

Potencial efectivo

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



20 de mayo de 2025

1 El potencial efectivo

2 Las trayectorias

3 Ejemplos

- Potencial $V = -\frac{k}{r^3}$
- Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$
- Potencial $V = -\frac{k}{r}$

4 Recapitulando

5 Para la discusión: Potencial Efectivo en Competencia de Precios

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu \ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu \ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu \ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu \ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2$

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu \ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu \ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\text{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\text{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}$

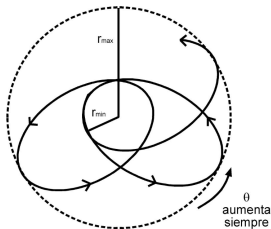
- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu \ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu \ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\text{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\text{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}$
- La energía total será $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = \text{cte.}$

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu \ddot{r} = f(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu \ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\text{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\text{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}$
- La energía total será $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}(r) = \text{cte.}$
- Una partícula de masa μ , moviéndose en la dimensión r con energía potencial $V_{\text{ef}}(r)$.

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimiento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\text{ef}}(r)$

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimiento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\text{ef}}(r)$
- Los puntos de retorno están dados por la condición $\dot{r} = 0$, i.e.
$$E = V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} = 0$$

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimiento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\text{ef}}(r)$
- Los puntos de retorno están dados por la condición $\dot{r} = 0$, i.e.
$$E = V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} = 0$$
- Es una ecuación algebraica de segundo grado en r y pueden existir dos raíces reales, $r = r_{\text{mín}}$, $r = r_{\text{máx}}$.



- si $r_{\text{máx}} < \infty \Rightarrow$ movimiento es finito, oscilatorio en r ,
- si $r_{\text{máx}} \rightarrow \infty \Rightarrow$ movimiento sin retorno,
- si $r_{\text{mín}} = r_{\text{máx}} \Rightarrow$ movimiento es circular.

- 1 Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.

- 1 Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
- 2 El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ) .

- 1 Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
- 2 El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ) .
- 3 Para encontrar la condición de choque $r \rightarrow 0$, i.e. $r_{\min} = 0$

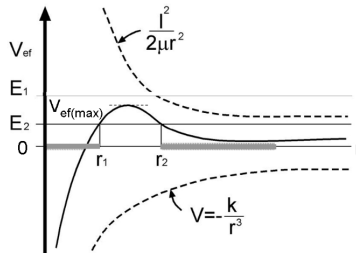
- 1 Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
- 2 El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ) .
- 3 Para encontrar la condición de choque $r \rightarrow 0$, i.e. $r_{\min} = 0$
- 4 De la ecuación para la energía tenemos
$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} > 0$$

- 1 Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
- 2 El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ) .
- 3 Para encontrar la condición de choque $r \rightarrow 0$, i.e. $r_{\min} = 0$
- 4 De la ecuación para la energía tenemos
$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} > 0$$
- 5 Tomando el límite $r \rightarrow 0$ tendremos $\lim_{r \rightarrow 0} [V(r)r^2] < -\frac{L^2}{2\mu}$

- 1 Como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
- 2 El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ) .
- 3 Para encontrar la condición de choque $r \rightarrow 0$, i.e. $r_{\min} = 0$
- 4 De la ecuación para la energía tenemos
$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{L^2}{2\mu} > 0$$
- 5 Tomando el límite $r \rightarrow 0$ tendremos $\lim_{r \rightarrow 0} [V(r)r^2] < -\frac{L^2}{2\mu}$
- 6 Consideremos un potencial atractivo de la forma $V(r) = -k/r^n$, entonces $\lim_{r \rightarrow 0} [V(r)r^2] < -\frac{L^2}{2\mu} \Rightarrow n > 2$
 - $V(r) = -k/r^3$ permite caer al centro, $r_{\min} = 0$
 - $V(r) = -k/r^2$, requiere $k > \frac{L^2}{2\mu}$ para caer al centro de atracción
 - $V(r) = -k/r$ no permite alcanzar $r_{\min} = 0$

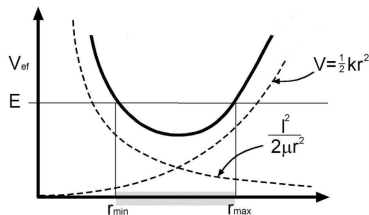
Potencial $V = -\frac{k}{r^3}$

- Si el Potencial $V = -\frac{k}{r^3}$ el potencial efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{r^3} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



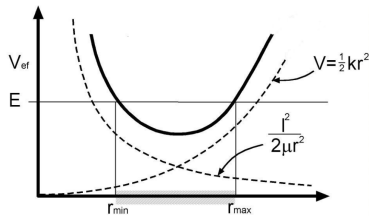
Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$

- Si el Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$, el efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



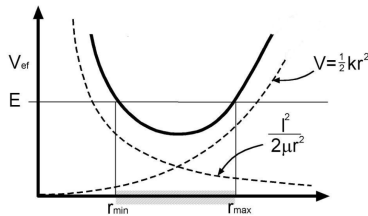
Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$

- Si el Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$, el efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- $V = \frac{1}{2}kr^2$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.

