Título presentación

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

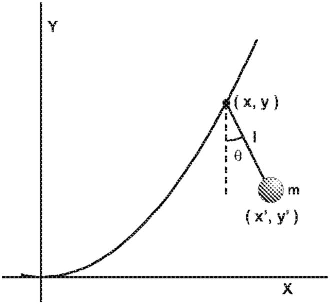
19 de noviembre de 2024

Agenda

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

1. Hamiltoniano y Péndulo
   - El problema y las coordenadas
   - El Lagrangeano y el Hamiltoniano
2. $\mathcal{H} = q + te^{p}$ y la transformación $Q = q + e^{p}, P = p$
3. $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2$
4. $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, q_3, \ldots, q_n, p_2, p_3, \ldots, p_n\right)$
5. $q = Q\cos\gamma t + \frac{P}{m\omega}\operatorname{sen}\gamma t, \quad p = -m\omega Q \operatorname{sen}\gamma t + P\cos\gamma t$

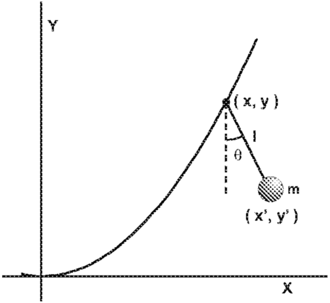
El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y',

Hamiltoniano y Péndulo

El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y',
- Se tiene las siguientes relaciones:
  $x' = x + l \operatorname{sen}\theta, \quad y' = y - l\cos\theta = ax^2 - l\cos\theta$
  $\dot{x}' = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{y}' = \dot{y} + l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta = 2ax\dot{x} + l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 \right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta + 4axl \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \right)$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 \right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg \left(ax^2 - l \cos\theta \right)$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\operatorname{sen}\theta)$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m}\frac{1}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\frac{1 + 4a^2x^2}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m}\frac{1}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\frac{1+4a^2x^2}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
- Con lo cual $\mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - L$ se puede expresar
  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m}\frac{1}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2ml^2}\frac{1+4a^2x^2}{(\mathrm{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0$;
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$; y finalmente

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$; y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = e^p$, $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$, y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1$, obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1$.

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0;$ y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = e^p$, $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$, y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1$, obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1$.
- Por lo tanto, como la tranformación cumple con $\{Q, Q\} = 0, \quad \{P, P\} = 0, \quad$ y $\quad \{Q, P\} = 1$. **Es canónica**

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$,
  $F_2(q, P) = qP + \int e^P \, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$,
  $F_2(q, P) = qP + \int e^P\, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$
- La función generadora es $F_2(q, P) = qP + e^P$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces
  $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \operatorname{sen}\gamma t\cos\gamma t)\right]$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces
  $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \operatorname{sen}\gamma t\cos\gamma t)\right]$$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p'}{m}$

$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \,\mathrm{sen}\,\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \,\mathrm{sen}\,\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \mathrm{sen}\,\gamma t\cos\gamma t)\right]$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}' = p'\dot{q} - \mathcal{L}' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \operatorname{sen}\gamma t\cos\gamma t)\right]$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}' = p'\dot{q} - \mathcal{L}' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Como $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = p' + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El Lagrangeano será $\mathcal{L}=\dot{q}p-\mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}=\frac{p}{m}-\frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad\Rightarrow\quad p=m\dot{q}+A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L}=\dot{q}p-\mathcal{H}=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2+A\dot{q}\cos\gamma t+\frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t-A\gamma q\,\mathrm{sen}\,\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L}=\mathcal{L}'+\frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L}=\underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'}+\frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t+\frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t+\mathrm{sen}\,\gamma t\cos\gamma t)\right]$
- El nuevo momento $p'=\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}}=m\dot{q}, \quad\Rightarrow\quad \dot{q}=\frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}'=p'\dot{q}-\mathcal{L}'=\frac{p'^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2$
- Como $p=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}}+\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)=p'+\frac{\partial\Lambda}{\partial q}$
- Por lo tanto $\mathcal{H}=p\dot{q}-\mathcal{L}=p'\dot{q}+\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\dot{q}-\mathcal{L}'-\frac{d\Lambda}{dt}=\mathcal{H}'+\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\dot{q}-\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\dot{q}-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}=\mathcal{H}'-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
  $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z \hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano
$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
  $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z\hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano
  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$
- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, q_3, \ldots, q_n, p_2, p_3, \ldots, p_n\right)$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
  $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z\hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano
  $$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$$
- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.
- Por lo tanto podemos escribir
  $$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + 2ma\cos\theta\right)}_{f(\theta, p_\theta)}$$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
  $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z\hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano
  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$
- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.
- Por lo tanto podemos escribir
  $$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + 2ma\cos\theta\right)}_{f(\theta, p_\theta)}$$
- Es decir $f(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + 2ma\cos\theta\right)$ =cte

