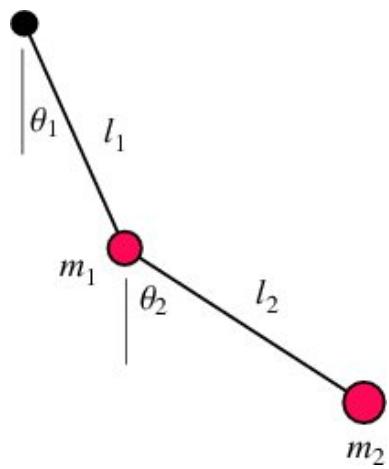




Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

MARIO COSENZA

Mecánica Clásica



Versión A-2016

MARIO COSENZA
*Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela*

Mecánica Clásica

Versión A-2016

© Mario Cosenza
Centro de Física Fundamental
Grupo de Caos y Sistemas Complejos
www.ciens.ula.ve/cff/caoticos



©MMXVI

a Claudia

Mi propósito es exponer una ciencia muy nueva que trata un tema muy antiguo. Quizás nada hay en la naturaleza más antiguo que el movimiento, respecto al cual los libros escritos por filósofos no son ni pocos ni pequeños; no obstante, he descubierto, experimentando, algunas propiedades que merecen ser conocidas.

Galileo Galilei, *Diálogos Sobre Dos Nuevas Ciencias*.

Fórmulas vectoriales

Identidades

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (1)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (3)$$

Derivadas de sumas

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad (4)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (6)$$

Derivadas de productos

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (7)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla f \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f) \quad (11)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (12)$$

Derivadas segundas

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (14)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (15)$$

Teoremas integrales

$$\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(b) - f(a) \quad (16)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \text{Teorema de Gauss (divergencia)} \quad (17)$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{Teorema de Stokes} \quad (18)$$

$$\int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \oint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad \text{Teorema de Green} \quad (19)$$

Índice general

1. Ecuaciones de movimiento	9
1.1. Leyes de Newton y mecánica de una partícula	9
1.2. Mecánica de un sistema de partículas	20
1.3. Coordenadas generalizadas	26
1.4. Principios variacionales y ecuaciones de Euler	32
1.5. Principio de mínima acción y ecuaciones de Lagrange	43
1.6. Propiedades de las ecuaciones de Lagrange	45
1.7. Ecuaciones de Lagrange para varios sistemas	49
1.8. Problemas	64
2. Leyes de conservación y simetrías	71
2.1. Momento conjugado	71
2.2. Teorema de Noether	72
2.3. Homogeneidad del espacio y conservación del momento lineal	76
2.4. Isotropía del espacio y conservación del momento angular	78
2.5. Homogeneidad del tiempo y conservación de la energía	80
2.6. Teorema de Euler para la energía cinética	81
2.7. Fuerzas generalizadas: partícula en un campo electromagnético	83
2.8. Sistemas integrables y sistemas caóticos	87
2.9. Movimiento unidimensional	90
2.10. Problemas	97
3. Fuerzas centrales	101
3.1. Problema de dos cuerpos	101
3.2. Potencial efectivo	108
3.3. Ecuación diferencial de la órbita	113
3.4. Fuerza gravitacional y problema de Kepler	115
3.5. Leyes de Kepler y dependencia temporal	125
3.6. Estabilidad de órbitas circulares y ángulo de precesión	133
3.7. El vector de Laplace-Runge-Lenz	139
3.8. Dispersión en campo de fuerza central	142
3.9. Problemas	150

4. Oscilaciones pequeñas	155
4.1. Oscilaciones en una dimensión	155
4.2. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad	159
4.3. Modos normales	165
4.4. Oscilaciones forzadas y amortiguadas	175
4.5. Problemas	178
5. Movimiento de cuerpos rígidos	183
5.1. Velocidad angular de un cuerpo rígido	183
5.2. Ángulos de Euler	185
5.3. Energía cinética y tensor de inercia	189
5.4. Momento angular de un cuerpo rígido	200
5.5. Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos	203
5.6. Ecuaciones de Euler para cuerpos rígidos	212
5.7. Problemas	224
6. Dinámica Hamiltoniana	227
6.1. Ecuaciones de Hamilton	227
6.2. Sistemas dinámicos y espacio de fase	234
6.3. Teorema de Liouville	238
6.4. Paréntesis de Poisson	242
6.5. Transformaciones canónicas	247
6.6. Transformaciones canónicas infinitesimales	254
6.7. Propiedades de las transformaciones canónicas	256
6.8. Aplicaciones de transformaciones canónicas	262
6.9. Ecuación de Hamilton-Jacobi	264
6.10. Variables de acción-ángulo	276
6.11. Integrabilidad	292
6.12. Problemas	296
A. Lagrangiano de una partícula relativista	305
B. Transformaciones de Legendre	319
C. Teorema del virial	321
D. Bibliografía	323

Capítulo 1

Ecuaciones de movimiento

1.1. Leyes de Newton y mecánica de una partícula

La *Mecánica* consiste en el estudio del movimiento; esto es, la evolución de la posición de una partícula o de la configuración de un sistema de partículas en el tiempo. La *Mecánica Clásica* se refiere a movimientos que ocurren en escalas macróscopicas; es decir, no incluye fenómenos cuánticos (nivel atómico). La Mecánica Clásica provee descripciones válidas de fenómenos en una extensa escala espacial que va desde el orden de 100 nm (R. Decca et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 240401 (2005)) hasta distancias cosmológicas.

Actualmente, la Mecánica Clásica se enmarca dentro de un campo de estudio más general denominado *Sistemas Dinámicos*. Éstos son sistemas descritos por variables generales cuyos estados evolucionan en el tiempo de acuerdo a reglas deterministas, e incluyen sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etc.

El origen del método científico está directamente vinculado a la primeras formulaciones cuantitativas de la Mecánica Clásica realizadas por Galileo con base en sus experimentos. La Mecánica Clásica constituye el eje esencial alrededor del cual se ha construido toda la Física.



Figura 1.1: Galileo Galilei (1564-1642).

Durante el siglo XX, la Mecánica Clásica se encontró con varias limitaciones para explicar nuevos fenómenos. Las subsecuentes soluciones de estas dificultades condujeron a tres grandes revoluciones intelectuales en la Física:

- I. Limitación para explicar fenómenos a altas velocidades o a altas energías, lo que condujo a la Teoría de Relatividad (Especial y General).
- II. Limitación para explicar fenómenos a escala atómica o microscópica, lo cual dio origen a la Mecánica Cuántica.
- III. Limitación en la capacidad de predicción en sistemas dinámicos deterministas no lineales, que condujo al desarrollo del Caos y eventualmente al estudio actual de Sistemas Complejos.

Para describir el movimiento, se requiere la definición de algunos conceptos básicos.

Un *sistema de referencia* es una convención necesaria para asignar una posición o ubicación espacial a una partícula u objeto con respecto a un origen o punto escogido O . Se asume que una partícula tiene asociada una cantidad de masa, denotada por m .

La *posición* de una partícula en un sistema de referencia puede describirse mediante un conjunto de tres coordenadas que definen un vector. Por ejemplo, en un sistema de coordenadas cartesianas, el vector de posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ da la ubicación de una partícula en el espacio con respecto a un origen O . Las componentes del vector de posición en coordenadas cartesianas también se denotan como $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$.

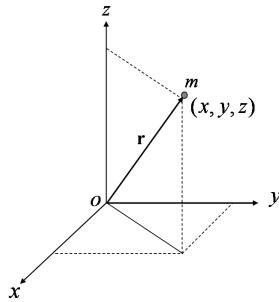


Figura 1.2: Posición de una partícula en un sistema de coordenadas cartesianas.

La posición de una partícula puede depender del tiempo, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. El cambio del vector de posición en el tiempo constituye el *movimiento* de la partícula. En Mecánica Clásica, el tiempo t se considera un parámetro real que permite establecer el orden en el cual ocurren los eventos; en particular, es necesario para especificar las posiciones sucesivas que una partícula en movimiento ocupa en el espacio. Asumimos que el parámetro t posee la propiedad de incremento monótonico a medida que $\mathbf{r}(t)$ varía a través de sucesivas posiciones: dados dos valores t_1 y t_2 tales que $t_2 > t_1$, entonces la partícula ocupa la posición $\mathbf{r}(t_2)$ después de la posición $\mathbf{r}(t_1)$.

El vector de *desplazamiento* infinitesimal se define como

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t). \quad (1.1)$$

La *velocidad* de una partícula se define como

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

En coordenadas cartesianas, las componentes de la velocidad son

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.3)$$

Las componentes de la velocidad también se denotan como $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$.

La *aceleración* se define como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1.4)$$

Se acostumbra usar la siguiente notación para las derivadas con respecto al tiempo,

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.5)$$

El *momento lineal o cantidad de movimiento* de partícula con masa m que se mueve con velocidad \mathbf{a} es la cantidad vectorial

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1.6)$$

Una partícula puede experimentar interacciones con otras partículas. Las interacciones entre partículas están asociadas a sus propiedades intrínsecas y se manifiestan como *fuerzas* entre ellas. Por ejemplo, la interacción electromagnética está asociada a la carga eléctrica, mientras que la interacción gravitacional depende de la masa. Las fuerzas son cantidades vectoriales. La suma de las fuerzas debido a interacciones con otras partículas o con agentes externos se denomina fuerza total (neta) sobre la partícula; se denota por \mathbf{F} . La fuerza total sobre una partícula puede afectar su estado de movimiento.

Las *Leyes de Newton* describen el movimiento de una partícula sujeta a una fuerza total:

I. Primera Ley de Newton:

Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.

II. Segunda Ley de Newton:

Existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de una partícula con masa m y velocidad \mathbf{v} está descrito por la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}. \quad (1.7)$$

III. Tercera Ley de Newton:

Si \mathbf{F}_{ji} es la fuerza que ejerce una partícula j sobre una partícula i , y \mathbf{F}_{ij} es la fuerza que ejerce la partícula i sobre la partícula j , entonces

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}. \quad (1.8)$$



Figura 1.3: Isaac Newton (1642-1727).

La Segunda Ley de Newton establece una relación causa (fuerza) \leftrightarrow efecto (cambio de momento). La Primera Ley de Newton también se llama *Ley de inercia*, y es consecuencia de la Segunda Ley: si $\mathbf{F} = 0$, entonces $\mathbf{v} = \text{constante}$. La Tercera Ley también es conocida como *Ley de acción y reacción*. Las Leyes de Newton son leyes de la Naturaleza sustentadas en observaciones experimentales.

La Segunda Ley de Newton es una ecuación vectorial, es decir, equivale a tres ecuaciones, una para cada componente cartesiana:

$$F_i = \frac{dp_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Si m es constante,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1.10)$$

Matemáticamente, la Segunda Ley de Newton, Ec (1.10), corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden para cada componente de $\mathbf{r}(t)$. La solución $\mathbf{r}(t)$ está determinada por dos condiciones iniciales, $\mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}(t_0)$. Este es el principio del *determinismo* en Mecánica Clásica, y que ha sido fundamental en el desarrollo del método científico. A finales del siglo XX, se encontró que el determinismo no necesariamente implica estabilidad de la predicción: existen sistemas dinámicos no lineales en los cuales perturbaciones infinitesimales de las condiciones iniciales de sus variables pueden conducir a evoluciones muy diferentes de esas variables. Este es el origen del moderno campo de estudio del Caos.

Los sistemas de referencia donde se cumple la Segunda Ley de Newton se denominan *sistemas de referencia inerciales*. En ausencia de fuerzas, una partícula en reposo en un sistema inercial en un instante dado, sigue en reposo en todo instante.

Los *sistemas de referencia no inerciales* son sistemas de referencia donde aparecen términos adicionales en la Segunda Ley de Newton, no asociados a las fuerzas explícitas en el sistema. Esos términos adicionales se denominan *fuerzas ficticias* y son debidos a la aceleración del sistema de referencia.

Ejemplos:

1. Un sistema no inercial: péndulo en un sistema acelerado (x', y', z') .

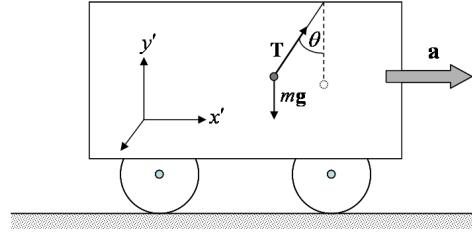


Figura 1.4: Péndulo en un sistema acelerado.

El sistema (x', y', z') posee una aceleración a en la dirección x , visto desde un sistema fijo (x, y, z) . En el sistema acelerado, la componente en la dirección x' de la fuerza que actúa sobre la masa del péndulo es $f_{x'} = T \sin \theta$, pero esta masa está en reposo en ese sistema; esto implica que $\ddot{x}' = 0$. Luego, una fuerza adicional *ficticia* igual a $-T \sin \theta$ debe anular a $f_{x'}$, de modo que no haya fuerza neta en la dirección x' . En el sistema (x, y, z) , la Segunda Ley de Newton da simplemente $T \sin \theta = ma$.

La fuerza de Coriolis es otro ejemplo de una fuerza ficticia en un sistema de referencia en rotación (Cap. 5).

2. Oscilador armónico simple.

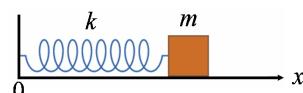


Figura 1.5: Oscilador armónico simple.

La fuerza del resorte sobre la masa m es proporcional y opuesta al desplazamiento x desde la posición de equilibrio, tomada como $x = 0$, i.e., $\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{x}}$, donde k es la constante del resorte. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \\ \Rightarrow -kx &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde $\omega^2 \equiv k/m$. La Ec (1.11) es la ecuación del oscilador armónico. Su solución general es

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \tag{1.12}$$

También se puede escribir

$$x(t) = C \sin(\omega t + \phi), \quad (1.13)$$

con $A = C \sin \phi$, $B = C \cos \phi$. Los coeficientes A y B están determinados por las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0) = v(0)$,

$$x(0) = A, \quad (1.14)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \Rightarrow B = \frac{v(0)}{\omega}. \quad (1.15)$$

Luego,

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t. \quad (1.16)$$

3. Partícula en un medio viscoso.

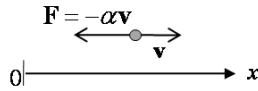


Figura 1.6: Partícula en medio viscoso.

Experimentalmente se sabe que la fuerza ejercida por un medio viscoso sobre una partícula que se mueve en ese medio es proporcional a la velocidad de la partícula, $\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}$, donde α es un coeficiente de fricción característico del medio. Supongamos que la partícula se mueve en la dirección x a partir de una posición inicial $x(0)$ con velocidad inicial $v(0)$. La Segunda Ley de Newton para la componente x de la fuerza da:

$$-\alpha v = m \frac{dv}{dt}. \quad (1.17)$$

Integrando obtenemos,

$$v(t) = c_1 e^{-(\alpha/m)t} = \frac{dx}{dt}, \quad c_1 = v(0), \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= v(0) \int e^{-(\alpha/m)t} dt \\ &= -\frac{v(0)m}{\alpha} e^{-(\alpha/m)t} + c_2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

La constante c_2 se determina usando la posición inicial $x(0)$,

$$c_2 = x(0) + \frac{v(0)m}{\alpha}. \quad (1.20)$$

Luego,

$$x(t) = x(0) + \frac{v(0)m}{\alpha} \left(1 - e^{-(\alpha/m)t} \right). \quad (1.21)$$

4. Sistema de masa variable: movimiento de un cohete.

Consideremos un cohete que se mueve verticalmente en el campo gravitacional de la Tierra. La masa del cohete en un tiempo t es m . La velocidad del cohete en t es v , y la velocidad del propelente expulsado es u . Sea dm_p la masa del propelente expulsado en un instante $t + dt$. Entonces el cambio de masa del cohete en $t + dt$ es $dm = -dm_p$, puesto que la masa del cohete disminuye en el tiempo.

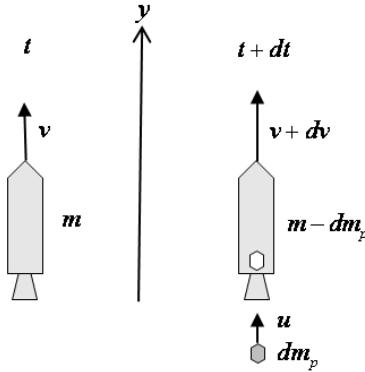


Figura 1.7: Cohete en movimiento vertical.

Aplicamos la Segunda Ley de Newton para la componente vertical y de la fuerza,

$$-mg = \frac{dp}{dt} = \frac{p(t + dt) - p(t)}{dt}. \quad (1.22)$$

Tenemos

$$p(t) = mv, \quad (1.23)$$

$$p(t + dt) = (m - dm_p)(v + dv) + dm_p u \quad (1.24)$$

$$= mv + m dv - dm_p v - dm_p dv + dm_p u. \quad (1.25)$$

Luego,

$$\begin{aligned} p(t + dt) - p(t) &= m dv - dm_p(v + dv - u) \\ &= m dv - dm_p v_{\text{rel}}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde hemos empleado la velocidad del propelente relativa al cohete, dada por

$$v_{\text{rel}} = (v + dv) - u. \quad (1.27)$$

Sustituyendo en la Ec. (1.22), obtenemos

$$-mg = m \frac{dv}{dt} - v_{\text{rel}} \frac{dm_p}{dt}. \quad (1.28)$$

La tasa de expulsion del propelente se define como $R = \frac{dm_p}{dt}$. Luego, podemos escribir la denominada *ecuación del cohete* como

$$m \frac{dv}{dt} = v_{\text{rel}} R - mg. \quad (1.29)$$

De la Ec. (1.28), se puede obtener la variación de la velocidad del cohete en función del cambio de su masa,

$$dv + \frac{dm}{m} v_{\text{rel}} = -g dt. \quad (1.30)$$

Integrando entre un valor inicial de masa m_0 en $t' = 0$ y un valor final m_f en $t' = t$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^f dv &= -v_{\text{rel}} \int_0^f \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt' \\ \Rightarrow v_f &= v_0 + v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) - gt. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Existen otros conceptos útiles en Mecánica, que definimos a continuación.

Consideremos una partícula ubicada en la posición \mathbf{r} y cuya velocidad es \mathbf{v} . Se define el *momento angular* de la partícula como la cantidad vectorial

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (1.32)$$

El *torque* ejercido por una fuerza \mathbf{F} sobre una partícula ubicada en \mathbf{r} se define como

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.33)$$

La Ec. (1.33) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \\ &= \frac{d\mathbf{l}}{dt} + \mathbf{v} \times \mathbf{p}^0 \\ \Rightarrow \boldsymbol{\tau} &= \frac{d\mathbf{l}}{dt}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

La Ec. (1.34) implica la *conservación del momento angular*: si el torque sobre una partícula es $\boldsymbol{\tau} = 0$, entonces $\mathbf{l} = \text{constante}$. Esto significa que cada componente del vector \mathbf{l} es una constante.

En particular, una fuerza de la forma $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, se denomina una *fuerza central*. La fuerza gravitacional es un ejemplo de una fuerza central. Para tales fuerzas, $\boldsymbol{\tau} = 0$. Luego, el momento angular de una partícula se conserva en presencia de fuerzas centrales.

La *energía cinética* de una partícula con masa m y velocidad \mathbf{v} se define como la cantidad escalar

$$T \equiv \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.35)$$

Se define el *trabajo* realizado por una \mathbf{F} *externa* sobre una partícula para llevarla desde una posición \mathbf{r}_1 hasta una posición \mathbf{r}_2 , como la integral de línea

$$W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (1.36)$$

donde $d\mathbf{s}$ es el vector tangente a la trayectoria que une la posición \mathbf{r}_1 con la posición \mathbf{r}_2 .

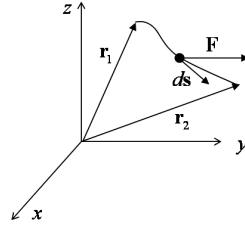


Figura 1.8: Trayectoria de un partícula entre \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , sujeta a una fuerza \mathbf{F} .

Note que $d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. Luego, si m es constante, podemos escribir,

$$W_{12} = m \int_1^2 \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot (\mathbf{v} dt). \quad (1.37)$$

Usamos la relación $d(v^2) = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$, para expresar

$$\begin{aligned} W_{12} &= \frac{1}{2}m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2}m \int_1^2 d(v^2) \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \\ &= T_2 - T_1. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Luego, el trabajo realizado por una \mathbf{F} externa para llevar una partícula desde la posición \mathbf{r}_1 hasta la posición \mathbf{r}_2 depende solamente de la diferencia entre la energía cinética que posee la partícula en \mathbf{r}_2 y la energía cinética que posee en \mathbf{r}_1 .

Note que, si se utiliza la misma fuerza \mathbf{F} y la misma trayectoria, denotada por B , para ir del punto \mathbf{r}_1 al punto \mathbf{r}_2 y para volver de \mathbf{r}_2 a \mathbf{r}_1 , entonces

$$\underbrace{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino B}} = - \underbrace{\int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino B}} \Rightarrow W_{12}(B) = -W_{21}(B), \quad (1.39)$$

puesto que $ds(1 \rightarrow 2) = -ds(2 \rightarrow 1)$ para la misma trayectoria.

Si W_{12} realizado por una \mathbf{F} externa es independiente de la trayectoria entre \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , entonces \mathbf{F} se llama *fuerza conservativa*. Es decir; si \mathbf{F} es conservativa y A y B son dos caminos diferentes para ir de 1 a 2, entonces

$$\underbrace{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} = \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino B}} \quad (1.40)$$

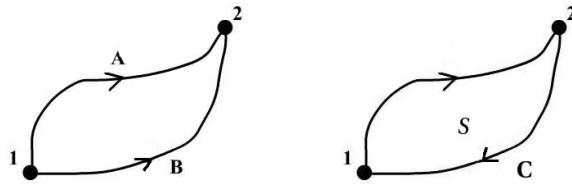


Figura 1.9: Izquierda: dos trayectorias distintas A y B para ir del punto 1 al punto 2. Derecha: contorno cerrado C que encierra un área S .

Luego, si \mathbf{F} es conservativa, las Ecs. (1.40) y (1.39) implican que

$$\underbrace{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} + \underbrace{\int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino B}} = 0. \quad (1.41)$$

Puesto que los caminos A y B son arbitrarios, tenemos que para una \mathbf{F} conservativa,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1.42)$$

donde C es un contorno cerrado arbitrario. Usando el Teorema de Stokes, la integral de contorno Ec. (1.42) se puede escribir como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (1.43)$$

donde S es el área encerrada por el contorno cerrado C . Puesto que C es arbitrario y por lo tanto $S \neq 0$, la Ec. (1.43) implica para una fuerza conservativa,

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (1.44)$$

Por otro lado, para toda función escalar $\phi(\mathbf{r})$ se cumple la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \phi = 0$. Esto implica que la fuerza conservativa \mathbf{F} debe ser proporcional al gradiente de alguna función escalar. Se define la función $V(\mathbf{r})$ tal que

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (1.45)$$

Luego, para una fuerza conservativa

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= - \int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} \\
 &= - \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i \right) = - \int_1^2 dV \\
 &= V_1 - V_2.
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Vimos que el trabajo W_{12} realizado por toda fuerza es igual al cambio de energía cinética, $T_2 - T_1$, que es una función escalar de la velocidad. La Ec. (1.46) muestra que, en sistemas conservativos, el trabajo W_{12} además está relacionado con cambios de otra función escalar V que depende de las coordenadas, evaluada en los puntos 1 y 2.

La función escalar $V(\mathbf{r})$ se denomina *energía potencial* y expresa la energía almacenada en un sistema, relacionada con la posición o configuración de los elementos constituyentes del sistema. Por ejemplo, un resorte estirado o comprimido una distancia x tiene una energía potencial almacenada $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte. Un sistema de dos partículas con masas m_1 y m_2 , separadas una distancia r y sujetas a una interacción gravitacional, posee una energía potencial asociada $V(r) = -Gm_1m_2/r$, donde G es la constante universal gravitacional (Cap. 3).

La Ec. (1.46) válida para fuerzas conservativas, junto con la Ec. (1.38) que se cumple para cualquier fuerza, conduce a la relación

$$\begin{aligned}
 V_1 - V_2 &= T_2 - T_1, \\
 \Rightarrow T_1 + V_1 &= T_2 + V_2.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

La *energía mecánica total* de una partícula se define como la cantidad escalar:

$$E \equiv T + V. \tag{1.48}$$

La Ec. (1.47) implica que

$$E_1 = E_2. \tag{1.49}$$

Puesto que los puntos 1 y 2 son arbitrarios, la energía mecánica total es constante en cualquier punto para sistemas conservativos,

$$E = T + V = \text{constante}. \tag{1.50}$$

El signo menos en el gradiente de la energía potencial, Ec. (1.45), tiene significado físico; las propiedades de las fuerzas correspondientes a esta definición son consistentes con los comportamientos observados de todas las fuerzas conservativas en Física. Este signo menos implica que la cantidad constante asociada con una fuerza conservativa, denominada como energía mecánica total, se pueda definir como la suma de la energía cinética y de la energía potencial.

Si la energía potencial depende tanto de las coordenadas como del tiempo, $V(\mathbf{r}, t) = V(x, y, z, t)$, la energía mecánica total puede no conservarse. Consideraremos la derivada

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + V) = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt}. \tag{1.51}$$

Calculamos

$$\frac{dT}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.52)$$

$$\frac{dV(\mathbf{r}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1.53)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= -\nabla V \cdot \mathbf{v} + \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

donde hemos empleado $\mathbf{F} = -\nabla V$, para un sistema conservativo. La Ec. (1.54) es la condición para la conservación de la energía mecánica: la energía mecánica total es constante si la energía potencial no depende explícitamente del tiempo,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{constante}. \quad (1.55)$$

La energía potencial V también puede ser definida para sistemas no conservativos; en esos casos V depende explícitamente tanto de la posición como del tiempo. La fuerza correspondiente puede expresarse como el gradiente de esta V . Sin embargo, el trabajo hecho para mover una partícula entre los puntos 1 y 2 ya no es $V_1 - V_2$, puesto que V cambia con el tiempo cuando la partícula se mueve. La energía total también puede ser definida como $E = T + V$; pero la cantidad E no se conserva durante el movimiento.

1.2. Mecánica de un sistema de partículas

Consideremos un conjunto de N partículas en un sistema de referencia cartesiano. Sean m_i y \mathbf{r}_i la masa y la posición de la partícula i , respectivamente, con $i = 1, \dots, N$. Definimos el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, que va en la dirección de la partícula i a la partícula j .

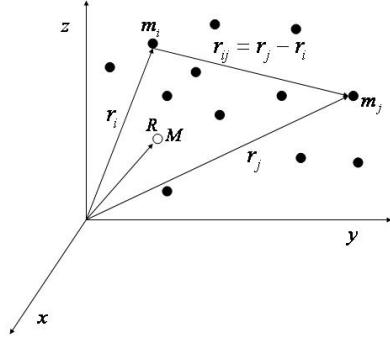
El vector de posición del *centro de masa* de un sistema de partículas se define como

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_T}, \quad (1.56)$$

donde $M_T = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema.

La velocidad del centro de masa es

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M_T} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \quad (1.57)$$

Figura 1.10: Sistema de N partículas en un sistema de referencia cartesiano.

El momento lineal total del sistema de N partículas es

$$\mathbf{P}_T = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M_T \frac{d\mathbf{R}}{dt} = M_T \mathbf{v}_{cm}. \quad (1.58)$$

Luego, el momento total \mathbf{P}_T es equivalente al momento de una partícula que posea la masa total del sistema, moviéndose con la velocidad del centro de masa del sistema.

Supongamos que existen fuerzas sobre las partículas, tanto internas como externas al sistema. Denotamos por \mathbf{F}_{ji} la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i , y por $\mathbf{F}_{ext}(i)$ la fuerza total debida a influencias *externas* sobre la partícula i . Recordemos que las fuerzas de interacción entre dos partículas i y j obedecen la Tercera Ley de Newton,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}. \quad (1.59)$$

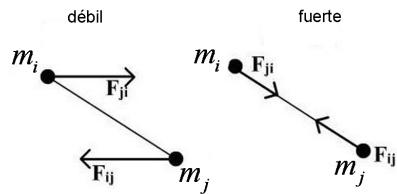


Figura 1.11: Tercera Ley de Newton, en sus dos formas.

Para fuerzas centrales, la Tercera Ley es más restrictiva. Si \mathbf{F}_{ij} es central,

$$\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \quad (1.60)$$

entonces las fuerzas sobre las partículas van en la dirección (paralela o antiparalela) del vector \mathbf{r}_{ij} . Esta condición sobre fuerzas centrales se conoce como *forma fuerte de la ley de acción y reacción*. Cabe recordar que no todas las fuerzas cumplen esta condición; por ejemplo, las fuerzas magnéticas entre dos cargas en movimiento no siempre son centrales.

La ecuación de movimiento para la partícula i puede expresarse como

$$\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i), \quad (1.61)$$

donde $\sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{ji}$ es la suma de las fuerzas *internas* sobre la partícula i , debido a las interacciones con las otras partículas.

Para obtener la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas en la Ec. (1.61),

$$\sum_i \cancel{\sum_j} \overset{0}{\mathbf{F}_{ji}} + \sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \quad (1.62)$$

El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton. Luego, si m_i es constante $\forall i$, la Ec. (1.62) queda

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}. \quad (1.63)$$

Usando la definición del centro de masa, la Ec. (1.56), se puede expresar como

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = M_T \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}. \quad (1.64)$$

Luego,

$$\mathbf{F}_{\text{ext(total)}} \equiv \sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \frac{d\mathbf{P}_T}{dt}, \quad (1.65)$$

La Ec. (1.65) constituye una ecuación de movimiento para el centro de masa. La Ec. (1.65) implica que si la fuerza externa total sobre un sistema de partículas es cero, entonces el momento lineal total \mathbf{P}_T del sistema se conserva.

