El problema de Sturm-Liuoville

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

29 de septiembre de 2021

Agenda **El problema de Sturm-Liuoville**

CONSTRUIMOS FUTURO

1. Operadores diferenciales de segundo orden
2. Operadores diferenciales autoadjuntos
3. El Sistema Sturm-Liouville
4. Condiciones regulares puras
   - Oscilador armónico libre con $y(0) = 0 \ \wedge \ \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$
   - Oscilador armónico libre con $y(0) = 0 \ \wedge \ y(\pi) + \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$
   - Oscilador armónico libre con condiciones periódicas
   - Oscilador armónico libre con condiciones Periódicas
5. Recapitulando

Operadores diferenciales de segundo orden

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}\left|v_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|v_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}}\left|v_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|v_i\right\rangle.$

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}|v_i\rangle = \lambda_i \ |v_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}}|v_i\rangle = \lambda_i \ |v_i\rangle$.
- Entonces podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma $P(x)\frac{\mathrm{d}^2 y_i(x)}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \lambda_i w(x)\right) y_i(x) = 0$.

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}\left|v_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|v_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}}\left|v_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|v_i\right\rangle.$
- Entonces podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma $P(x)\frac{\mathrm{d}^2 y_i(x)}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \lambda_i w(x)\right) y_i(x) = 0.$
- Con un producto interno $\langle g \,| f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \ w(x)\, g^*(x) f(x).$

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}\,|v_i\rangle = \lambda_i\ \ |v_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}}|v_i\rangle = \lambda_i\ \ |v_i\rangle$.
- Entonces podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma $P(x)\frac{\mathrm{d}^2 y_i(x)}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \lambda_i w(x)\right) y_i(x) = 0.$
- Con un producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\,g^*(x)f(x)$.
- Con una variedad de ejemplos de polinomios ortogonales $p(x)$

$$\underbrace{\left(P(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)}_{\mathbb{L}} p_n(x) = -\alpha_n p_n(x) = 0.$$

Polinomio	$P(x)$	$Q(x)$	α_n
P_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1-x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1-x$	n
L_n^{α}	x	$1-x+\alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \ | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \ g^*(x) f(x) \ \Rightarrow \ \langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \ g^*(x) \, \mathbb{L} f(x).$

Operadores diferenciales autoadjuntos 1/2

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) f(x) \;\Rightarrow\; \langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) \, \mathbb{L} f(x)$.

- es decir $\langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, R(x) f(x)$.

Operadores diferenciales autoadjuntos 1/2

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) f(x) \;\; \Rightarrow \;\; \langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) \, \mathbb{L} f(x)$.

- es decir $\langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, R(x) f(x)$.

- Integrando por partes

  $\int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x) \, g^*(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) \frac{\mathrm{d}(P(x) \, g^*(x))}{\mathrm{d}x} \right) \Big|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) \frac{\mathrm{d}^2 (P(x) \, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$

Operadores diferenciales autoadjuntos 1/2

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos
  $\langle g \,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)f(x) \;\Rightarrow\; \langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)\,\mathbb{L}f(x).$
- es decir $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, R(x)f(x).$
- Integrando por partes
  $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x)\, g^*(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x)\frac{\mathrm{d}(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}^2(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$
- y $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)\, Q(x)\, g^*(x)\big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}(Q(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x}$

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \,| f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x) f(x) \;\Rightarrow\; \langle g | \,\mathbb{L}\, | f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)\, \mathbb{L} f(x)$.

- es decir $\langle g | \,\mathbb{L}\, | f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, R(x) f(x)$.

- Integrando por partes

  $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x)\, g^*(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) \frac{\mathrm{d}(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x} \right)\Bigg|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^2(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$

- y $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)\, Q(x)\, g^*(x)\big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}(Q(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x}$

- Entonces $\langle g | \,\mathbb{L}\, | f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \underbrace{\left(P(x) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(2 \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x) \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) \right)}_{\mathbb{L}^\dagger} g^*(x)$

  $+ \left(f(x) \left(Q(x) - \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} \right) g^*(x) + P(x) \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x) \right) \right)\Bigg|_a^b$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^{\dagger}$, entonces $Q(x) = \dfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \,| f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x) f(x) \;\Rightarrow\; \langle g | \,\mathbb{L}\, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)\, \mathbb{L} f(x).$

