

Modos normales de oscilación

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



20 de mayo de 2025

- 1 Repasamos los Modos normales de oscilación
- 2 Osciladores Acoplados
 - Los osciladores
 - Las ecuaciones de movimiento y sus modos normales
 - De las frecuencias ω_i a las amplitudes a^i
- 3 Los Modos Normales Oscilación para el CO2
 - Descripción del sistema CO2
 - Energías cinética y potencial
 - Las frecuencias de oscilación ω_n
 - Ecuaciones generales y modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$
 - Modos normales para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$
- 4 Recapitulando
- 5 Para la discusión

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son
$$\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son
$$\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos
$$\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s$
- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ es decir
$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s$
- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ es decir
$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$
- Esto permite calcular las s frecuencias de pequeñas oscilaciones $\omega_n, \quad n = 1, 2, \dots, s$ como soluciones al polinomio característico

- Para cada ω_n , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_n^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_n^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_n^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_n^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

- Para cada ω_n , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_n^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_n^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_n^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_n^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

- Para cada ω_n , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_n^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_n^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_n^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_n^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.

- Para cada ω_n , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_n^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_n^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_n^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_n^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}$, $n = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales

- Para cada ω_n , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_n^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_n^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_n^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_n^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}$, $n = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.

- Para cada ω_n , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_n^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_n^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_n^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_n^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}$, $n = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son $\eta_1 = a_1(\omega_1) \xi_1 + a_1(\omega_2) \xi_2$, $\eta_2 = a_2(\omega_1) \xi_1 + a_2(\omega_2) \xi_2$

- Para cada ω_n , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_n^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_n^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_n^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_n^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones

$$\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}, \text{ donde } c_n \text{ son las fases complejas.}$$

- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}$, $n = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales

- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.

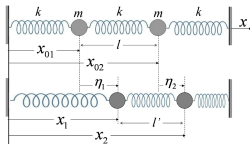
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son

$$\eta_1 = a_1(\omega_1) \xi_1 + a_1(\omega_2) \xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_1) \xi_1 + a_2(\omega_2) \xi_2$$

- Para ξ_2 tenemos $\eta_1 = a_1(\omega_2) \xi_2$, $\eta_2 = a_2(\omega_2) \xi_2$, 2 pequeños desplazamientos que oscilan con la frecuencia ω_2 alrededor de su posición de equilibrio con amplitudes $a_1(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2)$.

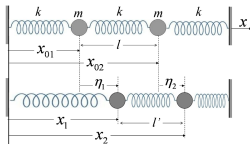
- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas con resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l .



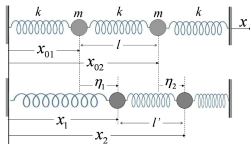
- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2 , con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas con resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l .



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2 , con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m$, $T_{22} = m$, $T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k(l' - l)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k \left[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2 \right]$

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas con resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l .



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2 , con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m$, $T_{22} = m$, $T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k(l' - l)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k \left[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2 \right]$
- Donde $l' - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$

- $V = \frac{1}{2} [2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
 $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$

- $V = \frac{1}{2} [2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
 $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$

- $V = \frac{1}{2} [2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
 $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \Rightarrow \det \left| k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
- Es decir $\det \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$

- $V = \frac{1}{2} [2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
 $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \Rightarrow \det \left| k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
- Es decir $\det \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \frac{2k \pm k}{m}$

- $V = \frac{1}{2} [2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
 $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \Rightarrow \det \left| k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
- Es decir $\det \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- La ecuación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\pm}^1 \\ a_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \frac{m\omega_{\pm}^2}{k} \begin{pmatrix} a_{\pm}^1 \\ a_{\pm}^2 \end{pmatrix}$

- $V = \frac{1}{2} [2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
 $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \Rightarrow \det \left| k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
- Es decir $\det \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- La ecuación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\pm}^1 \\ a_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \frac{m\omega_{\pm}^2}{k} \begin{pmatrix} a_{\pm}^1 \\ a_{\pm}^2 \end{pmatrix}$
- Claramente una ecuación de autovalores

- $V = \frac{1}{2} [2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
 $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \Rightarrow \det \left| k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
- Es decir $\det \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- La ecuación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\pm}^1 \\ a_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \frac{m\omega_{\pm}^2}{k} \begin{pmatrix} a_{\pm}^1 \\ a_{\pm}^2 \end{pmatrix}$
- Claramente una ecuación de autovalores
- Entonces, las ecuaciones serán
$$\begin{cases} 2a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = \frac{m\omega_{\pm}^2}{k} a_{\pm}^1 \\ -a_{\pm}^1 + 2a_{\pm}^2 = \frac{m\omega_{\pm}^2}{k} a_{\pm}^1 \end{cases}$$

- Si definimos $\lambda_{\pm} := \frac{m\omega_{\pm}^2}{k}$, entonces
$$\begin{cases} 2a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^1 \\ -a_{\pm}^1 + 2a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^2 \end{cases}$$