El momento angular de la partícula i es

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (1.66)$$

Entonces, el momento angular total del sistema de partículas es

$$\mathbf{l}_T = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i). \quad (1.67)$$

Si definimos la posición \mathbf{r}'_i de la partícula i con respecto al centro de masa del sistema como

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}, \quad (1.68)$$

la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa será

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\text{cm}}. \quad (1.69)$$

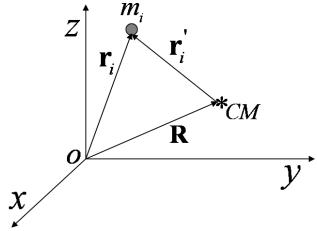


Figura 1.12: Posición relativa de una partícula con respecto al centro de masa.

Entonces, en términos del centro de masa podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{l}_T &= \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\text{cm}}) \\
 &= \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v}_{\text{cm}} \\
 &\quad + \mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i \right)^0 + \mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_{\text{cm}} \right). \tag{1.70}
 \end{aligned}$$

Para mostrar los términos que se anulan en la Ec. (1.70), calculamos

$$\begin{aligned}
 M_T \mathbf{R} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \\
 &= \sum_i m_i \mathbf{r}'_i + M_T \mathbf{R} \\
 \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{r}'_i &= 0. \tag{1.71}
 \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) = 0. \tag{1.72}$$

Entonces, la Ec. (1.70) para el momento angular total queda

$$\mathbf{l}_T = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i) + \mathbf{R} \times (M_T \mathbf{v}_{\text{cm}}). \tag{1.73}$$

El momento angular total \mathbf{l}_T de un sistema de partículas contiene dos contribuciones:

- (i) el momento angular del centro de masa, $\mathbf{R} \times (M_T \mathbf{v}_{\text{cm}})$;
- (ii) el momento angular relativo al centro de masa, $\sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i)$.

Calculemos la derivada temporal de \mathbf{l}_T ,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{l}_T}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\cancel{\mathbf{v}_i \times m\mathbf{v}_i})^0 + \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i \\
 &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right) \\
 &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) + \sum_i \sum_{j \neq i} (\cancel{\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}})^0
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

El segundo término en la Ec. (1.74) contiene sumas de pares de la forma

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}, \tag{1.75}$$

puesto que $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, de acuerdo a la Tercera Ley de Newton. Si además suponemos que se cumple la Tercera Ley de Newton en forma fuerte, $\mathbf{F}_{ij} = k|\mathbf{F}_{ji}|\mathbf{r}_{ij}$. Luego, $\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} = 0$ y el segundo término de la Ec. (1.74) se anula.

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{l}_T}{dt} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) \\
 &= \sum_i \boldsymbol{\tau}_i(\text{externo}) = \boldsymbol{\tau}_T(\text{externo}).
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

La Ec. (1.76) expresa la conservación del momento angular total de un sistema de partículas: si el torque externo total $\boldsymbol{\tau}(\text{externo total}) = 0$, entonces $\mathbf{l}_T = \text{constante}$.

La energía cinética total de un sistema de partículas es

$$T_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \tag{1.77}$$

En coordenadas del centro de masa, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\text{cm}}$, y podemos escribir

$$\begin{aligned}
 T_{\text{total}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\text{cm}}) \cdot (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\text{cm}}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v'^2_i + \frac{1}{2} 2\mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}'_i.
 \end{aligned} \tag{1.78}$$

Pero $\sum m_i \mathbf{v}'_i = \frac{d}{dt} (\sum m_i \mathbf{r}'_i) = 0$; luego

$$T_{\text{total}} = \frac{1}{2} M_T v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v'^2_i. \tag{1.79}$$

Es decir, la *energía cinética total* de un sistema de partículas contiene dos contribuciones:

- (i) la energía cinética del centro de masa, $\frac{1}{2} M_T v_{\text{cm}}^2$;
- (ii) la energía cinética relativa al centro de masa, $\frac{1}{2} \sum m_i v'^2_i$.

Para obtener la conservación de energía mecánica total de un sistema de partículas, partimos de la ecuación de movimiento para una partícula, Ec. (1.61),

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \quad (1.80)$$

Asumimos que las partículas interactúan mediante fuerzas centrales que dependen de la distancia entre las partículas; es decir,

$$\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \quad (1.81)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \quad (1.82)$$

Entonces, se puede definir una energía potencial de interacción $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$ tal que

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|), \quad (1.83)$$

donde denotamos $\nabla_i = \partial/\partial \mathbf{r}_i$. Puesto que $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, las funciones $f_{ij} = f_{ji}$ son simétricas con respecto al intercambio de i y j ; luego debemos tener

$$V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|), \quad (1.84)$$

y, por lo tanto, ambas \mathbf{F}_{ji} y \mathbf{F}_{ij} son derivables a partir de una energía potencial de interacción mutua entre la partícula i y la partícula j ,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|), \quad \mathbf{F}_{ji} = -\nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|). \quad (1.85)$$

Luego, suponiendo que las masas m_i son constantes, la Ec. (1.80) se puede expresar como

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \sum_{j \neq i} \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}. \quad (1.86)$$

Tomando el producto escalar de la Ec. (1.86) con \mathbf{v}_i , obtenemos

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = \frac{1}{2} m_i \frac{dv_i^2}{dt}. \quad (1.87)$$

Sumando sobre todas las partículas, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} [\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)] \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} [\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_j] \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|), \end{aligned} \quad (1.88)$$

donde hemos usado $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$. Entonces, podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i). \quad (1.89)$$

Si asumimos que las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = -\nabla V_{\text{ext}}(i)$, tenemos,

$$\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = - \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla V_{\text{ext}}(i) = - \frac{d}{dt} \left(\sum_i V_{\text{ext}}(i) \right). \quad (1.90)$$

La Ec. (1.89) se puede expresar entonces como

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) + \sum_i V_{\text{ext}}(i) \right] = 0. \quad (1.91)$$

Podemos identificar la energía cinética total del sistema,

$$T_{\text{total}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (1.92)$$

y la *energía potencial total del sistema* como,

$$V_{\text{total}} = \sum_i V_{\text{ext}}(i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|), \quad (1.93)$$

donde

$$V_{\text{int}} \equiv \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \quad (1.94)$$

es la energía potencial total de la interacción entre las partículas. La Ec. (1.91) implica entonces que la *energía total del sistema* se conserva,

$$E_{\text{total}} = T_{\text{total}} + V_{\text{total}} = \text{constante}. \quad (1.95)$$

1.3. Coordenadas generalizadas

Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, cuyos vectores de posición son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$. Cada vector de posición posee tres coordenadas, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema de N partículas con posiciones $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$ está descrito por $3N$ coordenadas.

En general existen *restricciones* o *ligaduras* para algunas coordenadas; por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano ($z = \text{cte}$), o sobre un círculo ($x^2 + y^2 = \text{cte}$), sobre una esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = \text{cte}$), etc. En general, las restricciones se pueden expresar como relaciones algebraicas o funcionales entre las coordenadas.

Si un sistema posee k restricciones, éstas se puede expresar como k relaciones o funciones que ligan las coordenadas:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) &= 0, \\ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) &= 0, \\ &\vdots \\ f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Las restricciones o ligaduras que se expresan en forma de relaciones algebraicas de la forma Ecs. (1.96) se llaman *restricciones holonómicas*. La existencia de restricciones implica que no todas las $3N$ coordenadas son independientes. El número de coordenadas independientes cuando existen k restricciones holonómicas es $s = 3N - k$.

La cantidad s determina el número de *grados de libertad* del sistema, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema. Los grados de libertad definen un conjunto de *coordenadas generalizadas*, denotadas por $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$. La evolución temporal de estas coordenadas permite definir también un conjunto de *velocidades generalizadas* $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s\}$. En Mecánica Clásica, el tiempo t no es considerado como una coordenada, sino como un parámetro.

Las coordenadas generalizadas no son necesariamente coordenadas cartesianas, sino que pueden consistir en otro tipo de coordenadas, tales como cantidades angulares, o inclusive pueden ser otras variables físicas. Las coordenadas generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ están relacionadas con las coordenadas cartesianas $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$ por un conjunto de transformaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, t), \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2(q_1, q_2, \dots, t), \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, t). \end{aligned} \tag{1.97}$$

En general, el conjunto de ligaduras $f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$, y las transformaciones $\mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, permiten expresar las coordenadas generalizadas en términos de las coordenadas cartesianas, $q_j = q_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$, $j = 1, 2, \dots, s$. Es decir, en principio, las transformaciones $\mathbf{r}_i \leftrightarrow q_j$ son invertibles.

También pueden existir restricciones no descritas por ecuaciones algebraicas, las cuales se denominan *restricciones no holonómicas*. Éstas se expresan como desigualdades o en forma de ecuaciones diferenciales para las coordenadas. Por ejemplo, la restricción de que un conjunto de partículas con posiciones \mathbf{r}_i se mantenga dentro de una esfera de radio R es no holonómica, y se expresa como $|\mathbf{r}_i| < R$.

Como veremos en este Capítulo, la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica permite expresar las ecuaciones de movimiento del sistema directamente en términos de sus s coordenadas generalizadas, en lugar las $3N$ ecuaciones de movimiento para las componentes cartesianas que tendría el sistema en la descripción Newtoniana.

Ejemplos.

1. Péndulo simple.

Consiste en una partícula ($N = 1$) con masa m colgada de un extremo de una varilla rígida de longitud l y masa despreciable, cuyo otro extremo está fijo, tal que la varilla cual puede girar en un plano vertical.

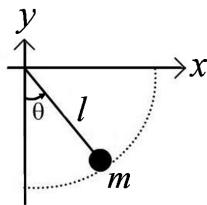


Figura 1.13: Péndulo simple con longitud l y masa m .

Ubicamos el origen O del sistema de coordenadas en el extremo fijo del péndulo. Hay $k = 2$ restricciones:

$$z = 0 \Rightarrow f_1(x, y, z) = z = 0. \quad (1.98)$$

$$x^2 + y^2 = l^2 \Rightarrow f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (1.99)$$

Luego, $s = 3(1) - 2 = 1$. Hay una coordenada generalizada. El diagrama del sistema sugiere escoger $q = \theta$ como coordenada generalizada. Las transformaciones $\mathbf{r}(q)$ son

$$x = l \sin \theta \quad (1.100)$$

$$y = -l \cos \theta, \quad (1.101)$$

y la transformación $q(\mathbf{r})$ es

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{x}{y} \right). \quad (1.102)$$

2. Péndulo doble.

Consiste en un péndulo plano que cuelga de otro péndulo plano.

Hay $N = 2$ partículas y seis coordenadas cartesianas correspondientes a las componentes de \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Ubicamos el origen del sistema de coordenadas en el extremo fijo del péndulo superior.

Hay $k = 4$ restricciones:

$$\begin{aligned} f_1 &= z_1 = 0 \\ f_2 &= z_2 = 0 \\ f_3 &= x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 \\ f_4 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.103)$$

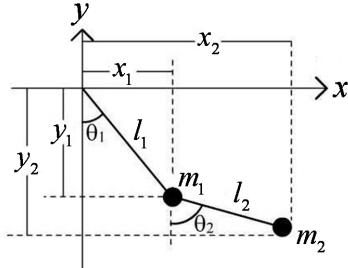


Figura 1.14: Péndulo doble.

Luego, hay $s = 3(2) - 4 = 2$ coordenadas generalizadas. La figura sugiere las coordenadas generalizadas $q_1 = \theta_1$ y $q_2 = \theta_2$. Las transformaciones $\mathbf{r}_i(q_j)$ son

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1, & y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Las transformaciones inversas $q_j(\mathbf{r}_i)$ son

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(-\frac{x_1}{y_1} \right) \quad (1.105)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \right). \quad (1.106)$$

3. Partícula dentro de un cono invertido con ángulo de vértice α , cuyo eje es vertical.

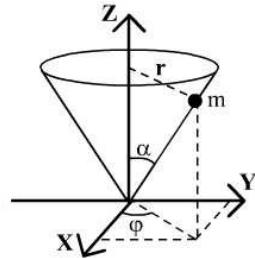


Figura 1.15: Partícula moviéndose dentro de un cono con su eje vertical.

Hay $N = 1$ partícula y 3 coordenadas cartesianas para su posición. Hay una restricción, la relación $r = z \tan \alpha$ que define al cono, la cual puede expresarse como

$$f_1(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{1/2} - z \tan \alpha = 0. \quad (1.107)$$

Entonces, hay $s = 3(1) - 1 = 2$ coordenadas generalizadas, que se pueden tomar como $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$.

Las transformaciones $\mathbf{r}(q_j)$ son

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= r \cot \alpha, \end{aligned} \tag{1.108}$$

y las transformaciones inversas $q_j(\mathbf{r})$ son

$$\begin{aligned} \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \\ r &= z \tan \alpha. \end{aligned} \tag{1.109}$$

4. Partícula deslizando sobre un aro en rotación uniforme sobre su diámetro.

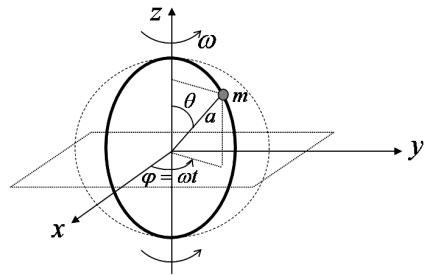


Figura 1.16: Partícula deslizando sobre aro de radio a , el cual rota sobre su diámetro vertical con velocidad angular ω .

La velocidad angular de rotación del aro sobre eje z es ω , asumida constante. Luego, $\varphi = \omega t$. Hay $k = 2$ restricciones:

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \tag{1.110}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi \Rightarrow f_2(x, y, z, t) = y - x \tan \omega t = 0. \tag{1.111}$$

La función f_2 es un ejemplo de ligadura que depende tanto de las coordenadas como del tiempo. Luego, $s = 3(1) - 2 = 1$. La coordenada generalizada apropiada es $q = \theta$. Las transformaciones de coordenadas $\mathbf{r}(q)$ son

$$\begin{aligned} z &= a \cos \theta \\ x &= a \sin \theta \cos \omega t \\ y &= a \sin \theta \sin \omega t. \end{aligned} \tag{1.112}$$

5. Polea simple (máquina de Atwood).

Hay $N = 2$ partículas. Las restricciones se pueden expresar como

$$\begin{aligned} f_1 &= y_1 + y_2 - c_1 = 0 \\ f_2 &= x_1 - c_2 = 0 \\ f_3 &= x_2 - c_3 = 0 \\ f_4 &= z_1 = 0 \\ f_5 &= z_2 = 0, \end{aligned} \tag{1.113}$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes. Luego, $k = 5$ y $s = 3(2) - 5 = 1$. Se puede escoger $q = y_1$, o $q = y_2$ como la coordenada generalizada.

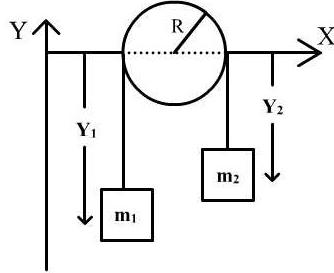


Figura 1.17: Polea simple.

6. Restricción no holonómica: aro rodando sin deslizar sobre un plano.

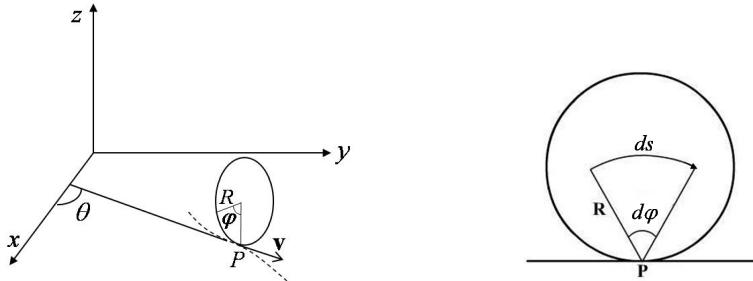


Figura 1.18: Izquierda: aro de radio R rodando sin deslizar sobre el plano (x, y) . Derecha: condición de rodar sin deslizar; P es el punto de apoyo instantáneo.

Existe la restricción $z = \text{cte}$. Sea θ el ángulo que forma el vector velocidad \mathbf{v} con respecto a la dirección \hat{x} . La condición de rodar sin deslizar se expresa como

$$ds = vdt = Rd\varphi \Rightarrow v = R\dot{\varphi}. \quad (1.114)$$

Las componentes de la velocidad \mathbf{v} son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta = R\dot{\varphi} \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta = R\dot{\varphi} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Estas relaciones diferenciales se pueden expresar como restricciones no holonómicas,

$$\begin{aligned} dx - R \cos \theta d\varphi &= 0, \\ dy - R \sin \theta d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Las coordenadas generalizadas son: (x, y) para ubicar el punto de apoyo instantáneo P , θ para dar la dirección de la velocidad de P y la orientación del aro, y φ para ubicar un punto cualquiera sobre el aro. Luego $s = 4$.

1.4. Principios variacionales y ecuaciones de Euler

En los problemas de extremos en el cálculo diferencial buscamos el valor de una variable para el cual una función es máxima o mínima. En cambio, los problemas de extremos en el cálculo variacional consisten en encontrar la función que hace que una integral definida sea extrema.

Supongamos una función $y = y(x)$ que posee derivada $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. Definimos una *funcional* como una función de varias variables de la forma $f(y, y', x)$. En general, los argumentos de una funcional son funciones y sus derivadas. Una funcional es una función de funciones dadas. Por ejemplo, consideremos la funcional $f(y, y', x) = y(x) + y'(x)$. Para la función $y(x) = 3x + 2$, tenemos $f(y, y', x) = 3x + 5$; mientras que para $y(x) = x^2$, $f(y, y', x) = x^2 + 2x$. El valor resultante de una funcional dada depende de la función y . Una funcional asigna un número a una función, mientras que una función asigna un número a otro número.

El problema de extremos en el cálculo variacional se expresa mediante el requerimiento de que una integral definida de una funcional dada tome un valor máximo o mínimo.

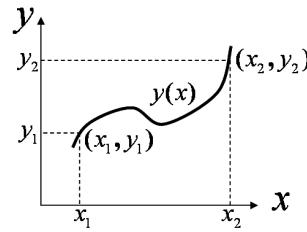


Figura 1.19: Función $y(x)$ que pasa por dos puntos sobre el plano (x, y) .

Consideremos dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano (x, y) , unidos por una función o trayectoria $y = y(x)$, con derivada $y'(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, tal que $y(x_1) = y_1$ y $y(x_2) = y_2$.

Principio variacional:

Dada una funcional $f(y, y', x)$, ¿cuál es la función $y(x)$ que hace que la integral definida

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx, \quad (1.117)$$

tenga un valor extremo (máximo ó mínimo) entre x_1 y x_2 ?

Puesto que I es una integral definida, la cantidad I corresponde a un número cuyo valor depende de la función $y(x)$ empleada en el argumento de la funcional dada $f(y, y', x)$. Si I es extremo de f para una $y(x)$ (y por tanto $y'(x)$), entonces cualquier otra trayectoria cercana a $y(x)$ definida entre x_1 y x_2 debe incrementar (o disminuir) en valor de la integral I , es decir, debe variar I .

Se emplea la notación δI para indicar la variación de I . Luego, $\delta I = 0$ significa que I es extremo.

El principio variacional sobre I requiere que $\delta I = 0$ para una f dada, lo cual implica una condición sobre $y(x)$. Para encontrar esta condición, supongamos que $y(x)$ es la función que pasa por x_1 y x_2 , y que hace $\delta I = 0$. Ahora, consideremos una trayectoria cercana a $y(x)$ definida como

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x), \quad (1.118)$$

donde α es un parámetro que mide la desviación con respecto a la función $y(x)$ y $\eta(x)$ es una función arbitraria, pero diferenciable (es decir, existe $\eta'(x)$), tal que se anule en los puntos x_1 y x_2 : $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Entonces $y(x, \alpha)$ también pasa por $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$y(x_1, \alpha) = y(x_1) = y_1; \quad y(x_2, \alpha) = y(x_2) = y_2. \quad (1.119)$$

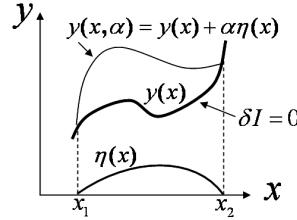


Figura 1.20: Trayectoria $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$.

Note que $y(x, 0) = y(x)$. Calculemos I para la trayectoria perturbada $y(x, \alpha)$,

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx; \quad (1.120)$$

es decir, I es una función del parámetro α . La condición $\delta I = 0$ cuando $\alpha = 0$, implica que

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (1.121)$$

lo cual a su vez implica una condición sobre f y sobre $y(x)$. Calculemos la derivada

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{df(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)}{d\alpha} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha}(x, \alpha) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right] dx. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Pero,

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \eta(x); \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) = \frac{d\eta}{dx} \quad (1.123)$$

puesto que α y x son independientes. Luego,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx. \quad (1.124)$$

El segundo término se integra por partes, usando $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx, \quad (1.125)$$

pero

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x_2) - \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x_1) = 0, \quad (1.126)$$

puesto que $\eta(x_2) = \eta(x_1) = 0$. Luego:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0. \quad (1.127)$$

Evaluando en $\alpha = 0$,

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0, \quad (1.128)$$

donde

$$M(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\alpha=0}. \quad (1.129)$$

Cuando $\alpha = 0$, el integrando es una función de x solamente: $M(x)\eta(x)$. Luego, la condición $\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow M(x)\eta(x) = 0$. Pero como $\eta(x)$ es una función arbitraria no nula, entonces debemos tener $M(x) = 0$. Se acostumbra escribir esta condición en la forma

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.} \quad (1.130)$$

La Ec. (1.130) es la *ecuación de Euler*, y expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ que hace $\delta I = 0$ para una integral definida I de una funcional $f(y, y', x)$ dada. La Ec. (1.130) es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$, cuya solución permite encontrar $y(x)$ para las condiciones dadas.



Figura 1.21: Leonhard Euler (1707-1783).

Ejemplos.

1. Calcular la trayectoria $y(x)$ que corresponde a la distancia más corta entre dos puntos dados en un plano.

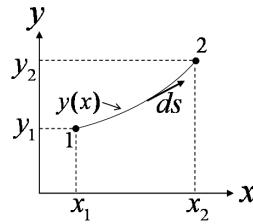


Figura 1.22: Trayectoria más corta entre dos puntos del plano (x, y) .

El elemento de distancia sobre el plano es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (1.131)$$

La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano es

$$I = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y') dx, \quad (1.132)$$

donde $f(y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$.

Buscamos la trayectoria $y(x)$ que da el valor mínimo de la integral I ; es decir, que hace $\delta I = 0$. La ecuación de Euler es la condición que satisface esa $y(x)$,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.133)$$

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (1.134)$$

Luego, la ecuación de Euler conduce a

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c = \text{constante}, \quad (1.135)$$

$$y' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \equiv a \quad (1.136)$$

$$\Rightarrow y = ax + b, \quad (1.137)$$

donde a y b son constantes que se pueden determinar a partir de los puntos dados.

2. Superficie mínima de revolución.

Encontrar el perfil $y(x)$ entre x_1, x_2 que produce el área mínima de revolución alrededor del eje y .

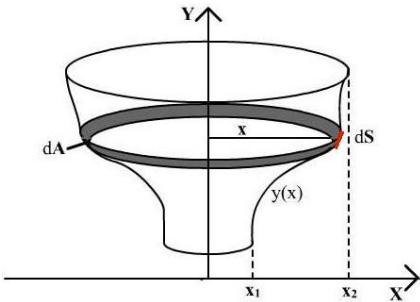


Figura 1.23: Superficie mínima de revolución de $y(x)$ alrededor de eje y .

El elemento de área de revolución alrededor de eje y es

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (1.138)$$

El área de revolución generada por $y(x)$ es

$$A = \int dA = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx. \quad (1.139)$$

Identificamos en el integrando la funcional $f(y, y', x) = x\sqrt{1 + (y')^2}$ que satisface la ecuación de Euler,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.140)$$

Calculamos las derivadas,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (1.141)$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler, obtenemos

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a = \text{constante} \quad (1.142)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (1.143)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= a \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + k. \end{aligned} \quad (1.144)$$

Los valores de las constantes a y k se determinan con (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Si escribimos $k = b - a \ln a$, la Ec. (1.144) también se puede expresar como

$$\left(\frac{y - b}{a} \right) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (1.145)$$

$$\Rightarrow x = a \cosh \left(\frac{y - b}{a} \right), \quad (1.146)$$

que es la ecuación de una *catenaria*.

3. Braquistocrona (del griego, “tiempo más corto”).

Encontrar la trayectoria $y(x)$ de una partícula en el campo gravitacional terrestre que da el menor tiempo posible para ir de un punto (x_1, y_1) a otro punto (x_2, y_2) sin fricción, partiendo del reposo ($v_0 = 0$).

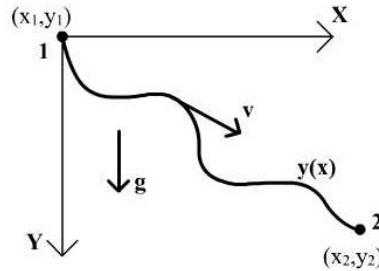


Figura 1.24: Problema de la braquistocrona.

Fijamos el punto $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Para este problema, escogemos la dirección del eje y hacia abajo, con el fin de obtener la función $y(x)$.

Si v es la magnitud de la velocidad en un punto de la trayectoria, entonces el elemento de tiempo para recorrer una distancia infinitesimal ds a lo largo de la trayectoria es

$$dt = \frac{ds}{v}. \quad (1.147)$$

El tiempo total para ir del punto 1 al punto 2 es

$$t_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}. \quad (1.148)$$

En el sistema de referencia escogido, la fuerza gravitacional sobre la partícula es $\mathbf{F} = mg\hat{\mathbf{y}}$, y por lo tanto la energía potencial es $V = -mgy$, tal que $V(y = 0) = 0$. Puesto que $v_0 = 0$, la conservación de la energía $E = T + V$ da

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}. \quad (1.149)$$

Luego, el tiempo total para ir del punto 1 al punto 2 es

$$t_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}}, \quad (1.150)$$

la cual se puede expresar como

$$t_{1 \rightarrow 2} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1 + (x')^2}{2gy}} dy. \quad (1.151)$$

La integral $t_{1 \rightarrow 2}$ es del tipo

$$I = \int_{y_1}^{y_2} f(x, x', y) dy, \quad (1.152)$$

donde hemos intercambiado los roles de las variables x y y . Identificamos la funcional

$$f(x, x', y) = \sqrt{\frac{1 + (x')^2}{2gy}}. \quad (1.153)$$

La ecuación de Euler correspondiente es

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (1.154)$$

Puesto que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, la ecuación de Euler queda

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + (x')^2}} = c = \text{constante}. \quad (1.155)$$

Note que la ecuación de Euler para la funcional $f(x, x', y)$ resulta más sencilla que la ecuación correspondiente a una funcional $f(y, y', x)$ en este caso. Luego,

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2gc^2y}{1 - 2gc^2y}} \quad (1.156)$$

$$\Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{\frac{1}{2gc^2} - y}} dy = \int \sqrt{\frac{y}{2R - y}} dy, \quad (1.157)$$

donde hemos llamado $2R \equiv 1/2gc^2$. Haciendo el cambio de variable

$$y = R(1 - \cos \theta), \quad dy = R \sin \theta d\theta, \quad (1.158)$$

tenemos

$$\begin{aligned} x &= R \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}} \sin \theta d\theta = R \int (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= R(\theta - \sin \theta) + k. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Luego, la trayectoria queda parametrizada en términos de la variable θ ,

$$y = R(1 - \cos \theta), \quad (1.160)$$

$$x = R(\theta - \sin \theta), \quad (1.161)$$

la cual corresponde a una *cicloide* que pasa por $(x_1, y_1) = (0, 0)$, con $k = 0$.

La constante R se determina con el punto (x_2, y_2) y da al valor del radio de la circunferencia que genera la cicloide. La trayectoria de tiempo mínimo es un arco de cicloide que pasa por los puntos dados. Algunos puntos permiten trazar la cicloide,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = R, x = \frac{\pi}{2}R;$$

$$\theta = \pi \Rightarrow x = \pi R, y = 2R;$$

$$\theta = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi R, y = 0.$$

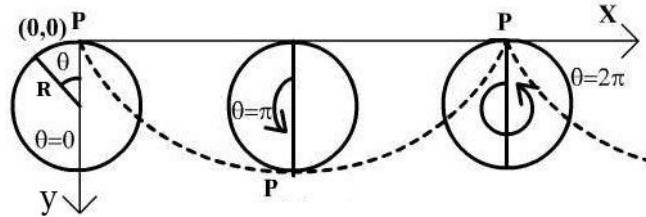


Figura 1.25: Trayectoria de la cicloide en el problema de la braquistocrona.

El problema de la braquistocrona es famoso en la historia de la Física. Fue planteado originalmente por Galileo, quien pensó que la trayectoria de menor tiempo entre dos puntos era un arco de circunferencia. El problema fue estudiado años después por Johann Bernoulli, cuyo trabajo contribuyó a la fundación del cálculo variacional.



Figura 1.26: Johann Bernoulli (1667 -1748).

4. El *Principio de Fermat* establece que la luz se propaga entre dos puntos dados en un medio siguiendo la trayectoria que corresponde al tiempo mínimo. A partir de este principio, pueden obtenerse las leyes de la Óptica Geométrica.



Figura 1.27: Pierre de Fermat (1601-1665).

Como ejemplo, consideraremos la ley de refracción de la luz entre dos medios cuyos índices de refracción son n_1 y n_2 , con $n_1 < n_2$, como muestra la figura. La velocidad de la luz en un medio con índice de refracción n es $v = c/n$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

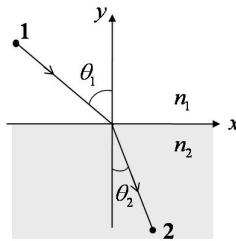


Figura 1.28: Ley de refracción de la luz.