- es decir $\langle g | \,\mathbb{L}\, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, R(x) f(x).$

- Integrando por partes

  $$\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x)\, g^*(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) \frac{\mathrm{d}(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x} \right)\Bigg|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^2(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$$

- y $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)\, Q(x)\, g^*(x)\big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}(Q(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x}$

- Entonces

  $$\langle g | \,\mathbb{L}\, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \underbrace{\left(P(x) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(2 \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x) \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) \right)}_{\mathbb{L}^{\dagger}} g^*(x)$$

  $$+ \left(f(x) \left(Q(x) - \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} \right) g^*(x) + P(x) \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x) \right) \right)\Bigg|_a^b$$

- Finalmente $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow 2 \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x) = Q(x)$ y $- \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0.$

Operadores diferenciales autoadjuntos 2/2

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir

$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$

Operadores diferenciales autoadjuntos 2/2

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir
$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$
- Con lo cual
$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$

Operadores diferenciales autoadjuntos 2/2

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir
$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$
- Con lo cual
$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$
- y es inmediato $\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\,.$

Operadores diferenciales autoadjuntos 2/2

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir
$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$
- Con lo cual
$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$
- y es inmediato $\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\,.$
- por lo tanto $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle =$
$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x \, f(x)\, \mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f|\mathbb{L}^\dagger|g\rangle^*} + P(x)\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\bigg|_a^b \,.$$

Operadores diferenciales autoadjuntos 2/2

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir
$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$
- Con lo cual
$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$
- y es inmediato $\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\,.$
- por lo tanto $\langle g | \mathbb{L} | f \rangle =$
$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f|\mathbb{L}^\dagger|g\rangle^*} + P(x)\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\Bigg|_a^b\,.$$
- Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto y $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones el segundo término se debe anular, por las condiciones de borde que se impongan.

El Sistema Sturm-Liouville

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\,|u_i\rangle = -\lambda_i\,|u_i\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\,|u_i\rangle = -\lambda_i\,|u_i\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i, j\,.$

El Sistema Sturm-Liouville

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i \left|u_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\left\langle g \,|f\right\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$

El Sistema Sturm-Liouville

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\,|u_i\rangle = -\lambda_i\,|u_i\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x) u_j^*(x) \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$
- Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas $\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$

El Sistema Sturm-Liouville

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i \left|u_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\left\langle g\,|f\right\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$
- Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas $\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$
- Condiciones de frontera **periódicas**: Iguales valores de la función y su derivada en los extremos $u_i(a) = u_i(b)$ y $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a = \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_b$.

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\,|u_i\rangle = -\lambda_i\,|u_i\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\; i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$
- Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas $\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$
- Condiciones de frontera **periódicas**: Iguales valores de la función y su derivada en los extremos $u_i(a) = u_i(b)$ y $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a = \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_b$.
- **Condiciones Singulares:** Valores singulares en la frontera para las funciones y sus derivadas.

Condiciones regulares puras

Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas

$$\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$$

- **Condiciones Regulares Puras:** Para este caso se especifican los valores para la combinación lineal completa, con $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$.
- **Condiciones de Dirichlet:** Para este caso se especifican los valores de la función $u_i(x)$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.
- **Condiciones de Neumann:** Para este caso se especifican los valores de las derivadas $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\beta_1 = \beta_2 = 0$.
- **Condiciones Mixtas:** Cuando se especifican los valores de un tipo de condiciones de frontera en un extremo y otro en el otro. Esto es para $\beta_1 = \gamma_2 = 0$ o $\gamma_1 = \beta_2 = 0$.

Oscilador armónico libre con $y(0) = 0 \ \wedge \ \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$

Consideremos el caso del oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0.$

$\lambda = 0$ Tendrá solución de la forma $y(x) = C_1 x + C_2$. Si $y(0) = 0$. Entonces $C_2 = 0$ y como $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$.
La única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor.

Oscilador armónico libre con $y(0) = 0 \ \wedge \ \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$

Consideremos el caso del oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0$.

$\lambda = 0$ Tendrá solución de la forma $y(x) = C_1 x + C_2$. Si $y(0) = 0$. Entonces $C_2 = 0$ y como $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$.
La única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor.

