27 de mayo de 2025

Fundamentos Conceptuales

- **Formalismo Lagrangiano:** Se basa en el principio de mínima acción $\delta S = 0$, con $S = \int L\, dt$. Utiliza coordenadas generalizadas q_i y velocidades $\dot{q}_i$. Las ecuaciones de movimiento se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange.
- **Formalismo Hamiltoniano:** Surge de una transformación de Legendre del lagrangiano. Las variables son q_i y sus momentos conjugados p_i. Las ecuaciones de movimiento son de primer orden.
- **Hamilton-Jacobi:** Busca una función generadora $S(q, t)$ que satisface una ecuación en derivadas parciales no lineal. Es una reformulación avanzada que unifica el análisis dinámico con métodos integrables.

Características Técnicas

- El lagrangiano opera en el espacio de configuración, con ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- El hamiltoniano trabaja en el espacio de fases, con un sistema de ecuaciones de primer orden.
- El enfoque de Hamilton-Jacobi permite reducir el problema a una única ecuación en derivadas parciales; las soluciones de S generan toda la dinámica.
- Las simetrías y las cantidades conservadas se identifican más fácilmente en el formalismo Hamiltoniano, aunque el teorema de Noether también se aplica al lagrangiano.

Ventajas y Limitaciones

- **Lagrangiano:** Ideal para sistemas con ligaduras y simetrías. Se adapta bien a sistemas con coordenadas generalizadas. Menos eficiente en análisis de estabilidad.
- **Hamiltoniano:** Proporciona una visión clara del espacio de fases y permite análisis cualitativos. Es la base para el paso a la mecánica cuántica.
- **Hamilton-Jacobi:** Potente para sistemas integrables. Su conexión con la mecánica ondulatoria lo hace fundamental para el tránsito clásico-cuántico. Sin embargo, resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser muy difícil.

Ejemplo: Oscilador Armónico Simple

- **Lagrangiano:** $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
- **Hamiltoniano:** $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$; las ecuaciones de Hamilton reproducen la misma dinámica mediante ecuaciones de primer orden.
- **Hamilton-Jacobi:** Se resuelve la ecuación

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

cuya solución permite obtener todas las integrales del movimiento.

Conclusiones

- Los tres métodos describen la misma física, pero desde perspectivas distintas.
- El enfoque lagrangiano es más geométrico y útil con ligaduras.
- El hamiltoniano es estructuralmente más rico y se presta al análisis de conservación y estabilidad.
- El enfoque de Hamilton-Jacobi es el más general y conecta elegantemente con la mecánica cuántica.