El tiempo para viajar entre los puntos 1 y 2 es

$$\begin{aligned} t_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_1^2 n \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{c} \\ &= \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} n \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{aligned} \quad (1.162)$$

El índice de refracción depende de y , $n = n_1$, para $y > 0$, y $n = n_2$, para $y < 0$, tal que $\frac{dn}{dy} \neq 0$ sólo en $y = 0$. En la Ec. (1.162) podemos identificar la funcional $f(y, y', x) = n \sqrt{1 + (y')^2}$, la cual satisface la ecuación de Euler,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.163)$$

Calculamos las derivadas,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{ny'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.164)$$

Entonces,

$$\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{cte.} \quad (1.165)$$

Note que $y' = \frac{dy}{dx} = -\tan \theta$, donde θ es el ángulo de la trayectoria con el eje y . Sustituyendo en la Ec. (1.165), obtenemos

$$-\frac{n \tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = -n \sin \theta = \text{cte.} \quad (1.166)$$

La Ec. (1.166) implica la ley de refracción, $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

Principios variacionales para funcionales de varias variables.

Consideremos una funcional que depende de s funciones y de sus derivadas,

$$f(y_i(x), y'_i(x), \dots, x), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (1.167)$$

tal que la integral definida

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_i(x), y'_i(x), x) dx \quad (1.168)$$

adquiera un valor extremo, i.e., $\delta I = 0$, para las funciones $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$, que pasan por x_1 y x_2 .

Consideremos ahora la funcional de trayectorias perturbadas

$$f(y_i(x, \alpha), y'_i(x, \alpha), \dots, x), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (1.169)$$

donde

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x) + \alpha \eta_i(x), \quad (1.170)$$

y las $\eta_i(x)$ son funciones arbitrarias que satisfacen $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$.

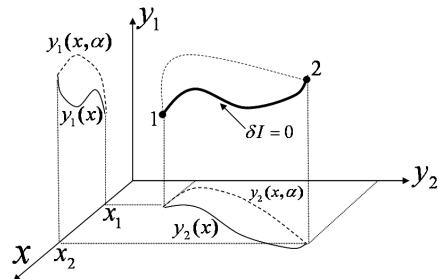


Figura 1.29: Trayectorias $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en el espacio (x, y_1, y_2) .

Consideremos la integral definida con las funciones $y_i(x, \alpha)$ como argumentos,

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y_i(x, \alpha), y'_i(x, \alpha), x] dx. \quad (1.171)$$

La condición de que $I(0)$ sea extremo, o que $\delta I = 0$, implica que

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.172)$$

Calculamos

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial \alpha} \right] dx, \quad (1.173)$$

donde

$$\frac{\partial y_i(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta_i(x); \quad \frac{\partial y'_i(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta'_i(x). \quad (1.174)$$

El segundo término en la suma de la Ec. (1.173) se integra por partes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \eta'_i(x) dx = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'_i} \eta_i(x)}_{x_1} \Big|_{x_1}^0 - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \eta_i(x) dx, \quad (1.175)$$

donde usamos la condición de que las funciones $\eta_i(x)$ se anulan en x_1 y en x_2 . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^s \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \eta_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^s \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \eta_i(x) dx. \end{aligned} \quad (1.176)$$

Puesto que las funciones $\eta_i(x)$ son arbitrarias, la condición

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (1.177)$$

implica las s condiciones

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (1.178)$$

que corresponden a s *ecuaciones de Euler*, una para cada función $y_i(x)$.

1.5. Principio de mínima acción y ecuaciones de Lagrange

Consideremos un sistema descrito por s coordenadas generalizadas $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ y sus correspondientes s velocidades generalizadas $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s\}$.

Definimos una funcional escalar de $\{q_j\}$, $\{\dot{q}_j\}$ y t , dada por

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv T - V, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.179)$$

donde T y V son la energía cinética y la energía potencial del sistema, respectivamente, expresadas en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas. La funcional $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ se denomina *Lagrangiano* del sistema. En principio, todo sistema mecánico se puede caracterizar por un Lagrangiano L .

Supongamos que el estado del sistema, en los instantes de tiempo $t = t_1$ y $t = t_2$, está descrito por los correspondientes conjuntos de coordenadas y velocidades generalizadas,

$$t_1 : \{q_j(t_1)\}, \{\dot{q}_j(t_1)\}; \quad t_2 : \{q_j(t_2)\}, \{\dot{q}_j(t_2)\}. \quad (1.180)$$

Principio de mínima acción:

La evolución del sistema entre el estado en t_1 y el estado en t_2 es tal que el valor de la integral definida

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt, \quad (1.181)$$

denominada la *acción del sistema*, sea mínima; es decir, $\delta S = 0$ (S es un extremo).

El Principio de mínima acción es un principio variacional; implica que las ecuaciones de movimiento de un sistema, en términos de sus coordenadas generalizadas, pueden formularse a partir del requerimiento de que una cierta condición sobre la acción S del sistema sea satisfecha.

El *Principio de mínima acción* fue formulado en distintas formas por Maupertuis y por Hamilton; también se llama Principio de Hamilton.



Figura 1.30: Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759).

Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, supongamos que $q_j(t)$, $j = 1, \dots, s$, son las trayectorias para las cuales S adquiere un valor extremo. Consideremos la variación de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y la variación de \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$. Supongamos extremos fijos en t_1 y t_2 . Luego, $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$.

La variación de q_j o de \dot{q}_j produce un incremento (o decremento) en el valor de S . La variación en S cuando $q_j(t)$ es reemplazado por $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y \dot{q}_j por $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, es

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt.\end{aligned}\quad (1.182)$$

Similarmente a la integral I en un principio variacional, podemos expresar el segundo término de la Ec. (1.182) como

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \quad (1.183)$$

Puesto que los extremos son fijos, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (1.184)$$

El principio de mínima acción requiere que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0. \quad (1.185)$$

La condición $\delta S = 0$ implica que se deben cumplir s ecuaciones para las $q_j(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (1.186)$$

Las Ecs. (1.186) se denominan *ecuaciones de Lagrange*. Constituyen un conjunto de s ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo.

Se pueden establecer las siguientes analogías entre el Principio de mínima acción y un principio variacional:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \leftrightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_i, y'_i, x) dx \quad (1.187)$$

$$\begin{aligned}
L(q_j, \dot{q}_j, t) &\leftrightarrow f(y_i, y'_i, x) \\
t &\leftrightarrow x \\
q_j &\leftrightarrow y_i \\
\dot{q}_j &\leftrightarrow y'_i \\
\delta q_j(t) &\leftrightarrow \eta_i(x) \\
\delta \dot{q}_j(t) &\leftrightarrow \eta'_i(x).
\end{aligned}$$



Figura 1.31: Joseph Louis de Lagrange (1736-1827).

1.6. Propiedades de las ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema. Para ver esto, consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_j(\alpha)$ la componente cartesiana j ($j = 1, 2, 3$) de la posición $\mathbf{r}(\alpha)$ de la partícula α . Asumamos las coordenadas cartesianas como coordenadas generalizadas; i. e., $q_j = x_j(\alpha)$.

La energía cinética del sistema es

$$T = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_i^2(\alpha). \quad (1.188)$$

La energía potencial es

$$V = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}(1), \mathbf{r}(2), \dots, \mathbf{r}(N)). \quad (1.189)$$

El Lagrangiano está dado por

$$L = T - V = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_i^2(\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}(1), \mathbf{r}(2), \dots, \mathbf{r}(N)). \quad (1.190)$$

La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_j(\alpha)$ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j(\alpha)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j(\alpha)} = 0. \quad (1.191)$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j(\alpha)} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j(\alpha)} = m(\alpha)\dot{x}_j(\alpha) = p_j(\alpha), \\ \frac{\partial L}{\partial x_j(\alpha)} &= -\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_j(\alpha)} = F_j(\alpha).\end{aligned}$$

Sustitución en la ecuación de Lagrange para $x_j(\alpha)$ da

$$\frac{dp_j(\alpha)}{dt} = F_j(\alpha), \quad (1.192)$$

lo que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α .

Las ecuaciones de Lagrange no constituyen una nueva teoría del movimiento; los resultados de la formulación Lagrangiana o de la formulación Newtoniana del movimiento de un sistema dado son los mismos; tan sólo la descripción y el método usado para obtener esos resultados son diferentes. Son descripciones distintas de un mismo efecto físico.

Las leyes de Newton enfatizan causas externas vectoriales (fuerzas) actuando *sobre* un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en cantidades escalares (energías cinética y potencial) asociadas *con* el cuerpo. La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema *partícula por partícula*. La formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de *todo* el sistema. En contraste con el punto de vista Newtoniano de *causa-efecto* para explicar el movimiento, el Principio de mínima acción permite interpretar éste como el resultado de un *propósito* de la Naturaleza.

En la formulación Newtoniana, las ligaduras entre las coordenadas requieren ser descritas como fuerzas actuando sobre las partículas, mientras que en la formulación Lagrangiana las ligaduras pueden incluirse dentro de las coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de Lagrange son más generales que la segunda Ley de Newton; son aplicables a cualquier conjunto de coordenadas generalizadas de un sistema. Además de sistemas mecánicos clásicos, las ecuaciones de Lagrange se pueden aplicar para todo sistema donde se puede definir un Lagrangiano, incluyendo medios continuos, campos, Mecánica Cuántica. El Principio de Mínima acción sugiere una conexión profunda entre la Física y la Geometría, una propiedad que ha sido empleada en el desarrollo de varias teorías físicas. Como veremos, una ventaja de la formulación Lagrangiana es que permite descubrir simetrías fundamentales presentes en sistemas físicos.

Las ecuaciones que describen la evolución de muchos sistemas, además de sistemas mecánicos, pueden derivarse a partir de algún principio variacional. Por ejemplo, el *Principio de Fermat* establece que la propagación de la luz entre dos puntos dados en un medio sigue la trayectoria que corresponde al tiempo mínimo. Como vimos en la Sec. 1.4, a partir de ese principio pueden obtenerse las leyes de la Óptica Geométrica.

Las ecuaciones de Lagrange poseen las siguientes propiedades:

1. Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.

Sea $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. Entonces, el nuevo Lagrangiano será

$$L'(q_j, \dot{q}_j, t) = L(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{df(q_j, t)}{dt}. \quad (1.193)$$

La nueva acción es

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q_j, \dot{q}_j, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt + f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1). \end{aligned} \quad (1.194)$$

Luego,

$$\delta S' = \delta S + \delta f(q_j(t_2), t_2) - \delta f(q_j(t_1), t_1). \quad (1.195)$$

Pero $f(q_j(t_2), t_2)$ y $f(q_j(t_1), t_1)$ son cantidades fijas cuya variación es cero. Luego $\delta S' = \delta S$, y la condición $\delta S = 0 \Rightarrow \delta S' = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento que se derivan de L y de L' son equivalentes.

2. La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante con respecto al conjunto de coordenadas generalizadas utilizadas en un sistema.

La derivación de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas generalizadas específicas; por lo tanto, la *forma* de las ecuaciones de Lagrange no depende de un conjunto particular de coordenadas $\{q_i\}$. Se puede escoger otro conjunto de s coordenadas generalizadas independientes $\{Q_i\}$, y las ecuaciones de Lagrange también se cumplen en esas coordenadas.

Sea $\{q_i\}$, $i = 1, \dots, s$, un conjunto de coordenadas generalizadas para un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Las ecuaciones de Lagrange para estas coordenadas son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (1.196)$$

Supongamos una transformación de las coordenadas $\{q_i\}$ a otro conjunto de coordenadas generalizadas $\{Q_i\}$, $i = 1, \dots, s$, de la forma

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, t), \quad (1.197)$$

la cual se conoce como una *transformación puntual*. Por ejemplo, la transformación puntual $q_i = q_i(Q_j, t)$ entre coordenadas cartesianas $\{q_i\} = \{x, y\}$ y coordenadas polares $\{Q_i\} = \{r, \varphi\}$ en un plano es $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

La invarianza de la forma de las ecuaciones de Lagrange significa que el Lagrangiano expresado como función de las nuevas coordenadas y velocidades generalizadas, $L(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, también satisface las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0. \quad (1.198)$$

Para demostrar esta invarianza, a partir de la Ec. (1.197) calculamos

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}. \quad (1.199)$$

Luego, $\dot{q}_i = \dot{q}_i(Q_1, \dots, Q_s, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_s, t)$. Entonces, el Lagrangiano se puede expresar como función de las nuevas coordenadas y velocidades generalizadas como

$$L(q_1, \dots, q_s, t) = L[q_i(Q_1, \dots, Q_s, t), \dot{q}_i(Q_1, \dots, Q_s, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_s, t), t]. \quad (1.200)$$

Tenemos,

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right), \quad (1.201)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \cancel{\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}^0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}. \quad (1.202)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} &= \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}. \end{aligned} \quad (1.203)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right) \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.204)$$

El primer término en la Ec. (1.204) es cero, de acuerdo a la Ec. (1.196). Por otro lado,

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\frac{dq_j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right), \quad (1.205)$$

por lo cual, el segundo término en la Ec. (1.204) también se anula. Luego,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0. \quad (1.206)$$

Por lo tanto, la forma de las ecuaciones de Lagrange se conserva bajo transformaciones puntuales de las coordenadas generalizadas.

1.7. Ecuaciones de Lagrange para varios sistemas

1. Péndulo simple.

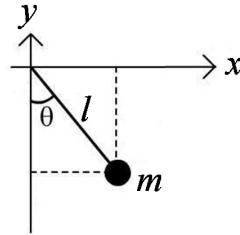


Figura 1.32: Coordenada generalizada θ para el péndulo simple.

Vimos que la coordenada generalizada es el ángulo θ . Entonces,

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta, & \dot{x} &= l \dot{\theta} \cos \theta \\ y &= -l \cos \theta, & \dot{y} &= l \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Expresamos T y V en función de θ y $\dot{\theta}$,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad (1.207)$$

$$V = mgy = -mgl \cos \theta. \quad (1.208)$$

Entonces, el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (1.209)$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (1.210)$$

Calculamos los términos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}. \quad (1.211)$$

Luego, la ecuación de Lagrange queda como

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0, \end{aligned} \quad (1.212)$$

que es la conocida ecuación del péndulo simple.

2. Partícula libre.

La condición de estar libre significa que no hay fuerza neta sobre la partícula, $\mathbf{F} = -\nabla V = 0$. Luego, $V = \text{constante}$ para una partícula libre.

a) El Lagrangiano en coordenadas cartesianas es

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (1.213)$$

Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.214)$$

conducen a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i = \text{constante}, \quad (1.215)$$

que expresan la conservación de la componente i del momento lineal de la partícula.

b) Lagrangiano en coordenadas esféricas.

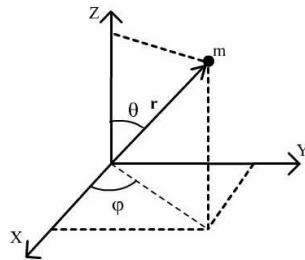


Figura 1.33: Coordenadas esféricas para una partícula.

Las coordenadas se expresan como

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.216)$$

Las velocidades son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.217)$$

El Lagrangiano de una partícula libre en coordenadas esféricas es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta). \quad (1.218)$$

3. Partícula en el campo gravitacional terrestre.

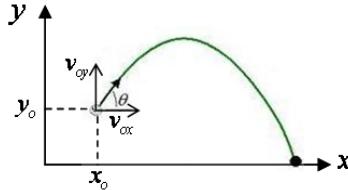


Figura 1.34: Partícula en el campo gravitacional terrestre.

El movimiento en el campo gravitacional uniforme de la Tierra ocurre en un plano vertical; i.e., $s = 2$. Tomamos las coordenadas cartesianas (x, y) como coordenadas generalizadas. Supongamos que la partícula posee posición inicial (x_o, y_o) y velocidad inicial (v_{ox}, v_{oy}) . Entonces,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = mgy \quad (1.219)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (1.220)$$

La ecuación de Lagrange para x es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (1.221)$$

la cual resulta en

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = b_1 t + b_2, \quad (1.222)$$

con b_1 y b_2 constantes. Usando las condiciones iniciales en $t = 0$, obtenemos

$$x(t) = x_o + v_{ox}t. \quad (1.223)$$

La ecuación de Lagrange para y es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad (1.224)$$

lo que conduce a

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2. \quad (1.225)$$

Usando las condiciones iniciales, podemos expresar

$$y(t) = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.226)$$

La trayectoria descrita por la partícula es una *parábola*,

$$y(x) = y_o + \frac{v_{oy}}{v_{ox}}(x - x_o) - \frac{g}{2v_{ox}^2}(x - x_o)^2. \quad (1.227)$$

La trayectoria parabólica corresponde a la mínima acción; mientras que la cicloide corresponde al tiempo mínimo entre dos puntos en el campo gravitacional terrestre.

4. Oscilador armónico.

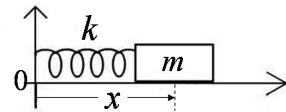


Figura 1.35: Oscilador armónico simple.

Usando la coordenada generalizada x , tenemos

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.228)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.229)$$

La ecuación de Lagrange para x es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (1.230)$$

Calculamos

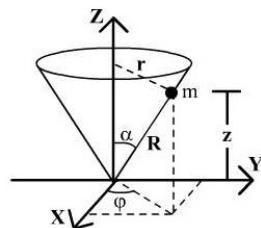
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx. \quad (1.231)$$

Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \end{aligned} \quad (1.232)$$

donde $\omega^2 \equiv k/m$.

5. Partícula moviéndose sobre un cono invertido en el campo gravitacional terrestre.

Figura 1.36: Partícula sobre un cono invertido con ángulo de vértice α .

Coordenadas generalizadas son $q_1 = \varphi$ y $q_2 = r$. Entonces,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= r \cot \alpha. \end{aligned} \quad (1.233)$$

Las velocidades correspondientes son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cot \alpha.\end{aligned}\tag{1.234}$$

Energía cinética,

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2(1 + \cot^2 \alpha) + r^2\dot{\varphi}^2] \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r\dot{\varphi}^2).\end{aligned}\tag{1.235}$$

Energía potencial,

$$V = mgz = mgr \cot \alpha.\tag{1.236}$$

Por lo tanto, el Lagrangiano $L = T - V$ es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr \cot \alpha.\tag{1.237}$$

La ecuación de Lagrange para φ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\tag{1.238}$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = 0,\tag{1.239}$$

Luego,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{cte} \equiv l_z.\tag{1.240}$$

La cantidad constante es la componente l_z del momento angular en términos de las coordenadas generalizadas, lo que se puede verificar calculando la componente cartesiana $l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$, y usando las Ecs. (1.233) y (1.234). La componente l_z se conserva porque la componente τ_z del vector de torque total producido por las fuerzas actuantes sobre la partícula (su peso y la fuerza normal ejercida por la superficie del cono) es cero.

La ecuación de Lagrange para r es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,\tag{1.241}$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \cot \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mr \csc^2 \alpha.\tag{1.242}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\ddot{r} \csc^2 \alpha - r\dot{\varphi}^2 + g \cot \alpha &= 0, \\ \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha &= 0.\end{aligned}\tag{1.243}$$

6. Péndulo doble.

Consiste en un péndulo de longitud l_1 y masa m_1 , del cual cuelga un segundo péndulo de longitud l_2 y masa m_2 .

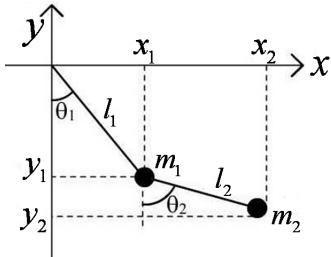


Figura 1.37: Péndulo doble.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$. Luego,

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 & \Rightarrow \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 & \Rightarrow \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1.244)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 & \Rightarrow \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 & \Rightarrow \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (1.245)$$

La energía cinética de partícula 1 es

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2. \quad (1.246)$$

La energía cinética de partícula 2 es

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned} \quad (1.247)$$

Las energías potenciales de las partículas se pueden expresar como

$$V_1 = m_1gy_1 = -m_1gl_1 \cos \theta_1 \quad (1.248)$$

$$V_2 = m_2gy_2 = -m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2). \quad (1.249)$$

La energía cinética del sistema es $T = T_1 + T_2$ y la energía potencial es $V = V_1 + V_2$. El Lagrangiano del sistema es $L = T - V$, lo que conduce a

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (1.250)$$

Ecuación de Lagrange para θ_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad (1.251)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange para θ_1 queda

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0. \quad (1.252)$$

Ecuación de Lagrange para θ_2 es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \quad (1.253)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de Lagrange para θ_2 queda

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0. \quad (1.254)$$

Despejando $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ de las Ecs. (1.252) y (1.254), las ecuaciones de Lagrange se pueden expresar como

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - M \sin \theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_1(\mu - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (1.255)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{gM(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) - (Ml_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_2(\mu - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (1.256)$$

donde $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$, y $M \equiv 1 + m_1/m_2$.

Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas θ_1 y θ_2 del péndulo doble son acopladas y no lineales. Esto hace que el movimiento del péndulo doble pueda ser muy irregular o *caótico*, como veremos en el Cap. 2.

7. Péndulo con soporte deslizante horizontalmente sin fricción.

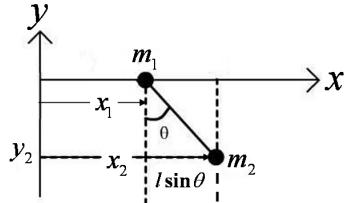


Figura 1.38: Péndulo con soporte deslizante.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = x_1$ y $q_2 = \theta$,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l \sin \theta, & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l \dot{\theta} \cos \theta, \\ y_2 &= -l \cos \theta, & \dot{y}_2 &= l \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1\dot{\theta}l \cos \theta). \quad (1.257)$$

Energía potencial,

$$V = m_2gy_2 = -m_2gl \cos \theta. \quad (1.258)$$

Lagrangiano,

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1\dot{\theta}l \cos \theta) + m_2gl \cos \theta. \quad (1.259)$$

Ecuación de Lagrange para x_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad (1.260)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2\dot{\theta}l \cos \theta. \quad (1.261)$$

Luego, la ecuación para x_1 queda

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2l\dot{\theta} \cos \theta = \text{cte} \equiv P_x, \quad (1.262)$$

esta ecuación expresa la conservación de la componente P_x del momento lineal total en dirección del eje x , puesto que no hay fuerzas externas netas en esa dirección.

Ecuación de Lagrange para θ ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.263)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 l \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta - m_2 g l \sin \theta; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 \dot{x}_1 l \cos \theta + m_2 l^2 \dot{\theta}. \quad (1.264)$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange para θ es

$$\begin{aligned} l \ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta - \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta + \dot{x}_1 \dot{\theta} \sin \theta + g \sin \theta &= 0, \\ \Rightarrow l \ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos \theta + g \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (1.265)$$

8. Aro rodando sin deslizar por un plano inclinado.

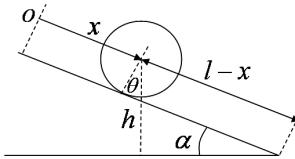


Figura 1.39: Aro rodando sin deslizar por un plano inclinado.

Un punto cualquiera en el aro puede ubicarse con dos coordenadas, x y θ , las cuales están ligadas por una restricción no holonómica, que es la condición de rodar sin deslizar: $\dot{x} = R\dot{\theta}$. Luego, hay un grado de libertad; se puede escoger como coordenada generalizada a x ó θ .

La energía cinética del aro es la suma de la energía cinética del centro de masa más la energía cinética relativa al centro de masa,

$$T = T_{\text{cm}} + T'_{\text{relativa al CM}} \quad (1.266)$$

donde T_{cm} es la energía cinética de translación del centro de masa,

$$T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (1.267)$$

y $T'_{\text{rel. al CM}}$ es la energía cinética de rotación,

$$T'_{\text{rel. al CM}} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (mR^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2. \quad (1.268)$$

La energía potencial es

$$V = mgh = mg(l - x) \sin \alpha. \quad (1.269)$$

Entonces, el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - mg(l - x) \sin \alpha. \quad (1.270)$$

Sustituyendo $\dot{\theta} = \dot{x}/R$ en L , obtenemos

$$L = m\dot{x}^2 + mgx \sin \alpha - mgl \sin \alpha. \quad (1.271)$$

El término constante $mgl \sin \alpha$ se puede suprimir en L , pues no afecta las ecuaciones de movimiento. La ecuación de Lagrange para x es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.272)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \sin \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}. \quad (1.273)$$

Luego,

$$\ddot{x} - \frac{g}{2} \sin \alpha = 0. \quad (1.274)$$

El aro baja por el plano rodando sin deslizar, con la mitad de la aceleración que tendría si simplemente deslizara sin fricción.

9. Péndulo de longitud l y masa m cuyo soporte gira en un círculo de radio a en un plano vertical, con velocidad angular constante ω .

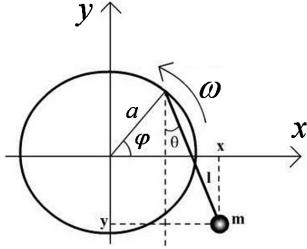


Figura 1.40: Péndulo con soporte en movimiento circular uniforme.

Expresamos $\phi = \omega t$. Luego,

$$x = a \cos \omega t + l \sin \theta, \quad \dot{x} = -\omega a \sin \omega t + l \dot{\theta} \cos \theta \quad (1.275)$$

$$y = a \sin \omega t - l \cos \theta, \quad \dot{y} = \omega a \cos \omega t + l \dot{\theta} \sin \theta. \quad (1.276)$$

Energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[a^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta}(\sin \theta \cos \omega t - \cos \theta \sin \omega t)]. \quad (1.277)$$

Energía potencial,

$$V = mgy = mg(a \sin \omega t - l \cos \theta). \quad (1.278)$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\dot{\theta} \sin(\theta - \omega t)] + mgl \cos \theta, \quad (1.279)$$

donde hemos omitido términos constantes ($a^2\omega^2$) y la derivada total $\frac{df}{dt} = mga \sin \omega t$, con $f = -\frac{mga}{\omega} \cos \omega t$.

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (1.280)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mawl\dot{\theta} \cos(\theta - \omega t) - mgl \sin \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} + mawl \sin(\theta - \omega t), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2\ddot{\theta} + mawl(\dot{\theta} - \omega) \cos(\theta - \omega t). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange para θ , obtenemos

$$l^2\ddot{\theta} + awl\dot{\theta} \cos(\theta - \omega t) - aw^2l \cos(\theta - \omega t) - awl\dot{\theta} \cos(\theta - \omega t) + gl \sin \theta = 0, \quad (1.281)$$

lo cual queda como

$$\ddot{\theta} - \frac{aw^2}{l} \cos(\theta - \omega t) + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.282)$$

Note que si $\omega = 0$, la Ec. (1.282) corresponde a la ecuación de movimiento de un péndulo simple. La Ec. (1.282) describe el movimiento de un péndulo simple sujeto a una fuerza periódica.

La energía total $E = T + V$ no se conserva en este sistema, puesto que $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$; se requiere un suministro externo de energía para mantener girando el soporte del péndulo con velocidad angular ω constante.

10. Péndulo de resorte.

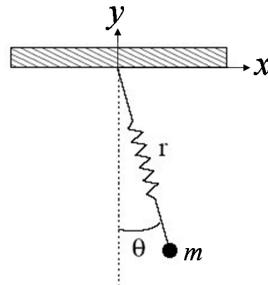


Figura 1.41: Péndulo de resorte.

El movimiento de la partícula ocurre en el plano vertical (x, y) . Definimos k como la constante del resorte, l es la longitud del resorte en reposo (en ausencia de la masa m), y r es la longitud del resorte con la masa m .

Las coordenadas generalizadas son $q_1 = r$ y $q_2 = \theta$. Entonces,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \\ y &= -r \cos \theta, \\ \dot{x} &= r\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta \\ \dot{y} &= r\dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.283)$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (1.284)$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}k(r - l)^2 - mgr \cos \theta. \quad (1.285)$$

Entonces, el Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - l)^2 + mgr \cos \theta. \quad (1.286)$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.287)$$

la cual se puede escribir como

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0. \quad (1.288)$$

La ecuación de Lagrange para r es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (1.289)$$

que da como resultado,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l) - g \cos \theta = 0. \quad (1.290)$$

Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas θ y r del péndulo de resorte están acopladas y son no lineales. Este sistema exhibe comportamiento caótico para ciertos valores de sus parámetros (Cap. 2).

11. El soporte de un péndulo plano de masa m y longitud l rota sin fricción con velocidad angular uniforme ω alrededor del eje vertical z .
- Encontrar la ecuación de movimiento del péndulo.
 - Encontrar el ángulo de equilibrio del péndulo.

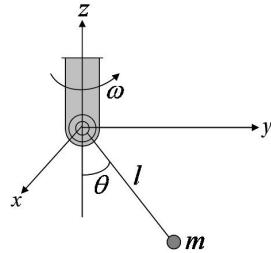


Figura 1.42: Péndulo con soporte giratorio.

a) La coordenada generalizada es $q = \theta$. Para encontrar la ecuación de movimiento, expresamos

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \cos \omega t, \\ y &= l \sin \theta \sin \omega t, \\ z &= -l \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.291)$$

y las velocidades

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t - l\omega \sin \theta \sin \omega t \\ \dot{y} &= l\dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t + l\omega \sin \theta \cos \omega t \\ \dot{z} &= -l\dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.292)$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta). \quad (1.293)$$

La energía potencial correspondiente es

$$V = mgz = -mgl \cos \theta. \quad (1.294)$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta. \quad (1.295)$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.296)$$

la cual resulta en

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.297)$$

b) En un *punto de equilibrio*, la fuerza neta sobre la partícula se anula y la aceleración se hace cero.

