

Empezando con los complejos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



5 de agosto de 2021

- 1 Números Complejos
- 2 Algebra de complejos
- 3 Representaciones complejas
- 4 Funciones de variable compleja
- 5 Condiciones de Cauchy-Riemann
- 6 Recapitulando
- 7 Para la discusión

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0, \text{ y nos lleva}$$

a definir un número $i^2 \equiv -1$

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0, \text{ y nos lleva a definir un número } i^2 \equiv -1$$

- Un número complejo, z , es la generalización de los números imaginarios (puros), ib . Esto es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0, \text{ y nos lleva a definir un número } i^2 \equiv -1$$

- Un número complejo, z , es la generalización de los números imaginarios (puros), ib . Esto es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

- Cada número complejo, z tendrá asociado un número complejo conjugado, z^* tal que:

$$z = a + ib \quad \Leftrightarrow \quad z^* = a - ib,$$

$$\Downarrow$$

$$(z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2,$$

$$\text{claramente: } z \cdot z^* \geq 0 \Rightarrow |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2.$$

- Dos números complejos serán iguales

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 .$$

- Dos números complejos serán iguales

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 .$$

- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) =$
 $(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 ,$

- Dos números complejos serán iguales
$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 .$$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 ,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2i \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que:
$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* .$$

- Dos números complejos serán iguales
$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2.$$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2i \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que:
$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*.$$
- Se multiplican números complejos entre si,
$$z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$
también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$

- Dos números complejos serán iguales
$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 .$$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 ,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2i \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* .$
- Se multiplican números complejos entre si,
$$z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) ,$$
también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* .$
- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales:
$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} ,$$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)), \quad \text{con:} \quad \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)), \quad \text{con:} \quad \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Con esta interpretación tendremos:

$x = \operatorname{Re} z$	\Rightarrow	componente real del vector z o parte real de z
$y = \operatorname{Im} z$	\Rightarrow	componente imaginaria del vector z o parte ima
$r = \sqrt{zz^*} = z $	\Rightarrow	módulo, magnitud o valor absoluto de z
θ	\Rightarrow	ángulo polar o de fase del número complejo z

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)), \quad \text{con:} \quad \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{ll} x = \operatorname{Re} z & \Leftrightarrow \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = \operatorname{Im} z & \Leftrightarrow \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \Leftrightarrow \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \Leftrightarrow \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \sen(\theta)), \quad \text{con:} \quad \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Con esta interpretación tendremos:

$x = \operatorname{Re} z$	\Rightarrow	componente real del vector z o parte real de z
$y = \operatorname{Im} z$	\Rightarrow	componente imaginaria del vector z o parte ima
$r = \sqrt{zz^*} = z $	\Rightarrow	módulo, magnitud o valor absoluto de z
θ	\Rightarrow	ángulo polar o de fase del número complejo z

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sen(\theta)$
- Entonces, tenemos tres formas de representar un número complejo:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z = |z|(\cos(\theta) + i \sen(\theta)) \quad \Leftrightarrow \quad z = |z|e^{i\theta}.$$

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región S será diferenciable en esa región si la derivada

$$\begin{aligned}f'(z) = \frac{df}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y},\end{aligned}$$

existe y es única.

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región S será diferenciable en esa región si la derivada

$$\begin{aligned}f'(z) = \frac{df}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y},\end{aligned}$$

existe y es única.

- Existe sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, si $\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x}, \\f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y}.\end{aligned}$$

- Entonces

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right],\end{aligned}$$

- Entonces

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right],\end{aligned}$$

- y tienen que ser iguales

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

- Entonces

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right],\end{aligned}$$

- y tienen que ser iguales

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

- Con lo cual $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right],\end{aligned}$$

- y tienen que ser iguales

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

- Con lo cual $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann

- Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si $f(z)$ es analítica, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas: $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$.

En presentación consideramos

1

① ¿ Cuáles de las siguientes funciones son analíticas?

① $f(z) = izz^*$

② $f(z) = e^{-2x} (\cos(2y) - i \operatorname{sen}(2y))$

③ $f(z) = e^x (\cos(y) - i \operatorname{sen}(y))$

④ $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$

⑤ $f(z) = 1/(z - z^5)$

⑥ $f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$

⑦ $f(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(y)$

① ¿ Cuáles de las siguientes funciones son analíticas?

① $f(z) = izz^*$

② $f(z) = e^{-2x} (\cos(2y) - i \operatorname{sen}(2y))$

③ $f(z) = e^x (\cos(y) - i \operatorname{sen}(y))$

④ $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$

⑤ $f(z) = 1/(z - z^5)$

⑥ $f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$

⑦ $f(z) = \cos(x) \cosh(y) - i \operatorname{sen}(x) \sinh(y)$

② ¿ Cuales de las siguientes funciones son armónicas y encuentre la función analítica correspondiente si es el caso?

① $u = x^2 + y^2$

② $u = \operatorname{sen}(x) \cosh(y)$

③ $v = e^x \operatorname{sen}(2y)$

④ $v = x/(x^2 + y^2)$