Potencial efectivo

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

1 de marzo de 2025

Agenda

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\mathrm{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\mathrm{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\mathrm{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\mathrm{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}$
- La energía total será $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\mathrm{ef}}(r) = \text{cte.}$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$ $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\mathrm{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\mathrm{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}$
- La energía total será $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\mathrm{ef}}(r) = \text{cte.}$
- Una partícula de masa μ, moviéndose en la dimensión r con energía potencial $V_{\mathrm{ef}}(r)$.

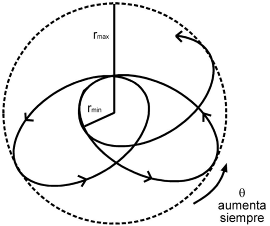
Las trayectorias 1/2

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\mathrm{ef}}(r)$

Las trayectorias 1/2

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\mathrm{ef}}(r)$
- Los puntos de retorno están dados por la condición $\dot{r} = 0$, i.e. $E = V_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} = 0$

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimiento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\mathrm{ef}}(r)$
- Los puntos de retorno están dados por la condición $\dot{r} = 0$, i.e. $E = V_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} = 0$
- Es una ecuación algebraica de segundo grado en r y pueden existir dos raíces reales, $r = r_{\text{mín}}, r = r_{\text{máx}}$.



- si $r_{\text{máx}} < \infty \quad \Rightarrow$ movimiento es finito, oscilatorio en r,
- si $r_{\text{máx}} \to \infty \quad \Rightarrow$ movimiento sin retorno,
- si $r_{\text{mín}} = r_{\text{máx}} \quad \Rightarrow$ movimiento es circular.

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$
4. De la ecuación para la energía tenemos $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} > 0$

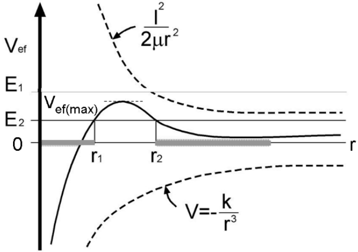
Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$
4. De la ecuación para la energía tenemos
$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} > 0$
5. Tomando el límite $r \to 0$ tendremos $\text{lím}_{r\to 0}\left[V(r)r^2\right] < -\frac{L^2}{2\mu}$

Las trayectorias 2/2

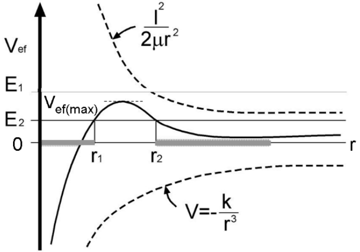
1. Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$
4. De la ecuación para la energía tenemos $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} > 0$
5. Tomando el límite $r \to 0$ tendremos $\lim_{r\to 0}\left[V(r)r^2\right] < -\frac{L^2}{2\mu}$
6. Consideremos un potencial atractivo de la forma $V(r) = -k/r^n$, entonces $\lim_{r\to 0}\left[V(r)r^2\right] < -\frac{L^2}{2\mu} \Rightarrow n > 2$
   - $V(r) = -k/r^3$ permite caer al centro, $r_{\text{mín}} = 0$
   - $V(r) = -k/r^2$, requiere $k > \frac{L^2}{2\mu}$ para caer al centro de atracción
   - $V(r) = -k/r$ no permite alcanzar $r_{\text{mín}} = 0$

- Si el Potencial $V = -\frac{k}{r^3}$ el potencial efectivo será $V_{\mathrm{ef}}(r) = -\frac{k}{r^3} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



Potencial $V = -\frac{k}{r^3}$

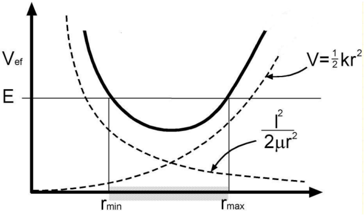
- Si el Potencial $V = -\frac{k}{r^3}$ el potencial efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{r^3} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



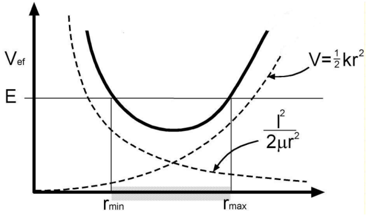
- El potencial efectivo exhibe un máximo $V_{\text{ef (máx)}}$ que representa una barrera de potencial si $E < V_{\text{ef (máx)}}$. Los posibles movimientos son
  - $E = E_1 > V_{\text{ef (máx)}}$; movimiento existe $\forall r$.
  - $E = E_2 < V_{\text{ef (máx)}}$; hay dos puntos de retorno r_1 y r_2 que satisfacen $E = V_{\text{ef}}$. El movimiento ocurre para $r \in [0, r_1]$ y para $r \geq r_2$. En Mecánica Clásica, el movimiento es imposible para $r \in [r_1, r_2]$.
  - $E < 0$; movimiento ocurre para $r \in [0, r_1]$.

Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$

- Si el Potencial $V = -\frac{k}{2\,r^2}$, el efectivo será $V_{\rm ef}(r) = -\frac{k}{2r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



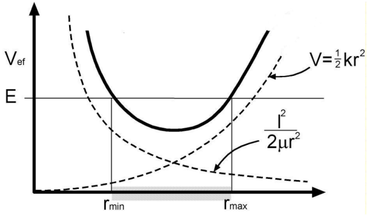
- Si el Potencial $V = -\frac{k}{2\,r^2}$, el efectivo será $V_{\rm ef}(r) = -\frac{k}{2r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- $V = -\frac{k}{2\,r^2}$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.

Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$

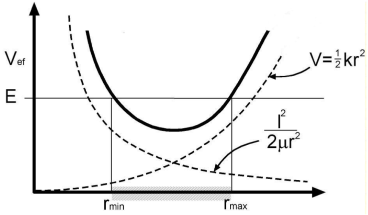
- Si el Potencial $V = -\frac{k}{2\,r^2}$, el efectivo será $V_{\mathrm{ef}}(r) = -\frac{k}{2r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- $V = -\frac{k}{2\,r^2}$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\mathrm{ef}}\,(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;

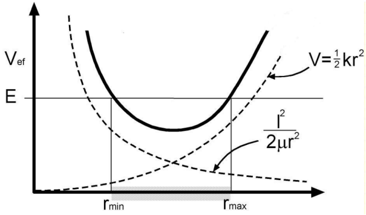
Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$

- Si el Potencial $V = -\frac{k}{2\,r^2}$, el efectivo será $V_{\mathrm{ef}}(r) = -\frac{k}{2r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- $V = -\frac{k}{2\,r^2}$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\mathrm{ef}}\,(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;
- Es un movimiento radial es oscilatorio.

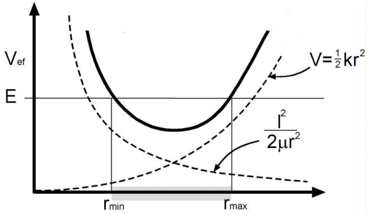
- Si el Potencial $V = -\frac{k}{2\,r^2}$, el efectivo será $V_{\rm ef}(r) = -\frac{k}{2r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- $V = -\frac{k}{2\,r^2}$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\rm ef}\,(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;
- Es un movimiento radial es oscilatorio.
- La fuerza radial $\mathbf{f} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = -kr\hat{\mathbf{r}} = -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$

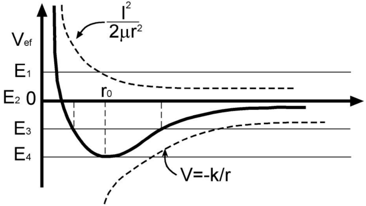
Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$

- Si el Potencial $V = -\frac{k}{2\,r^2}$, el efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{2r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



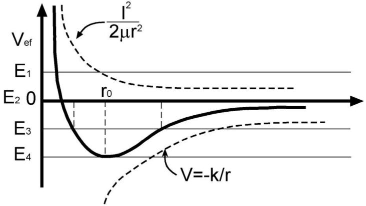
- $V = -\frac{k}{2\,r^2}$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\text{ef}}\,(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;
- Es un movimiento radial es oscilatorio.
- La fuerza radial $\mathbf{f} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = -kr\hat{\mathbf{r}} = -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$
- El movimiento radial es el resultado de dos oscilaciones simples, perpendiculares entre sí, con igual frecuencia $\omega_x^2 = \omega_y^2 = k/\mu$.

- El potencial es $V = -\frac{k}{r}$, el efectivo $V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



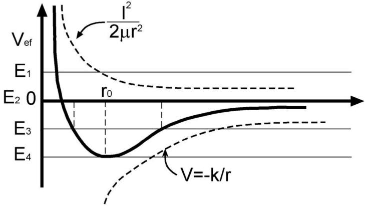
Potencial $V = -\frac{k}{r}$

- El potencial es $V = -\frac{k}{r}$, el efectivo $V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- El valor mínimo del potencial efectivo proviene de $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0$

- El potencial es $V = -\frac{k}{r}$, el efectivo $V_{\rm ef} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- El valor mínimo del potencial efectivo proviene de $\left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0$
- Los posibles movimientos para diferentes valores de la energía E son:
  - $E = E_1 > 0 \Rightarrow r_{\rm mín} > 0$ y $r_{\rm máx} \to \infty$; órbita abierta.
  - $E = E_2 = 0 \Rightarrow r_{\rm mín} > 0$ y $r_{\rm máx} \to \infty$; órbita abierta.
  - $E = E_3 < 0 \Rightarrow r \in [r_{\rm mín}, r_{\rm máx}]$; movimiento radial oscilatorio.
  - $E = E_4 = V_{\rm ef\ (mín)} < 0 \Rightarrow$; $r_{\rm mín} = r_{\rm máx} = r_0$; órbita circular con $r = r_0$.

Recapitulando

-

Para la discusión

-