El ángulo de equilibrio θ_o del péndulo está dado por la condición $\ddot{\theta} = 0$ en la ecuación de movimiento,

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \omega^2 \sin \theta_o \cos \theta_o = \frac{g}{l} \sin \theta_o \quad (1.298)$$

Hay dos posibles soluciones,

$$\sin \theta_o = 0 \Rightarrow \theta_o = 0, \quad (1.299)$$

$$\omega^2 \cos \theta_0 = \frac{g}{l} \Rightarrow \theta_o = \cos^{-1} \left(\frac{g}{\omega^2 l} \right). \quad (1.300)$$

12. Regulador volante.

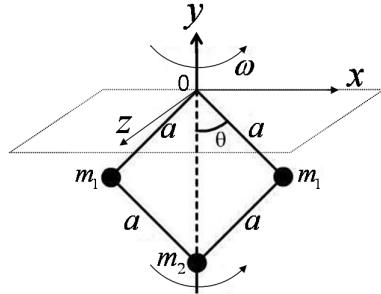


Figura 1.43: Regulador volante.

El punto O en extremo superior está fijo. La longitud a de las varillas es constante. La masa m_2 se mueve sin fricción sobre el eje vertical y que pasa por el punto O , mientras que las masas dos masas m_1 giran con velocidad angular constante ω alrededor del eje y .

Las coordenadas para m_2 son

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ y_2 &= -2a \cos \theta, \\ z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.301)$$

Las coordenadas para una de las masas m_1 son

$$\begin{aligned} y_1 &= -a \cos \theta, \\ x_1 &= a \sin \theta \sin \omega t, \\ z_1 &= a \sin \theta \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.302)$$

Coordenadas para la otra masa m_1 ,

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1, \\ x'_1 &= -x_1, \\ z'_1 &= -z_1. \end{aligned} \quad (1.303)$$

Hay un solo grado de libertad. Se puede tomar la coordenada generalizada $q = \theta$. Tenemos,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}2m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = m_1(a^2\dot{\theta}^2 + \omega^2a^2\sin^2\theta) + 2m_2a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta. \\ V &= 2m_1gy_1 + m_2gy_2 = -2m_1ga\cos\theta - 2m_2ga\cos\theta. \\ L &= T - V = m_1(a^2\dot{\theta}^2 + \omega^2a^2\sin^2\theta) + 2m_2a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2(m_1 + m_2)ga\cos\theta. \end{aligned}$$

La ecuación de Lagrange para θ es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (1.304)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2m_1a^2\dot{\theta} + 4m_2a^2\dot{\theta}\sin^2\theta, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= 2m_1a^2\ddot{\theta} + 4m_2a^2(\ddot{\theta}\sin^2\theta + 2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta), \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 2m_1\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta + 4m_2a^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - 2(m_1 + m_2)ga\sin\theta, \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\ddot{\theta}a^2(m_1 + 2m_2\sin^2\theta) + 4m_2a^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta \\ - 2m_1\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta + 2(m_1 + m_2)ga\sin\theta = 0, \end{aligned} \quad (1.305)$$

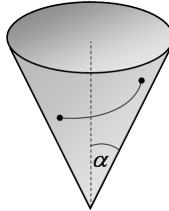
Note que si $\omega = 0$ y $m_2 = 0$, la ecuación se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0, \quad (1.306)$$

que es la ecuación de un péndulo simple.

1.8. Problemas

1. El principio de Fermat establece que la propagación de la luz entre dos puntos dados en un medio sigue la trayectoria de mínimo tiempo. Determine la trayectoria de un rayo de luz dentro de un disco cristalino de radio a , grosor despreciable, y cuyo índice de refracción n varía radialmente como
 - a) $n(r) = a/r$.
 - b) $n(r) = a/r^2$.
 - c) Encuentre $n(r)$ tal que un rayo de luz dentro de este disco describa una trayectoria circular.
2. Calcule la trayectoria que da la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie de un cono invertido, con ángulo de vértice α . Use coordenadas cilíndricas.



3. Determine la curva $y(x)$, tal que $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$, para la cual alcanza su valor extremo la integral $I = \int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2] dx$.

4. Calcule el valor mínimo de la integral

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx,$$

donde la función $y(x)$ satisface $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$.

5. En los páramos andinos se encuentra el pueblo A y, a una distancia de 2π Km al este de A , está el pueblo B . El terreno entre estos dos pueblos es montañoso y no hay carreteras asfaltadas. Sin embargo, la experiencia ha indicado que la velocidad de un ciclista en bicicleta montañera en esa zona se puede expresar aproximadamente como $v = 10(\text{Km/h}) e^{y/3}$, donde y es la distancia en Km medida perpendicularmente a la línea recta que une A y B . ¿Cuál es el mínimo tiempo que tardaría un ciclista entre los pueblos A y B ?
6. La forma adoptada por una cuerda de densidad uniforme ρ que cuelga suspendida entre dos puntos en un campo gravitacional corresponde al mínimo de su energía potencial. Determine esa forma.
7. Encuentre la geodésica (i.e. la trayectoria de menor distancia) entre los puntos $P_1 = (a, 0, 0)$ y $P_2 = (-a, 0, \pi)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Use coordenadas cilíndricas.

8. Un cuerpo se deja caer desde una altura h y alcanza el suelo en un tiempo T . La ecuación de movimiento concebidamente podría tener cualquiera de las formas

$$y = h - g_1 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g_2 t^2, \quad y = h - \frac{1}{4} g_3 t^3;$$

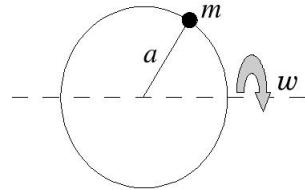
donde g_1, g_2, g_3 son constantes apropiadas. Demuestre que la forma correcta es aquella que produce el mínimo valor de la acción.

9. El Lagrangiano de una partícula de masa m es

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m \dot{x}^2 f(x) - f^2(x),$$

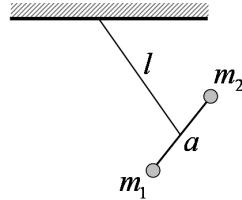
donde $f(x)$ es una función diferenciable de x . Encuentre la ecuación de movimiento.

10. Encuentre la ecuación de movimiento de un *péndulo paramétrico*, el cual consiste en un péndulo de masa m cuya longitud se hace variar de la forma $l = l_o(1 + b \sin \omega t)$.
11. Una varilla de peso despreciable está suspendida de un extremo, de modo que puede oscilar en un plano vertical. Una partícula de masa m se desliza sin fricción a lo largo de la varilla.
- Encuentre la energía de la partícula.
 - Obtenga las ecuaciones de movimiento de la partícula.
12. Una partícula de masa m se mueve sin fricción sobre un aro de radio R , el cual gira con velocidad angular uniforme ω alrededor de su diámetro vertical.
- Derive la ecuación de movimiento de la partícula.
 - Encuentre la posición de equilibrio de la partícula.
13. Una partícula de masa m se desliza sin fricción sobre un aro de radio a , el cual rota con velocidad angular constante ω alrededor de su diámetro horizontal. ¿Cuál es la ecuación de movimiento de la partícula?

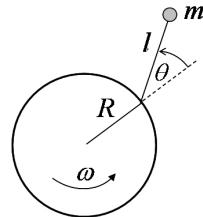


14. Obtenga las ecuaciones de movimiento de un péndulo esférico, es decir, una partícula de masa m suspendida de una varilla rígida, sin peso y sin fricción, cuya longitud es l
15. Un aro de radio R y masa despreciable cuelga de un punto de su borde de modo que puede oscilar en su plano vertical. Una partícula de masa m se desliza sin fricción sobre el aro. Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula.

16. Un péndulo compuesto está formado por una varilla de masa despreciable y longitud l , con un extremo fijo y el otro conectado al punto medio de una segunda varilla sin masa de longitud a , ($a < l$), en cuyos extremos hay dos masas m_1 y m_2 . Las varillas pueden rotar sin fricción en un mismo plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.

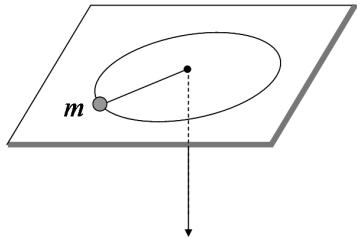


17. Un sistema consiste en una partícula de masa m que se mueve verticalmente colgada de un resorte de constante k y de la cual cuelga a su vez un péndulo de longitud l y masa m . Desprecie la masa de la varilla del péndulo y considere que éste se mueve en un plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema.
18. Encuentre la ecuación de movimiento para el parámetro angular θ en el problema de la braquistocrona.
19. Una manera de simular gravedad en una nave espacial es mediante rotación. Considere un péndulo de longitud l y masa m dentro de una nave, y cuyo soporte gira en un círculo de radio R con velocidad angular constante ω en el mismo plano del péndulo. Calcule ω tal que el ángulo θ con respecto a la dirección radial describa el mismo movimiento que tendría este péndulo colgado verticalmente de un punto fijo en el campo gravitacional terrestre.

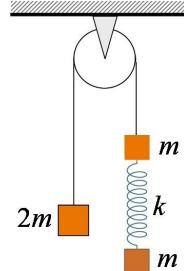


20. Una partícula de masa m y carga q_1 se mueve sin fricción sobre la superficie de una esfera de radio R en el campo gravitacional terrestre. Otra carga q_2 se encuentra fija en el punto más bajo de la esfera.
- Encuentre las ecuaciones de movimiento de la primera carga.
 - Encuentre la posición de equilibrio de la primera carga.

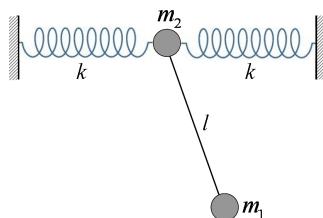
- 21.** Una masa m unida a una cuerda se mueve sin fricción sobre una mesa tal que el otro extremo de la cuerda pasa a través de un agujero en la mesa y está halado por alguien. Inicialmente, la masa se mueve en un círculo, con energía E . La cuerda es halada a continuación, hasta que el radio del círculo se reduce a la mitad. ¿Cuánto trabajo se hizo sobre la masa?.



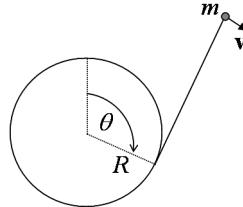
- 22.** Una cuerda de masa despreciable pasa a través una polea fija y soporta una masa $2m$ en un extremo. En el otro extremo de la cuerda se encuentra una masa m y, colgando de ésta por medio de un resorte de constante k , hay otra masa m .
- Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema.
 - Encuentre la posición de la masa que cuelga del resorte en función del tiempo.



- 23.** Una partícula de masa m_1 cuelga de una varilla de masa despreciable y longitud l , cuyo punto de soporte consiste en otra partícula de masa m_2 que se mueve horizontalmente sujetada a dos resortes de constante k cada uno. Encuentre las ecuaciones de movimiento.



- 24.** Un aro uniforme de radio a y masa m rueda sin deslizar dentro de un cilindro fijo de radio R , ($R > a$). Encuentre el período para pequeñas oscilaciones del aro.
- 25.** Dos masas, m_1 y m_2 , están conectadas por una cuerda de longitud l a través de un agujero en el vértice de un cono vertical con ángulo de vértice α , de manera que m_1 se mueve sobre la superficie interior del cono y m_2 cuelga verticalmente. Desprecie la fricción.
- Determine las ecuaciones de movimiento del sistema.
 - Calcule el radio de equilibrio de m_1 .
- 26.** Una partícula de masa m está atada a una cuerda de masa despreciable fija a un cilindro de radio R . La partícula se puede mover sobre un plano horizontal sin fricción. Inicialmente, la cuerda se encuentra totalmente enrollada alrededor del cilindro, de modo que la partícula toca al cilindro. Se le da un impulso radial a la partícula, tal que ésta adquiere una velocidad inicial v_0 y la cuerda comienza a desenrollarse.
- Encuentre la ecuación de movimiento en términos de una coordenada generalizada apropiada.
 - Encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales.
 - Calcule el momento angular de la partícula con respecto al eje del cilindro, usando el resultado de (b).



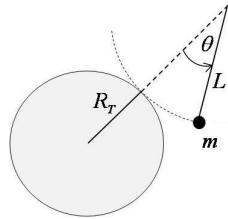
- 27.** Encuentre la ecuación de movimiento de una partícula de masa m que se mueve en la dimensión x , cuyo Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) e^{\gamma t}, \quad (1.307)$$

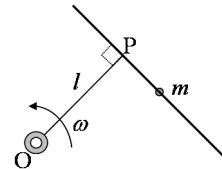
donde las constantes γ y ω son cantidades reales y positivas. ¿Qué sistema describe la ecuación de movimiento?

- 28.** Una partícula de masa m y carga q se desliza sin fricción sobre una varilla de masa despreciable que puede girar en un plano vertical alrededor de un extremo fijo. En el extremo fijo de la varilla hay una carga puntual fija $-q$, la cual está conectada a la partícula móvil mediante un resorte de constante k .
- Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula.
 - Calcule la energía del sistema.

- 29.** Considere un péndulo muy largo de longitud L , del cual cuelga una masa m que apenas toca la superficie terrestre y que se mueve en un plano fijo. Desprecie el movimiento de la Tierra y asuma ésta como una esfera uniforme de radio R_T .
- Encuentre la ecuación de movimiento del péndulo sin suponer que L es pequeño con respecto a R_T .
 - Encuentre la ecuación de movimiento si $L \ll R_T$.



- 30.** Una partícula de masa m se desliza sin fricción por un cable recto muy largo, el cual está conectado en un punto P perpendicularmente a una varilla de longitud l , formando un plano vertical en el campo gravitacional terrestre. La varilla gira con respecto a su otro extremo fijo O en el plano vertical, con velocidad angular constante ω . Las masas de la varilla y del cable son despreciables.
- ¿Se conserva la energía mecánica de la partícula?.
 - Encuentre y resuelva la ecuación de movimiento de la partícula.



Capítulo 2

Leyes de conservación y simetrías

2.1. Momento conjugado

Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $L(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define la cantidad

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.1)$$

como el *momento conjugado* (o canónico) asociado a la coordenada generalizada q_j . La cantidad p_j no tiene necesariamente unidades de momento lineal; puede también corresponder a momento angular u a otras cantidades.

Si un Lagrangiano L de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_j (puede contener q_j, t), se dice que q_j es una *coordenada cíclica o ignorable*.

Si q_j es cíclica, entonces

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (2.2)$$

y la ecuación de Lagrange para una coordenada cíclica q_j resulta en

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{dp_j}{dt} = 0, \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow p_j = \text{cte.} \quad (2.4)$$

Es decir, el momento conjugado p_j asociado a una coordenada cíclica q_j es constante. Luego, la cantidad $p_j = \text{cte}$ constituye una *cantidad conservada*, llamada también una *primera integral del movimiento*.

En general, si el Lagrangiano de un sistema no depende explícitamente de una coordenada que representa un desplazamiento en una dirección espacial dada, la componente del momento lineal correspondiente a esa dirección se conserva.

Similarmente, si un sistema posee un eje de simetría rotacional, o simetría axial, entonces su Lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada que describe el ángulo de rotación alrededor de ese eje. Como consecuencia, la componente del momento angular del sistema correspondiente a ese eje, se conserva.

Ejemplo.

- Partícula sobre un cono invertido.

Vimos en el Cap. 1 que el Lagrangiano de este sistema es

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr \cot \alpha. \quad (2.5)$$

La coordenada φ , que representa el ángulo de rotación alrededor del eje z , es cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{cte}. \quad (2.6)$$

El momento conjugado p_φ asociado con la coordenada angular φ es constante. Para identificar la cantidad p_φ , consideremos el momento angular de la partícula,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

La componente z de \mathbf{l} es

$$l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (2.8)$$

En términos de las coordenadas generalizadas r y φ ,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sustituyendo en la Ec. (2.8), podemos expresar

$$l_z = mr^2\dot{\varphi} \equiv p_\varphi. \quad (2.10)$$

La cantidad conservada p_φ es la componente z del momento angular de la partícula.

2.2. Teorema de Noether

Vimos en el Cap. 1 que las ecuaciones de movimiento son invariantes si el Lagrangiano de un sistema se transforma mediante la adición de una derivada total de alguna función $f(q_j, t)$ dependiente solamente de las coordenadas y del tiempo.

En efecto, sea

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.11)$$

la acción correspondiente a un Lagrangiano L . Consideremos la transformación

$$L' = L + \frac{df(q_j, t)}{dt}. \quad (2.12)$$

La acción asociada con L' es

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df}{dt} \right) dt \\ &= S + [f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1)] = S + \text{cte}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Entonces,

$$\delta S = \delta S'. \quad (2.14)$$

El principio de mínima acción implica $\delta S = \delta S' = 0$. Luego, las ecuaciones de Lagrange derivadas de este principio usando L o L' , tienen la misma forma; es decir, son invariantes ante la transformación (2.12).

Una transformación infinitesimal del Lagrangiano $L \rightarrow L' = L + \delta L$ que no modifica las ecuaciones de movimiento representa una *simetría* del sistema (también llamada *simetría de la acción*). Se dice que la acción es invariante bajo tal transformación.

Teorema de Noether en Mecánica Clásica.

Si la acción de un sistema con Lagrangiano $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ es invariante bajo la transformación infinitesimal de coordenadas $q'_j = q_j + \delta q_j$ que cambia el Lagrangiano a $L' = L + \delta L$, tal que $\delta L = \frac{df(q_j, t)}{dt}$, para alguna función $f(q_j, t)$, entonces la cantidad

$$J = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f \quad (2.15)$$

constituye una cantidad conservada asociada a esa transformación. La función J se denomina *corriente de Noether*.

Demostración:

La transformación $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variación δL en el Lagrangiano $L(q_j, \dot{q}_j, t)$,

$$\delta L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j. \quad (2.16)$$

Usando las ecuaciones de Lagrange, tenemos

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{j=1}^s \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right).\end{aligned}\quad (2.17)$$

Según el teorema, la variación δL se puede escribir $\delta L = \frac{df(q_j, t)}{dt}$; luego

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) &= \frac{df(q_j, t)}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f \right) = 0 \\ \Rightarrow J \equiv \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f \right) &= \text{cte.} \quad \blacklozenge\end{aligned}\quad (2.18)$$

El Teorema de Noether establece que a cada simetría que posee un sistema, le corresponde una cantidad conservada. Las simetrías y sus cantidades conservadas asociadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre el comportamiento del mismo, sin necesidad de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento del sistema (las cuales pueden ser difíciles de encontrar en muchos casos). Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales de segundo orden en el tiempo para las q_j , mientras que las cantidades conservadas J contienen derivadas de primer orden para las q_j , en principio posibles de resolver si existen suficientes simetrías en el sistema.



Figura 2.1: Emily Noether (1882-1935).

El Teorema de Noether se extiende también a Mecánica Cuántica, Electromagnetismo, Teorías de Campos, etc., y tiene una importancia fundamental en la Física.

Ejemplos.

1. Supongamos que la coordenada q_i es cíclica para un Lagrangiano L ; es decir, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Entonces, la transformación de coordenadas $q'_i = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i = \text{cte}$, y $q'_j = q_j$, $\delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios en el Lagrangiano,

$$\delta L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j^0 = \cancel{\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i}^0 = 0. \quad (2.19)$$

Expresamos

$$\delta L = \frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow f = c = \text{cte}. \quad (2.20)$$

La corriente de Noether conservada J es

$$\begin{aligned} J &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = \text{cte} \\ &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - c = \text{cte}, \\ &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{cte}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Luego, el momento conjugado p_i asociado a la coordenada cíclica q_i es constante.

2. El Lagrangiano de una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional terrestre es

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy. \quad (2.22)$$

Consideremos la transformación de coordenadas $y' = y + \delta y$, con $\delta y = \text{cte}$. El correspondiente cambio en L es

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}^0 = -mg \delta y. \quad (2.23)$$

Escribimos

$$\delta L = \frac{df}{dt} = -mg \delta y \Rightarrow f = -mgt \delta y. \quad (2.24)$$

Entonces, la cantidad conservada J es

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta y - f = \text{cte} \\ &\Rightarrow m\dot{y} \delta y + mgt \delta y = \text{cte}, \\ &\Rightarrow \dot{y} + gt = \text{cte}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

La transformación de coordenadas empleada equivale a sumar una constante a la energía potencial, y deja invariante la ecuación de movimiento de la partícula.

2.3. Homogeneidad del espacio y conservación del momento lineal

Como una aplicación del Teorema de Noether, demostraremos la relación entre la conservación del momento lineal y la homogeneidad del espacio; es decir, la simetría de traslación en un sistema. Homogeneidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.

Consideremos un sistema de N partículas con posiciones $\mathbf{r}_\alpha = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha))$, $\alpha = 1, \dots, N$, caracterizado por el Lagrangiano $L(\mathbf{r}_\alpha, \dot{\mathbf{r}}_\alpha, t)$. Supongamos la transformación de coordenadas $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$, donde $\delta\mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes δx_j son constantes; i. e., $\delta\dot{\mathbf{r}} = 0$. Esta transformación corresponde a una translación infinitesimal del sistema en una dirección arbitraria del espacio.

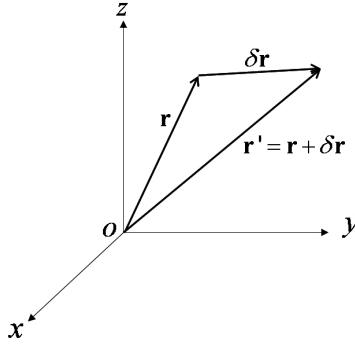


Figura 2.2: Translación espacial infinitesimal.

La homogeneidad del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; es decir, $\delta L = 0$. Entonces, la cantidad conservada J , de acuerdo al teorema de Noether, es

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j(\alpha)} \delta x_j - f \\ &\Rightarrow \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j(\alpha)} \delta x_j = \text{cte} \\ &\Rightarrow \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{r} = \text{cte}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

puesto que f y J son constantes, y donde hemos definido

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1(\alpha)}, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2(\alpha)}, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3(\alpha)} \right). \tag{2.27}$$

Puesto que $\delta\mathbf{r}$ es constante, la Ec. (2.26) implica que la cantidad vectorial

$$\mathbf{P}_T \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \text{cte.} \quad (2.28)$$

La cantidad \mathbf{P}_T es el momento lineal total del sistema. Para ver esto, consideremos el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 - V(\mathbf{r}_{\alpha}). \quad (2.29)$$

Entonces,

$$\mathbf{P}_T = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (2.30)$$

Note que el momento lineal de una partícula puede escribirse como

$$\mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}. \quad (2.31)$$

Luego, la Ec. (2.28) expresa la conservación del momento total \mathbf{P}_T de un sistema debido a la homogeneidad del espacio. En un sistema donde existe simetría translacional en una dirección espacial específica, la componente del momento lineal del sistema en esa dirección se conserva.

Ejemplo.

- Consideremos una partícula libre cuyo Lagrangiano es $L = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2$. La variación de L bajo una transformación infinitesimal de traslación es

$$\delta L = \sum_{i=1}^3 \cancel{\frac{\partial L}{\partial x_i}} \delta x_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cancel{\delta \dot{x}_i} = 0. \quad (2.32)$$

Esta variación puede ponerse en la forma $\delta L = \frac{df(q_j, t)}{dt}$ si escogemos f igual a una constante. La cantidad conservada J es

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j - f = \text{cte} \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^3 m \dot{x}_j \delta x_j = \text{cte}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Puesto que los δx_j son constantes arbitrarias, la Ec. (2.33) implica que cada término en la suma es constante,

$$m \dot{x}_j \equiv p_j = \text{cte}, \forall j. \quad (2.34)$$

2.4. Isotropía del espacio y conservación del momento angular

Isotropía espacial significa que las propiedades mecánicas de un sistema no varían cuando éste es rotado en el espacio. El Teorema de Noether permite demostrar la relación entre la isotropía del espacio y la conservación del momento angular de un sistema.

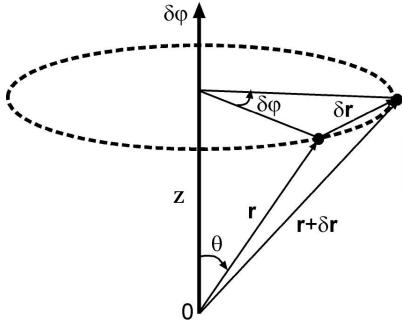


Figura 2.3: Rotación infinitesimal $\delta\varphi$ del vector \mathbf{r} .

Consideremos una partícula en la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ con origen en O . Supongamos una rotación infinitesimal del vector \mathbf{r} alrededor de un eje que pasa por O , manteniendo su magnitud fija. Sea $\delta\varphi$ la magnitud constante del ángulo rotado y cuya dirección de rotación $\delta\varphi$ sobre el eje está definida por la regla de la mano derecha.

El vector de posición de la partícula transformado por la rotación infinitesimal es

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, \quad (2.35)$$

donde el vector $\delta\mathbf{r}$ tiene dirección perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta\varphi)$ y magnitud $\delta r = r \sin \theta \delta\varphi$, y donde θ es el ángulo entre $\delta\varphi$ y \mathbf{r} . Luego, se puede expresar

$$\delta\mathbf{r} = \delta\varphi \times \mathbf{r}. \quad (2.36)$$

Consideremos un sistema de N partículas con posiciones \mathbf{r}_α , $\alpha = 1, \dots, N$, sujeto a una rotación infinitesimal $\delta\varphi$. El cambio en el vector de posición de la partícula α es $\delta\mathbf{r}_\alpha = \delta\varphi \times \mathbf{r}_\alpha$. La isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta L = 0$. Expresando $\delta L = \frac{df}{dt}$, obtenemos $f = \text{cte}$. Entonces, el teorema de Noether establece que

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j(\alpha)} \delta x_j(\alpha) - f = \text{cte} \\ &\Rightarrow \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j(\alpha)} \delta x_j(\alpha) = \text{cte} \\ &\Rightarrow \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = \text{cte}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sustituyendo $\mathbf{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}$ y $\delta \mathbf{r}_\alpha = \delta \varphi \times \mathbf{r}_\alpha$, podemos escribir la Ec. (2.37) como

$$\sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_\alpha) = \sum_{\alpha} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \text{cte}, \quad (2.38)$$

donde hemos usado la identidad vectorial: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. Puesto que el vector $\delta \varphi$ es constante, la Ec. (2.38) implica que

$$\mathbf{l}_T \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \text{cte}. \quad (2.39)$$

La cantidad vectorial \mathbf{l}_T es el momento angular total del sistema, y la Ec. (2.39) expresa su conservación si el sistema posee isotropía espacial.

En general, si un sistema posee simetría rotacional alrededor de un eje (simetría axial), se conserva la componente del momento angular en la dirección de ese eje.

Ejemplo.

1. Consideremos una rotación infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z . Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes

$$\begin{aligned} \delta x &= -y \delta \varphi, & \delta \dot{x} &= -\dot{y} \delta \varphi \\ \delta y &= x \delta \varphi, & \delta \dot{y} &= \dot{x} \delta \varphi. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Consideremos un oscilador armónico bidimensional, que consiste en una partícula de masa m moviéndose sobre el plano (x, y) sin fricción, sujetada a la fuerza de un resorte de constante k . El Lagrangiano puede escribirse como

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2). \quad (2.41)$$

La variación de L bajo esta transformación infinitesimal de rotación resulta en

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \\ &= kxy \delta \varphi - yx \delta \varphi - m\dot{x}\dot{y} \delta \varphi + m\dot{y}\dot{x} \delta \varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

La condición $\delta L = \frac{df(q_j, t)}{dt}$ implica que $f = \text{cte} = c$. La cantidad conservada J es

$$J = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi - c = \text{cte}. \quad (2.43)$$

Puesto que $\delta \varphi = \text{cte}$, tenemos

$$m(xy - yx) \equiv l_z = \text{cte}. \quad (2.44)$$

La componente del momento angular en la dirección z es constante. En coordenadas polares, $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}kr^2$, y la coordenada φ es cíclica. Entonces,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \equiv l_z = \text{cte}. \quad (2.45)$$

2.5. Homogeneidad del tiempo y conservación de la energía

Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen. Esta simetría está relacionada con la conservación de energía. En un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano L no depende explícitamente de t ; es decir $L = L(q_j, \dot{q}_j)$. Luego $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Calculemos el cambio total de L con respecto al tiempo en tal sistema:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \overset{0}{\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}}. \quad (2.46)$$

Sustituimos la ecuación de Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] &= 0 \\ \Rightarrow \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L &= \text{cte.} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Definimos la *función de energía* de un sistema como

$$E(q_j, \dot{q}_j) \equiv \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L. \quad (2.49)$$

Luego, en sistemas homogéneos en el tiempo, la función de energía del sistema se conserva.

$$E(q_j, \dot{q}_j) = \text{cte.} \quad (2.50)$$

La función de energía se puede calcular para cualquier sistema, pero es constante sólo si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Los sistemas para los cuales $E(q_j, \dot{q}_j)$ es constante, se llaman *sistemas conservativos*. Para establecer bajo qué condiciones la función de energía es igual a $T + V$, utilizaremos a continuación un teorema debido a Euler.

En el Cap. 6 veremos que la función de energía, expresada en términos de las coordenadas q_j y de sus momentos conjugados p_j , recibe el nombre de *Hamiltoniano* del sistema y se designa como $H(q_j, p_j) \equiv \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L$.

2.6. Teorema de Euler para la energía cinética

Una función de s variables $f(y_1, \dots, y_s)$ es homogénea de grado (orden) n si, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, satisface:

$$f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_s) = \lambda^n f(y_1, \dots, y_s). \quad (2.51)$$

Ejemplos.

1. $f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^s x_i^m$, es homogénea de grado m :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_s) = \sum_i \lambda^m x_i^m = \lambda^m \sum_i x_i^m = \lambda^m f.$$

2. $f(x_1, \dots, x_s) = \prod_{i=1}^s x_i^m$, es homogénea de grado ms :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_s) = \prod_i \lambda^m x_i^m = \lambda^{ms} \prod_i x_i^m = \lambda^{ms} f.$$

3. $f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^s \sin x_i$, no es homogénea:

$$f(\lambda x_1, \dots, x_s) = \sum_i \sin(\lambda x_i) \neq \lambda^n \sum_i \sin x_i = \lambda^n f.$$

Teorema de Euler para funciones homogéneas.

