Vector Laplace-Runge-Lenz

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

2 de abril de 2025

Agenda

El vector $\mathbf{A}$

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2\hat{\mathbf{r}}$,

El vector $\mathbf{A}$

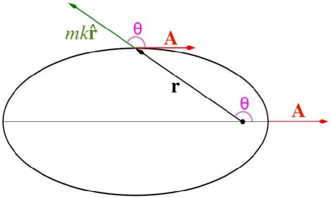
- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2\hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.

El vector $\mathbf{A}$

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2\hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$

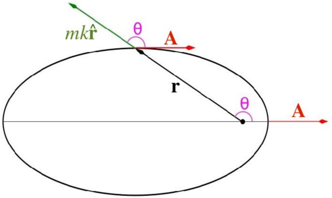
El vector **A**

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2\hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$
- Es un vector constante en magnitud y dirección. Apunta en la dirección del perihelio: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$: $\mathbf{A}$ está en el plano de la órbita.



El vector $\mathbf{A}$

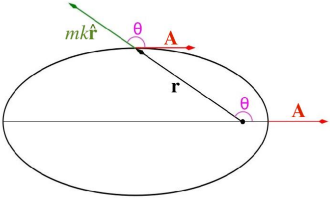
- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2\hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$
- Es un vector constante en magnitud y dirección. Apunta en la dirección del perihelio: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$: $\mathbf{A}$ está en el plano de la órbita.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k\hat{\mathbf{r}}]$

El vector $\mathbf{A}$

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2\hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$
- Es un vector constante en magnitud y dirección. Apunta en la dirección del perihelio: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$: $\mathbf{A}$ está en el plano de la órbita.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k\hat{\mathbf{r}}]$
- Donde $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$ y también $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
  ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
  ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
- Además $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} \left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu \frac{f(r)}{r} \left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
- Además $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

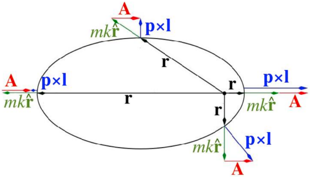
- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
- Además $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$
- y finalmente $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}} =$cte

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

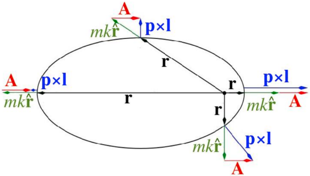
- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\times\mathbf{L} + \mathbf{p}\times\cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\times(\mathbf{r}\times\mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = 2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
- Además $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$
- y finalmente $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}} =$cte
- La magnitud del vector $\mathbf{A}$ para la fuerza gravitacional se expresa en términos de L y E como $A^2 = (\mu k e)^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E L^2 =$ cte

Kepler superintegrable

- La dirección de **A**, correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.

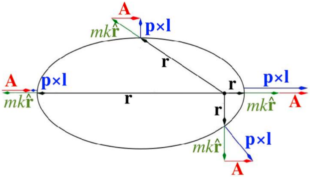


- La dirección de $\mathbf{A}$, correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



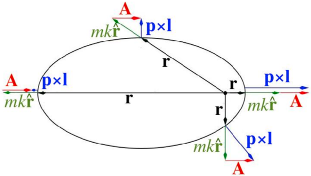
- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.

- La dirección de **A**, correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.
- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable.

- La dirección de **A**, correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.
- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable.
- Existen seis grados de libertad (tres para cada partícula) y siete cantidades conservadas: las tres componentes de la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_{cm}$, la dirección del momento angular **L**, su magnitud L, la energía E y la dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz $\hat{\mathbf{A}}$

Simetrías Escondidas y paréntesis de Poisson 1/2

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones $(r_{x\,k}, r_{y\,k}, r_{z\,k})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$

Simetrías Escondidas y paréntesis de Poisson 1/2

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones $(r_{x\,k}, r_{y\,k}, r_{z\,k})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \cdots, 3n$

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones $(r_{x\,k}, r_{y\,k}, r_{z\,k})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \cdots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera:$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones $(r_{x\,k}, r_{y\,k}, r_{z\,k})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \cdots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera:$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones $(r_{x\,k}, r_{y\,k}, r_{z\,k})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \cdots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera:$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.
- Entonces $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$.

Simetrías Escondidas y paréntesis de Poisson 1/2

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones $(r_{x\,k}, r_{y\,k}, r_{z\,k})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \cdots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera:$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.
- Entonces $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Donde $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$ son las ecuaciones de Hamilton.

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones $(r_{x\,k}, r_{y\,k}, r_{z\,k})$, con $i = 1, 2, \cdots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \cdots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera:$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.
- Entonces $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Donde $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$ son las ecuaciones de Hamilton.
- Si f no depende explícitamente del tiempo $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ y es una cantidad conservada $\frac{df}{dt} = 0$, entonces $\{f, \mathcal{H}\} = 0$.

Dos Ejemplos

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$
  - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\}\,\hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\}\,\hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\}\,\hat{\mathbf{z}}$
  - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
  - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
  - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$
  - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\}\,\hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\}\,\hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\}\,\hat{\mathbf{z}}$
  - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i}\frac{\partial p_x}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
  - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
  - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$
- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

  $L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$

  Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$:

  $\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$

  $\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$

  $\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i}\frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i}\frac{\partial L_y}{\partial q_i}\right)$

  $\{L_x, L_y\} =$

  $\left(\frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial L_y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial L_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z}\right)$

  $\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$
  - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\}\,\hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\}\,\hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\}\,\hat{\mathbf{z}}$
  - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i}\frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
  - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
  - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$
- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

  $L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$

  Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$:

  $\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$

  $\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$

  $\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i}\frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i}\frac{\partial L_y}{\partial q_i} \right)$

  $\{L_x, L_y\} =$

  $\left(\frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial L_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial L_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z} \right)$

  $\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$
- Entonces, $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$. En Mecánica Cuántica, $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k$.

El Vector de Runge-Lenz

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\mathbf{r}|}$

El Vector de Runge-Lenz

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\mathbf{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$

El Vector de Runge-Lenz

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\mathbf{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \{\mathbf{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz

El Vector de Runge-Lenz

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\mathbf{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \{\mathbf{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de SO(3) que garantiza simetría rotacional.

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\mathbf{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \{\mathbf{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de SO(3) que garantiza simetría rotacional.
- Muestre también $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$

El Vector de Runge-Lenz

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\mathbf{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \{\mathbf{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de SO(3) que garantiza simetría rotacional.
- Muestre también $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$
- Adicionalmente, muestre que $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$

El Vector de Runge-Lenz

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\mathbf{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \{\mathbf{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de SO(3) que garantiza simetría rotacional.
- Muestre también $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$
- Adicionalmente, muestre que $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$
- El problema de Kepler tiene un grupo de simetría ampliado: No sólo rotaciones espaciales SO(3), sino SO(4) para el caso de órbitas acotadas, generada por $\{L_i, \tilde{A}_j\}$

Título transparencia

- El problema de Kepler y el vector de Laplace-Runge-Lenz $\vec{A}$
  - Potencial central: $V(r) = -\frac{k}{r}$ con secciones cónicas como órbitas (elipses, parábolas, hipérbolas)
  - El Vector $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}$: apunta al perihelio y es constante