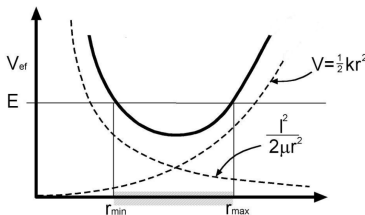
- Si el Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$, el efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- $V = \frac{1}{2}kr^2$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\text{ef}}(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;

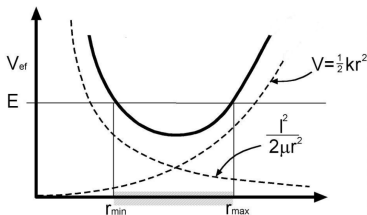
Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$

- Si el Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$, el efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



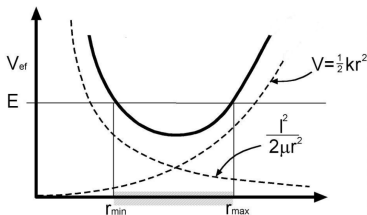
- $V = \frac{1}{2}kr^2$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\text{ef}}(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;
- Es un movimiento radial es oscilatorio.

- Si el Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$, el efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



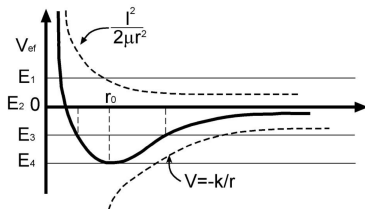
- $V = \frac{1}{2}kr^2$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\text{ef}}(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;
- Es un movimiento radial es oscilatorio.
- La fuerza radial $\mathbf{f} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -kr \hat{\mathbf{r}} = -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$

- Si el Potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$, el efectivo será $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

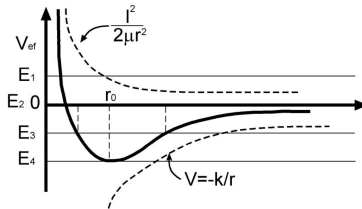


- $V = \frac{1}{2}kr^2$ corresponde a un oscilador armónico tridimensional.
- $E \geq V_{\text{ef}}(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}} \neq 0$;
- Es un movimiento radial es oscilatorio.
- La fuerza radial $\mathbf{f} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = -kr\hat{\mathbf{r}} = -kx\mathbf{i} - ky\mathbf{j}$
- El movimiento radial es el resultado de dos oscilaciones simples, perpendiculares entre sí, con igual frecuencia $\omega_x^2 = \omega_y^2 = k/\mu$.

- El potencial es $V = -\frac{k}{r}$, el efectivo $V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

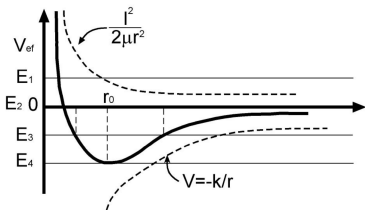


- El potencial es $V = -\frac{k}{r}$, el efectivo $V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- El valor mínimo del potencial efectivo proviene de $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0$

- El potencial es $V = -\frac{k}{r}$, el efectivo $V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$



- El valor mínimo del potencial efectivo proviene de $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0$
- Los posibles movimientos para diferentes valores de la energía E son:
 - $E = E_1 > 0 \Rightarrow r_{\text{mín}} > 0$ y $r_{\text{máx}} \rightarrow \infty$; órbita abierta.
 - $E = E_2 = 0 \Rightarrow r_{\text{mín}} > 0$ y $r_{\text{máx}} \rightarrow \infty$; órbita abierta.
 - $E = E_3 < 0 \Rightarrow r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$; movimiento radial oscilatorio.
 - $E = E_4 = V_{\text{ef}}(\text{mín}) < 0 \Rightarrow r_{\text{mín}} = r_{\text{máx}} = r_0$; órbita circular con $r = r_0$.

En presentación consideramos

- 1 El Potencial Efectivo que surge en el **problema de dos cuerpos** con un potencial central $V(r) \Rightarrow V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

En presentación consideramos

- 1 El Potencial Efectivo que surge en el **problema de dos cuerpos** con un potencial central $V(r) \Rightarrow V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- 2 Simplifica el estudio del movimiento en fuerzas centrales, permitiendo visualizar y clasificar órbitas en sistemas gravitacionales y atómicos.

En presentación consideramos

- ① El Potencial Efectivo que surge en el **problema de dos cuerpos** con un potencial central $V(r) \Rightarrow V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- ② Simplifica el estudio del movimiento en fuerzas centrales, permitiendo visualizar y clasificar órbitas en sistemas gravitacionales y atómicos.
- ③ Movimiento Radial y Tipos de Órbitas
 - ① Movimiento para: $E \geq V_{\text{ef}}(r)$ y puntos de retorno: $E = V_{\text{ef}}(r)$.
 - ② Órbitas ligadas: $E < 0$, oscilación radial entre $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$.
 - ③ Órbitas abiertas: $E \geq 0$, escape del sistema.
 - ④ Órbitas circulares**: $\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = 0$ en un mínimo estable.