Si $f(y_1, \dots, y_s)$ es una función homogénea de grado n , entonces f satisface:

$$\nabla f \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf. \quad (2.52)$$

Demostración:

Si f es homogénea, satisface la Ec. (2.51). Derivemos ambos lados de la Ec. (2.51) con respecto a λ :

En el lado izquierdo de la Ec. (2.51), sustituimos $z_i \equiv \lambda y_i$,

$$f(\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_s) = f(z_1, z_2, \dots, z_s) \quad (2.53)$$

y derivamos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_s) &= \frac{df}{d\lambda}(z_1, \dots, z_s) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} y_i \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_i} y_i = \frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Derivamos el lado derecho de la Ec. (2.51),

$$\frac{d}{d\lambda}[\lambda^n f(y_1, \dots, y_s)] = n\lambda^{n-1}f + \lambda^n \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \overset{0}{\cancel{\frac{\partial y_i}{\partial \lambda}}}, \quad (2.55)$$

puesto que y_i y λ son independientes. Igualando ambos lados,

$$\frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = n\lambda^{n-1}f, \quad (2.56)$$

lo cual es válido $\forall \lambda$. En particular, haciendo $\lambda = 1$, tenemos el Teorema de Euler para funciones homogéneas,

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf \quad \blacklozenge. \quad (2.57)$$

El teorema de Euler para funciones homogéneas puede aplicarse a la energía cinética. En general, la energía cinética de un sistema es una función cuadrática de las velocidades generalizadas

$$T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^s T_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad (2.58)$$

donde los coeficientes T_{jl} pueden contener parámetros (masa, longitud, etc) o coordenadas del sistema. La función T es una función homogénea de segundo grado en las \dot{q}_j : $T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_s) = \lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$. Entonces T satisface el Teorema de Euler,

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T. \quad (2.59)$$

Supongamos que la energía potencial de un sistema depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$. Entonces $L = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. La función de energía correspondiente para el sistema es

$$\begin{aligned} E(q_j, \dot{q}_j) &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V) \\ &= 2T - \sum_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V \\ &= T + V - \sum_j \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Si la energía potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total, $E(q_j, \dot{q}_j) = T + V$. Si V depende de \dot{q}_j , la función de energía contiene términos adicionales a $T + V$.

2.7. Fuerzas generalizadas: partícula en un campo electromagnético

Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades, $V(q_j, \dot{q}_j)$. En estos sistemas, también se puede definir una función de energía $E(q_j, \dot{q}_j)$.

Consideremos el Lagrangiano para una partícula en un potencial dependiente de la velocidad $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, en coordenadas cartesianas,

$$L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (2.61)$$

donde

$$T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.62)$$

La ecuación de Lagrange para x_i es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (2.63)$$

Sustitución de L conduce a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad (2.65)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_i = F_i, \quad (2.66)$$

donde F_i es la componente i de la denominada *fuerza generalizada* sobre la partícula,

$$F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right). \quad (2.67)$$

Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y de velocidades.

Un importante ejemplo de fuerza generalizada es aquella experimentada por una partícula en un campo electromagnético.

Experimentalmente se sabe que una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a *fuerza de Lorentz*

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (2.68)$$

donde c es la velocidad constante de la luz. La contribución del campo magnético a esta fuerza depende de la velocidad, por lo que \mathbf{F} constituye una fuerza generalizada.

Para encontrar el potencial V , dependiente de la velocidad, asociado a la fuerza de Lorentz, y el correspondiente Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético, consideremos primero las *ecuaciones de Maxwell* para los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.69)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.70)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.71)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (2.72)$$

La Ec. (2.71) implica

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.73)$$

donde la cantidad vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ se denomina *potencial vector*. Sustituyendo \mathbf{B} en la Ec. (2.70),

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (2.74)$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.75)$$

El término entre paréntesis en la Ec. (2.75) debe ser proporcional al gradiente de una cantidad escalar; se escoge

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \quad (2.76)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.77)$$

La cantidad $\varphi(\mathbf{r}, t)$ se denomina *potencial escalar*. Luego, la fuerza de Lorentz, Ec. (2.68), se puede expresar en términos de los potenciales $\varphi(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ como

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]. \quad (2.78)$$

Para encontrar la energía potencial $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ de la cual se deriva esta fuerza generalizada, consideremos el término $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$. Usamos la identidad vectorial

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{v})^0 + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v}^0 + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (2.79)$$

donde se anulan términos porque el operador ∇ contiene derivadas espaciales y, aplicado a \mathbf{v} , da cero pues \mathbf{v} es independiente de las coordenadas \mathbf{r} . Luego,

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (2.80)$$

donde

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}. \quad (2.81)$$

Sustituyendo en Ec. (2.78),

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]. \quad (2.82)$$

Usando

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.83)$$

obtenemos,

$$\mathbf{F} = q \left[-\nabla \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right] \quad (2.84)$$

cuya componente F_i es

$$F_i = q \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right]. \quad (2.85)$$

Comparando con la expresión general de la fuerza generalizada Ec. (2.67), vemos que la energía potencial satisface las relaciones

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right), \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{q}{c} A_i, \quad (2.87)$$

de donde se deduce

$$V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right). \quad (2.88)$$

El Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético es, entonces,

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.89)$$

La función de energía correspondiente es

$$E = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L, = \frac{1}{2} m v^2 + q\varphi.$$

Luego, para una partícula en un campo electromagnético, $E \neq T + V$, debido a que V depende de la velocidad de la partícula. Sin embargo, E se conserva puesto que $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Note que la función de energía E no depende del potencial vector \mathbf{A} y, por tanto, tampoco depende del campo magnético \mathbf{B} . El campo magnético no realiza trabajo, puesto que la fuerza magnética siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula.

El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t), \quad (2.90)$$

$$\Rightarrow \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.91)$$

Luego, el momento depende, tanto de la velocidad, como de la posición de la partícula.

Supongamos que los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ se derivan de los potenciales $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$ según las Ecs. (2.73) y (2.77). Consideremos la siguiente transformación de los potenciales, denominada *transformación de calibre*,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad (2.92)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad (2.93)$$

donde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario. Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda \\ &= \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) \\ &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

La invarianza de los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz, que es la manifestación física de estos campos, es también invariante. Del mismo modo, las ecuaciones de Maxwell conservan su forma bajo una transformación de calibre, lo cual indica la existencia de una simetría fundamental en la interacción electromagnética, llamada *simetría de calibre*.

Por otro lado, el Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético se transforma, bajo una transformación de calibre, como

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi' + \frac{q}{c}\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \frac{q}{c}\nabla\Lambda \cdot \mathbf{v} \\ &= L + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \nabla\Lambda \cdot \mathbf{v}\right) \\ &= L + \frac{q}{c}\frac{d\Lambda}{dt}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Luego, las ecuaciones de movimiento que se derivan de L son invariantes bajo una transformación de calibre. Si expresamos $L' = L + \delta L$, con la transformación infinitesimal $\delta L = \frac{d\Lambda}{dt}$, por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal transformación de simetría. Aunque no es materia correspondiente a este curso, se puede demostrar que la simetría de calibre presente en las ecuaciones de Maxwell implica la conservación de la carga eléctrica.

2.8. Sistemas integrables y sistemas caóticos

Las cantidades conservadas constituyen *primeras integrales* del movimiento de un sistema; son funciones de las coordenadas y de sus velocidades (i. e. primera derivadas temporales). Denotamos por $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$, el conjunto de cantidades conservadas en un sistema. En general, estas cantidades se pueden emplear para reducir el número de ecuaciones de Lagrange a integrar en el sistema.

Un sistema con s grados de libertad es *integrable* si posee, al menos, s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.

Las s cantidades conservadas de un sistema integrable constituyen un conjunto de s ecuaciones para las s velocidades generalizadas $\dot{q}_j(t)$, las cuales se pueden reducir, en principio, a una ecuación diferencial de primer orden con respecto al tiempo para una coordenada generalizada. Esta, a su vez, en principio puede ser integrada. A partir de la integración de esa coordenada, las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas. Las soluciones para todas las coordenadas $q_j(t)$ pueden ser expresadas en términos de *cuadraturas*; es decir, integrales explícitas que generalmente contienen raíces cuadradas de funciones conocidas. Si embargo, aunque las coordenadas en sistemas integrables son susceptibles de ser determinadas completamente en función de integrales, el cálculo exacto de éstas, en muchos casos, puede resultar no trivial.

Si un sistema con s grados de libertad tiene menos de s cantidades conservadas ($n < s$), se denomina *no integrable*. Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad ($n > s$), se llama *superintegrable*. Existen pocos sistemas superintegrables conocidos; el ejemplo más simple es una partícula libre; otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional (Cap. 3).

Ejemplos.

Consideremos algunos sistemas estudiados en el Cap. 1:

1. Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
2. Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
3. Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = l_z = \text{cte}$, $C_2 = E = \text{cte}$, $n = 2$; es integrable.
4. Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
5. Péndulo cuyo soporte gira en un círculo con velocidad angular constante: $s = 1$, $n = 0$; no es integrable.
6. Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
7. Partícula libre es superintegrable: $s = 1$; $n = 2$: $C_1 = E = \text{cte}$, $C_2 = p = \text{cte}$.

La integrabilidad puede ser considerada como un tipo de simetría presente en varios sistemas dinámicos, y que conduce a soluciones con comportamiento regular (periódico o estacionario) en el tiempo. Sin embargo, la existencia de integrabilidad no es lo más común; muchos sistemas dinámicos no son integrables. Un sistema no integrable puede exhibir comportamiento *caótico* para algún rango de valores de sus parámetros.

El fenómeno de *caos* consiste en la evolución irregular e impredecible de las variables de un sistema dinámico determinista debido a la presencia de una extrema sensibilidad ante cambios infinitesimales en las condiciones iniciales de esas variables. *La no integrabilidad es una condición necesaria, pero no suficiente, para la existencia de caos en un sistema.*

Los sistemas con comportamiento caótico se caracterizan porque las ecuaciones que rigen su dinámica poseen funciones no lineales de las variables (una función $f(x)$ es *no lineal* si $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$).

El péndulo doble constituye un ejemplo de un sistema no lineal y no integrable que exhibe comportamiento caótico. En el Cap. 1 obtuvimos las ecuaciones de Lagrange para los ángulos θ_1 y θ_2 que describen los grados de libertad de este sistema,

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - M \sin \theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_1(M - \cos^2 \Delta\theta)} \quad (2.97)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{gM(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) - (Ml_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_2(M - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (2.98)$$

donde $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$, y $M \equiv 1 + m_1/m_2$.

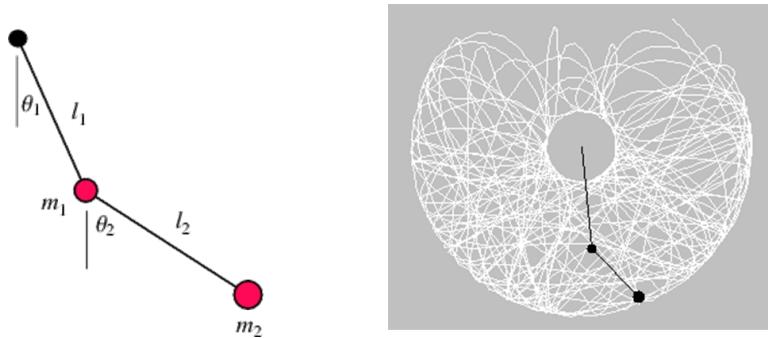


Figura 2.4: Izquierda: Coordenadas y parámetros del péndulo doble. Derecha: Movimiento caótico de la partícula m_2 en el espacio.

En el péndulo doble, dos trayectorias de una misma variable (por ejemplo, θ_2) que parten de condiciones iniciales arbitrariamente cercanas, no se mantienen cercanas en el tiempo, sino que pueden evolucionar de maneras irregulares y muy diferentes (Fig. (2.5)), a pesar de que las Ecs. (2.97)-(2.98) que rigen la dinámica son deterministas.

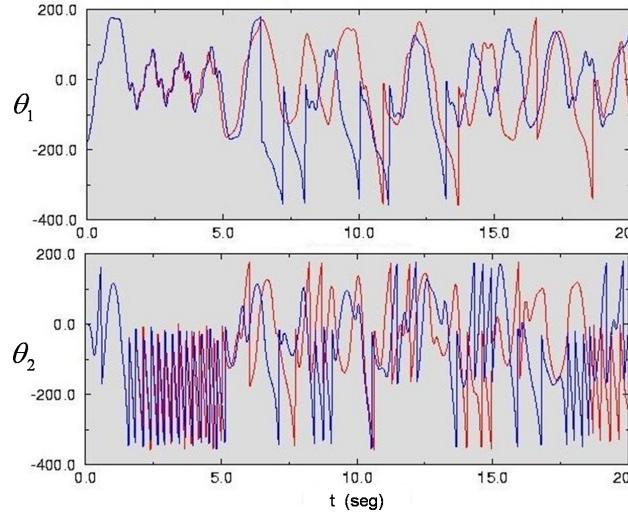


Figura 2.5: Realización experimental de caos en un péndulo doble. Arriba: θ_1 vs. t . Abajo: θ_2 vs. t . En cada gráfica, partiendo del reposo, se muestra la evolución del ángulo a partir de dos condiciones iniciales muy cercanas, $\Delta\theta_1(0) = \Delta\theta_2(0) = 10^{-3}$.

Un sistema caótico posee una extrema sensibilidad ante cambios infinitesimales en sus condiciones iniciales: una pequeña perturbación en las condiciones iniciales de una variable resulta amplificada por la evolución dinámica del sistema, hasta que alcanza un tamaño comparable al intervalo de definición de la variable. Esto conlleva a limitaciones prácticas en la capacidad de predicción del comportamiento de sistemas caóticos.

Las ecuaciones de movimiento del péndulo doble, Ecs. (2.97)-(2.98), contienen funciones no lineales de θ_1 y θ_2 . Si consideramos el límite de pequeñas amplitudes de las oscilaciones, $\theta_1 \rightarrow 0$ y $\theta_2 \rightarrow 0$, estas ecuaciones pueden linealizarse usando las aproximaciones $\sin x \approx x$ y $\cos x \approx 1$, para $x \rightarrow 0$, quedando en la forma

$$\ddot{\theta}_1 \approx \frac{g(\theta_2 - M\theta_1)}{l_1(M-1)}, \quad (2.99)$$

$$\ddot{\theta}_2 \approx \frac{gM(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(M-1)}. \quad (2.100)$$

En este caso no se observa caos; el movimiento del sistema consiste en la superposición de dos modos de oscilación periódica con sus correspondientes frecuencias (Cap. 4): un modo en fase ($\theta_1 = \theta_2$) y otro modo en fases opuestas ($\theta_1 = -\theta_2$).

El límite de pequeñas amplitudes equivale a valores pequeños de la energía del sistema. Luego, el comportamiento del péndulo doble puede ser regular para ciertas condiciones, a pesar de que el sistema es no integrable. Esto ilustra el hecho de que la condición de no integrabilidad es necesaria, pero no suficiente, para la existencia de caos en un sistema.

Otro ejemplo de un sistema no integrable y caótico, es el péndulo de resorte, cuyas ecuaciones de movimiento también fueron calculadas en el Cap. 1,

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0, \quad (2.101)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l) - g \cos \theta = 0. \quad (2.102)$$

Este sistema exhibe comportamiento caótico para ciertos valores de su energía.

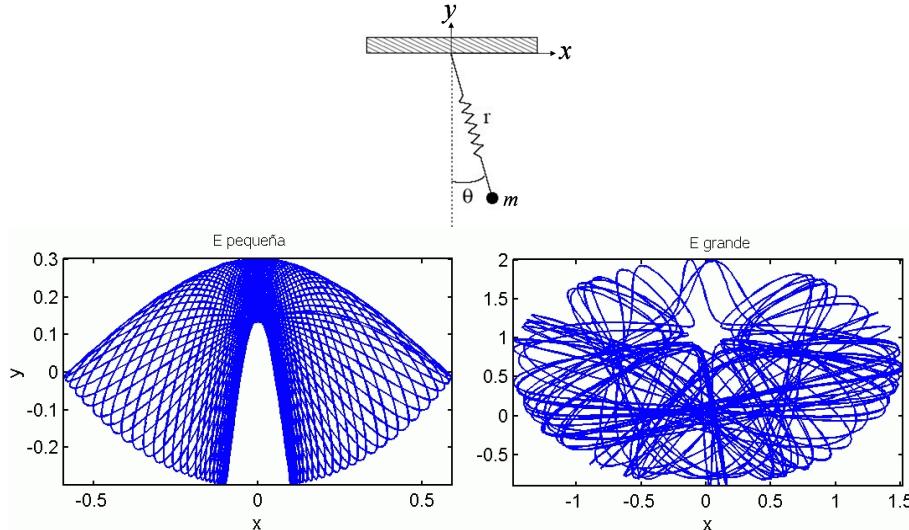


Figura 2.6: Movimiento en el plano (x, y) de la partícula en el péndulo de resorte, para diferentes valores de su energía E . Izquierda: comportamiento regular (periódico). Derecha: caos.

Note que no se requieren muchas variables (hay solamente dos grados de libertad en el péndulo doble o en el péndulo de resorte) para la ocurrencia de caos en un sistema.

Se ha descubierto que el caos es un fenómeno ubícuo en la Naturaleza. Sistemas no lineales físicos, químicos, biológicos, fisiológicos, económicos, sociales, etc. presentan comportamiento caótico; el cual se manifiesta con propiedades universales, independientemente del contexto.

2.9. Movimiento unidimensional

El caso más simple de integrabilidad es un sistema con un sólo grado de libertad, el cual se denomina sistema *unidimensional*. El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general

$$L = T(\dot{q}^2) - V_{ef}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{ef}(q), \quad (2.103)$$

donde el factor a representa algunos parámetros, como masa, etc., y $V_{ef}(q)$ corresponde a un *potencial efectivo* que contiene términos dependientes de la coordenada q .

Puesto que $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la energía es una cantidad conservada,

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \\ &= \frac{1}{2} a \dot{q}^2 + V_{\text{ef}}(q) = \text{cte.} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable. De la cantidad conservada E , se puede determinar $t(q)$ en términos de una integral explícita,

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a} (E - V_{\text{ef}}(q))} \quad (2.105)$$

$$t(q) = \sqrt{\frac{a}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(q)}} + \text{cte.} \quad (2.106)$$

Luego, *en principio*, se puede invertir $t(q)$ para obtener $q(t)$. Para que la solución $q(t)$ sea real, el movimiento puede ocurrir solamente para valores de q tales que $E \geq V_{\text{ef}}(q)$.

La condición de integrabilidad de sistemas unidimensionales permite calcular el período de movimientos oscilatorios en esos sistemas. Consideremos un sistema descrito por la coordenada cartesiana $q = x$ y cuya energía potencial es $V_{\text{ef}} = V(x)$. Entonces, $a \equiv m$. El Lagrangiano del sistema es $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ y la ecuación de movimiento correspondiente es

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}. \quad (2.107)$$

La energía total es

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \text{cte.} \quad (2.108)$$

Puesto que $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$, el movimiento sólo puede ocurrir para valores de x tal que $E \geq V(x)$. En la Fig. (2.7), esto corresponde a las regiones $x \in [x_1, x_2]$; $x \geq x_3$.

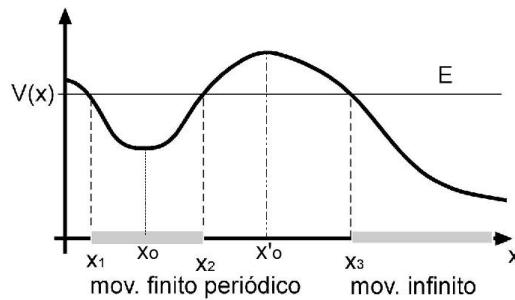


Figura 2.7: Energía potencial de un sistema unidimensional con energía constante E . Movimiento puede ocurrir en los intervalos marcados en gris sobre el eje x . El punto x_0 es un punto de equilibrio estable; mientras que x'_0 es un punto de equilibrio inestable.

Los *puntos de retorno* (o *estacionarios*) son aquellos donde la velocidad instantánea es cero, es decir, $\dot{x} = 0$. La Ec. (2.106) implica que los puntos de retorno corresponden a los valores de x tales que $V(x) = E$. En la Fig. (2.7), x_1, x_2 y x_3 son puntos de retorno, dados por: $V(x_1) = E$, $V(x_2) = E$, $V(x_3) = E$.

Los *puntos de equilibrio* $x = x_o$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula,

$$f(x_o) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} \Big|_{x_o} = 0, \quad (2.109)$$

o equivalentemente, donde la aceleración es cero, $\ddot{x} = 0$. Note que un punto de equilibrio no es necesariamente un punto estacionario, y viceversa.

Un *punto estático* satisface ambas condiciones: $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$.

Un punto de equilibrio x_o es estable si $x_o + \delta x$, donde δx es una pequeña perturbación, tiende en el tiempo al valor x_o . Un punto de equilibrio estable corresponde a un mínimo del potencial $V(x)$.

$$\text{Si } \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_o} > 0, \quad x_o \text{ es un punto de equilibrio estable.} \quad (2.110)$$

$$\text{Si } \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x_o} < 0, \quad x_o \text{ es un punto de equilibrio inestable.} \quad (2.111)$$

Si el rango del movimiento posible está entre dos puntos de retorno, $x \in [x_1, x_2]$, el movimiento es finito y oscilatorio. Entonces, debe existir un punto de equilibrio estable $x = x_o$ en el intervalo $[x_1, x_2]$; es decir, existe un mínimo de $V(x)$ en ese intervalo.

El período de oscilación entre los puntos de retorno es dos veces el intervalo de tiempo del movimiento entre esos puntos,

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (2.112)$$

Un sistema integrable con varios grados de libertad puede reducirse, en principio, a un sistema unidimensional con una energía de la forma Ec. (2.104).

Ejemplos.

- Partícula de masa m moviéndose sobre un cono vertical con ángulo de vértice α .

El Lagrangiano de este sistema fue calculado en el Cap. 1,

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2) - mgr \cot \alpha. \quad (2.113)$$

Este sistema es integrable; posee dos grados de libertad, r y φ , y dos cantidades conservadas, $C_1 = l_z$ y $C_2 = E$, asociadas con la simetría axial alrededor del eje z , $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, y con la homogeneidad del tiempo, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, respectivamente.

Las cantidades conservadas son la componente z del momento angular

$$l_z = mr^2\dot{\varphi} = C_1, \quad (2.114)$$

y la energía total del sistema

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr \cot \alpha = C_2. \quad (2.115)$$

Sustituyendo $\dot{\varphi} = \frac{l_z}{mr^2}$ en la ecuación para E , podemos expresar

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2}\frac{l_z^2}{mr^2} + mgr \cot \alpha \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + V_{\text{ef}}(r). \end{aligned} \quad (2.116)$$

La Ec. (2.116) tiene la forma de la energía de un sistema unidimensional, Ec. (2.104), donde identificamos $a = m \csc^2 \alpha$, y

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}\frac{l_z^2}{mr^2} + mgr \cot \alpha. \quad (2.117)$$

Luego, de la Ec. (2.116) podemos obtener

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \csc \alpha \int \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}} + \text{cte.} \quad (2.118)$$

Podemos obtener $r(t)$ mediante inversión de la función $t(r)$ y, sustituyendo $r(t)$ en la Ec. (2.114), podemos calcular $\varphi(t)$. Las soluciones para las coordenadas $r(t)$ y $\varphi(t)$ se expresan en términos de las cantidades conservadas l_z y E .

2. Período de un oscilador armónico con una E dada.

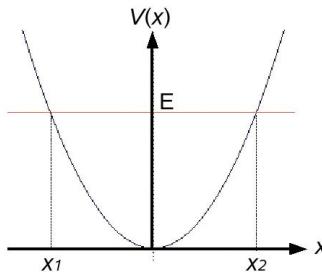


Figura 2.8: Energía potencial de un oscilador armónico con energía total E .

La energía potencial es $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, y la energía total es

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cte.} \quad (2.119)$$

Los puntos de retorno satisfacen la condición $E = V(x)$; esto es,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kx^2 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

El período se calcula como

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}} = 2\sqrt{\frac{2m}{E}} \int_0^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}}. \quad (2.121)$$

Usamos el cambio de variables,

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta, \quad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta \quad (2.122)$$

$$\text{tal que } x = 0 \rightarrow \theta = 0; \quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.123)$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{2m}{E}} \sqrt{\frac{2E}{k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \quad (2.124)$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.125)$$

donde $\omega^2 \equiv k/m$. El período de un oscilador armónico simple es independiente de la energía y, por tanto, de la amplitud de la oscilación.

3. Período de un péndulo simple con amplitud θ_0 .

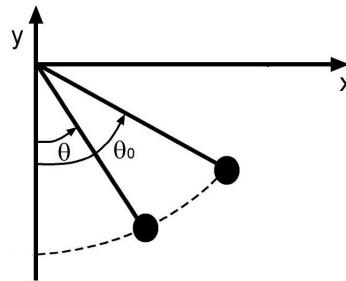


Figura 2.9: Péndulo simple con amplitud θ_0 .

La energía potencial es $V(\theta) = -mgl \cos \theta$, y la energía total es

$$E = T + V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (2.126)$$

Despejamos $\dot{\theta}$,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}} \sqrt{E + mgl \cos \theta}. \quad (2.127)$$

Luego, la integral para el tiempo da

$$t = l \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{E + mgl \cos \theta}}. \quad (2.128)$$

Los puntos de retorno están dados por

$$E = V(\theta_0) = -mgl \cos \theta_0 \Rightarrow \theta_{1,2} = \pm \theta_0. \quad (2.129)$$

Calculamos el período como 4 veces el intervalo de tiempo entre $\theta = 0$ y $\theta = \theta_0$,

$$T(E) = 4l \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{E + mgl \cos \theta}} \quad (2.130)$$

$$T(\theta_0) = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (2.131)$$

Note que el período del péndulo es independiente de la masa, un resultado encontrado experimentalmente por Galileo.

Usando

$$\cos \theta = \cos(2\theta/2) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = 1 - 2\sin^2(\theta/2), \quad (2.132)$$

la Ec. (2.131) se puede expresar como

$$\begin{aligned} T(\theta_0) &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sin(\theta_0/2)} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta_0/2)}}}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\sin y = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} \Rightarrow \cos y dy = \frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta_0/2)} d\theta. \quad (2.134)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \cos(\theta/2) &= \sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 y}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} d\theta &= 2\sin(\theta_0/2) \frac{\cos y}{\cos(\theta/2)} dy \\ &= \frac{2\sin(\theta_0/2) \cos y}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 y}} dy. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Hacemos el cambio de límites: $\theta = 0 \rightarrow y = 0$; $\theta = \theta_0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2}$.

Luego, la integral en la Ec. (2.133) queda

$$T(\theta_0) = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 y}}. \quad (2.137)$$

La integral definida (2.137) es una *integral elíptica de la primera clase*. Se puede obtener una aproximación de esta integral para $\theta_0 \ll 1$ (θ_0 pequeño). Entonces, $\sin(\theta_0/2) \approx \theta_0/2$, y la Ec. (2.137) se convierte en

$$T(\theta_0) \approx 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{4} \sin^2 y}}. \quad (2.138)$$

Usamos la siguiente expansión de Taylor para $x \ll 1$,

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx + \dots \quad (2.139)$$

$$\Rightarrow (1 - x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \dots \quad (2.140)$$

y obtenemos

$$T(\theta_0) \approx 4 \sqrt{\frac{l}{2}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{8} \sin^2 y \right) dy. \quad (2.141)$$

La integral del segundo término en la Ec. (2.141) se calcula como

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 y dy = \left(\frac{y}{2} - \frac{\sin(2y)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \quad (2.142)$$

Luego, hasta segundo orden en θ_0 ,

$$\begin{aligned} T(\theta_0) &\approx 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{32} \theta_0^2 + \dots \right) \\ &\approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \end{aligned} \quad (2.143)$$

El período de un péndulo simple depende, en segundo orden, de la amplitud θ_0 y por tanto de la energía total E .

En sus experimentos, Galileo encontró que el período de un péndulo es independiente de la amplitud, que es el resultado correcto hasta primer orden; i.e.; para amplitudes pequeñas.

2.10. Problemas

1. Dos partículas con masas m_1 y m_2 están unidas por un resorte de constante k y longitud en reposo l , de manera que pueden deslizarse sin fricción sobre una mesa. Asuma que el resorte no se dobla.
 - a) Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema.
 - b) Encuentre e identifique las cantidades conservadas.
 - c) Calcule el período de una oscilación a lo largo del resorte.
2. Una partícula de masa m y carga q está sujeta a un potencial electromagnético dado por $\varphi = 0$ y $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, donde \mathbf{B} es un campo magnético uniforme y constante.
 - a) Verifique que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.
 - b) Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cilíndricas.
 - c) Encuentre las cantidades conservadas.
3. Considere un sistema con el siguiente Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}a(x^2 \sin^2 y + y^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x} \cos y + \dot{z})^2,$$

donde a y b son constantes.

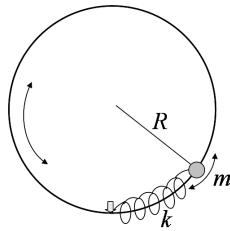
- a) Derive las ecuaciones de movimiento del sistema.
 - b) Calcule e identifique las cantidades conservadas. ¿Es integrable este sistema?.
 - c) Calcule la energía del sistema.
 - d) Suponga que $y(t) = y_o = \text{cte.}$ es una solución. ¿Cuáles son $x(t)$ y $z(t)$ en este caso?.
4. Una partícula de masa m se mueve con velocidad \mathbf{v} sujeta al potencial

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = U(r) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{l},$$

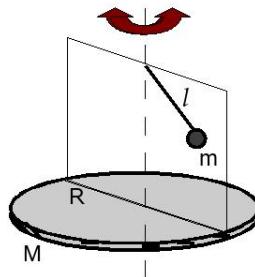
donde \mathbf{r} es el radio vector medido desde el origen del sistema de referencia, \mathbf{l} es el momento angular con respecto a ese origen, \mathbf{n} es un vector fijo en el espacio y $U(r)$ es una función escalar.

