

# Polinomios de Legendre

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



18 de agosto de 2021

- 1 Fórmula de Rodrigues
- 2 Ortogonalidad, norma y expansión de funciones
- 3 Ecuación diferencial
- 4 Relación de recurrencia y función generatriz
- 5 Potencial electrostático de un dipolo
- 6 Recapitulando

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weiernstrass**

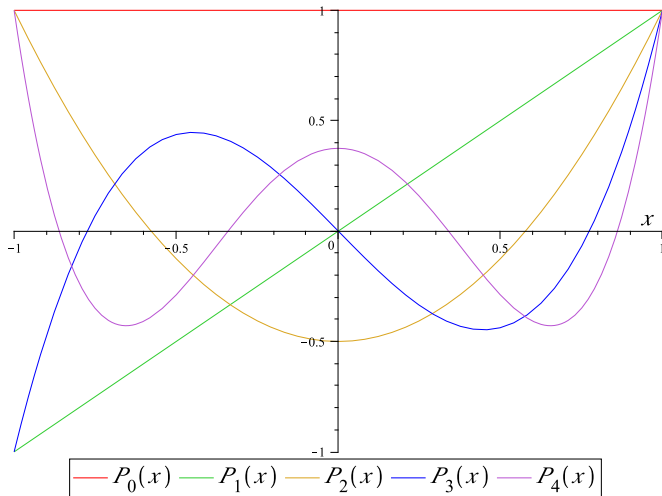
Cualquier función continua  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $x \in [a, b]$  podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un  $n$  suficientemente grande y un  $\epsilon$  suficientemente pequeño

$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass**  
Cualquier función continua  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $x \in [a, b]$  podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un  $n$  suficientemente grande y un  $\epsilon$  suficientemente pequeño  
$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$
- La base ortonormal de **Polinomios de Legendre** en el intervalo cerrado  $x \in [-1, 1]$  vienen contruidos a partir de la Fórmula de Rodríguez  $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $P_0(x) = 1$ .

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass**  
Cualquier función continua  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $x \in [a, b]$  podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un  $n$  suficientemente grande y un  $\epsilon$  suficientemente pequeño  
 $|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$
- La base ortonormal de **Polinomios de Legendre** en el intervalo cerrado  $x \in [-1, 1]$  vienen contruidos a partir de la Fórmula de Rodríguez  $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $P_0(x) = 1$ .
- Esto es:

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = 1 & P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$



$P_n(x)$  tiene  $n$  raíces reales en el intervalo  $(-1, 1)$

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ .

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ .

- La norma de los polinomios de Legendre es  $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$ .



- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ .

- La norma de los polinomios de Legendre es  $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$ .
- Los Polinomios de Legendre son un conjunto completo de funciones y expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado

$$x \in [-1, 1], \text{ esto es } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2} \left[ \int_{-1}^1 f(t)P_k(t)dt \right]}_{a_k} P_k(x).$$

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es  $\delta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ ; y  $\delta_{\beta\beta} = 1$ .

- La norma de los polinomios de Legendre es  $\int_{-1}^1 P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$ .
- Los Polinomios de Legendre son un conjunto completo de funciones y expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado

$$x \in [-1, 1], \text{ esto es } f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} \left[ \int_{-1}^1 f(t)P_k(t)dt \right]}_{a_k} P_k(x).$$

- Esto es  $f(x) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)dt + \frac{3}{2} \left[ \int_{-1}^1 tf(t)dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[ \int_{-1}^1 (3t^2 - 1)f(t)dt \right] P_2(x) + \\ & + \frac{7}{4} \left[ \int_{-1}^1 (5t^3 - 3t)f(t)dt \right] P_3(x) + \\ & \frac{9}{16} \left[ \int_{-1}^1 (35t^4 - 30t^2 + 3)f(t)dt \right] P_4(x) + \dots \end{aligned}$$

- Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0$$

- Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria
$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0$$
- ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones

$n$	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_0(x)}{dx} = 0$	$P_0(x) = 1$
1	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_1(x)}{dx} + 2 P_1(x) = 0$	$P_1(x) = x$
2	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_2(x)}{dx} + 6 P_2(x) = 0$	$P_2(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_3(x)}{dx} + 12 P_3(x) = 0$	$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es  $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ . Podremos generar todos los polinomios si recordamos que  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ .

