Espacios pseudo-euclidianos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

20 de octubre de 2025

Agenda: Espacios pseudo-euclidianos

- La definición de **producto interno**, $\langle x|\, x\rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x|\, x\rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$

Espacios pseudo-euclidianos

- La definición de **producto interno**, $\langle x| \, x\rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x| \, x\rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$
- La definición de **norma** $\mathcal{N}\left(|v_i\rangle\right) \equiv \||v_i\rangle\|$, no es necesariamente positiva;

Espacios pseudo-euclidianos

- La definición de **producto interno**, $\langle x | x \rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x | x \rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$
- La definición de **norma** $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \| |v_i\rangle \|$, no es necesariamente positiva;
- La definición de **distancia**, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \|$, tampoco será necesariamente positiva.

Espacios pseudo-euclidianos

- La definición de **producto interno**, $\langle x| \, x\rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x| \, x\rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$
- La definición de **norma** $\mathcal{N}\left(|v_i\rangle\right) \equiv \| |v_i\rangle \|$, no es necesariamente positiva;
- La definición de **distancia**, $d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \|$, tampoco será necesariamente positiva.
- Resumiendo:

$$\langle x| \, x\rangle = \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) = \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{g}\left[|x_i\rangle, |x_j\rangle\right] = \left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right.$$

Espacios minkowskianos 1/2

- Consideremos una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_0\rangle, |\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$. Los vectores $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ son la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Espacios minkowskianos 1/2

- Consideremos una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_0\rangle, |\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$. Los vectores $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ son la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- La base del espacio dual de $\mathbb{M}^4$ será $\{\langle\mathrm{e}^0|, \langle\mathrm{e}^1|, \langle\mathrm{e}^2|, \langle\mathrm{e}^3|\}$. Construida a través de una métrica

$$\eta_{\alpha\beta}\langle\mathrm{e}^\alpha|\otimes\left\langle\mathrm{e}^\beta\right| \equiv \eta_{\beta\alpha}\left\langle\mathrm{e}^\beta\right|\otimes\langle\mathrm{e}^\alpha| \text{ y } \eta^{\alpha\beta}|\mathrm{e}_\alpha\rangle\otimes|\mathrm{e}_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha}|\mathrm{e}_\beta\rangle\otimes|\mathrm{e}_\alpha\rangle\,,$$

$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ y $\eta_{00} = \eta^{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta^{11} = -1$, $\eta_{22} = \eta^{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta^{33} = -1$ ($\eta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$), η con signo -2.

Espacios minkowskianos 1/2

- Consideremos una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_0\rangle, |\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$. Los vectores $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ son la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- La base del espacio dual de $\mathbb{M}^4$ será $\left\{\langle\mathrm{e}^0|, \langle\mathrm{e}^1|, \langle\mathrm{e}^2|, \langle\mathrm{e}^3|\right\}$. Construida a través de una métrica

$$\eta_{\alpha\beta}\langle\mathrm{e}^\alpha| \otimes \left\langle\mathrm{e}^\beta\right| \equiv \eta_{\beta\alpha}\left\langle\mathrm{e}^\beta\right| \otimes \langle\mathrm{e}^\alpha| \text{ y } \eta^{\alpha\beta}|\mathrm{e}_\alpha\rangle \otimes |\mathrm{e}_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha}|\mathrm{e}_\beta\rangle \otimes |\mathrm{e}_\alpha\rangle ,$$

$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ y $\eta_{00} = \eta^{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta^{11} = -1$, $\eta_{22} = \eta^{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta^{33} = -1$ ($\eta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$), η con signo -2.
- Las componentes covariantes y contravariantes serán

$$\left(\eta_{\alpha\beta}\langle\mathrm{e}^\alpha| \otimes \left\langle\mathrm{e}^\beta\right|\right)|a\rangle = a^\sigma\left(\eta_{\alpha\beta}\langle\mathrm{e}^\alpha| \otimes \left\langle\mathrm{e}^\beta\right|\right)|\mathrm{e}_\sigma\rangle =$$

$$a^\sigma\eta_{\alpha\beta}\left\langle\mathrm{e}^\beta\right|\mathrm{e}_\sigma\rangle\langle\mathrm{e}^\alpha| = a^\sigma\eta_{\alpha\beta}\delta^\beta_\sigma\langle\mathrm{e}^\alpha| = a^\sigma\eta_{\alpha\sigma}\langle\mathrm{e}^\alpha| \equiv a_\alpha\langle\mathrm{e}^\alpha|$$

