Hamilton Jacobi

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

3 de diciembre de 2024

Agenda

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q\left(q_j(0), p_j(0)\right), P_i = p\left(q_j(0), p_j(0)\right)$.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))\,, P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)\,, \quad p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))\,, P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)\,, \quad p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, tal que $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$, entonces existe una función generadora $\mathcal{F}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$, $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$, $\quad p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i =$ cte, $Q_i \equiv \beta_i =$ cte, tal que $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$, entonces existe una función generadora $\mathcal{F}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
- Esta condición es la ecuación de Hamilton-Jacobi, para una $\mathcal{F}$.

El Principio de Mínima Acción 1/2

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$

El Principio de Mínima Acción 1/2

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$

El Principio de Mínima Acción 1/2

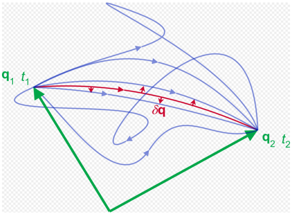
- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.

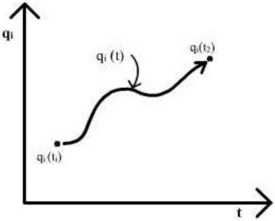
El Principio de Mínima Acción 1/2

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.

El Principio de Mínima Acción 1/2

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.
- La acción dependerá de las trayectorias y del tiempo, $S = S\left(q_i, t\right)$.





El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora tipo $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i, t\right)$, tal que $P_i = \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i = \beta_i = \text{cte}$.

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + H(p,q) = 0$

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + H(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0.$

  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + H(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0.$
  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + H(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$.
  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = E$

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + H(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$. Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = E$
- Buscamos una solución por separación de variables, $S(q,E,t) = W(q,E) - Et$, con $P = E = \alpha$ constante de integración

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + H(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$. Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = E$
- Buscamos una solución por separación de variables, $S(q,E,t) = W(q,E) - Et$, con $P = E = \alpha$ constante de integración
- Entonces, $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = E \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \left(2mE - m^2\omega^2 q^2\right)^{1/2} \Rightarrow,$ $W(q,E) = \int \left(2mE - m^2\omega^2 q^2\right)^{1/2} dq \equiv S(q,E,t) + Et$

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar las relaciones de la transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales, $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$.
  Mientras $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar las relaciones de la transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales, $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$.
  Mientras $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar las relaciones de la transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales, $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$.
  Mientras $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta$ =cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q, E, t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta')$, con $\quad \beta' = Q\omega =$ cte.