Mostrar que la transformación: $q = Q\cos\gamma t + \frac{P}{m\omega}\operatorname{sen}\gamma t$, $p = -m\omega Q\operatorname{sen}\gamma t + P\cos\gamma t$ es canónica. Determinar la función $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\left(q_i, P_i, t\right)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2\gamma t + \operatorname{sen}^2\gamma t = 1$ ✓

Mostrar que la transformación: $q = Q\cos\gamma t + \frac{P}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\gamma t$, $p = -m\omega Q\,\mathrm{sen}\,\gamma t + P\cos\gamma t$ es canónica. Determinar la función $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\left(q_i, P_i, t\right)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2\gamma t + \mathrm{sen}^2\,\gamma t = 1$ ✓
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t\,, \quad \text{y} \quad p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$

Mostrar que la transformación: $q = Q\cos\gamma t + \frac{P}{m\omega}\operatorname{sen}\gamma t$, $p = -m\omega Q\operatorname{sen}\gamma t + P\cos\gamma t$ es canónica. Determinar la función $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\,(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2\gamma t + \operatorname{sen}^2\gamma t = 1$ ✓
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t\,,$ y $p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\,(q_i, P_i, t)$, integramos las ecuaciones $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$, y $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t$

Mostrar que la transformación: $q = Q\cos\gamma t + \frac{P}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\gamma t$, $p = -m\omega Q\,\mathrm{sen}\,\gamma t + P\cos\gamma t$ es canónica. Determinar la función $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\,(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2\gamma t + \mathrm{sen}^2\,\gamma t = 1$ ✓
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t\,, \quad$ y $\quad p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\,(q_i, P_i, t)$, integramos las ecuaciones $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$, y $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t$
- La solución es $\mathcal{F}_2(q, P, t) = \frac{qP}{\cos\gamma t} - \frac{1}{2}q^2 m\omega\tan\gamma t - \frac{1}{2}\frac{P^2}{m\omega}\tan\gamma t$

Mostrar que la transformación: $q = Q\cos\gamma t + \frac{P}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\gamma t$, $p = -m\omega Q\,\mathrm{sen}\,\gamma t + P\cos\gamma t$ es canónica. Determinar la función $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\left(q_i, P_i, t\right)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2\gamma t + \mathrm{sen}^2\,\gamma t = 1$ ✓
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t$, y $p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2\left(q_i, P_i, t\right)$, integramos las ecuaciones $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$, y $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t$
- La solución es $\mathcal{F}_2(q, P, t) = \frac{qP}{\cos\gamma t} - \frac{1}{2}q^2 m\omega\tan\gamma t - \frac{1}{2}\frac{P^2}{m\omega}\tan\gamma t$
- Podemos construir $\mathcal{F}(q, p(q, P, t), t) = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q(q, P, t)P$

Mostrar que la transformación: $q = Q\cos\gamma t + \frac{P}{m\omega}\,\mathrm{sen}\,\gamma t$, $p = -m\omega Q\,\mathrm{sen}\,\gamma t + P\cos\gamma t$ es canónica. Determinar la función $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q,P,t)$ y $p = p(Q,P,t)$ es canónica entonces $\{q,p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2\gamma t + \mathrm{sen}^2\,\gamma t = 1$ ✓
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t$, y $p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$, integramos las ecuaciones $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos\gamma t} - qm\omega\tan\gamma t$, y $\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos\gamma t} - \frac{P}{m\omega}\tan\gamma t$
- La solución es $\mathcal{F}_2(q,P,t) = \frac{qP}{\cos\gamma t} - \frac{1}{2}q^2 m\omega\tan\gamma t - \frac{1}{2}\frac{P^2}{m\omega}\tan\gamma t$
- Podemos construir $\mathcal{F}(q, p(q,P,t), t) = \mathcal{F}_2(q,P,t) - Q(q,P,t)P$
- Finalemente si $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$, tendremos $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H} - \frac{P^2}{2m\omega}\gamma - \frac{1}{2}m\omega Q^2\gamma = \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2\right)\left(1 - \frac{\gamma}{\omega}\right)$