Espacios minkowskianos 1/2

- Consideremos una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_0\rangle, |\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$. Los vectores $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ son la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- La base del espacio dual de $\mathbb{M}^4$ será $\{\langle\mathrm{e}^0|, \langle\mathrm{e}^1|, \langle\mathrm{e}^2|, \langle\mathrm{e}^3|\}$. Construida a través de una métrica

$$\eta_{\alpha\beta}\langle\mathrm{e}^\alpha|\otimes\left\langle\mathrm{e}^\beta\right| \equiv \eta_{\beta\alpha}\left\langle\mathrm{e}^\beta\right|\otimes\langle\mathrm{e}^\alpha| \text{ y } \eta^{\alpha\beta}|\mathrm{e}_\alpha\rangle\otimes|\mathrm{e}_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha}|\mathrm{e}_\beta\rangle\otimes|\mathrm{e}_\alpha\rangle\,,$$

$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ y $\eta_{00} = \eta^{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta^{11} = -1$, $\eta_{22} = \eta^{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta^{33} = -1$ ($\eta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$), η con signo -2.
- Las componentes covariantes y contravariantes serán

$$\left(\eta_{\alpha\beta}\langle\mathrm{e}^\alpha|\otimes\left\langle\mathrm{e}^\beta\right|\right)|a\rangle = a^\sigma\left(\eta_{\alpha\beta}\langle\mathrm{e}^\alpha|\otimes\left\langle\mathrm{e}^\beta\right|\right)|\mathrm{e}_\sigma\rangle =$$

$$a^\sigma\eta_{\alpha\beta}\left\langle\mathrm{e}^\beta\right.|\mathrm{e}_\sigma\rangle\langle\mathrm{e}^\alpha| = a^\sigma\eta_{\alpha\beta}\delta^\beta_\sigma\langle\mathrm{e}^\alpha| = a^\sigma\eta_{\alpha\sigma}\langle\mathrm{e}^\alpha| \equiv a_\alpha\langle\mathrm{e}^\alpha|$$

- Entonces

$$a^\sigma\eta_{\sigma\alpha} = a_\alpha \quad\Rightarrow\quad a^0 = a_0,\quad a^1 = -a_1,\quad a^2 = -a_2,\quad a^3 = -a_3.$$

Espacios minkowskianos 2/2

- Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P_{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$

Espacios minkowskianos 2/2

- Del mismo modo se "suben" y se "bajan" índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P_{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$
- el producto interno $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle = x^{\alpha} y_{\alpha} = y^{\alpha} x_{\alpha} = x^{\alpha} y^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x_{\alpha} y_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$

Espacios minkowskianos 2/2

- Del mismo modo se "suben" y se "bajan" índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P^{\gamma\sigma\epsilon}_{\alpha} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$
- el producto interno $\langle x \, | y \rangle = \langle y \, | x \rangle = x^{\alpha} y_{\alpha} = y^{\alpha} x_{\alpha} = x^{\alpha} y^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x_{\alpha} y_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$
- la norma de un vector, $\left\| | x \rangle \right\|^2 = \langle x \, | x \rangle = x_{\alpha} x^{\beta} \langle \mathrm{e}^{\alpha} \, | \mathrm{e}_{\beta} \rangle = x_{\alpha} x^{\alpha} = x_{\alpha} x_{\beta} \, \eta^{\alpha\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} \, \eta_{\alpha\beta} = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$

- Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P_{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$
- el producto interno $\langle x \,|y\rangle = \langle y \,|x\rangle = x^{\alpha} y_{\alpha} = y^{\alpha} x_{\alpha} = x^{\alpha} y^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x_{\alpha} y_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$
- la norma de un vector, $\| |x\rangle \|^2 = \langle x \,|x\rangle = x_{\alpha} x^{\beta} \langle \mathrm{e}^{\alpha} \,|\mathrm{e}_{\beta}\rangle = x_{\alpha} x^{\alpha} = x_{\alpha} x_{\beta}\ \eta^{\alpha\beta} = x^{\alpha} x^{\beta}\ \eta_{\alpha\beta} = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$
- Para una base genérica, $\{|u_{\beta}\rangle\}$ (no necesariamente ortogonal) de un espacio vectorial con producto interno. El desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$(\mathrm{d}s)^2 \equiv \langle \mathrm{d}r \,|\mathrm{d}r\rangle = (\mathrm{d}\tilde{x}_{\alpha}\ \langle \tilde{u}^{\alpha}|) \left(\mathrm{d}\tilde{x}^{\beta}\ \ |\tilde{u}_{\beta}\rangle\right) =$$

$$\mathrm{d}\tilde{x}_{\beta}\ \mathrm{d}\tilde{x}^{\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}\ \mathrm{d}\tilde{x}^{\alpha}\mathrm{d}\tilde{x}^{\beta} = \mathrm{d}t^2 - \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 - \left(\mathrm{d}x^3\right)^2\ ,$$

Los Postulados de la Relatividad Especial

La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más. Que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números: $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y que, además, hay que suponer:

1. *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.

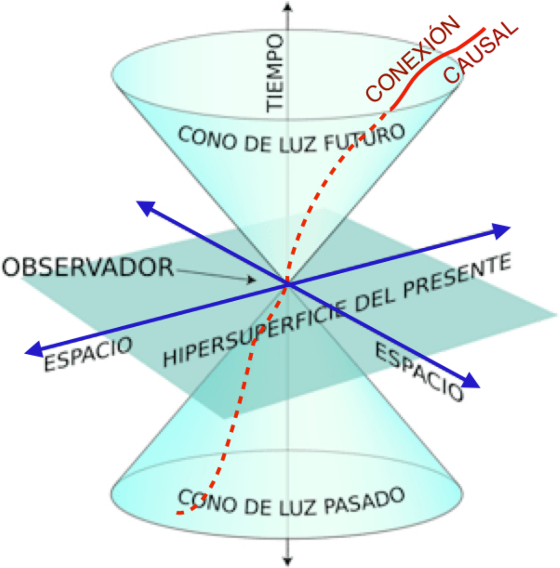
La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más. Que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números: $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y que, además, hay que suponer:

1. *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío*: La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, y es independiente de la velocidad de la fuente de luz respecto a un observador en particular.

La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más. Que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números: $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y que, además, hay que suponer:

1. *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío*: La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, y es independiente de la velocidad de la fuente de luz respecto a un observador en particular.
3. Estas dos suposiciones se concretan en una simple propuesta matemática: **el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base**.

El Cono de Luz



Distancias y transformaciones de coordenadas

Las distancias entre dos elementos de un espacio vectorial puede ser construida a partir de la norma y la norma a partir del producto interno:
$|| \, |y - x\rangle \, ||^2 \equiv$

$$\langle y - x \, | y - x\rangle \begin{cases} < 0 & \text{tipo espacio: desconectados causalmente.} \\ = 0 & \text{tipo luz: posible conexión causal lumínica.} \\ > 0 & \text{tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{cases}$$

Construyamos ahora el tipo de transformación de coordenadas $x^{\mu} = x^{\mu}\left(\tilde{x}^{\alpha}\right) \Leftrightarrow \tilde{x}^{\mu} = \tilde{x}^{\mu}\left(x^{\alpha}\right)$, que mantiene estos dos supuestos:

- El producto interno de dos vectores es independiente de la base que expande el espacio vectorial
  $\langle x \, | y\rangle = \left(x_{\alpha} \langle \mathrm{e}^{\alpha} |\right) \left(y^{\beta} \, |\mathrm{e}_{\beta}\rangle\right) \equiv \left(\tilde{x}_{\sigma} \langle \tilde{\mathrm{e}}^{\sigma} |\right) \left(\tilde{y}^{\alpha} \, |\tilde{\mathrm{e}}_{\alpha}\rangle\right) \;\Leftrightarrow$
  $x^{\alpha} y_{\alpha} \equiv \tilde{x}^{\beta} \tilde{y}_{\beta} \;\Leftrightarrow\; x^{\alpha} y^{\beta} \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^{\alpha} \tilde{y}^{\beta} \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \,,$

