Espacios Métricos y Normados:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

12 de febrero de 2024

Agenda: Espacios Métricos y Normados

1. Métricas y espacios métricos
2. Normas y espacios normados
3. Ejemplos de Espacios Normados
4. Recapitulando
5. Preguntas para la discusión

Métricas y espacios métricos 1/2

Un espacio vectorial será métrico si podemos definir una función $d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ / $\forall \left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle, \left|z\right\rangle \in \mathbf{V}$ tal que se cumple que:

1. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \geq 0 \quad \text{si} \quad d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left|x\right\rangle \equiv \left|y\right\rangle$
2. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv d\left(\left|y\right\rangle, \left|x\right\rangle\right)$
3. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \leq d\left(\left|x\right\rangle, \left|z\right\rangle\right) + d\left(\left|y\right\rangle, \left|z\right\rangle\right)$
   (La desigualdad triangular).

Ejemplos de métricas serán

- Para $\mathbb{R}$, la recta real, la definición de métrica es $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \left|x - y\right|$.

Un espacio vectorial será métrico si podemos definir una función $d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \ / \ \forall \left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle, \left|z\right\rangle \in \mathbf{V}$ tal que se cumple que:

1. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \geq 0 \quad \text{si} \quad d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) = 0 \ \Rightarrow \ \left|x\right\rangle \equiv \left|y\right\rangle$
2. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv d\left(\left|y\right\rangle, \left|x\right\rangle\right)$
3. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \leq d\left(\left|x\right\rangle, \left|z\right\rangle\right) + d\left(\left|y\right\rangle, \left|z\right\rangle\right)$
   (La desigualdad triangular).

Ejemplos de métricas serán

- Para $\mathbb{R}$, la recta real, la definición de métrica es
  $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \left|x - y\right|$.
- Para $\mathbb{R}^2$, es decir el plano, una definición de métrica es:
  $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. (métrica euclídea)
  También podemos construir otra definición de métrica como:
  $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \left|x_1 - y_1\right| + \left|x_2 - y_2\right|$. métrica Manhattan o de taxistas.

Métricas y espacios métricos 1/2

- En general para espacios reales $\mathbb{R}^n$ una posible definición de métrica será:

$$d\left(|x\rangle\,,|y\rangle\right) \equiv \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n - y_n\right)^2}\,.$$

Métricas y espacios métricos 1/2

- En general para espacios reales $\mathbb{R}^n$ una posible definición de métrica será:

$$d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

- Espacios unitarios $n-$dimensionales, o espacios complejos, $\mathbb{C}^n$. La definición de distancia puede construirse como:

$$d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}\,,$$

  y es claro que se recobra la idea de distancia en el plano complejo: $d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv |x - y|$.

Métricas y espacios métricos 1/2

- En general para espacios reales $\mathbb{R}^n$ una posible definición de métrica será:

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

- Espacios unitarios $n-$dimensionales, o espacios complejos, $\mathbb{C}^n$. La definición de distancia puede construirse como:

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}\,,$$

y es claro que se recobra la idea de distancia en el plano complejo: $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv |x - y|$.

- Para los espacios de funciones $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ una posible definición de distancia sería:

$$d(|f\rangle, |g\rangle) \equiv \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|\,.$$

Normas y espacios normados 1/2

La Norma, $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \| |v_i\rangle \|$, de un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \cdots |v_n\rangle\}$ será una función $\mathcal{N} : \mathbf{V} \to \mathbb{R} \; / \; \forall \; |v_i\rangle \in \mathbf{V}$ que cumple con:

1. $\| |v_i\rangle \| \geq 0 \,, \quad \text{si} \quad \| |v_i\rangle \| = 0 \;\Rightarrow\; |v_i\rangle \equiv |0\rangle$
2. $\| \alpha \, |v_i\rangle \| = |\alpha| \; \| |v_i\rangle \|$
3. $\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \| \leq \| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \|$ (Desigualdad Triangular).

Normas y espacios normados 1/2

La Norma, $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \||v_i\rangle\|$, de un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle \cdots |v_n\rangle\}$ será una función $\mathcal{N} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}\ /\ \forall\ \ |v_i\rangle \in \mathbf{V}$ que cumple con:

1. $\||v_i\rangle\| \geq 0\,, \quad \text{si} \quad \||v_i\rangle\| = 0 \ \Rightarrow\ |v_i\rangle \equiv |0\rangle$
2. $\|\alpha\,|v_i\rangle\| = |\alpha|\ \||v_i\rangle\|$
3. $\||v_i\rangle + |v_j\rangle\| \leq \||v_i\rangle\| + \||v_j\rangle\|$ (Desigualdad Triangular).