- a) Encuentre la fuerza ejercida sobre la partícula.
- b) Obtenga las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cartesianas.
- c) ¿Existe alguna cantidad constante?.
5. Una partícula de masa m y energía total E se mueve en la dirección x con energía potencial $V(x) = k|x|^n$ (k, n constantes), tal que el período del movimiento es T .
 - a) Encuentre los puntos de retorno de la partícula.
 - b) Calcule el período resultante si la energía total se duplica.
 - c) Demuestre que el período no cambia si el potencial corresponde al de un oscilador armónico simple.
6. Una partícula de masa m puede moverse sin fricción sobre la superficie $z = k(x^2 + y^2)$, donde z es la dirección vertical y $k = \text{cte.}$
 - a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula.
 - b) ¿Es integrable este sistema?.

7. Un aro de masa m y radio R puede girar libremente en un plano horizontal alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro. A lo largo del aro se encuentra enrollado un resorte de constante k , con un extremo fijo y el otro extremo conectado a una partícula de masa m , la cual desliza sin fricción sobre el aro.
- Resuelva las ecuaciones de movimiento resultantes para este sistema.
 - Demuestre que existen dos cantidades conservadas en el sistema.

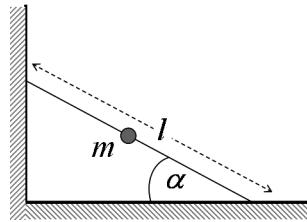


8. Un péndulo de masa m y longitud l está construido de modo que oscila en un plano perpendicular a un disco de masa M y radio R que puede rotar libremente sin fricción alrededor del eje vertical que pasa por su centro. Desprecie la masa de los soportes del péndulo.
- Obtenga las ecuaciones de movimiento para este sistema.
 - Identifique las cantidades conservadas. ¿Es integrable este sistema?.
 - Determine las condiciones iniciales del péndulo para que el disco rote con velocidad angular constante.



9. Dos masas, m_1 y m_2 , están conectadas por una cuerda a través de un agujero en una mesa sin fricción, de manera que m_1 se mueve sobre la superficie de la mesa y m_2 cuelga de la cuerda, moviéndose verticalmente.
- Determine las ecuaciones de movimiento del sistema.
 - Identifique las cantidades conservadas.
 - Encuentre la posición de equilibrio del sistema.
 - Si m_1 se encuentra inicialmente en reposo a una distancia a del agujero, determine la velocidad de m_2 cuando m_1 alcanza el agujero.

- 10.** Una partícula de masa m se mueve en la dirección x con energía potencial $V(x) = k|x|$ ($k = \text{constante}$), tal que en un instante dado su velocidad en el origen es v_o .
- Obtenga la ecuación de movimiento de la partícula.
 - Calcule la frecuencia del movimiento.
- 11.** Una partícula de masa m está unida a un resorte de constante k y longitud en reposo L_o , de modo que puede moverse sin fricción sobre un plano horizontal. A la partícula se le proporciona una velocidad v_o perpendicular al resorte cuando éste está en reposo.
- Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula.
 - Calcule la velocidad de la partícula cuando la longitud del resorte es $2L_o$.
- 12.** Una varilla de masa despreciable y longitud l tiene un extremo en una pared vertical y el otro en el suelo. En el punto medio de la varilla hay una partícula fija de masa m . Ignore la fricción.
- Encuentre la ecuación dinámica del sistema.
 - Si la varilla se suelta del reposo, formando un ángulo α con el suelo, calcule la velocidad de la masa cuando ésta choque contra el suelo.



- 13.** Una partícula de masa m se mueve en el potencial unidimensional

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}.$$

- Muestre que el movimiento de la partícula es finito si su energía $E < 0$, y es infinito si $E \geq 0$.
- Encuentre los puntos de retorno y el mínimo posible valor de E .
- Para el movimiento finito, encuentre el período en función de E .

- 14.** Encuentre $q(t)$ para una partícula con masa m y energía $E > k^2 = \text{cte}$, que se mueve en el potencial

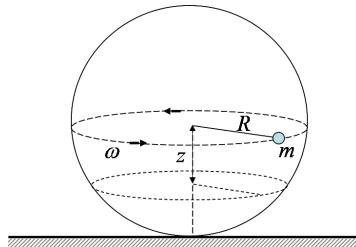
$$V(q) = \frac{k^2}{\sin^2 q}.$$

- 15.** El Lagrangiano de un sistema se puede expresar como

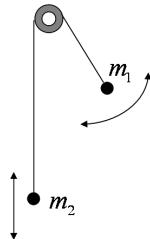
$$L = \frac{m}{2} (a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

donde a , b , y c son constantes, pero sujetas a la condición $b^2 - ac \neq 0$. Encuentre las ecuaciones de movimiento para este sistema.

- 16.** Determine la trayectoria de una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} en el campo electromagnético $\mathbf{E} = E_o \hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{B} = B_o \hat{\mathbf{z}}$, donde E_o y B_o son constantes.
- 17.** Una partícula con carga q y masa m se mueve en el campo electromagnético $\mathbf{E} = (xE_o, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B_o)$, en coordenadas cartesianas, donde E_o y B_o son constantes.
- Encuentre el Lagrangiano de este sistema.
 - Encuentre las ecuaciones de movimiento de la partícula.
 - Encuentre los puntos estáticos de la partícula en el espacio.
- 18.** El campo magnético producido por un monopolo con carga magnética b tendría la forma $\mathbf{B} = b\hat{\mathbf{r}}/r^2$. Considere una partícula de carga q en la posición \mathbf{r} y moviéndose con velocidad \mathbf{v} en ese campo. Demuestre que la cantidad $\mathbf{D} \equiv \mathbf{l} - \frac{bq}{c}\hat{\mathbf{r}}$ es una constante del movimiento en este sistema, donde \mathbf{l} es el momento angular de la partícula y c es la velocidad de la luz.
- 19.** Una partícula que se mueve sobre una superficie esférica suave de radio R gira horizontalmente en la dirección ecuatorial con frecuencia ω . Encuentre la distancia z que puede descender la partícula, si $\omega^2 R \gg g$, i.e., $z \ll R$.



- 20.** Considere una máquina de Atwood tal que una de las masas se mueve verticalmente mientras la otra puede oscilar libremente sobre un plano vertical en el campo gravitacional terrestre. La longitud de la cuerda que une las dos masas es fija.
- Encuentre las ecuaciones de movimiento para este sistema.
 - Encuentre la energía total del sistema.
 - ¿Es integrable este sistema?



Capítulo 3

Fuerzas centrales

3.1. Problema de dos cuerpos

Consideremos dos partículas con masas m_1 y m_2 ubicadas en posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respectivamente, con respecto a un origen O en un sistema de referencia inercial. Supongamos que las partículas interactúan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Este sistema se conoce como el *problema de dos cuerpos*.

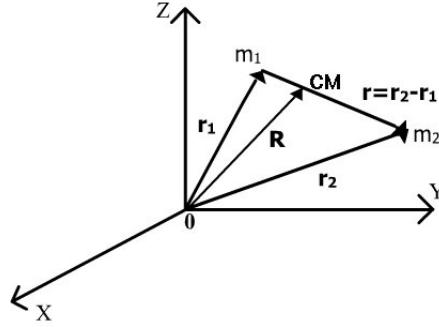


Figura 3.1: Posiciones de las dos partículas y de su centro de masa.

El sistema posee 6 grados de libertad, correspondientes a las 3 coordenadas espaciales del vector de posición \mathbf{r}_1 de la partícula 1 y a las 3 coordenadas del vector de posición \mathbf{r}_2 de la partícula 2. Definimos el vector de *posición relativa* de la partícula 2 con respecto a la partícula 1, como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (3.1)$$

Se define el vector de *posición del centro de masa* (CM) del sistema como

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.2)$$

Denotamos las posiciones relativas de las partículas al centro de masa como

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}, \quad (3.4)$$

las cuales se pueden expresar en función del vector \mathbf{r} ,

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \mathbf{r}. \quad (3.6)$$

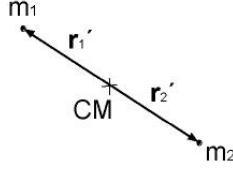


Figura 3.2: Posiciones relativas al centro de masa (CM).

La energía cinética total del sistema es la suma de la energía cinética del centro de masa más la energía cinética relativa al centro de masa,

$$T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rel}}, \quad (3.7)$$

donde

$$T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2, \quad (3.8)$$

y

$$\begin{aligned} T_{\text{rel}} &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}'^2_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dot{\mathbf{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

y donde hemos definimos la *masa reducida*,

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}. \quad (3.10)$$

El Lagrangiano del sistema se puede expresar como

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) &= T - V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Los 6 grados de libertad del sistema se describen mediante las componentes de los vectores \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{R}}$. Las componentes cartesianas de $\dot{\mathbf{R}}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica

$$M_T \dot{\mathbf{R}} = \text{cte}, \quad (3.12)$$

donde $M_T = m_1 + m_2$. Luego, el momento lineal total del sistema se conserva. Igualmente, debido a que no hay fuerzas externas sobre el sistema, puede verse que

$$\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_T = M_T \dot{\mathbf{R}} = \text{cte}. \quad (3.13)$$

El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{cte}$. La conservación del momento lineal total está asociada a la homogeneidad espacial, o simetría translacional, del problema de dos cuerpos. Luego, existen 3 cantidades conservadas correspondientes a las componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.

El término T_{cm} correspondiente a la energía cinética del centro de masa es, por lo tanto, constante y se puede omitir en el Lagrangiano, Ec. (3.11), quedando

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}), \quad (3.14)$$

lo cual es equivalente al Lagrangiano de una partícula de masa μ moviéndose con velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ en el potencial $V(\mathbf{r})$. El problema de dos cuerpos se reduce a encontrar las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa μ en la posición relativa $\mathbf{r}(t)$ con respecto a un origen O' ubicado en una de las dos partículas (Fig. 3.3). Note que este sistema de referencia centrado en una de las partículas es un sistema no inercial, pues su origen O' está acelerado.

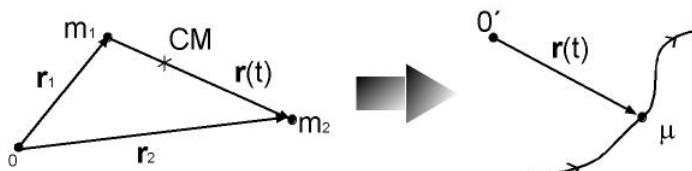


Figura 3.3: Equivalencia del problema de dos cuerpos.

El problema puede simplificarse aún más si se consideran potenciales *centrales*; es decir, si $V(\mathbf{r})$ es función de la magnitud $|\mathbf{r}| = r$ solamente. En ese caso, el potencial es $V(r)$ y la fuerza sobre cualquiera de las partículas, en coordenadas esféricas, es

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = f(r) \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.15)$$

Una fuerza con la forma $\mathbf{F} = f(r) \hat{\mathbf{r}}$ se denomina *fuerza central*. Una propiedad importante de esta tipo de fuerzas es que no ejercen torque neta sobre las partículas,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times f(r) \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{cte}. \quad (3.17)$$

El vector momento angular total \mathbf{l} se conserva si la fuerza de interacción entre las dos partículas es central. Luego, tanto la dirección como la magnitud de \mathbf{l} son constantes, lo que proporciona una cuarta y una quinta cantidad conservada, respectivamente.

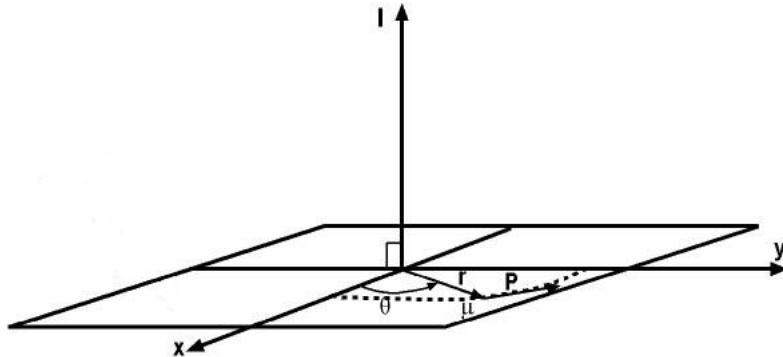


Figura 3.4: Coordenadas polares sobre el plano del movimiento perpendicular a \mathbf{l} .

Como \mathbf{l} es perpendicular al plano (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , la constancia de la dirección de \mathbf{l} implica que el movimiento siempre ocurre sobre ese plano. Luego, el movimiento de la partícula de masa equivalente μ está confinado al plano (\mathbf{r}, \mathbf{p}) y, por lo tanto, se puede describir mediante dos coordenadas. Si escogemos la dirección de \mathbf{l} en la dirección z , el plano del movimiento es (x, y) . La simetría radial sugiere escoger coordenadas polares (r, θ) como coordenadas generalizadas sobre el plano del movimiento. Entonces,

$$x = r \cos \theta; \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad (3.18)$$

$$y = r \sin \theta; \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \quad (3.19)$$

Luego, $\dot{\mathbf{r}}^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$, y el Lagrangiano Ec. (3.14) para un potencial central resulta en

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r). \quad (3.20)$$

El Lagrangiano en la Ec. (3.20) posee simetrías que simplifican la obtención de las ecuaciones de movimiento para las coordenadas r y θ .

La coordenada θ es cíclica, pues $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$. Entonces, la ecuación de Lagrange para θ da

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \quad (3.22)$$

La cantidad conservada es el momento conjugado a la coordenada angular θ , y corresponde a la magnitud del momento angular de la partícula de masa μ ,

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \quad (3.23)$$

Por otro lado, L en la Ec. (3.20) es independiente del tiempo y el potencial es independiente de las velocidades, por lo que la energía mecánica total se conserva,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = T + V = \text{cte.} \quad (3.24)$$

La energía E provee una sexta cantidad conservada,

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \text{cte.} \quad (3.25)$$

Entonces, en el problema de dos cuerpos existen seis grados de libertad y al menos seis cantidades conservadas; por lo tanto, se trata de un sistema integrable.

Las seis cantidades conservadas $I_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = C_k$ ($k = 1, \dots, 6$) que permiten integrar las seis coordenadas en el problema de dos cuerpos sujetos a un potencial central $V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = V(r)$ son:

- Las tres componentes del vector velocidad del centro de masa $\dot{\mathbf{R}}$. Se expresan como $I_1 = \dot{x}_{cm} = \text{cte}$, $I_2 = \dot{y}_{cm} = \text{cte}$, $I_3 = \dot{z}_{cm} = \text{cte}$. Esto reduce el problema al movimiento del vector de posición relativa \mathbf{r} (tres coordenadas).
- La dirección del momento angular \mathbf{l} . Esto reduce el movimiento a un plano (dos coordenadas). Se puede expresar como $I_4 = z = 0$.
- La magnitud del momento angular. Se expresa como $I_5 = \mu r^2 \dot{\theta} = l$.
- La energía total. Corresponde a $I_6 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$.

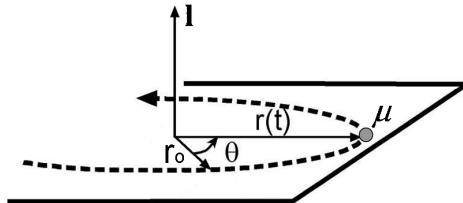


Figura 3.5: Coordenadas del movimiento de la masa reducida.

Las cantidades conservadas E y l , Ecs. (3.23) y (3.25), permiten reducir el problema de dos cuerpos a un problema unidimensional equivalente y la integración de las coordenadas r y θ . En efecto, podemos escribir

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + V(r) = \text{cte.} \quad (3.26)$$

La Ec. (3.26) corresponde a un problema de movimiento unidimensional en la coordenada r , el cual es integrable (Sec. 2.9). A partir de la Ec. (3.26) obtenemos

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}. \quad (3.27)$$

Usando como condición inicial en $t = 0$ los valores de coordenadas $r = r_0, \theta = \theta_0$, podemos obtener $t(r)$,

$$t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}, \quad (3.28)$$

y, mediante inversión, podemos obtener $r(t)$ en función de tres constantes de integración: r_0, E, l . Del mismo modo, la Ec. (3.23) permite la integración de θ ,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{l}{\mu r^2} dt \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dt}{dr}. \quad (3.31)$$

Sustituyendo la Ec. (3.27) en la Ec. (3.31), obtenemos

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{l}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}}. \quad (3.32)$$

Usando las condiciones iniciales en $t = 0, r = r_0, \theta = \theta_0$, podemos expresar

$$\theta = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}} + \theta_0, \quad (3.33)$$

lo cual da $\theta(r)$. Sustitución de $r(t)$, da $\theta(r(t)) = \theta(t)$, por lo que las coordenadas r y θ pueden determinarse en función del tiempo. En total hay cuatro constantes de integración, E, l, r_0, θ_0 , para las coordenadas r y θ . Las cuatro constantes aparecen porque tenemos una ecuación de Lagrange para r y otra para θ , ambas de segundo orden, y las cuales requieren dos constantes de integración cada una.

Cabe observar que las constantes E y l aparecen también el problema de un potencial central en Mecánica Cuántica.

Note que la integración explícita de θ en la Ec. (3.33) (y la de t en la Ec. (3.28)) en términos de funciones elementales depende de la forma funcional del potencial $V(r)$.

El cambio de variable

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{1}{r^2} dr, \quad (3.34)$$

generalmente resulta útil al considerar integrales de potenciales centrales en el problema de dos cuerpos. Mediante este cambio, la Ec. (3.33) se convierte en

$$\theta = \theta_0 - \int_{\frac{1}{u_0}}^{\frac{1}{u}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu V(u)}{l^2} - u^2}}. \quad (3.35)$$

Las formas funcionales físicamente más relevantes de potenciales centrales son $V(r) = kr^{n+1}$, donde $k = \text{cte}$. Las fuerzas correspondientes son de la forma

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \propto r^n. \quad (3.36)$$

Por ejemplo, el exponente $n = -1$ corresponde a $V = \text{cte}$ y $f(r) = 0$, es decir a una partícula libre. El valor $n = -2$ describe la fuerza gravitacional, mientras que $n = 1$ corresponde a un oscilador armónico esférico.

Sustitución de $V(u) = ku^{-(n+1)}$ en la Ec. (3.35) da la integral

$$\theta = \theta_0 - \int_{\frac{1}{u_0}}^{\frac{1}{u}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu k}{l^2} u^{-(n+1)} - u^2}}, \quad (3.37)$$

la cual es integrable en términos de funciones elementales para ciertos valores de n .

Si el integrando en la Ec. (3.37) tiene la forma $R(u, \sqrt{au^2 + bu + c})$,

$$\int \frac{du}{R(u, \sqrt{au^2 + bu + c})}, \quad (3.38)$$

la integral se puede expresar en términos de funciones circulares $\sin^{-1} u, \cos^{-1} u$. Para que esto ocurra, el exponente de $u^{-(n+1)}$ en el integrando de la Ec. (3.37) debe tener, cuando mucho, un valor igual a 2; es decir, puede tomar los valores $-(n+1) = 0, 1, 2$. Luego, los posibles valores de n para potenciales integrables en términos de funciones circulares son

$$n = -1, -2, -3. \quad (3.39)$$

Estos valores incluyen los casos $n = -1$ para el potencial $V = \text{cte}$, y $n = -2$ correspondiente al potencial gravitacional

$$V(r) = -\frac{k}{r}. \quad (3.40)$$

El caso $n = 1$, correspondiente al potencial de un oscilador armónico esférico $V(r) = kr^2$, tambien se puede integrar en la Ec. (3.37). Haciendo el cambio de variable

$$x = u^2 \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad (3.41)$$

la integral en la Ec. (3.37) resulta en

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} x - \frac{2\mu k}{l^2} - x^2}}, \quad (3.42)$$

la cual tiene un integrando de la forma Ec. (3.38) y, por tanto, es integrable en términos de funciones circulares.

3.2. Potencial efectivo

Hemos encontrado que el Lagrangiano del problema de dos cuerpos que interactúan mediante el potencial central $V(r)$ se reduce a

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \quad (3.43)$$

Vimos que la ecuación de Lagrange para la coordenada θ da

$$l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{cte.} \quad (3.44)$$

Por otro lado, la ecuación de Lagrange para la coordenada r ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (3.45)$$

resulta en

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \mu r\dot{\theta}^2. \quad (3.46)$$

Sustituyendo $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$, la ecuación Ec. (3.46) se convierte en una ecuación de movimiento unidimensional para r ,

$$\mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3}. \quad (3.47)$$

La fuerza radial $f(r)$ debida al potencial central $V(r)$ es

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (3.48)$$

Luego, tenemos

$$\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3}, \quad (3.49)$$

lo cual se puede expresar como

$$\mu\ddot{r} = f_{\text{ef}}(r), \quad (3.50)$$

donde

$$f_{\text{ef}}(r) \equiv f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} \quad (3.51)$$

se denomina *fuerza efectiva radial*. Esta fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y de la *fuerza centrífuga*

$$F_c \equiv \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2. \quad (3.52)$$

Esta fuerza centrífuga es una fuerza repulsiva ficticia que aparece en el sistema de referencia no inercial que estamos usando para describir el movimiento, cuyo origen ubicado en una de las partículas, se encuentra acelerado.

Las fuerzas centrífugas son típicas de movimientos en campos centrales con momento angular $l \neq 0$. Por ejemplo, en el movimiento circular uniforme de una partícula de masa m que gira con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$, velocidad tangencial $v = \omega r$, y posee momento angular $l = rmv = mr^2\omega$, aparece una fuerza centrífuga cuando se describe el movimiento desde la perspectiva de la partícula, dada por

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = \frac{l^2}{mr^3}. \quad (3.53)$$

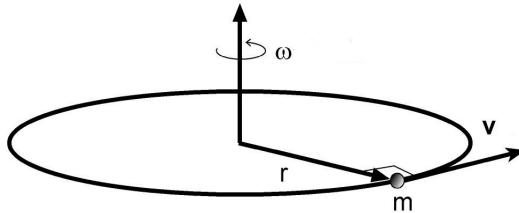


Figura 3.6: Movimiento circular uniforme.

A partir de la fuerza efectiva Ec. (3.51), se puede definir una *energía potencial efectiva*,

$$V_{\text{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad (3.54)$$

tal que

$$f_{\text{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}, \quad (3.55)$$

La energía total Ec. (3.25) puede entonces expresarse como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu r^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \\ &= \frac{1}{2}\mu r^2 + V_{\text{ef}}(r) = \text{cte}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

lo que resulta equivalente a la energía total de una partícula de masa μ , moviéndose en la dimensión r con energía potencial $V_{\text{ef}}(r)$.

El movimiento radial puede analizarse a partir de la Ec. (3.56). La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimiento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\text{ef}}(r)$. Los puntos de retorno del movimiento radial están dados por la condición $\dot{r} = 0$ en la Ec. (3.56); es decir,

$$E = V_{\text{ef}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (3.57)$$

$$\Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} = 0, \quad (3.58)$$

la cual constituye una ecuación algebraica de grado al menos cuadrático en r ; luego pueden existir al menos dos raíces reales, $r = r_{\min}$, $r = r_{\max}$. Si existe un rango de valores $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ para el cual $E \geq V_{\text{ef}}(r)$, entonces el movimiento está confinado a esa región anular en el plano (r, θ) .

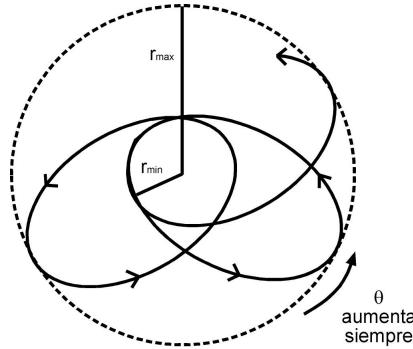


Figura 3.7: Movimiento radial y angular.

Note que,

$$\text{si } r_{\max} < \infty \Rightarrow \text{movimiento es finito, oscilatorio en } r, \quad (3.59)$$

$$\text{si } r_{\max} \rightarrow \infty \Rightarrow \text{movimiento sin retorno,} \quad (3.60)$$

$$\text{si } r_{\min} = r_{\max} \Rightarrow \text{movimiento es circular.} \quad (3.61)$$

Por otro lado, notamos que

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \geq 0, \quad (3.62)$$

lo cual significa que la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo; el ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y, como consecuencia, el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano del movimiento (r, θ) . En cambio, la distancia radial $r(t)$ puede aumentar o disminuir en el tiempo.

La Ec. (3.56) permite encontrar la condición para que una partícula caiga al centro de atracción de un potencial central; es decir, para que $r_{\min} = 0$. Esto significa que las dos partículas chocan. La Ec. (3.56) implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 &= E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} > 0 \\ \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} &> 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Tomando el límite $r \rightarrow 0$, obtenemos la condición para caer al centro,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [V(r)r^2] < -\frac{l^2}{2\mu}. \quad (3.64)$$

Consideremos un potencial atractivo de la forma $V(r) = -k/r^n$. La condición Ec. (3.64) con $l \neq 0$ implica $n > 2$. El potencial $V(r) = -k/r^3$ ($n = 3$) permite caer al centro, $r_{\min} = 0$. Por otro lado, el potencial gravitacional $V(r) = -k/r$ ($n = 1$) no permite alcanzar $r_{\min} = 0$. El caso $n = 2$, correspondiente a $V(r) = -k/r^2$, requiere $k > \frac{l^2}{2\mu}$ para caer al centro de atracción.

Ejemplos.

- Dibujar esquemáticamente el potencial efectivo resultante del potencial $V = -\frac{k}{r}$ y analizar los tipos de movimiento posibles para diferentes valores de la energía.

La fuerza correspondiente a este potencial es

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{k}{r^2}. \quad (3.65)$$

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (3.66)$$

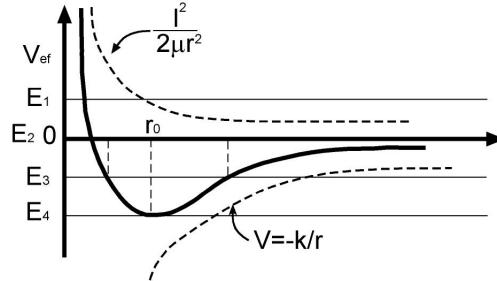


Figura 3.8: Potencial efectivo para $V(r) = -\frac{k}{r}$.

El valor mínimo del potencial efectivo ocurre para un radio $r = r_0$ dado por

$$\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (3.67)$$

Posibles movimientos para diferentes valores de la energía E :

- $E = E_1 > 0 \Rightarrow r_{\min} > 0$ y $r_{\max} \rightarrow \infty$; órbita abierta.
- $E = E_2 = 0 \Rightarrow r_{\min} > 0$ y $r_{\max} \rightarrow \infty$; órbita abierta.
- $E = E_3 < 0 \Rightarrow r \in [r_{\min}, r_{\max}]$; movimiento radial oscilatorio.
- $E = E_4 = V_{\text{ef}}(r_{\min}) < 0 \Rightarrow r_{\min} = r_{\max} = r_0$; órbita circular con $r = r_0$.

2. Potencial efectivo para el potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$, correspondiente a un oscilador armónico tridimensional.

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (3.68)$$

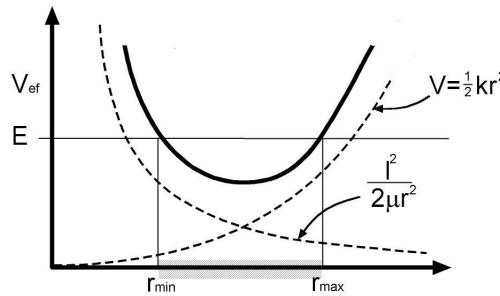


Figura 3.9: Potencial efectivo para $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. El movimiento radial ocurre en la región $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$

La condición $E \geq V_{\text{ef}}(r)$ implica que existen puntos de retorno $r_{\min}, r_{\max} \neq 0$; es decir, el movimiento radial es oscilatorio.

La magnitud de la fuerza radial es $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -kr$. Las componentes de la fuerza radial $\mathbf{f} = -kr\hat{\mathbf{r}}$ son

$$f_x = -kx, \quad f_y = -ky. \quad (3.69)$$

El movimiento radial es el resultado de dos oscilaciones simples, perpendiculares entre sí, con igual frecuencia $\omega_x^2 = \omega_y^2 = k/\mu$.

3. Caracterizar los movimientos posibles en el potencial efectivo correspondiente al potencial $V = -\frac{k}{r^3}$.

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{r^3} + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (3.70)$$

El potencial efectivo exhibe un máximo $V_{\text{ef}}(\max)$ que representa una barrera de potencial si $E < V_{\text{ef}}(\max)$. Los posibles movimientos son

- a) $E = E_1 > V_{\text{ef}}(\max)$; movimiento existe $\forall r$.
- b) $E = E_2 < V_{\text{ef}}(\max)$; hay dos puntos de retorno r_1 y r_2 que satisfacen $E = V_{\text{ef}}$. El movimiento ocurre para $r \in [0, r_1]$ y para $r \geq r_2$. En Mecánica Clásica, el movimiento es imposible para $r \in [r_1, r_2]$.
- c) $E < 0$; movimiento ocurre para $r \in [0, r_1]$.

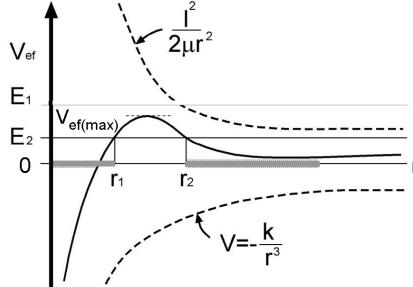


Figura 3.10: Potencial efectivo para $V = -\frac{k}{r^3}$. Movimiento radial para $E = E_2 < V_{\text{ef}}(\text{max})$ ocurre en las regiones $r \leq r_1$ y $r \geq r_2$.