Distancias y transformaciones de coordenadas

Las distancias entre dos elementos de un espacio vectorial puede ser construida a partir de la norma y la norma a partir del producto interno: $\| \, |y - x\rangle \, \|^2 \equiv$

$$\langle y - x \, | y - x\rangle \left\{ \begin{array}{ll} < 0 & \text{tipo espacio: desconectados causalmente.} \\ = 0 & \text{tipo luz: posible conexión causal lumínica.} \\ > 0 & \text{tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{array} \right.$$

Construyamos ahora el tipo de transformación de coordenadas $x^\mu = x^\mu (\tilde{x}^\alpha) \Leftrightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu (x^\alpha)$, que mantiene estos dos supuestos:

- El producto interno de dos vectores es independiente de la base que expande el espacio vectorial
  $\langle x \, | y\rangle = (x_\alpha \langle \mathrm{e}^\alpha |) \left(y^\beta \, |\mathrm{e}_\beta\rangle \right) \equiv (\tilde{x}_\sigma \langle \tilde{\mathrm{e}}^\sigma |) \left(\tilde{y}^\alpha \, |\tilde{\mathrm{e}}_\alpha\rangle \right) \Leftrightarrow$
  $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \, ,$
- Las componentes del tensor métricos son invariantes bajo transformaciones de coordenadas
  $\mathbf{g} \left[|\mathrm{e}_\mu\rangle \, , |\mathrm{e}_\nu\rangle \right] \equiv \tilde{\mathbf{g}} \left[|\tilde{\mathrm{e}}_\mu\rangle \, , |\tilde{\mathrm{e}}_\nu\rangle \right] \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \, .$

Cuáles transformaciones de coordenadas

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$

Cuáles transformaciones de coordenadas

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}$.

Cuáles transformaciones de coordenadas

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}$.
- Derivando respecto a x^γ tendremos que: $0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right)$.

Cuáles transformaciones de coordenadas

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}$.
- Derivando respecto a x^γ tendremos que:
  $0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right)$.
- al paréntesis anulado le añadimos una con los índices α y γ intercambiados y, adicionalmente, le sustraemos una con los índices γ y β in-
  tercambiados. Claramente, estamos añadiendo y sustrayendo ceros. $0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right)$.

Cuáles transformaciones de coordenadas

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^{\alpha}y_{\alpha} \equiv \tilde{x}^{\beta}\tilde{y}_{\beta} \Rightarrow x^{\alpha}y^{\beta}\eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^{\alpha}\tilde{y}^{\beta}\tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^{\alpha}y^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}x^{\alpha}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}}y^{\beta}\tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}}\eta_{\nu\mu}$.
- Derivando respecto a x^{γ} tendremos que: $0 = \eta_{\nu\mu}\left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}\right)$.
- al paréntesis anulado le añadimos una con los índices α y γ intercambiados y, adicionalmente, le sustraemos una con los índices γ y β in-
tercambiados. Claramente, estamos añadiendo y sustrayendo ceros. $0 = \eta_{\nu\mu}\left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\alpha}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\beta}}\right)$.
- El último término anula el segundo y el penúltimo el cuarto, entonces $0 = 2\eta_{\nu\mu}\frac{\partial^2 \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} \Rightarrow \tilde{x}^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}x^{\mu} + a^{\nu}$.