$\lambda < 0$ Si $\lambda = -\mu^2$. Entonces la solución general es $y(x) = C_1\mathrm{e}^{\mu x} + C_2\mathrm{e}^{-\mu x}$.
Las condiciones de frontera imponen
$0 = C_1 + C_2 \qquad \wedge \qquad 0 = \mu\left(C_1\mathrm{e}^{\mu\pi} + -C_2\mathrm{e}^{-\mu\pi}\right)$. Tendremos como única solución $0 = C_1 = C_2$ y λ no será un autovalor.

Oscilador armónico libre con $y(0)=0 \ \wedge \ \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$

Consideremos el caso del oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0.$

$\lambda = 0$ Tendrá solución de la forma $y(x) = C_1 x + C_2$. Si $y(0)=0$. Entonces $C_2 = 0$ y como $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$. La única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor.

$\lambda < 0$ Si $\lambda = -\mu^2$. Entonces la solución general es $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen

$0 = C_1 + C_2 \qquad \wedge \qquad 0 = \mu\left(C_1 \mathrm{e}^{\mu\pi} + -C_2 \mathrm{e}^{-\mu\pi}\right)$. Tendremos como única solución $0 = C_1 = C_2$ y λ no será un autovalor.

$\lambda > 0$ Si $\lambda = \mu^2$. La solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \ \Rightarrow C_1 = 0$ y

$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = C_2 \mu \cos(\mu\pi) = 0 \ \Rightarrow \mu_n = \pm\frac{2n+1}{2} \ \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4}$

para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

- $\mathbb{L}$ es hermítico y sus autovalores son reales y $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \cdots$.
- Las infinitas autofunciones forman una base ortogonal. Entonces $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2} x\right)$. Es la solución general.

Oscilador armónico libre con $y(0) = 0 \;\wedge\; y(\pi) + \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$

Otra vez, consideremos el oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0.$

$\lambda = 0$ Se cumplen las mismas situaciones que el caso anterior y se demuestra que sólo es posible la solución trivial $y(x) = 0$.

Oscilador armónico libre con $y(0) = 0 \ \wedge \ y(\pi) + \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$

Otra vez, consideremos el oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0.$

$\lambda = 0$ Se cumplen las mismas situaciones que el caso anterior y se demuestra que sólo es posible la solución trivial $y(x) = 0$.

$\lambda < 0$ Una vez más hacemos $\lambda = -\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu\, x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu\, x}$. Las condiciones de frontera imponen: $C_1 = -C_2$ y $\left(C_1 \mathrm{e}^{\mu\,\pi} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu\,\pi}\right) + \mu\left(C_1 \mathrm{e}^{\mu\,\pi} - C_2 \mathrm{e}^{-\mu\,\pi}\right) = 0$, con lo cual $\mu = -\frac{\left(\mathrm{e}^{\mu\,\pi} - \mathrm{e}^{-\mu\,\pi}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\mu\,\pi} + \mathrm{e}^{-\mu\,\pi}\right)} \equiv -\tanh(\mu\,\pi)\,.$

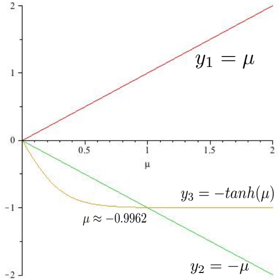
Oscilador armónico libre con $y(0)=0 \ \wedge \ y(\pi)+\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi}=0\,.$

Otra vez, consideremos el oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+\lambda y(x)=0.$

$\lambda=0$ Se cumplen las mismas situaciones que el caso anterior y se demuestra que sólo es posible la solución trivial $y(x)=0$.