3.3. Ecuación diferencial de la órbita

En la Sec. 3.1 vimos que, dado $V(r)$ y cuatro constantes (E, l, r_0, θ_0) , se pueden determinar $t(r)$ (y por tanto $r(t)$) y $\theta(r)$, mediante integración y que, en particular, existen formas de potenciales $V(r)$ integrables explícitamente en términos de funciones circulares.

Consideremos ahora el problema inverso; es decir, dada una órbita $r(\theta)$ determinar el potencial $V(r)$ (y la fuerza $f(r)$) que produce ésta órbita. Esto es posible mediante la obtención de la *ecuación diferencial de la órbita*.

Consideremos la ecuación de movimiento Ec (3.49) para $r(t)$,

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (3.71)$$

La Ec. (3.71) se puede transformar en una ecuación diferencial para $r(\theta)$. Las derivadas temporales de $r(t)$ se pueden expresar como

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta}, \quad (3.72)$$

donde hemos usado $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$.

En general, para una función $g(\theta)$,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{dg}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dg}{d\theta} \quad (3.73)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (3.74)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \\ &= \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Sustitución en la Ec. (3.71) da

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (3.76)$$

Usando el cambio de variables $u = 1/r$, tenemos

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -u^2 \frac{dr}{d\theta}, \quad (3.77)$$

y expresando el lado derecho de la Ec. (3.76) en términos de u ,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial u} = -u^2 \frac{\partial V}{\partial u}, \quad (3.78)$$

la Ec. (3.76) se puede escribir como

$$\frac{l^2}{\mu} u^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) + \frac{l^2}{\mu} u^3 = -u^2 \frac{\partial V}{\partial u}; \quad (3.79)$$

es decir,

$$\frac{l^2}{\mu} \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] = -\frac{\partial V}{\partial u}. \quad (3.80)$$

La Ec. (3.80) constituye la *ecuación diferencial de la órbita* para $r(\theta) = 1/u(\theta)$ en términos del potencial $V(r) = V(1/u)$.

Esta ecuación de la órbita se puede usar para encontrar el potencial (o la fuerza) central que da lugar a una órbita dada, o para determinar la órbita resultante de un potencial (o fuerza) dado.

Ejemplo.

1. Encontrar el potencial $V(r)$ que produce la órbita espiral $r(\theta) = r_o e^{-a\theta}$, con r_o , a constantes.

Tenemos

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_o} e^{a\theta}. \quad (3.81)$$

Luego,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{a^2}{r_o} e^{a\theta} = a^2 u. \quad (3.82)$$

Sustituyendo en la Ec. (3.80) para la órbita, se obtiene

$$\frac{l^2}{\mu} (a^2 + 1) u = -\frac{\partial V}{\partial u}. \quad (3.83)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V(u) &= -\frac{l^2}{2\mu}(a^2 + 1)u^2 \\ \Rightarrow V(r) &= -\frac{k}{r^2}, \quad \text{con } k = \frac{l^2}{2\mu}(a^2 + 1) = \text{cte.} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Note que $k > l^2/2\mu$, por lo que, según la condición Ec. (3.64), una partícula sujeta a este potencial cae al centro de atracción, $r = 0$, describiendo la órbita espiral dada.

3.4. Fuerza gravitacional y problema de Kepler

La fuerza gravitacional entre dos partículas con masas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r es una fuerza central atractiva dada por

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (3.85)$$

donde $G = 6,674 \times 10^{-11} N(m/Kg)^2$ es la constante universal gravitacional. La forma de la fuerza gravitacional (*ley de gravitación*) fue descubierta por Isaac Newton y la constante G fue determinada experimentalmente por Henry Cavendish (1731-1810).

La energía potencial gravitacional correspondiente es

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (3.86)$$

La fuerza gravitacional que una partícula de masa m_1 ejerce sobre otra partícula de masa m_2 , que se encuentra en una posición \mathbf{r} desde la primera partícula, es

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.87)$$

Se define la *intensidad del campo gravitacional* creado por m_1 en la posición \mathbf{r} de la partícula m_2 como la cantidad vectorial

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_2} = -\frac{Gm_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.88)$$

El campo $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ corresponde a la fuerza gravitacional por unidad de masa producida por m_1 en la posición \mathbf{r} . Puesto que $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r)$, donde $V(r)$ es la energía potencial de interacción gravitacional entre m_1 y m_2 , el campo $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ se puede expresar como

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad (3.89)$$

donde definimos el *potencial gravitacional* $\varphi(\mathbf{r})$ producido por m_1 como la cantidad escalar

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \frac{V(r)}{m_2} = -\frac{Gm_1}{r}. \quad (3.90)$$

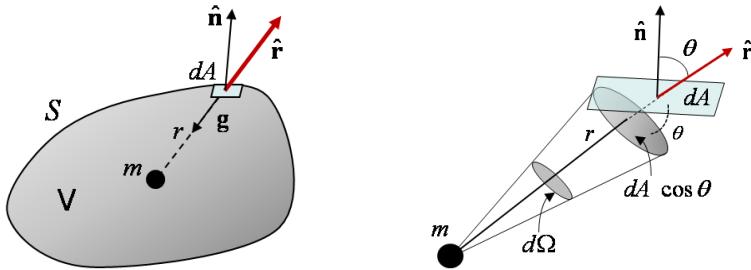


Figura 3.11: Izquierda: Flujo del campo gravitacional de una partícula a través de una superficie S . Derecha: Elemento de área contenido en un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ a una distancia r .

Consideremos una partícula de masa m dentro de una superficie arbitraria y cerrada S que contiene un volumen V . Se define el flujo del campo gravitacional a través de la superficie S como la integral cerrada de área

$$\Phi = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.91)$$

donde \mathbf{g} se evalúa sobre S y $d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}$ es un elemento de área de S cuyo vector normal unitario es $\hat{\mathbf{n}}$. Entonces,

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -Gm \oint_S \frac{1}{r^2} dA \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.92)$$

El elemento diferencial de ángulo sólido $d\Omega$ con origen en m encierra un área $dA \cos \theta$ a la distancia r . Luego, por definición,

$$d\Omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2} = \frac{dA \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (3.93)$$

Entonces,

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -Gm \oint_S d\Omega = -4\pi Gm; \quad (3.94)$$

es decir, el flujo del campo gravitacional a través de S es proporcional a la masa de la partícula encerrada por S , independientemente de la ubicación de la partícula dentro de la superficie S .

Por extensión, para un conjunto de partículas con masas m_i , $i = 1, \dots, N$, encerradas por la superficie S , se obtiene

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G \sum_{i=1}^N m_i = -4\pi G M_{\text{enc}}, \quad (3.95)$$

donde M_{enc} es la masa total encerrada por S . La Ec. (3.95) es la *ley de Gauss* para la gravitación en su formal integral.

Usando el teorema de la divergencia para el campo \mathbf{g} , tenemos

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV, \quad (3.96)$$

donde dV es un elemento del volumen V encerrado por S . Si llamamos $\rho(\mathbf{r})$ a la función que describe la densidad de masa contenida en el volumen V , tenemos

$$M_{\text{enc}} = \int_V \rho \, dV. \quad (3.97)$$

Entonces, la ley de Gauss, Ec. (3.95), puede expresarse como

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV = -4\pi G \int_V \rho \, dV. \quad (3.98)$$

Puesto que el volumen V es arbitrario, debemos tener

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho. \quad (3.99)$$

La Ec. (3.99) es la ley de Gauss para la gravitación en su forma diferencial. Ambas formas de la ley de Gauss son consecuencia de la dependencia con la distancia $1/r^2$ de la fuerza gravitacional. Usando $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$, podemos escribir la Ec. (3.99) como

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho, \quad (3.100)$$

que constituye una ecuación de Poisson para el potencial gravitacional φ . La Ec. (6.71) es una manera alternativa de expresar la ley de gravitación de Newton.



Figura 3.12: Monumento a Tycho Brahe (1546-1601) y Johannes Kepler (1571-1630) en Praga.

El *problema de Kepler* se refiere al cálculo de la órbita de una partícula en un campo central correspondiente a la fuerza gravitacional $f(r) = -\frac{k}{r}$, con $k = Gm_1m_2$.

La órbita $r(\theta)$ correspondiente al potencial gravitacional $V(r) = -\frac{k}{r}$ puede ser determinada a partir de la ecuación diferencial de la órbita, Ec. (3.80), con $u = 1/r$,

$$\frac{l^2}{\mu} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{\partial V}{\partial u}, \quad (3.101)$$

El potencial gravitacional puede expresarse como $V = -ku$. Sustituyendo, obtenemos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = k \frac{\mu}{l^2}, \quad (3.102)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria inhomogénea de segundo orden. Su solución es

$$u(\theta) = u_h + u_p, \quad (3.103)$$

donde u_p es una solución particular y u_h es la solución de la ecuación homogénea

$$u''_h + u_h = 0. \quad (3.104)$$

La solución de la ecuación homogénea se puede expresar como

$$u_h = A \cos(\theta - \theta_0), \quad A, \theta_0 \text{ ctes}, \quad (3.105)$$

mientras que una solución particular de la Ec. (3.102) es

$$u_p = k \frac{\mu}{l^2}. \quad (3.106)$$

Luego, la solución general de la Ec. (3.102) es

$$u(\theta) = \frac{k\mu}{l^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (3.107)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{l^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (3.108)$$

que corresponde la ecuación de una sección cónica en coordenadas polares, cuya forma general está dada por

$$\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta, \quad (3.109)$$

con $\theta_0 = 0$, donde q y e son constantes. La constante e se denomina *excentricidad* y la constante q es el *latus* de la cónica.

La órbita también puede obtenerse por integración explícita mediante la Ec. (3.35),

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu V(u)}{l^2} - u^2}}, \quad (3.110)$$

la cual, con $V(u) = -ku$, queda

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k}{l^2} u - u^2}}. \quad (3.111)$$

La integral es del tipo

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cos^{-1} \left[-\frac{(b + 2au)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right], \quad (3.112)$$

donde

$$a = -1, \quad b = \frac{2\mu k}{l^2}, \quad c = \frac{2\mu E}{l^2},$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= \left(\frac{2\mu k}{l^2} \right)^2 \left(1 + \frac{2E^2}{\mu k^2} \right) \\ b + 2au &= \left(\frac{2\mu k}{l^2} \right) \left(1 - \frac{l^2}{\mu k} u \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$\theta = \theta_0 - \cos^{-1} \left(\frac{\frac{l^2}{\mu k} u - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \right) \quad (3.113)$$

$$\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\theta_0 - \theta) = \frac{l^2}{\mu k} u - 1. \quad (3.114)$$

Escogiendo la condición inicial $\theta_0 = 0$ para $t = 0$ y despejando $u = 1/r$,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos \theta \right) \quad (3.115)$$

obtenemos que la órbita $r(\theta)$ tiene la forma general de la ecuación de una sección cónica en coordenadas polares cuyo origen se encuentra en uno de los focos, Ec. (3.109).

Comparando con la Ec. (3.109), identificamos la excentricidad de la órbita,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}, \quad (3.116)$$

y el latus de la cónica,

$$q = \frac{l^2}{\mu k}. \quad (3.117)$$

El latus corresponde al valor $q = r(\frac{\pi}{2})$.

La distancia mínima al foco ubicado en r_{\min} se denomina *perihelio* (si se trata de órbita alrededor del Sol) o *perigeo* (si es una órbita alrededor de la Tierra), y corresponde al ángulo $\theta = 0$,

$$r(0) = \frac{q}{1 + e} = r_{\min}. \quad (3.118)$$

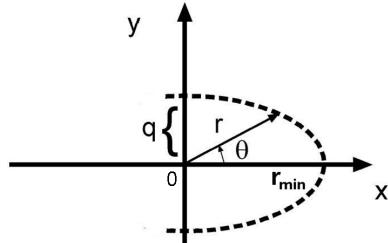


Figura 3.13: Latus q y perihelio r_{\min} de la órbita en el problema de Kepler.

Sustituyendo q y e , obtenemos

$$r_{\min} = \frac{\left(\frac{l^2}{\mu k}\right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}. \quad (3.119)$$

El movimiento de la masa reducida μ en el potencial $V = -k/r$ sigue la trayectoria de una cónica dada por la Ec. (3.115). El tipo de cónica (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola) que describe la partícula de masa μ en el potencial $V(r) = -k/r$ depende del valor de la excentricidad e y, por tanto, de la energía total E , segun la Ec. (6.151).

La órbita de cada una de las partículas m_1 y m_2 , separadas por una distancia r , es una sección cónica con un foco en el centro de masa del sistema.

El movimiento radial en el problema de Kepler ocurre en el potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (3.120)$$

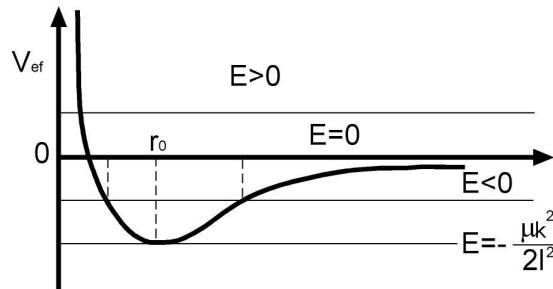


Figura 3.14: Potencial efectivo para el problema de Kepler.

Las órbitas posibles descritas por la Ec. (3.115), y cuyo movimiento radial es compatible con este potencial efectivo [Fig. (3.14)], son las siguientes:

1. Órbita circular.

La ecuación de la cónica Ec. (3.109) con $e = 0$ describe una partícula con energía

$$E = -\frac{\mu k^2}{2l^2}, \quad (3.121)$$

moviéndose en una órbita circular de radio

$$r_o = q = \frac{l^2}{\mu k} = \frac{k}{2|E|}. \quad (3.122)$$

El radio r_o corresponde al valor mínimo de la V_{ef} ,

$$\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_o} = 0. \quad (3.123)$$

La energía de la órbita circular es igual al mínimo de la V_{ef} ,

$$E = V_{\text{ef}}(r_o) = -\frac{k}{r_o} + \frac{l^2}{2\mu r_o^2}. \quad (3.124)$$

La velocidad angular del movimiento circular con radio r_o es

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_o^2} = \sqrt{\frac{k}{\mu r_o^3}}. \quad (3.125)$$

2. Órbita elíptica.

La ecuación de la cónica Ec. (3.109)

$$\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta, \quad (3.126)$$

para $e < 1$ ($E < 0$) corresponde a una elipse en coordenadas polares con centro en uno de los focos.

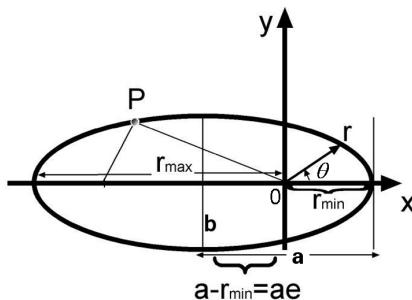


Figura 3.15: Parámetros de la órbita elíptica.

Los puntos de retorno del movimiento radial con $E < 0$ están dados por

$$\theta = 0 \Rightarrow r = r_{\min} = \frac{q}{1+e}, \quad (3.127)$$

$$\theta = \pi \Rightarrow r = r_{\max} = \frac{q}{1-e}. \quad (3.128)$$

El movimiento radial es finito y oscilatorio, con $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. Estos valores de r_{\min} y r_{\max} también corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\text{ef}}$,

$$E = V_{\text{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \Rightarrow Er^2 + kr - \frac{l^2}{2\mu} = 0, \quad (3.129)$$

de donde obtenemos

$$r_{\min} = -\frac{k}{2E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right), \quad (3.130)$$

$$r_{\max} = -\frac{k}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right). \quad (3.131)$$

Se pueden escribir como

$$r_{\min} = \frac{k}{2|E|} (1 - e), \quad (3.132)$$

$$r_{\max} = \frac{k}{2|E|} (1 + e). \quad (3.133)$$

La distancia r_{\min} se llama *perihelio* y la cantidad r_{\max} se denomina *afelio*, para órbitas elípticas alrededor del Sol (para órbitas alrededor de la Tierra estas cantidades se llaman *perigeo* y *apogeo*, respectivamente).

El semieje mayor de la elipse a satisface la relación (Fig. (3.15))

$$r_{\min} + r_{\max} = 2a; \quad (3.134)$$

luego,

$$a = \frac{k}{2|E|}, \quad \text{o} \quad a = \frac{q}{1-e^2}. \quad (3.135)$$

Se puede expresar también

$$r_{\min} = a(1 - e), \quad (3.136)$$

$$r_{\max} = a(1 + e). \quad (3.137)$$

La distancia entre el centro geométrico de la elipse y cualquier foco es

$$a - r_{\min} = ae. \quad (3.138)$$

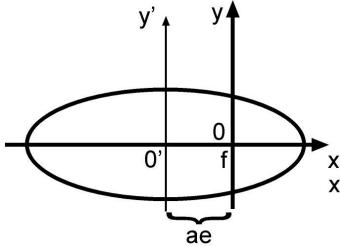


Figura 3.16: Coordenadas cartesianas (x', y') con origen O' en el centro geométrico de la elipse.

La ecuación de la elipse, Ec. (3.126), también puede expresarse en coordenadas cartesianas (x, y) con origen O en el foco.

En coordenadas cartesianas (x', y') con origen O' en el centro geométrico de la elipse, la ecuación Ec. (3.126) corresponde a

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (3.139)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente.

Mediante la transformación

$$x' = x + ae, \quad y' = y, \quad (3.140)$$

la ecuación de la elipse Ec. (3.109) puede escribirse en coordenadas cartesianas con centro en el foco de atracción,

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.141)$$

El semieje menor b puede obtenerse evaluando el punto $(x = 0, y = q)$ en la Ec. (3.141),

$$b = \frac{q}{\sqrt{1 - e^2}} = a \sqrt{1 - e^2}. \quad (3.142)$$

3. Órbita parabólica.

La ecuación de la cónica Ec. (3.109) con $e = 1$ describe una parábola

$$\frac{q}{r} = 1 + \cos \theta. \quad (3.143)$$

La energía correspondiente de la partícula es $E = 0$. La distancia r_{\min} corresponde a

$$\theta = 0 \Rightarrow r_{\min} = \frac{q}{2} = \frac{l^2}{2\mu k}, \quad (3.144)$$

mientras que

$$\theta = \pi \Rightarrow r_{\max} \rightarrow \infty. \quad (3.145)$$

La condición $E = 0$ en la Ec. (3.25) implica que la velocidad radial \dot{r} de la partícula en $r_{\max} = \infty$ es cero.

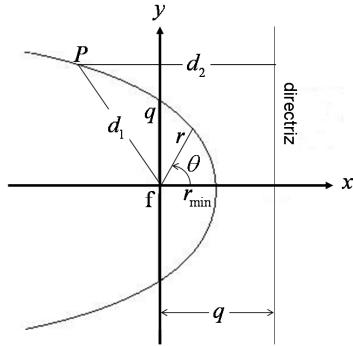


Figura 3.17: Órbita parabólica. Un punto P de la parábola satisface $d_1 = d_2$.

Geométricamente, una parábola es el conjunto de puntos P tales que $d_1 = d_2$, donde d_1 es la distancia al foco de atracción f y d_2 es la distancia perpendicular a la recta denominada directriz, Fig.(3.17). El punto correspondiente a ($\theta = \pi/2, r = q$) indica que la distancia perpendicular entre el eje y y la recta directriz es igual a q .

4. Órbita hiperbólica.

Corresponde a la Ec. (3.109) de una cónica con $e > 1$, ($E > 0$). La órbita es abierta, $r_{\max} = \infty$, y el perihelio corresponde a

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = \frac{q}{1 + e}. \quad (3.146)$$

Órbitas hiperbólicas aparecen en problemas de dispersión en campos de fuerzas centrales y serán estudiadas en la Sec. 3.7.

La Fig. (3.18) muestra las cuatro órbitas posibles en el problema de Kepler.

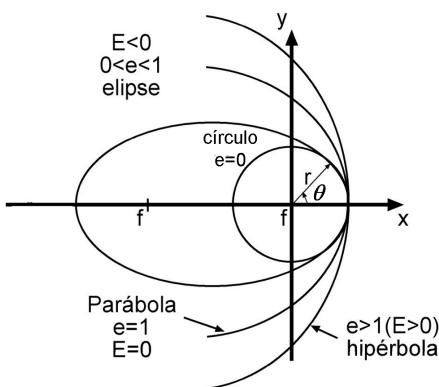


Figura 3.18: Tipos de órbitas en el potencial de Kepler $V(r) = -k/r$, correspondientes a un mismo valor de $r_{\min} = r_o = l^2/\mu k$.

3.5. Leyes de Kepler y dependencia temporal

La *Primera Ley de Kepler* establece que los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol. En efecto, hemos visto que una partícula (planeta) sujeta al potencial gravitacional $V(r) = -k/r$, con $E < 0$, describe una órbita elíptica.

Por otro lado, vimos en la Sec. 3.1 que un potencial central $V(r)$ implica la conservación del momento angular

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \quad (3.147)$$

La constancia de la cantidad l puede interpretarse geométricamente.

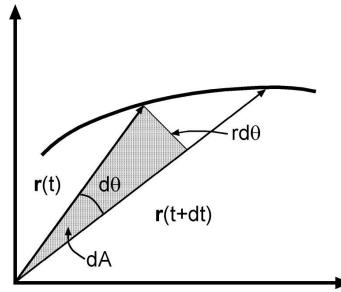


Figura 3.19: Izquierda: Área barrida por el radio vector $\mathbf{r}(t)$ en un intervalo de tiempo dt .

El diferencial de área barrida por el radio vector \mathbf{r} en un tiempo infinitesimal dt es

$$dA = \frac{1}{2}(rd\theta)r = \frac{1}{2}r^2d\theta. \quad (3.148)$$

El área barrida por unidad de tiempo es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}. \quad (3.149)$$

Usando la Ec. (3.147),

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}r^2 \left(\frac{l}{\mu r^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{dA}{dt} &= \frac{l}{2\mu} = \text{cte.} \end{aligned} \quad (3.150)$$

La Ec. (3.150) constituye la *Segunda Ley de Kepler*: la velocidad areal es constante bajo fuerzas centrales, i.e., el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

En órbitas elípticas, la Segunda Ley de Kepler implica que la velocidad angular aumenta cerca del centro (foco) de atracción y disminuye lejos de éste. En particular,

$$r_{\min}^2 \dot{\theta}_{\max} = r_{\max}^2 \dot{\theta}_{\min}, \quad (3.151)$$

donde θ_{\max} y θ_{\min} son los valores máximo y mínimo de la velocidad angular, respectivamente.

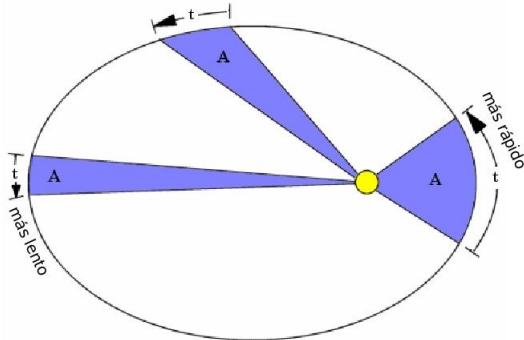


Figura 3.20: Segunda Ley de Kepler para una órbita elíptica.

Si la órbita es finita, $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, el área A encerrada por la órbita es finita y resulta barrida por el radio \mathbf{r} en un tiempo igual al período del movimiento T_p ,

$$A = \frac{l}{2\mu} \int_0^{T_p} dt = \frac{l}{2\mu} T_p. \quad (3.152)$$

En particular, si la órbita es una elipse en el potencial $V(r) = -k/r$, el área encerrada es $A = \pi ab$, donde a es el semieje mayor, y b es el semieje menor de la elipse. Vimos que $b = a\sqrt{1 - e^2}$ y $q = a(1 - e^2)$; luego

$$\begin{aligned} A &= \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \pi a^{3/2} q^{1/2} \\ &= \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{l^2}{\mu k}}, \end{aligned} \quad (3.153)$$

donde hemos usado $q = \frac{l^2}{\mu k}$. Igualando la Ec. (3.152) con la Ec. (3.153), y despejando T_p , tenemos

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}. \quad (3.154)$$

La Ec (3.154) constituye la *Tercera Ley de Kepler* en su forma exacta.

En el sistema solar, supongamos que M es la masa del Sol, situado en el foco, y m es la masa del planeta que describe una órbita elíptica. Entonces, podemos asumir $m/M \ll 1$. La masa reducida correspondiente al sistema Sol-planeta es

$$\mu = \frac{Mm}{M + m} = \frac{Mm}{M} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1} \approx m. \quad (3.155)$$

Entonces, usando $k = GMm$, la Ec (3.154) puede escribirse en forma aproximada como

$$T_p^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (3.156)$$

$$\Rightarrow T_p^2 \propto a^3, \quad (3.157)$$

donde la constante de proporcionalidad es la misma para todos los planetas del sistema solar. La Ec. (3.157) es la forma de la Tercera Ley formulada originalmente por Kepler.

La Tercera Ley de Kepler se ha empleado en el descubrimiento de nuevos planetas fuera del sistema solar, denominados *exoplanetas*. El período orbital se puede determinar a partir de la observación del período del corrimiento Doppler en el espectro de la estrella, la cual gira alrededor del centro de masa del sistema exoplaneta-estrella. La masa de la estrella puede conocerse en muchos casos mediante técnicas espectrales. Entonces la Tercera Ley de Kepler permite calcular la distancia a de la órbita del exoplaneta.

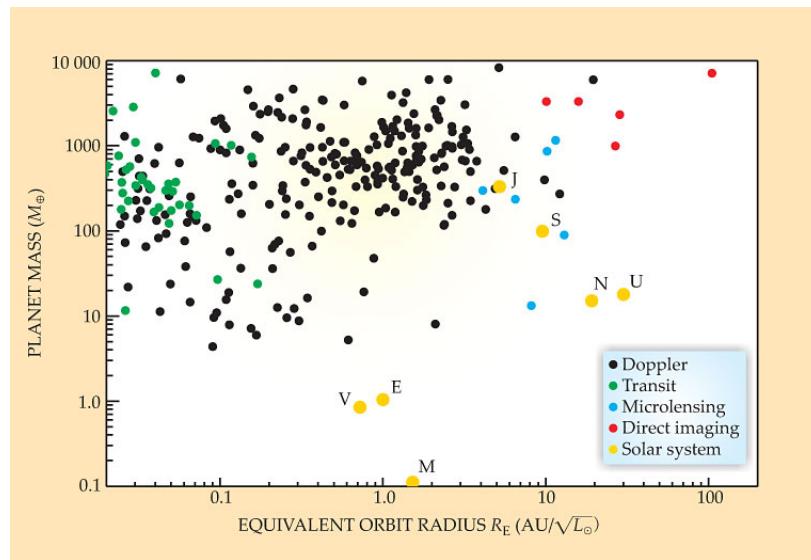


Figura 3.21: Diagrama de masa versus distancia de exoplanetas y planetas del sistema solar, identificados por sus iniciales. (Physics Today, p. 46, mayo 2009).

En resumen, tenemos las tres *Leyes de Kepler*:

1. *Primera Ley*: los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, el cual se encuentra en uno de los focos de la elipse.
(Consecuencia de la forma $V(r) = -\frac{k}{r}$).
2. *Segunda Ley*: el área barrida por unidad tiempo por el radio vector que va desde el Sol al planeta es constante: $\dot{A} = \text{cte}$.
(Consecuencia del potencial central $V(r)$ y, por tanto, de la conservación de l).
3. *Tercera Ley*: el cuadrado del período del movimiento es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita, para todos los planetas: $T_p^2 \propto a^3$.
(Consecuencia de $l = \text{cte}$ y de la forma $V(r) = -\frac{k}{r}$).

Ecuación de Kepler.

La dependencia temporal de la coordenada radial $r(t)$ en una órbita elíptica puede obtenerse por integración de la Ec. (3.28) para el potencial $V = -k/r$,

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r}}}, \quad (3.158)$$

donde

$$E = -\frac{k}{2a} < 0. \quad (3.159)$$

Expresemos l en términos de los parámetros de la elipse a y e ,

$$e^2 = 1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} = 1 - \frac{l^2}{a\mu k} \quad (3.160)$$

$$\Rightarrow l^2 = (1 - e^2)a\mu k. \quad (3.161)$$

Sustituyendo en la integral Ec. (3.158), tenemos

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{-\frac{k}{2a} - \frac{(1-e^2)ak}{2r^2} + \frac{k}{r}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{k}{2a} \sqrt{-r^2 - (1-e^2)a^2 + 2ra}}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a}{k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{e^2 a^2 - (r-a)^2}}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Haciendo el cambio de variables

$$r = a(1 - e \cos \psi), \quad (3.163)$$

$$dr = ae \sin \psi d\psi, \quad (3.164)$$

la integral Ec. (3.162) queda

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{\mu a}{k}} \int \frac{a(1 - e \cos \psi) ae \sin \psi d\psi}{ea \sqrt{1 - \cos^2 \psi}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \int (1 - e \cos \psi) d\psi \\ &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} (\psi - e \sin \psi) + \text{cte}. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Escogemos la condición inicial $r(0) = r_{\min} = a(1 - e)$ en $t = 0$; lo que implica $\psi = 0$ para $t = 0$; luego la constante es igual a cero en la Ec. (3.165).

Usando la Tercera Ley de Kepler,

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}, \quad (3.166)$$

definimos la frecuencia angular del movimiento

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T_p} = \sqrt{\frac{k}{\mu a^3}}. \quad (3.167)$$

Luego, la dependencia temporal del radio en una órbita elíptica en el problema de Kepler puede expresarse mediante las relaciones paramétricas

$$\omega t = \psi - e \sin \psi, \quad (3.168)$$

$$r = a(1 - e \cos \psi), \quad (3.169)$$

que se conocen como *ecuaciones de Kepler*. Estas ecuaciones permiten encontrar la distancia radial $r(t)$ en función del tiempo, a través del parámetro ψ , dados los parámetros geométricos de la elipse a y e . Consecuentemente, puede encontrarse el ángulo $\theta(t)$ mediante la ecuación

$$\frac{q}{r(t)} = 1 + e \cos \theta(t). \quad (3.170)$$

El parámetro ψ en la ecuación de Kepler se denomina *anomalía excéntrica* de la elipse y puede interpretarse geométricamente. Consideremos la Fig. (3.22).