Transformaciones de Lorentz

- Estas transformaciones lineales $\tilde{x}^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + a^\nu$, son las transformaciones de inhomogeneas de Lorentz o de Poincaré

Transformaciones de Lorentz

- Estas transformaciones lineales $\tilde{x}^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu} + a^{\nu}$, son las transformaciones de inhomogeneas de Lorentz o de Poincaré
- Si $a^{\nu} = 0 \Rightarrow \tilde{x}^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{0} x^{0} + \Lambda^{\alpha}_{1} x^{1} + \Lambda^{\alpha}_{2} x^{2} + \Lambda^{\alpha}_{3} x^{3}$, donde $\Lambda^{0}_{0} = 1, \quad \Lambda^{i}_{0} = \Lambda^{0}_{j} = 0, \quad \mathrm{y} \quad \Lambda^{i}_{j} = R^{i}_{j}$. con: $i, j = 1, 2, 3$, y donde R^{i}_{j} es una matriz de rotación.

Transformaciones de Lorentz

- Estas transformaciones lineales $\tilde{x}^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + a^\nu$, son las transformaciones de inhomogeneas de Lorentz o de Poincaré
- Si $a^\nu = 0 \Rightarrow \tilde{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_0 x^0 + \Lambda^\alpha_1 x^1 + \Lambda^\alpha_2 x^2 + \Lambda^\alpha_3 x^3$, donde $\Lambda^0_0 = 1, \quad \Lambda^i_0 = \Lambda^0_j = 0, \quad \mathrm{y} \quad \Lambda^i_j = R^i_j$. con: $i, j = 1, 2, 3$, y donde R^i_j es una matriz de rotación.
- Es inmediato demostrar que este tipo de transformaciones deja invariante el intervalo. Primero, notemos que: $\tilde{\eta}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta} \;\Rightarrow\; \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\gamma} = \delta^\mu_\gamma = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta}\eta_{\nu\gamma} \;\Rightarrow\; \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\alpha_\gamma = \delta^\mu_\gamma$
  Como $\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha$, entonces:
  $\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \tilde{\eta}_{\mu\nu}\mathrm{d}\tilde{x}^\mu \mathrm{d}\tilde{x}^\nu \equiv \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \Lambda^\nu_\beta \mathrm{d}x^\beta = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}s^2\,.$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $\mathrm{d}x^i = 0$:

$$\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \ \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\tilde{t} & = \Lambda^0_0 \, \mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}\tilde{x}^i & = \Lambda^i_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \Lambda^i_0 \, \mathrm{d}t \qquad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $\mathrm{d}x^i = 0$:

$$\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{d}\tilde{t} & = \Lambda^0_0\, \mathrm{d}t \\ & \\ \mathrm{d}\tilde{x}^i & = \Lambda^i_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \Lambda^i_0\, \mathrm{d}t \qquad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

- Las ecuaciones anteriores nos imponen:
$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \;\Rightarrow\; v^i = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}^i}{\mathrm{d}\tilde{t}} \quad \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i\, \Lambda^0_0\,.$
- Con
$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \left(\Lambda^1_0\right)^2 - \left(\Lambda^2_0\right)^2 - \left(\Lambda^3_0\right)^2\,,$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $\mathrm{d}x^i = 0$:

$$\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{d}\tilde{t} & = \Lambda^0_0\,\mathrm{d}t \\ & \\ \mathrm{d}\tilde{x}^i & = \Lambda^i_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \Lambda^i_0\,\mathrm{d}t \qquad \text{con } i = 1,2,3. \end{array} \right.$$

- Las ecuaciones anteriores nos imponen:
$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \;\Rightarrow\; v^i = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}^i}{\mathrm{d}\tilde{t}} \quad \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i\,\Lambda^0_0\,.$

- Con
$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \left(\Lambda^1_0\right)^2 - \left(\Lambda^2_0\right)^2 - \left(\Lambda^3_0\right)^2\,,$

- Donde $\Lambda^0_0 = \gamma\,, \quad \Lambda^i_0 = \gamma\, v^i$, con
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left[(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2\right]}}\,,$

Transformaciones y observadores

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $\mathrm{d}x^i = 0$:

$$\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{d}\tilde{t} & = \Lambda^0_0\,\mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}\tilde{x}^i & = \Lambda^i_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \Lambda^i_0\,\mathrm{d}t \qquad \text{con } i = 1,2,3. \end{cases}$$