$\lambda<0$ Una vez más hacemos $\lambda=-\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x)=C_1\mathrm{e}^{\mu x}+C_2\mathrm{e}^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen: $C_1=-C_2$ y $(C_1\mathrm{e}^{\mu\pi}+C_2\mathrm{e}^{-\mu\pi})+\mu\,(C_1\mathrm{e}^{\mu\pi}-C_2\mathrm{e}^{-\mu\pi})=0$, con lo cual $\mu=-\frac{(\mathrm{e}^{\mu\pi}-\mathrm{e}^{-\mu\pi})}{(\mathrm{e}^{\mu\pi}+\mathrm{e}^{-\mu\pi})}\equiv-\tanh(\mu\pi)\,.$

- Para $\mu=-\tanh(\mu\pi)$ con $\mu>0$ no existe solución y $\mu<0\Rightarrow\mu\approx-0{,}9962\Rightarrow\lambda\approx-0{,}9924$

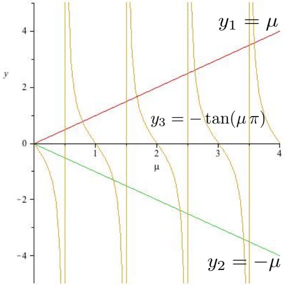


Oscilador armónico libre con $y(0)=0 \ \wedge \ y(\pi)+\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi}=0$. Cont...

$\lambda > 0$ Entonces $\lambda = \mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \cos(\mu\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu\, x)$. Las condiciones de frontera imponen:
$y(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = 0$ y, para este caso
$y(\pi) = 0 = C_2 \left(\operatorname{sen}(\mu\, \pi) + \mu \cos(\mu\, \pi)\right)$
$\Rightarrow \mu = -\tan(\mu\, \pi)$.

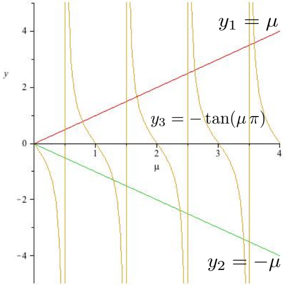
$\lambda > 0$ Entonces $\lambda = \mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1\cos(\mu\, x) + C_2\,\mathrm{sen}(\mu\, x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0)=0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$ y, para este caso $y(\pi) = 0 = C_2\left(\mathrm{sen}(\mu\,\pi) + \mu\cos(\mu\,\pi)\right)$ $\Rightarrow \mu = -\tan(\mu\,\pi)$.

- $\mu = -\tan(\mu\,\pi)$ tiene infinitas soluciones para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$.



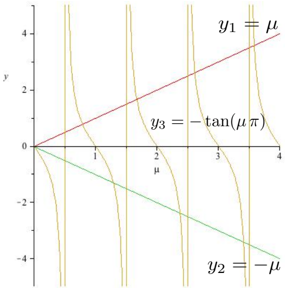
$\lambda > 0$ Entonces $\lambda = \mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen:
$y(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = 0$ y, para este caso
$y(\pi) = 0 = C_2 (\operatorname{sen}(\mu \pi) + \mu \cos(\mu \pi))$
$\Rightarrow \mu = -\tan(\mu \pi)$.

- $\mu = -\tan(\mu \pi)$ tiene infinitas soluciones para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$.
- Para el caso $\mu > 0 \Rightarrow \mu_1 \approx 0{,}7876$, $\mu_2 \approx 1{,}6716$, $\mu_3 \approx 2{,}6162 \cdots$



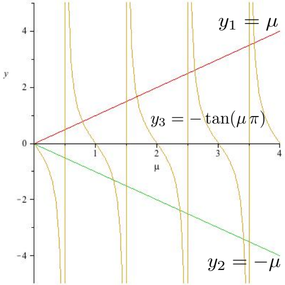
$\lambda > 0$ Entonces $\lambda = \mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1\cos(\mu\, x) + C_2\,\mathrm{sen}(\mu\, x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$ y, para este caso $y(\pi) = 0 = C_2\left(\mathrm{sen}(\mu\,\pi) + \mu\cos(\mu\,\pi)\right)$ $\Rightarrow \mu = -\tan(\mu\,\pi)$.

- $\mu = -\tan(\mu\,\pi)$ tiene infinitas soluciones para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$.
- Para el caso $\mu > 0 \Rightarrow \mu_1 \approx 0{,}7876$, $\mu_2 \approx 1{,}6716$, $\mu_3 \approx 2{,}6162\cdots$
- Para $\mu < 0 \Rightarrow \tilde{\mu}_1 \approx -1{,}2901$, $\tilde{\mu}_2 \approx -2{,}3731$, $\tilde{\mu}_3 \approx -3{,}4092\cdots$



$\lambda > 0$ Entonces $\lambda = \mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \cos(\mu\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu\, x)$. Las condiciones de frontera imponen:
$y(0) = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = 0$ y, para este caso
$y(\pi) = 0 = C_2 \left(\operatorname{sen}(\mu\,\pi) + \mu \cos(\mu\,\pi)\right)$
$\Rightarrow \mu = -\tan(\mu\,\pi)$.