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es  $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ . Podremos generar todos los polinomios si recordamos que  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ .
- La función generatriz  $\mathcal{P}(t, x)$  de los polinomios de Legendre, es:  
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los  $P_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para  $|2xt + t^2| < 1$ .

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es  $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ . Podremos generar todos los polinomios si recordamos que  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ .
- La función generatriz  $\mathcal{P}(t, x)$  de los polinomios de Legendre, es:  
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los  $P_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para  $|2xt + t^2| < 1$ .
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad:  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  para todo  $n$ .

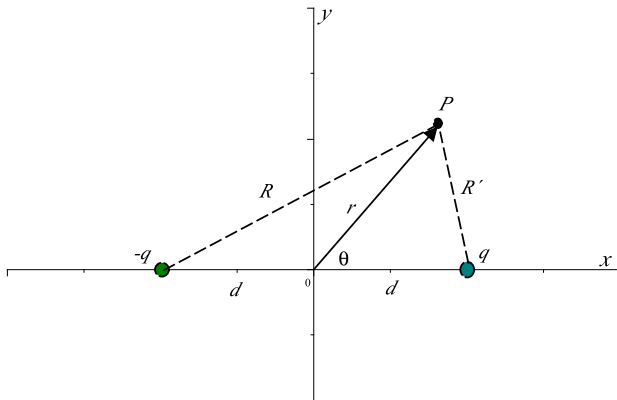
- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es  $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ . Podremos generar todos los polinomios si recordamos que  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ .
- La función generatriz  $\mathcal{P}(t, x)$  de los polinomios de Legendre, es:  
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los  $P_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para  $|2xt + t^2| < 1$ .
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad:  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  para todo  $n$ .
- Tienen una representación integral de la forma  
$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[ x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right]^n d\varphi$$



- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es  $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ . Podremos generar todos los polinomios si recordamos que  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ .
- La función generatriz  $\mathcal{P}(t, x)$  de los polinomios de Legendre, es:  
$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1, |x| \leq 1.$$
 Los  $P_n(x)$  son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para  $|2xt + t^2| < 1$ .
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad:  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  para todo  $n$ .
- Tienen una representación integral de la forma  
$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[ x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right]^n d\varphi$$
- ecuaciones diferenciales equivalentes
  - Forma autoadjunta  $[(1-x^2)y']' + \lambda(\lambda+1)y = 0$
  - Con  $u = P_n(\cos(\theta))$ , tenemos  $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{du}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda+1)u = 0$
  - Con  $u = \sqrt{\sin \theta} P_n(\cos \theta)$  tendremos  $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2(\theta)} \right] u = 0$

# Potencial electrostático de un dipolo

Consideremos un dipolo donde  $V = q \left( \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$



Donde  $(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos(\theta)$  y  $R^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos(\pi - \theta)$

- Entonces

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\pi - \theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n[\cos(\pi - \theta)] \left( \frac{d}{r} \right)^n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n \end{aligned}$$

- Entonces

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\pi - \theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n[\cos(\pi - \theta)] \left( \frac{d}{r} \right)^n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n \end{aligned}$$

- El potencial será  $V = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))] \left( \frac{d}{r} \right)^n$ .

- Entonces

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\pi - \theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n[\cos(\pi - \theta)] \left( \frac{d}{r} \right)^n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n \end{aligned}$$

- El potencial será  $V = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))] \left( \frac{d}{r} \right)^n$ .
- Todos los términos pares de  $P_n(\cos(\theta))$  se anulan y tendremos  $V = \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^{2n+1}$

- Entonces

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - 2 \cos(\pi - \theta) \left( \frac{d}{r} \right) + \left( \frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n[\cos(\pi - \theta)] \left( \frac{d}{r} \right)^n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^n \end{aligned}$$

- El potencial será  $V = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))] \left( \frac{d}{r} \right)^n$ .

- Todos los términos pares de  $P_n(\cos(\theta))$  se anulan y tendremos

$$V = \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta)) \left( \frac{d}{r} \right)^{2n+1}$$

- Si  $\frac{d}{r} \ll 1 \Rightarrow V \approx \frac{q}{r^2} 2d \cos(\theta)$ .

En presentación consideramos

1