- Las ecuaciones anteriores nos imponen:
$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \;\Rightarrow\; v^i = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}^i}{\mathrm{d}\tilde{t}} \quad \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i\,\Lambda^0_0\,.$
- Con
$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \left(\Lambda^1_0\right)^2 - \left(\Lambda^2_0\right)^2 - \left(\Lambda^3_0\right)^2\,,$
- Donde $\Lambda^0_0 = \gamma\,, \quad \Lambda^i_0 = \gamma\, v^i$, con
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left[(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2\right]}}\,,$
- Finalmente $\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{(\mathbf{v})^2} \equiv \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{v^k v_k}\,.$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $\mathrm{d}x^i = 0$:
$$\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{d}\tilde{t} & = \Lambda^0_0\,\mathrm{d}t \\ & \\ \mathrm{d}\tilde{x}^i & = \Lambda^i_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \Lambda^i_0\,\mathrm{d}t \qquad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$
- Las ecuaciones anteriores nos imponen:
$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \;\Rightarrow\; v^i = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}^i}{\mathrm{d}\tilde{t}} \quad \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i\,\Lambda^0_0\,.$$
- Con
$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \left(\Lambda^1_0\right)^2 - \left(\Lambda^2_0\right)^2 - \left(\Lambda^3_0\right)^2\,,$$
- Donde $\Lambda^0_0 = \gamma\,, \quad \Lambda^i_0 = \gamma\,v^i$, con
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left[(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2\right]}}\,,$$
- Finalmente $\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{(\mathbf{v})^2} \equiv \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{v^k v_k}\,.$
- La separación temporal $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^i)^2 = (\Delta t)^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = \Delta t\,,$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $\mathrm{d}x^i = 0$:
$$\mathrm{d}\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{d}\tilde{t} & = \Lambda^0_0\, \mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}\tilde{x}^i & = \Lambda^i_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \Lambda^i_0\, \mathrm{d}t \qquad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$
- Las ecuaciones anteriores nos imponen:
$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \;\Rightarrow\; v^i = \frac{\mathrm{d}\tilde{x}^i}{\mathrm{d}\tilde{t}} \quad \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i\, \Lambda^0_0\,.$
- Con
$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \left(\Lambda^1_0\right)^2 - \left(\Lambda^2_0\right)^2 - \left(\Lambda^3_0\right)^2\,,$
- Donde $\Lambda^0_0 = \gamma\,, \quad \Lambda^i_0 = \gamma\, v^i$, con
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left[(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2\right]}}\,,$
- Finalmente $\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{(\mathbf{v})^2} \equiv \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{v^k v_k}\,.$
- La separación temporal $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^i)^2 = (\Delta t)^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = \Delta t\,,$
- Un segundo observador tendrá el mismo elemento de línea:
$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \mathrm{d}\tilde{t}^2 - (\mathrm{d}\tilde{x}^i)^2 = \left(1 - \mathbf{v}^2\right) \mathrm{d}\tilde{t} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\tilde{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\,,$

Recapitulando 1/3

En presentación consideramos

1. Los espacios pseudo-euclidianos
   1. A partir de la extensión del concepto de **norma** $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \| |v_i\rangle \|$, (positiva, negativa o nula) definimos los espacios pseudo-euclidianos.
   2. La definición de **distancia**, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \|$, tampoco es necesariamente positiva.

En presentación consideramos

1. Los espacios pseudo-euclidianos
   1. A partir de la extensión del concepto de **norma** $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \| |v_i\rangle \|$, (positiva, negativa o nula) definimos los espacios pseudo-euclidianos.
   2. La definición de **distancia**, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \|$, tampoco es necesariamente positiva.
2. Construimos un espacio vectorial Minkowskiano $\mathbb{M}^4$, tetradimiensional
   1. Con producto interno $\langle x | y\rangle = \langle y | x\rangle = x^\alpha y_\alpha = y^\alpha x_\alpha = x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = x_\alpha y_\beta \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$
   2. Con norma, $\| |x\rangle \|^2 = \langle x | x\rangle = x_\alpha x^\beta \langle \mathrm{e}^\alpha | \mathrm{e}_\beta\rangle = x_\alpha x^\alpha = x_\alpha x_\beta \ \eta^{\alpha\beta} = x^\alpha x^\beta \ \eta_{\alpha\beta} = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$
   3. Con distancia, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \| = \left(x^0 - y^0\right)^2 - \left(x^1 - y^1\right)^2 - \left(x^2 - y^2\right)^2 - \left(x^3 - y^3\right)^2$,
   4. Con métrica $\eta_{\alpha\beta}$, con $\eta_{00} = \eta^{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta^{11} = -1$, $\eta_{22} = \eta^{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta^{33} = -1$ ($\eta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$), η con signo -2,
   5. entonces $a^\sigma \eta_{\sigma\alpha} = a_\alpha \ \Rightarrow a^0 = a_0, \ a^1 = -a_1, \ a^2 = -a_2, \ a^3 = -a_3$.