- $\mu = -\tan(\mu\,\pi)$ tiene infinitas soluciones para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$.
- Para el caso $\mu > 0 \Rightarrow \mu_1 \approx 0{,}7876$, $\mu_2 \approx 1{,}6716$, $\mu_3 \approx 2{,}6162 \cdots$
- Para $\mu < 0 \Rightarrow \tilde{\mu}_1 \approx -1{,}2901$, $\tilde{\mu}_2 \approx -2{,}3731$, $\tilde{\mu}_3 \approx -3{,}4092 \cdots$
- $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(\mu_n x) - \operatorname{sen}(|\tilde{\mu}_n| x)$



Oscilador armónico libre con condiciones periódicas

$y(0) = y(L)$ y $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}$

$\lambda = 0$ La solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$, con

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \Rightarrow y(x) = C_2$$

Oscilador armónico libre con condiciones periódicas

$y(0) = y(L)$ y $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

$\lambda = 0$ La solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$, con

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \Rightarrow y(x) = C_2$$

$\lambda < 0$ Una vez más, $\lambda = -\mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera

$$y(0) = y(L) \quad \Rightarrow C_1\left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = C_2\left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right), \text{ y}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_1\left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = -C_2\left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right).$$

Oscilador armónico libre con condiciones periódicas

$y(0) = y(L)$ y $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

$\lambda = 0$ La solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$, con

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \Rightarrow y(x) = C_2$$

$\lambda < 0$ Una vez más, $\lambda = -\mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu x}$.

Las condiciones de frontera

$$y(0) = y(L) \quad \Rightarrow C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = C_2 \left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right), \text{ y}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = -C_2 \left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right) .$$

- Por lo tanto, $C_1 = C_2 = 0$, y obtenemos la solución trivial $y(x) = 0$.

$\lambda = 0$ La solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$, con
$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0$
$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \Rightarrow y(x) = C_2$

$\lambda < 0$ Una vez más, $\lambda = -\mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu x}$.
Las condiciones de frontera
$y(0) = y(L) \quad \Rightarrow C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = C_2 \left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right)$, y
$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = -C_2 \left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right)$.

- Por lo tanto, $C_1 = C_2 = 0$, y obtenemos la solución trivial $y(x) = 0$.

$\lambda > 0$ $\lambda = \mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$.
Condiciones frontera: $y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - \cos(\mu L)) = C_2 \operatorname{sen}(\mu L)$,
$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_2 (1 - \cos(\mu L)) = -C_1 \operatorname{sen}(\mu L)$

$\lambda = 0$ La solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$, con

$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0$

$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \Rightarrow y(x) = C_2$

$\lambda < 0$ Una vez más, $\lambda = -\mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu x}$.

Las condiciones de frontera

$y(0) = y(L) \quad \Rightarrow C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = C_2 \left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right)$, y

$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_1 \left(1 - \mathrm{e}^{\mu L}\right) = -C_2 \left(\mathrm{e}^{-\mu L} - 1\right)$.

- Por lo tanto, $C_1 = C_2 = 0$, y obtenemos la solución trivial $y(x) = 0$.

$\lambda > 0$ $\lambda = \mu^2$ y la solución será $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \,\mathrm{sen}(\mu x)$.

Condiciones frontera: $y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - \cos(\mu L)) = C_2 \,\mathrm{sen}(\mu L)$,

$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_2 (1 - \cos(\mu L)) = -C_1 \,\mathrm{sen}(\mu L)$

- $\cos(\mu L) = 1 \Rightarrow \mu_n = \pm\frac{2n\pi}{L} \Leftrightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2$ tienen asociadas dos autofunciones: $y_1(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right)$ y $y_2(x) = \mathrm{sen}(\frac{2n\pi}{L} x)$.

Recapitulando

En presentación consideramos

1.