El Trompo de Lagrange

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

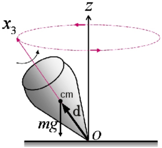
24 de octubre de 2024

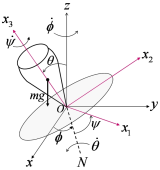
Agenda

El Trompo de Lagrange: Generalidades

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.

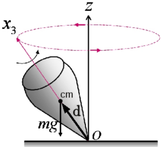
- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.

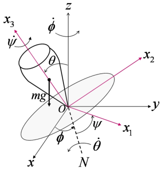




El Trompo de Lagrange: Generalidades

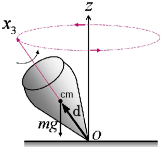
- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.

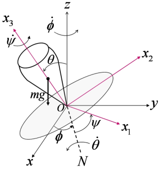




- Los momentos de inercia $I_{11}^{\mathrm{cm}} = I_{22}^{\mathrm{cm}} \neq I_{33}^{\mathrm{cm}}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.

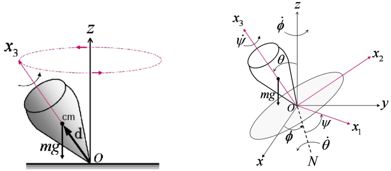




- Los momentos de inercia $I_{11}^{\mathrm{cm}} = I_{22}^{\mathrm{cm}} \neq I_{33}^{\mathrm{cm}}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio (x, y, z) y el sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, ambos con origen en O.

El Trompo de Lagrange: Generalidades

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.



- Los momentos de inercia $I_{11}^{\mathrm{cm}} = I_{22}^{\mathrm{cm}} \neq I_{33}^{\mathrm{cm}}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio (x, y, z) y el sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, ambos con origen en O.
- Sea $\mathbf{d} = (0, 0, d)$ la posición del centro de masa del trompo con respecto a O en el sistema (x_1, x_2, x_3).

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial del trompo, con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial del trompo, con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O, $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2\right)$

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial del trompo, con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O, $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2\right)$
- Las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como
  $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2$

El Trompo de Lagrange: El Lagrangeano

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O, ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\mathrm{cm}} + m\left(a^2\delta_{ik} - a_i a_k\right)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\mathrm{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\mathrm{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\mathrm{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial del trompo, con respecto a O, es $V = mgz = mgd\cos\theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O, $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2\right)$
- Las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como
$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2$$
- El Lagrangiano del sistema es
$$\mathcal{L} = T_{rot} - V = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mgd\cos\theta.$$

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = l_3 = \text{cte}.$

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = l_3 = \text{cte}.$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\,\mathrm{sen}^2\,\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z = \text{cte}.$

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = l_3 = \text{cte}.$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\operatorname{sen}^2\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z = \text{cte}.$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd\,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z), al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = l_3 = \text{cte}.$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\,\text{sen}^2\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z = \text{cte}.$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd\,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z), al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}_3$ ni $\hat{\mathbf{z}}$, es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que $L_3 = \text{cte}$ y $L_z = \text{cte}$.

Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ.
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_{33}\Omega_3 = l_3 = \text{cte}.$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \left(I_{11}\operatorname{sen}^2\theta + I_{33}\cos^2\theta\right)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi}\cos\theta = L_z = \text{cte}.$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd\left(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3\right)$, es perpendicular al plano (x_3, z), al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}_3$ ni $\hat{\mathbf{z}}$, es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que $L_3 = \text{cte}$ y $L_z = \text{cte}$.
- La energía se conserva
$E = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + mgd\cos\theta = \text{cte}.$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).

Primeras integrales

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).
- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)}{I_{11} \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33}\dot{\phi}\cos\theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)\cos\theta}{I_{11}\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}}\left(E - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd\cos\theta\right)}$$

Primeras integrales

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).
- Las primeras integrales del sistema serán:
$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)}{I_{11} \operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33}\dot{\phi}\cos\theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)\cos\theta}{I_{11}\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}}\left(E - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd\cos\theta\right)}$$
- Podemos reescribir $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2}I_{11}\dot{\theta}^2 + V_{\mathrm{ef}}(\theta) =$cte, con $V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas $(L_3, L_z$ y E).
- Las primeras integrales del sistema serán:

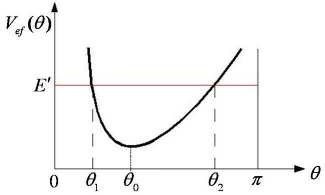
$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)}{I_{11}\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33}\dot{\phi}\cos\theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)\cos\theta}{I_{11}\operatorname{sen}^2\theta}$$

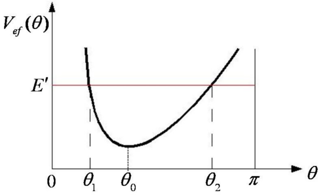
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}}\left(E - \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd\cos\theta\right)}$$

- Podemos reescribir $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2}I_{11}\dot{\theta}^2 + V_{\mathrm{ef}}(\theta) =$cte, con $V_{\mathrm{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3\cos\theta)^2}{2I_{11}\operatorname{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$
- Es un problema unidimensional para la coordenada θ, con un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(\theta)$

- El potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$



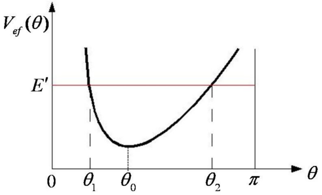
- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$

El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$

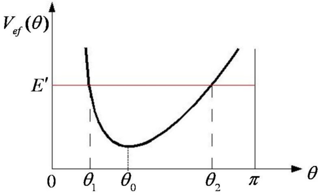


- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación $E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2I_{11} \operatorname{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$

El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

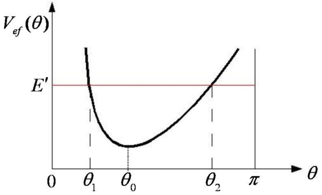
- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación $E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2I_{11} \operatorname{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$
- La nutación ocurre en el intervalo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación $E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos\theta)^2}{2 I_{11} \operatorname{sen}^2\theta} + mgd\cos\theta$
- La nutación ocurre en el intervalo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- De la energía obtuvimos $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}{I_{11}}}, \Rightarrow t(\theta) = \sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

- El período de nutación es $T_{\mathrm{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\mathrm{ef}}(\theta))}}$

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos\theta)$

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos\theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3 \cos\theta, \forall\theta)$.

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

- El período de nutación es $T_{\rm nut} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\rm ef}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos\theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3 \cos\theta, \forall\theta)$.
- Cuando $\dot{\phi}$ cambia de signo en θ_1 ó en θ_2, dependiendo del signo de la cantidad ($L_z - L_3 \cos\theta_{1,2}$) (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).

El Trompo de Lagrange: Nutación y rotación

- El período de nutación es $T_{\rm nut} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\rm ef}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2, dependiendo del signo de $(L_z - L_3\cos\theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3\cos\theta, \forall\theta)$.
- Cuando $\dot{\phi}$ cambia de signo en θ_1 ó en θ_2, dependiendo del signo de la cantidad $(\ L_z - L_3\cos\theta_{1,2}\ )$ (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).
- Cuando $\dot{\phi} = 0$ en θ_1 ó en θ_2 $(L_z = L_3\cos\theta_{1,2})$.