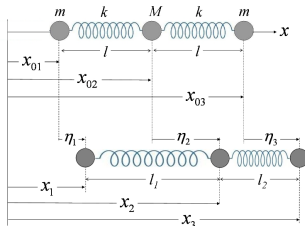
- Si definimos $\lambda_{\pm} := \frac{m\omega_{\pm}^2}{k}$, entonces
$$\begin{cases} 2a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^1 \\ -a_{\pm}^1 + 2a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^2 \end{cases}$$
- Entonces $(2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = 0$ y $-a_{\pm}^1 + (2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^2 = 0$

- Si definimos $\lambda_{\pm} := \frac{m\omega_{\pm}^2}{k}$, entonces
$$\begin{cases} 2a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^1 \\ -a_{\pm}^1 + 2a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^2 \end{cases}$$
- Entonces $(2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = 0$ y $-a_{\pm}^1 + (2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^2 = 0$
- Al despejar a_{\pm}^2 de la primera y sustituirla en la segunda, tendremos
$$a_{\pm}^1 [(2 - \lambda_{\pm})^2 - 1] = 0 \Rightarrow (2 - \lambda_{\pm})^2 = 1 \Rightarrow 2 - \lambda_{\pm} = \pm 1$$

- Si definimos $\lambda_{\pm} := \frac{m\omega_{\pm}^2}{k}$, entonces
$$\begin{cases} 2a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^1 \\ -a_{\pm}^1 + 2a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^2 \end{cases}$$
- Entonces $(2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = 0$ y $-a_{\pm}^1 + (2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^2 = 0$
- Al despejar a_{\pm}^2 de la primera y sustituirla en la segunda, tendremos $a_{\pm}^1 [(2 - \lambda_{\pm})^2 - 1] = 0 \Rightarrow (2 - \lambda_{\pm})^2 = 1 \Rightarrow 2 - \lambda_{\pm} = \pm 1$
- Entonces, si $2 - \lambda_{\pm} = -1 \Rightarrow \lambda_{+} = 3$ y si $2 - \lambda_{\pm} = 1 \Rightarrow \lambda_{-} = 1$, que son los dos valores que corresponden a dos valores que obtuvimos de la ecuación característica $\omega_{\pm} = \frac{2k \pm k}{m} \Rightarrow \omega_{+} = \frac{3k}{m}$ y $\omega_{-} = \frac{k}{m}$

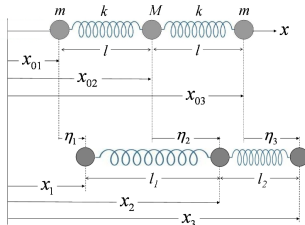
- Si definimos $\lambda_{\pm} := \frac{m\omega_{\pm}^2}{k}$, entonces
$$\begin{cases} 2a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^1 \\ -a_{\pm}^1 + 2a_{\pm}^2 = \lambda_{\pm} a_{\pm}^2 \end{cases}$$
- Entonces $(2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^1 - a_{\pm}^2 = 0$ y $-a_{\pm}^1 + (2 - \lambda_{\pm})a_{\pm}^2 = 0$
- Al despejar a_{\pm}^2 de la primera y sustituirla en la segunda, tendremos $a_{\pm}^1 [(2 - \lambda_{\pm})^2 - 1] = 0 \Rightarrow (2 - \lambda_{\pm})^2 = 1 \Rightarrow 2 - \lambda_{\pm} = \pm 1$
- Entonces, si $2 - \lambda_{\pm} = -1 \Rightarrow \lambda_{+} = 3$ y si $2 - \lambda_{\pm} = 1 \Rightarrow \lambda_{-} = 1$, que son los dos valores que corresponden a dos valores que optuvimos de la ecuación característica $\omega_{\pm} = \frac{2k \pm k}{m} \Rightarrow \omega_{+} = \frac{3k}{m}$ y $\omega_{-} = \frac{k}{m}$
- Finalmente, $\frac{a_{\pm}^2}{a_{\pm}^1} = (2 - \lambda_{\pm}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_{+}^2}{a_{+}^1} = +1 & \text{en fase} \\ \frac{a_{-}^2}{a_{-}^1} = -1 & \text{en contra fase} \end{cases}$

- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO₂



M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1 , l_2 , las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO₂



M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1, l_2 , las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

- Sean x_{01}, x_{02}, x_{03} las posiciones de equilibrio de las tres partículas y $\eta_i = x_i - x_{0i}$, con $i = 1, 2, 3$ los desplazamientos del equilibrio.