1. La definición de Norma induce una métrica de la forma $d\left(|v_i\rangle\,, |v_j\rangle\right) \equiv \||v_i\rangle - |v_j\rangle\|$.

La Norma, $\mathcal{N}\left(|v_i\rangle\right) \equiv \| |v_i\rangle \|$, de un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{ |v_1\rangle\,, \ |v_2\rangle\,, \ |v_3\rangle \cdots |v_n\rangle \}$ será una función $\mathcal{N} : \mathbf{V} \to \mathbb{R} \ / \ \forall \ \ |v_i\rangle \in \mathbf{V}$ que cumple con:

1. $\| |v_i\rangle \| \geq 0\,, \quad \text{si} \quad \| |v_i\rangle \| = 0 \ \Rightarrow \ |v_i\rangle \equiv |0\rangle$
2. $\| \alpha\, |v_i\rangle \| = |\alpha| \ \| |v_i\rangle \|$
3. $\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \| \leq \| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \|$ (Desigualdad Triangular).

1. La definición de Norma induce una métrica de la forma $d\left(|v_i\rangle\,, |v_j\rangle\right) \equiv \| |v_i\rangle - |v_j\rangle \|$.
2. la idea de Norma generaliza la noción de "tamaño" del vector $|x\rangle$.

La Norma, $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \| |v_i\rangle \|$, de un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle\,, \; |v_2\rangle\,, \; |v_3\rangle \cdots |v_n\rangle\}$ será una función $\mathcal{N} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \; / \; \forall \; |v_i\rangle \in \mathbf{V}$ que cumple con:

1. $\| |v_i\rangle \| \geq 0\,, \quad \text{si} \quad \| |v_i\rangle \| = 0 \;\Rightarrow\; |v_i\rangle \equiv |0\rangle$
2. $\| \alpha \, |v_i\rangle \| = |\alpha| \; \| |v_i\rangle \|$
3. $\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \| \leq \| |v_i\rangle \| + \| |v_j\rangle \|$ (Desigualdad Triangular).

1. La definición de Norma induce una métrica de la forma $d\left(|v_i\rangle\,, |v_j\rangle\right) \equiv \| |v_i\rangle - |v_j\rangle \|$.
2. la idea de Norma generaliza la noción de "tamaño" del vector $|x\rangle$.
3. La definición de distancia se construye a partir de la norma de la forma:

$$d\left(|x\rangle\,, |y\rangle\right) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}\,.$$

Ejemplos de Espacios Normados

- Para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, la Norma se define como:

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

Para un espacio en $\mathbb{R}^3$ se cumple que $\| |x\rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, por lo tanto, la idea de norma generaliza la noción de "tamaño" del vector $|x\rangle$.

- Para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, la Norma se define como:

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

Para un espacio en $\mathbb{R}^3$ se cumple que $\| |x\rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, por lo tanto, la idea de norma generaliza la noción de "tamaño" del vector $|x\rangle$.

- Para el espacio lineal de matrices $n \times n$, reales o complejas, una definición de norma puede ser:

$$\|M\| = \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{n} |M_{ab}| ,$$

y la correspondiente definición de distancia:

$$d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \|M - N\| = \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{n} |M_{ab} - N_{ab}| .$$

Ejemplos de Espacios Normados

- Para los espacios funcionales $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ una posible definición de norma sería:

$$\| |f\rangle \| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \,,$$

y otra posible puede ser:

$$\| |f\rangle \| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \,.$$

- Definimos **métrica** de forma rigurosa para espacios vectoriales abstractos. El concepto de métrica de un espacio vectorial nos provee la idea de distancia entre dos vectores abstractos.

Recapitulando

- Definimos **métrica** de forma rigurosa para espacios vectoriales abstractos. El concepto de métrica de un espacio vectorial nos provee la idea de distancia entre dos vectores abstractos.
- Definimos **norma** de forma rigurosa para espacios vectoriales abstractos. El concepto de norma está asociado con la idea de "tamaño" de un vector abstracto. Vimos como a partir de la definición de norma podemos deducir la noción de distancia

Preguntas para la discusión

- Muestre un par de casos en los cuales sea mas conveniente la métrica Manhattan a la métrica euclideana
- Muestre por qué la definición de norma en un espacio vectorial, automáticamente genera una definición de distancia. Es decir, por qué, los espacios normados son necesariamente métricos
- Considere las siguientes matrices

$$A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B^m_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \\ 6 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcule la norma de ambas matrices $\|A^i_j\|$, $\|B^i_j\|$. Calcule también la distrancia entre ellas.