Cuerpo Rígido: ángulos y velocidades de Euler

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



30 de octubre de 2024

Agenda



- Definiciones
- Desplazamiento general del cuerpo rígido
- 3 Velocidades en un cuerpo rígido
- Precesión, nutación y rotación
- lacktriangle Velocidades de Euler
- 6 Transformaciones entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio
- Sección

Definiciones

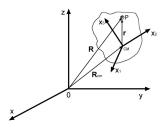


• Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas

Definiciones



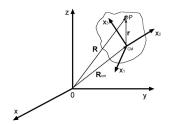
- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



Definiciones



- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



- Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:
 - Un sistema inercial o laboratorio, denotado por (x, y, z) y con origen en un punto fijo O
 - Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa (CM), identificado por (x_1, x_2, x_3)



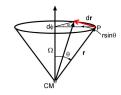
- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
 - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) .



- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
 - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) .
 - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\bf R$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$

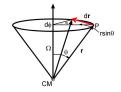


- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
 - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) .
 - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\bf R$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$
- ullet Un desplazamiento infinitesimal de P será $d{f R}=d{f R}_{
 m cm}+d{f r}$





- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
 - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) .
 - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\bf R$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\rm cm} + d\mathbf{r}$



 Un cambio infinitesimal dr sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector r, no a un cambio de su magnitud



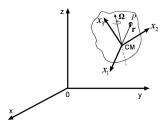
• Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector \mathbf{r} , entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.



- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector \mathbf{r} , entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $d\mathbf{r} = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$

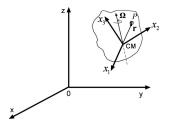


- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector \mathbf{r} , entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $d\mathbf{r} = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$





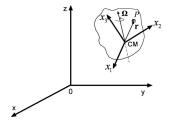
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector \mathbf{r} , entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $d\mathbf{r} = (\mathbf{r} \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



• $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x,y,z), $\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x,y,z), $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.



- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector \mathbf{r} , entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $d\mathbf{r} = (\mathbf{r} \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$

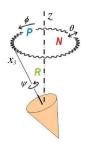


- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x, y, z), $\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z), $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.
- ullet La dirección de la velocidad angular instantánea $oldsymbol{\Omega}$ es la misma que la del vector $d\phi$

Precesión, nutación y rotación



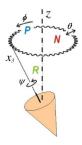
- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
 - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,



Precesión, nutación y rotación



- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
 - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
 - nutación: inclinación con respecto al eje fijo y

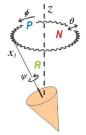


- Angulo Euler de precesión, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
 - Angulo Euler de nutación, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3 .

Precesión, nutación y rotación



- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
 - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
 - nutación: inclinación con respecto al eje fijo y
 - rotación: rotación del cuerpo sobre sí mismo.



- Angulo Euler de precesión, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
 - Angulo Euler de nutación, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3 .
 - Angulo Euler de rotación, $\psi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje x_3 , sobre el plano (x_1, x_2) , medido desde N a x_1 .



- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
 - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
 - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
 - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$



- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
 - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
 - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
 - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea Ω es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.



- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
 - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
 - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
 - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea Ω es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.



- Las velocidades angulares $\dot{\phi},\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1,x_2,x_3) como
 - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
 - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
 - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea Ω es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.
- Para cada componente Ω_i , respecto al sistema centro de masa, tenemos $\Omega_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i$, i = 1, 2, 3.

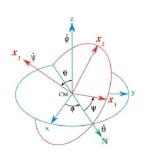
$$\Omega_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

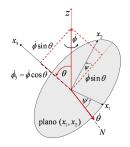
$$\Omega_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi$$

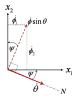
$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

Componentes y velocidades angulares











• La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ) .



- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ) .
- Si \mathbf{r}_L son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}} \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U} \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j \tilde{r}^j$



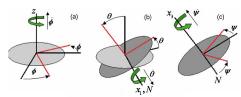
- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ) .
- Si \mathbf{r}_L son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xvz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}} \, \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_i \, r^j$

$$\mathbf{r}_L = \mathbb{U} \, \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j \, \tilde{r}^j$$

 $\bullet \ \, \mathsf{Claramente} \ \, \mathbb{U} \tilde{\mathbb{U}} \equiv \tilde{\mathbb{U}} \mathbb{U} = \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{\mathbb{I}} \mathbb{I} = \mathbb{I} \mathbb{I}^{-1}$



- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler $(\phi, \, \theta, \, \psi)$.
- Si \mathbf{r}_L son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\,r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\,\mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\,\tilde{r}^j$
- Rotamos tres veces \tilde{S}_{x_1,x_2,x_3} respecto a $S_{x,y,z}$.



$$\tilde{\mathbb{U}}_{\phi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos \phi & \operatorname{sen} \phi & 0 \\ -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \ \tilde{\mathbb{U}}_{\theta} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\psi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi & 0 \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$



• En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$



ullet En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}=\tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\phi\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi - \sin\theta\cos\phi & \cos\phi & \cos\psi\sin\theta \end{pmatrix}$$

• Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}.$



• En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi & -\sin\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\phi \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.
- $\begin{array}{c} \bullet \hspace{0.5cm} \text{Por lo tanto} \hspace{0.1cm} \tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \\ \end{array}$



- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi & \cos\phi\cos\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$
- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.
- $\begin{array}{c} \bullet \hspace{0.5cm} \text{Por lo tanto} \hspace{0.1cm} \tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \hspace{0.1cm} \tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{array}$
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1}=\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^T$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.



- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi \cos\psi\cos\phi \cos\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\phi \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\cos\phi & \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\psi\sin\phi\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\cos\phi & \cos\psi\sin\phi \end{pmatrix}$
- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}_{\eta\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.
- $\begin{array}{c} \bullet \hspace{0.5cm} \text{Por lo tanto} \hspace{0.1cm} \tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \left(\begin{array}{ccc} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \\ \end{array}$
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1}=\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{T}$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.

$$\tilde{\mathbb{U}}^{-1} = \tilde{\mathbb{U}}^T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & -\sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \phi \end{pmatrix}$$