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \Rightarrow$
 $V = \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \Rightarrow$
 $V = \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \Rightarrow$
 $V = \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$
- y $V_{ij} = \begin{pmatrix} V_{11} = k & V_{12} = -k & V_{13} = 0 \\ V_{21} = -k & V_{22} = 2k & V_{23} = -k \\ V_{31} = 0 & V_{32} = -k & V_{33} = k \end{pmatrix}$

- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$, implica

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$

- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$, implica

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$

- La ecuación característica cúbica para ω_n , es

$$(k - \omega^2 m) [(2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2] - k^2 (k - \omega^2 m) = 0$$
$$\Rightarrow \omega^2 (k - \omega^2 m) [k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0$$

- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$, implica

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$

- La ecuación característica cúbica para ω_n , es

$$(k - \omega^2 m) [(2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2] - k^2 (k - \omega^2 m) = 0$$
$$\Rightarrow \omega^2 (k - \omega^2 m) [k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0$$

- Con soluciones $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n ,

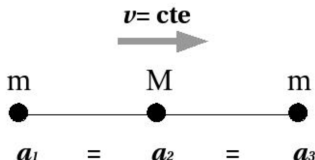
$$i = 1 : \quad (k - \omega_n^2 m) a_1 - k a_2 = 0$$

$$i = 2 : \quad -k a_1 + (2k - \omega_n^2 M) a_2 - k a_3 = 0$$

$$i = 3 : \quad -k a_2 + (k - \omega_n^2 m) a_3 = 0$$

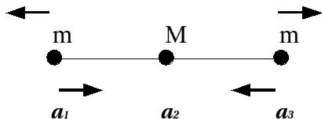
- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n ,
$$i = 1 : \quad (k - \omega_n^2 m) a_1 - k a_2 = 0$$
$$i = 2 : \quad -k a_1 + (2k - \omega_n^2 M) a_2 - k a_3 = 0$$
$$i = 3 : \quad -k a_2 + (k - \omega_n^2 m) a_3 = 0$$
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 = \text{cte} \Rightarrow$ reposo o velocidad constante

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n ,
 $i = 1 : \quad (k - \omega_n^2 m) a_1 - k a_2 = 0$
 $i = 2 : \quad -k a_1 + (2k - \omega_n^2 M) a_2 - k a_3 = 0$
 $i = 3 : \quad -k a_2 + (k - \omega_n^2 m) a_3 = 0$
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 = \text{cte} \Rightarrow$ reposo o velocidad constante
- Entonces para $\omega_1 = 0$, tenemos $a_1(\omega_1) = a_2(\omega_1) = a_3(\omega_1)$



Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

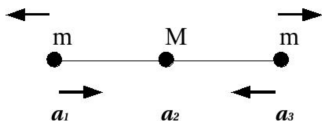
- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$



Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

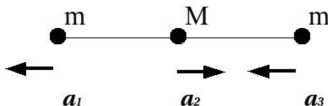
- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$



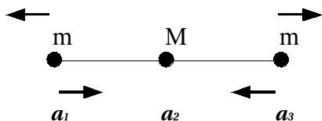
- Ahora para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$,

Tenemos $a_1(\omega_3) = a_3(\omega_3)$ y $a_2(\omega_3) = \frac{k - \omega_3^2 m}{k} a_1(\omega_3) \equiv -\frac{2m}{M} a_1(\omega_3)$

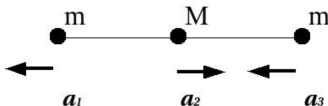


Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$



- Ahora para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$,
Tenemos $a_1(\omega_3) = a_3(\omega_3)$ y $a_2(\omega_3) = \frac{k - \omega_3^2 m}{k} a_1(\omega_3) \equiv -\frac{2m}{M} a_1(\omega_3)$



- Los modos normales reflejan que el momento lineal total de la molécula es constante, puesto que la fuerza externa total sobre la molécula es cero.

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0$

- Formulaci3n general de peque1as oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$

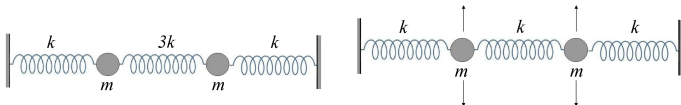
- Formulaci3n general de peque1as oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$

- Formulaci3n general de peque1as oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$
- Las soluciones generales son: $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n(t)$, $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$

- Formulaci3n general de peque1as oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$
- Las soluciones generales son: $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n(t)$, $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$
- Dos Osciladores Acoplados
 - $T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$, y $V = \frac{1}{2}k[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2]$
 - con las frecuencias normales: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$
- Las soluciones generales son: $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n(t)$, $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$
- Dos Osciladores Acoplados
 - $T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$, y $V = \frac{1}{2}k[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2]$
 - con las frecuencias normales: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
- La molécula de CO_2
 - Sistema lineal O-C-O: 3 masas, 2 resortes.
 - Tres modos normales: $\omega_1 = 0$: traslación; $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: O-C en oposición de fase; $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}(1 + 2m/M)}$: O-C en fase.

1. Encuentre las frecuencias y las configuraciones de los modos normales correspondientes a pequeñas oscilaciones longitudinales del sistema de dos masas y tres resortes.



2. Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones transversales de un sistema formado por dos masas m , conectadas entre sí y a las paredes por resortes horizontales de constante k cada uno.