla \phi$, y queda completamente determinado por el potencial escalar que satisface la ecuación de Laplace $\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi = 0$.

- LZZZZZZZ