En presentación consideramos

- ➊ El Potencial Efectivo que surge en el **problema de dos cuerpos** con un potencial central $V(r) \Rightarrow V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- ➋ Simplifica el estudio del movimiento en fuerzas centrales, permitiendo visualizar y clasificar órbitas en sistemas gravitacionales y atómicos.
- ➌ Movimiento Radial y Tipos de Órbitas
 - ➊ Movimiento para: $E \geq V_{\text{ef}}(r)$ y puntos de retorno: $E = V_{\text{ef}}(r)$.
 - ➋ Órbitas ligadas: $E < 0$, oscilación radial entre $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$.
 - ➌ Órbitas abiertas: $E \geq 0$, escape del sistema.
 - ➍ Órbitas circulares**: $\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = 0$ en un mínimo estable.
- ➍ Ejemplos de Potenciales
 - ➊ $V(r) = -k/r$ (Gravitacional y Coulombiano): órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas.
 - ➋ $V(r) = -k/r^3$: Caída al centro si $E < V_{\text{ef}}(r)$.
 - ➌ $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ Oscilador armónico tridimensional

Para la discusión

Potencial Efectivo en Competencia de Precios

- El beneficio de una empresa en competencia de precios está dado por $\Pi(x) = U(x) - C(x) - \frac{L^2}{2x^2}$, donde x representa el precio de un artículo
 - 1 $U(x) = Ae^{-\alpha x} \rightarrow$ Demanda del mercado.
 - 2 $C(x) = cx^2 \rightarrow$ Costos de producción.
 - 3 $\frac{L^2}{2x^2} \rightarrow$ Barrera de ajuste de precios (regulación, competencia).

Para la discusión

Potencial Efectivo en Competencia de Precios

- El beneficio de una empresa en competencia de precios está dado por $\Pi(x) = U(x) - C(x) - \frac{L^2}{2x^2}$, donde x representa el precio de un artículo
 - 1 $U(x) = Ae^{-\alpha x} \rightarrow$ Demanda del mercado.
 - 2 $C(x) = cx^2 \rightarrow$ Costos de producción.
 - 3 $\frac{L^2}{2x^2} \rightarrow$ Barrera de ajuste de precios (regulación, competencia).
- El potencial efectivo es $V_{\text{ef}}(x) = -Ae^{-\alpha x} + cx^2 + \frac{L^2}{2x^2}$
 - 1 Término atractivo $-Ae^{-\alpha x}$: Incentiva precios bajos (alta demanda)
 - 2 Término repulsivo cx^2 : Costos de producción crecientes
 - 3 Barrera centrífuga $\frac{L^2}{2x^2}$: Restricciones del mercado.

Para la discusión

Potencial Efectivo en Competencia de Precios

- El beneficio de una empresa en competencia de precios está dado por $\Pi(x) = U(x) - C(x) - \frac{L^2}{2x^2}$, donde x representa el precio de un artículo
 - 1 $U(x) = Ae^{-\alpha x} \rightarrow$ Demanda del mercado.
 - 2 $C(x) = cx^2 \rightarrow$ Costos de producción.
 - 3 $\frac{L^2}{2x^2} \rightarrow$ Barrera de ajuste de precios (regulación, competencia).
- El potencial efectivo es $V_{\text{ef}}(x) = -Ae^{-\alpha x} + cx^2 + \frac{L^2}{2x^2}$
 - 1 Término atractivo $-Ae^{-\alpha x}$: Incentiva precios bajos (alta demanda)
 - 2 Término repulsivo cx^2 : Costos de producción crecientes
 - 3 Barrera centrífuga $\frac{L^2}{2x^2}$: Restricciones del mercado.
- ¿cómo modelar el precio óptimo para distintos valores de L ? ¿Qué modela L ? ¿cómo fluctúan los precios?

Para la discusión

Potencial Efectivo en Competencia de Precios

- El beneficio de una empresa en competencia de precios está dado por $\Pi(x) = U(x) - C(x) - \frac{L^2}{2x^2}$, donde x representa el precio de un artículo
 - 1 $U(x) = Ae^{-\alpha x} \rightarrow$ Demanda del mercado.
 - 2 $C(x) = cx^2 \rightarrow$ Costos de producción.
 - 3 $\frac{L^2}{2x^2} \rightarrow$ Barrera de ajuste de precios (regulación, competencia).
- El potencial efectivo es $V_{\text{ef}}(x) = -Ae^{-\alpha x} + cx^2 + \frac{L^2}{2x^2}$
 - 1 Término atractivo $-Ae^{-\alpha x}$: Incentiva precios bajos (alta demanda)
 - 2 Término repulsivo cx^2 : Costos de producción crecientes
 - 3 Barrera centrífuga $\frac{L^2}{2x^2}$: Restricciones del mercado.
- ¿cómo modelar el precio óptimo para distintos valores de L ? ¿Qué modela L ? ¿cómo fluctúan los precios?
- Si energía cinética, representa la tendencia de la empresa a cambiar su precio con una inercia económica. ¿cuál es el lagrangeano del sistema y qué representa la ecuación de movimiento.