Recapitulando 2/3

1. Discutimos los fundamentos de la relatividad especial
   - *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
   - *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío*: La velocidad de la luz en el vacío es independiente de la velocidad de la fuente de luz.
   - Estas suposiciones se concretan en que **el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base**.

Recapitulando 2/3

1. Discutimos los fundamentos de la relatividad especial
   - *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
   - *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío*: La velocidad de la luz en el vacío es independiente de la velocidad de la fuente de luz.
   - Estas suposiciones se concretan en que **el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base**.
2. Las distancias $\| \, |y - x\rangle \, \|^2$ entre dos elementos de $\mathbb{M}^4$ representan físicamente eventos:

$$\langle y - x \, | y - x \rangle \begin{cases} < 0 & \text{tipo espacio: desconectados causalmente.} \\ = 0 & \text{tipo luz: posible conexión causal lumínica.} \\ > 0 & \text{tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{cases}$$

Recapitulando 2/3

1. Discutimos los fundamentos de la relatividad especial
   - *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
   - *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío*: La velocidad de la luz en el vacío es independiente de la velocidad de la fuente de luz.
   - Estas suposiciones se concretan en que **el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base**.
2. Las distancias $\| \, |y - x\rangle \, \|^2$ entre dos elementos de $\mathbb{M}^4$ representan físicamente eventos:
$$\langle y - x \, | y - x \rangle \begin{cases} < 0 & \text{tipo espacio: desconectados causalmente.} \\ = 0 & \text{tipo luz: posible conexión causal lumínica.} \\ > 0 & \text{tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{cases}$$
3. Bajo las suposiciones que: el producto interno y la métrica son invariantes, construimos la transformación de coordenadas mas general que hace garantiza el **Principio de Relatividad**. Estas transformaciones lineales $\tilde{x}^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + a^\nu$, son las transformaciones de inhomogeneas de Lorentz o de Poincaré.

Recapitulando 3/3

En presentación consideramos

1. Particularizamos para las transformaciones homogéneas de Lorentz $\tilde{x}^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}$

Recapitulando 3/3

En presentación consideramos

1. Particularizamos para las transformaciones homogéneas de Lorentz $\tilde{x}^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}$
2. Dedujimos la forma general de las transformaciones de Lorentz
   - $\Lambda^0_0 = \gamma\,, \quad \Lambda^i_0 = \gamma\, v^i$, con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left[(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2\right]}}\,,$
   - $\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{(\mathbf{v})^2} \equiv \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{v^k v_k}\,.$

   Donde las v^i son las componentes de la velocidad entre los distintos observadores

Para la discusión

Considere el tensor de Maxwell definido como:

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix}, \text{ con: } \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{E} = (E^x, E^y, E^z)$ y $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente, medidos por un observador O en coordenadas cartesianas.

1. Si un observador mide un campo eléctrico $\mathbf{E} = E^x\hat{\imath}$ y ningún campo magnético ¿Cuáles campos, $F_{\mu\alpha}$, medirá otro observador que viaja con una velocidad respecto al primero de $\boldsymbol{\beta} = v\hat{\imath}$?
2. Demuestre que las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{J}$, y $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ se pueden expresar como: $\frac{\partial}{\partial x^\nu}F^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$, donde $J^\mu = (c\rho, J^1, J^2, J^3)$ y $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$,