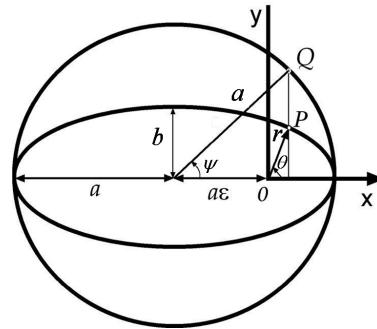


Figura 3.22: Definición de la anomalía excéntrica ψ .

donde,

P es un punto sobre la elipse con semiejes a y b , y excentricidad e .

Q es un punto sobre la circunferencia de radio a que circunscribe la elipse.

ψ es el ángulo denominado anomalía excéntrica.

θ se denomina anomalía verdadera.

a es el semieje mayor.

b es el semieje menor.

$r_{\min} = a(1 - e)$ es el perihelio.

$r_{\max} = a(1 + e)$ es el afelio.

$q = a(1 - e^2)$ es el latus.

El punto $P(x, y)$ satisface la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas, Ec. (3.141),

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.171)$$

De la Fig. (3.22) tenemos,

$$\cos \psi = \frac{x + ae}{a}, \quad (3.172)$$

y sustituyendo en la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas, podemos obtener

$$\frac{y}{b} = \sin \psi. \quad (3.173)$$

En términos de a y e ,

$$x = a(\cos \psi - e), \quad (3.174)$$

$$y = b \sin \psi = a \sqrt{1 - e^2} \sin \psi, \quad (3.175)$$

(usando $b = a\sqrt{1 - e^2}$). La coordenada radial r del punto P puede expresarse

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 &= a^2(\cos \psi - e)^2 + a^2(1 - e^2) \sin^2 \psi \\ &= a^2(1 - e \cos \psi)^2. \end{aligned} \quad (3.176)$$

Luego,

$$r = a(1 - e \cos \psi), \quad (3.177)$$

que es el cambio de variable usado en la Ec. (3.163) para la integración de t . La Ec. (3.177) corresponde a la ecuación de la órbita elíptica en términos de la anomalía excéntrica.

La relación entre los ángulos θ y ψ puede determinarse comparando la Ec. (3.177) con la ecuación de la elipse en coordenadas polares,

$$\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta. \quad (3.178)$$

Empleando la relación $q = a(1 - e^2)$, obtenemos

$$1 - e \cos \psi = \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (3.179)$$

$$\Rightarrow \cos \psi = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.180)$$

Ejemplos.

- Área encerrada por una órbita elíptica con parámetros q y e .

El elemento diferencial de área en coordenadas polares es

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (3.181)$$

La órbita elíptica con $e < 1$ está dada por

$$r(\theta) = \frac{q}{1 + e \cos \theta}. \quad (3.182)$$

El área encerrada por la elipse corresponde a la integración

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} q^2 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}. \quad (3.183)$$

La integral puede encontrarse en tablas matemáticas en la forma

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} &= \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left[\frac{(1 - e) \tan(\theta/2)}{(1 - e^2)^{1/2}} \right] \\ &- \frac{e \sin \theta}{(1 - e^2)(1 + e \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

El segundo término en la expresión Ec. (3.184) se anula al ser evaluado en los límites $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, mientras que el primer término contribuye en

$$\tan^{-1} \left[\frac{(1 - e) \tan(\theta/2)}{(1 - e^2)^{1/2}} \right] \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \quad (3.185)$$

Luego,

$$\begin{aligned} A &= q^2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\pi q^2}{(1 - e^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Usando las relaciones $q = a(1 - e^2)$ y $b = a(1 - e^2)^{1/2}$, el área de la elipse también puede expresarse como

$$A = \pi q^{1/2} a^{3/2} \quad (3.187)$$

$$= \pi ab. \quad (3.188)$$

2. Similitud mecánica y período orbital para potenciales centrales $V(r) = -kr^{-n}$.

Una *similitud mecánica* es una transformación de las escalas de longitud y de tiempo que deja invariante la forma de la ecuación de movimiento de una partícula.

Consideremos la ecuación de movimiento de una partícula de masa m en el potencial $V(r) = -kr^{-n}$,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(r) = -k n r^{-(n+1)} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.189)$$

Sea $a = (r_{\min} + r_{\max})/2$ la longitud que caracteriza el tamaño de una órbita finita; por ejemplo el semieje mayor en una órbita elíptica, y sea T el tiempo requerido para recorrer esa distancia; por ejemplo, el período de una órbita elíptica sería $2T$.

Consideremos la transformación

$$\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r}, \quad t' = \tau t, \quad (3.190)$$

donde λ y τ son constantes. Entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\tau}{\lambda} \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}, \quad (3.191)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{\tau}{\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \right) = \frac{\tau^2}{\lambda} \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2}. \quad (3.192)$$

La ecuación de movimiento en las nuevas variables \mathbf{r}' y t' se transforma como

$$\left(\frac{\tau^2}{\lambda} \right) m\ddot{\mathbf{r}'} = -\lambda^{(n+1)} \frac{kn}{r'^{(n+1)}} \hat{\mathbf{r}}'. \quad (3.193)$$

La transformación es una similitud mecánica; i. e., la ecuación de movimiento preserva su forma, si

$$\tau = \lambda^{(n+2)/2}. \quad (3.194)$$

La longitud característica a y el tiempo característico T se transforman como

$$a' = \lambda a, \quad T' = \tau T. \quad (3.195)$$

Luego,

$$\frac{T'}{a'} = \frac{\tau}{\lambda} \left(\frac{T}{a} \right) = \lambda^{n/2} \left(\frac{T}{a} \right) = \left(\frac{a}{a'} \right)^{n/2} \left(\frac{T}{a} \right) \quad (3.196)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{a} \right)^{(n+2)/2} = \left(\frac{T'}{a'} \right)^{(n+2)/2}. \quad (3.197)$$

Entonces, podemos escribir

$$T \propto a^{(n+2)/2}. \quad (3.198)$$

Para $n = 1$ tenemos el potencial gravitacional y la Ec. (3.198) reproduce la Tercera Ley de Kepler, $T \propto a^{3/2}$. Para $n = -2$, el potencial corresponde a un oscilador armónico tridimensional, y la Ec. (3.198) indica que el período de la órbita es independiente de su tamaño o amplitud.

3.6. Estabilidad de órbitas circulares y ángulo de precesión

El radio r_o de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad (3.199)$$

está dado por la condición

$$\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_o} = 0 \quad (3.200)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_o} - \frac{l^2}{\mu r_o^3} = 0. \quad (3.201)$$

La órbita circular es estable si r_o corresponde al valor mínimo del potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\text{min}) = V_{\text{ef}}(r_o)$; es decir,

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_o} > 0 \quad (3.202)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r_o} + \frac{3l^2}{\mu r_o^4} > 0. \quad (3.203)$$

La fuerza central sobre una partícula en la órbita circular de radio r_o es

$$f(r_o) = -\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_o} = -\frac{l^2}{\mu r_o^3}, \quad (3.204)$$

donde el signo menos indica que la fuerza es atractiva. Luego, en términos de $f(r_o)$, la condición de estabilidad de una órbita circular de radio r_o , Ec. (3.203), se puede expresar como

$$\begin{aligned} & -\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{r_o} - \frac{3f(r_o)}{r_o} > 0 \\ & \Rightarrow \frac{3f(r_o)}{r_o} + f'(r_o) < 0. \end{aligned} \quad (3.205)$$

Supongamos que la energía de la partícula es $E > V_{\text{ef}}(r_o)$, donde r_o es el radio de la órbita circular estable. Entonces, los valores posibles de r ocurren en el intervalo entre r_{min} y r_{max} que contiene al radio r_o .

Consideremos una oscilación radial de pequeña amplitud η alrededor del radio de la órbita circular r_o , tal que $\eta/r_o \ll 1$.

$$r = r_o + \eta. \quad (3.206)$$

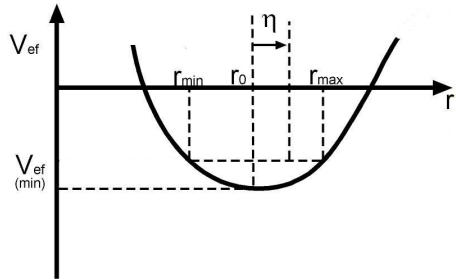


Figura 3.23: Desviación η de una órbita circular de radio r_o en un potencial efectivo V_{ef} .

Entonces, el potencial efectivo para este valor de r cercano a r_o se obtiene mediante la expansión de Taylor de la función $V_{\text{ef}}(r)$ alrededor de r_o ,

$$V_{\text{ef}}(r) = V_{\text{ef}}(r_o) + \left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_o}^0 (r - r_o) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_o} (r - r_o)^2 + \dots \quad (3.207)$$

El primer término en la Ec. (3.207) es una constante, $V_{\text{ef}}(r_o) = \text{cte}$, la cual puede ser suprimida del potencial efectivo, y el segundo término se anula en virtud de la Ec. (3.201). Luego, podemos escribir hasta segundo orden en el parámetro pequeño η ,

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_o} (r - r_o)^2 + \dots \approx \frac{1}{2} K \eta^2, \quad (3.208)$$

donde hemos llamado

$$K \equiv \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_o} = \text{cte}. \quad (3.209)$$

La fuerza efectiva correspondiente es

$$f_{\text{ef}}(r) = - \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \approx - \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_o} (r - r_o) = -K\eta. \quad (3.210)$$

La ecuación de movimiento radial, Ec. (3.50),

$$\mu \ddot{r} = f_{\text{ef}}(r) \quad (3.211)$$

para $r = r_o + \eta$ resulta en

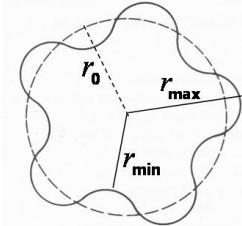
$$\mu \ddot{\eta} = -K\eta, \quad (3.212)$$

puesto que $\ddot{r} = \ddot{r}_o + \ddot{\eta} = \ddot{\eta}$, ($r_o = \text{cte}$). Esta ecuación corresponde a un oscilador armónico,

$$\ddot{\eta} + \omega_r^2 \eta = 0, \quad (3.213)$$

con frecuencia de oscilación radial

$$\omega_r^2 = \frac{K}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0}. \quad (3.214)$$

Figura 3.24: Oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio r_o .

Se denomina *ángulo de precesión* $\Delta\theta$ al ángulo recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial T_r . Luego,

$$\Delta\theta = \dot{\theta} T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}, \quad (3.215)$$

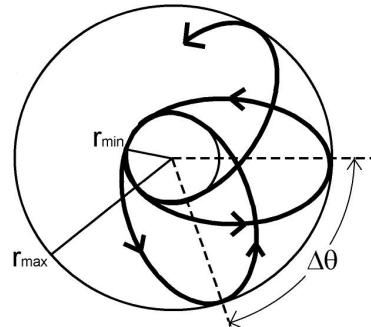
donde

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_0^2} \quad (3.216)$$

es la velocidad angular de la órbita circular. Sustituyendo en la Ec. (3.215), tenemos

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{l}{\mu r_0^2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} \right)^{-1/2}. \quad (3.217)$$

La dirección del perihelio r_{\min} cambia en un ángulo $\Delta\theta$ durante la precesión de la órbita. La condición para que ocurra precesión es que $\Delta\theta < 2\pi$; es decir, $\dot{\theta} < \omega_r$.

Figura 3.25: Ángulo de precesión $\Delta\theta$ durante un período de oscilación radial.

Una órbita es *cerrada* si las coordenadas r y θ (módulo 2π) se repiten periódicamente. Para que una órbita sea cerrada, ésta debe ser finita, $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$.

La órbita se cierra si

$$\Delta\theta = \left(\frac{m}{n} \right) 2\pi, \quad m, n, \text{ enteros}; \quad (3.218)$$

es decir, si $\Delta\theta$ es una fracción racional de 2π .

De la definición, Ec. (3.215), obtenemos la condición para que una órbita sea cerrada,

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_r = mT_\theta; \quad (3.219)$$

La órbita se cierra si el cociente $\dot{\theta}/\omega_r$ es un número racional. Después de n períodos radiales ($r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$), el perihelio completa m revoluciones ($m2\pi$) y la órbita se cierra (se repite). Si $\dot{\theta}/\omega_r$ es un número irracional, la órbita resultante se denomina *cuasiperiódica* y nunca se cierra.

Recordemos que el ángulo θ en función de r puede calcularse mediante la Ec. (3.33),

$$\theta = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}} + \theta_0. \quad (3.220)$$

El ángulo de precesión barrido por el perihelio durante un período de oscilación radial, $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$, corresponde a

$$\Delta\theta = \frac{2l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)}}. \quad (3.221)$$

El valor del ángulo de precesión $\Delta\theta$ dado por la Ec. (3.221) depende de $V(r)$. En particular, el hecho de que la órbita sea cerrada (i.e. $\Delta\theta/2\pi$ es una fracción racional) depende de la forma del potencial central $V(r)$.

Teorema de Bertrand:

Las únicas formas funcionales de potenciales centrales $V(r)$ que producen órbitas cerradas son $V(r) \propto \frac{1}{r}$ (gravitacional) y $V(r) \propto r^2$ (oscilador armónico).



Figura 3.26: Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900).

Las órbitas elípticas en el potencial $V(r) \propto 1/r$ son cerradas y, como veremos, no precesan. La mayoría de las órbitas observadas en el Universo (sistemas planetarios, estrellas binarias, etc) son cerradas. Las pequeñas desviaciones detectadas de órbitas cerradas se pueden atribuir a la presencia de otros cuerpos. Por otro lado, las órbitas en el potencial $V(r) \propto r^2$ pueden exhibir precesión y formar figuras cerradas de Lissajous.

Ejemplos.

- Determinar los valores del exponente n que producen órbitas circulares estables para la fuerza $f(r) = -kr^n$ ($k > 0$).

La condición de estabilidad Ec. (3.205) da

$$\begin{aligned} -3kr_o^{n-1} - nkr_o^{n-1} &< 0, \\ \Rightarrow n &> -3. \end{aligned} \quad (3.222)$$

En particular, la fuerza gravitacional ($n = -2$) y la fuerza de un resorte ($n = 1$) producen órbitas circulares estables.

- Dibujar la órbita resultante si $\Delta\theta = 2\pi/3$.

La Ec. (3.219) da $m = 1$ y $n = 3$; luego, la órbita se cierra después de 3 períodos de oscilación radial, Fig. (3.27).

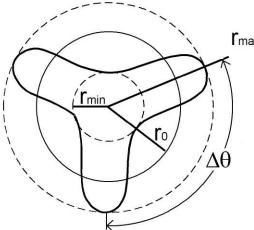


Figura 3.27: Órbita cerrada con $\Delta\theta/2\pi = 1/3$.

- Calcular el ángulo de precesión $\Delta\theta$ para oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio r_o para una partícula en el potencial $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$, donde $g(r)$ es una función de r y $k = \text{cte}$.

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = g(r) - \frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad (3.223)$$

El radio r_o satisface

$$\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_o} = g'(r_o) + \frac{k}{r_o^2} - \frac{l^2}{\mu r_o^3} = 0, \quad (3.224)$$

de donde obtenemos

$$l^2 = \mu (g'(r_o)r_o^3 + kr_o). \quad (3.225)$$

La frecuencia radial es

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_o} = \frac{1}{\mu} \left(g''(r_o) - \frac{2k}{r_o^3} + \frac{3l^2}{\mu r_o^4} \right). \quad (3.226)$$

Sustituyendo l^2 ,

$$\begin{aligned}\omega_r^2 &= \frac{1}{\mu} \left[g''(r_o) - \frac{2k}{r_o^3} + \frac{3}{r_o^4} (g'(r_o)r_o^3 + kr_o) \right] \\ &= \frac{1}{\mu} \left(g''(r_o) + \frac{3}{r_o} g'(r_o) + \frac{k}{r_o^3} \right).\end{aligned}\quad (3.227)$$

La velocidad angular es

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_o^2} = \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{g'(r_o)}{r_o} + \frac{k}{r_o^3} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.228)$$

El ángulo de precesión es

$$\begin{aligned}\Delta\theta = 2\pi \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} \right) &= 2\pi \left(\frac{\frac{g'(r_o)}{r_o} + \frac{k}{r_o^3}}{g''(r_o) + 3\frac{g'(r_o)}{r_o} + \frac{k}{r_o^3}} \right)^{1/2} \\ &= 2\pi \left(\frac{g'(r_o)r_o^2 + k}{g''(r_o)r_o^3 + 3g'(r_o)r_o^2 + k} \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (3.229)$$

Notemos que si $g = 0$ (o constante); entonces $\Delta\theta = 2\pi$, i.e., no hay precesión. Esto significa que el potencial gravitacional $V(r) = -k/r$ no produce precesión. Una órbita elíptica en el problema de Kepler no precesa (mantiene la dirección del perihelio constante). Si se observa precesión, debe existir alguna perturbación adicional al potencial $V(r) = -k/r$. En el sistema solar, la órbita del planeta Mercurio presenta una precesión de $43''$ (segundos de arco) por siglo, cuya explicación, como una corrección a ese potencial, fue dada por Einstein usando la Teoría de Relatividad General.

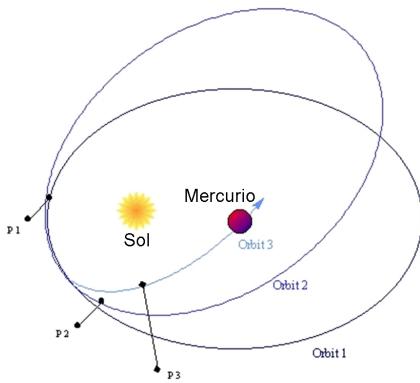


Figura 3.28: Precesión de la órbita del planeta Mercurio.

3.7. El vector de Laplace-Runge-Lenz

Vimos que la órbita correspondiente al problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica,

$$\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta, \quad (3.230)$$

donde $q = l^2/\mu k$, $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$.

Sustituyendo q , la Ec. (3.230) puede escribirse como

$$rA \cos \theta = l^2 - \mu kr, \quad (3.231)$$

donde hemos definido

$$A \equiv \mu k e. \quad (3.232)$$

La cantidad A puede expresarse como

$$A = \mu k \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} = \sqrt{\mu^2 k^2 + 2\mu E l^2} = \text{cte.} \quad (3.233)$$

El lado izquierdo de la Ec. (3.231) se puede expresar como el producto escalar

$$Ar \cos \theta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}, \quad (3.234)$$

donde \mathbf{A} es un vector cuya magnitud es constante, dada por la Ec. (3.233), y su dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si esa dirección yace sobre el eje x , entonces $\mathbf{A} = \mu k e \hat{\mathbf{x}}$.

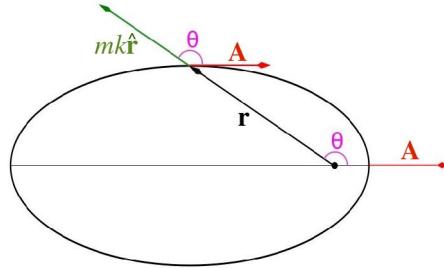


Figura 3.29: Ángulo entre \mathbf{r} y la dirección fija de \mathbf{A} ($\mu \approx m$, masa del planeta).

Entonces, la ecuación de la cónica, Ec. (3.230), puede escribirse como

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = l^2 - \mu kr. \quad (3.235)$$

Para determinar el vector \mathbf{A} , expresamos los términos del lado derecho de la Ec. (3.235) como

$$l^2 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{l}), \quad (3.236)$$

$$r = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.237)$$

Sustituyendo en la Ec. (3.235), obtenemos

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) - \mu k \hat{\mathbf{r}}], \quad (3.238)$$

de donde podemos identificar

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mu k \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.239)$$

El vector \mathbf{A} se denomina *vector de Laplace-Runge-Lenz* y, como demostraremos, constituye otra cantidad conservada en el problema de Kepler. De la expresión de \mathbf{A} se puede ver que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{l} = 0, \quad (3.240)$$

puesto que \mathbf{l} es perpendicular a $\mathbf{p} \times \mathbf{l}$ y a \mathbf{r} . De la ortogonalidad entre \mathbf{A} y \mathbf{l} , se deriva que el vector \mathbf{A} debe yacer sobre el plano del movimiento, el cual es perpendicular a la dirección de \mathbf{l} .

Consideremos la derivada total con respecto al tiempo del vector \mathbf{A} ,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \quad (3.241)$$

Calculemos el primer término

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{l} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}), \quad (3.242)$$

puesto que \mathbf{l} es constante en un campo de fuerza central. Por otro lado,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r) \hat{\mathbf{r}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.243)$$

Luego,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \mu \frac{f(r)}{r} \left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \right]. \quad (3.244)$$

Usando la identidad vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, tenemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \mu \frac{f(r)}{r} \left[\mathbf{r} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]. \quad (3.245)$$

Esta expresión puede ser simplificada notando que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r^2) = 2r \frac{dr}{dt}; \quad (3.246)$$

luego,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \mu f(r) \left[\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]. \quad (3.247)$$

Esta expresión puede simplicarse aún más si notamos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3.248)$$

Luego,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (3.249)$$

Sustituyendo la fuerza gravitacional en el problema de Kepler, $f(r) = -k/r^2$, obtenemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \mu k \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \quad (3.250)$$

Luego, la Ec. (3.241) da

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0, \quad (3.251)$$

lo cual implica que el vector de Laplace-Runge-Lenz es constante,

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mu k \hat{\mathbf{r}} = \text{cte.} \quad (3.252)$$

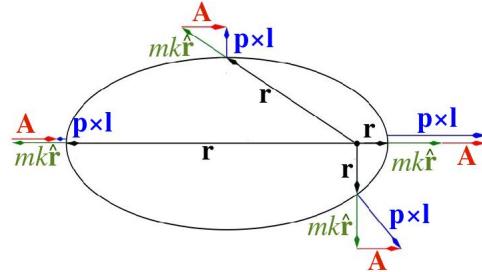


Figura 3.30: Vector de Laplace-Runge-Lenz en varias posiciones sobre una órbita Kepleriana.

La magnitud del vector \mathbf{A} (Ec. (3.233)) es dependiente de otras integrales del movimiento, l y E ; pero la dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler. La constancia de la dirección de \mathbf{A} implica que una órbita en el potencial $V(r) = -k/r$ no presenta precesión.



Figura 3.31: Izquierda: Pierre-Simon Laplace (1749 -1827). Centro: Carl Runge (1856-1927). Derecha: Wilhem Lenz (1888-1957).

El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema *superintegrable*, pues existen seis grados de libertad (tres para cada partícula) y siete cantidades conservadas: las tres componentes de la velocidad del centro de masa \mathbf{v}_{cm} , la dirección del momento angular \mathbf{l} , su magnitud l , la energía E y la dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz \mathbf{A} .

3.8. Dispersión en campo de fuerza central

Dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$, que puede ser atractivo o repulsivo. La partícula describe una trayectoria abierta desde $r = \infty$ hasta $r = r_{\min}$ y retorna a $r = \infty$, cambiando la dirección de su velocidad \mathbf{v} . El ángulo entre la dirección de la velocidad inicial y la dirección de la velocidad final se denomina *ángulo de dispersión* χ .

En el problema de Kepler, la trayectoria de una partícula con $E > 0$ describe una órbita hiperbólica. Ésta puede ser de dos tipos:

1) Potencial de Kepler atractivo, $V(r) = -\frac{k}{r}$, correspondiente a la fuerza gravitacional entre dos partículas o a la fuerza de Coulomb entre cargas eléctricas de signo opuesto.

Consideremos la ecuación de la órbita, Ec. (3.80),

$$\frac{l^2}{\mu} (u'' + u) = -\frac{dV}{du}, \quad (3.253)$$

donde $u = 1/r$. Para $V = -ku$, esta ecuación resulta en

$$u'' + u = \frac{\mu k}{l^2}. \quad (3.254)$$

Su solución tiene la forma

$$u = u_h + u_p, \quad (3.255)$$

donde u_h es la solución de la ecuación homogénea

$$u_h'' + u_h = 0 \quad (3.256)$$

correspondiente a

$$u_h = A \cos(\theta - \theta_0), \quad (3.257)$$

y u_p es la solución particular

$$u_p = \frac{k\mu}{l^2}. \quad (3.258)$$

Luego, la solución se puede expresar como

$$u = \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{l^2} (1 + e \cos \theta), \quad (3.259)$$

con la condición $\theta = 0 \rightarrow r = r_{\min}$ y $e = \text{cte}$. Esta corresponde a la hipérbola

$$\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta, \quad (3.260)$$

donde

$$q = \frac{l^2}{\mu k}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} > 1, \quad (3.261)$$

puesto que $E > 0$.

De la Ec. (3.260) obtenemos

$$r_{\min} = \frac{q}{1+e}, \quad \text{para } \theta = 0, \quad (3.262)$$

$$r_{\max} \rightarrow \infty \quad \text{para } \cos \theta_{\max} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \theta_{\max} > \frac{\pi}{2}. \quad (3.263)$$

El potencial atractivo produce una desviación de la trayectoria que encierra al foco. El ángulo de dispersión χ corresponde al ángulo entre las asíntotas: $\chi = 2\theta_{\max} - \pi$.

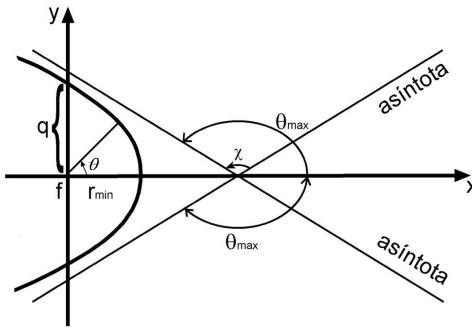


Figura 3.32: Órbita hiperbólica para $V(r) = -k/r$.

2) Potencial de Kepler repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$; por ejemplo, correspondiente a la fuerza de Coulomb entre dos cargas eléctricas del mismo signo, $\mathbf{f}(r) = \frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$.

La ecuación de la órbita en este caso es

$$u'' + u = -\frac{k\mu}{l^2}, \quad (3.264)$$

y su solución es $u = u_h + u_p$, donde u_h es la solución de la ecuación homogénea, Ec. (3.256), y u_p es la solución particular

$$u_p = -\frac{k\mu}{l^2}. \quad (3.265)$$

Luego, se puede expresar

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} (e \cos \theta - 1) \quad (3.266)$$

con la condición $\theta = 0 \rightarrow r = r_{\min}$. Con $q = \frac{\mu k}{l^2}$, esto es

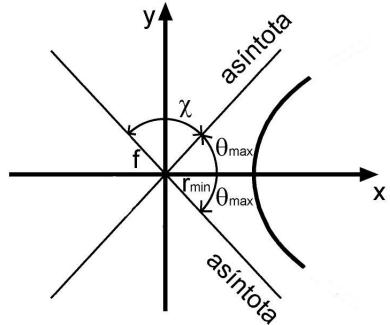
$$\frac{q}{r} = e \cos \theta - 1, \quad (3.267)$$

lo que corresponde a un hipérbola que no encierra al foco.

De la Ec. (3.267) obtenemos

$$r_{\min} = \frac{q}{e-1}, \quad \text{para } \theta = 0, \quad (3.268)$$

$$r_{\max} \rightarrow \infty, \quad \text{para } \cos \theta_{\max} = \frac{1}{e} \Rightarrow \theta_{\max} < \frac{\pi}{2}. \quad (3.269)$$

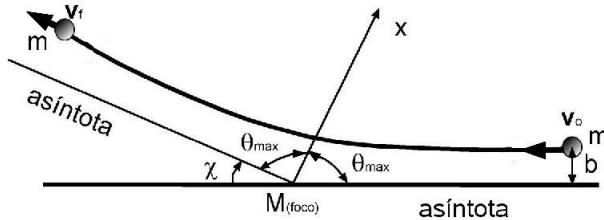
Figura 3.33: Órbita hiperbólica para $V(r) = k/r$.

La órbita no tiene intersección con el eje y . El potencial repulsivo causa una desviación de la trayectoria hacia fuera del foco. El ángulo de dispersión es $\chi = \pi - 2\theta_{\max}$.

Ángulo de dispersión y sección eficaz en un potencial central.

Consideremos un potencial de interacción $V(r)$ entre una partícula de masa M situada en el foco y una partícula con masa $m \ll M$ ($\mu \approx m$) incidente desde $r \rightarrow \infty$ y que describe una órbita simétrica con respecto al perihelio (eje x). Asumimos que la energía inicial es $E = \frac{1}{2}mv_0^2$, donde \mathbf{v}_0 es la velocidad inicial de la partícula incidente.

El ángulo de dispersión χ es el ángulo entre la dirección del vector velocidad inicial \mathbf{v}_0 y la dirección del vector velocidad final \mathbf{v}_f .

Figura 3.34: Dispersion en un potencial repulsivo $V(r)$.

Se define el *parámetro de impacto* b como la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad inicial \mathbf{v}_0 de la partícula incidente y la asymptota adyacente. Los datos iniciales que se emplean generalmente en problemas de dispersión en campos centrales son b y E .

De la Fig. (3.35), obtenemos la magnitud del momento angular,

$$l = rp \sin(\pi - \alpha) = mv_0 r \sin \alpha = mv_0 b. \quad (3.270)$$

Luego,

$$l^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Em b^2. \quad (3.271)$$

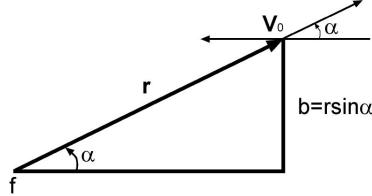


Figura 3.35: Parámetro de impacto.

Notemos también que se puede expresar

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}. \quad (3.272)$$

El ángulo θ_{\max} está dado por la integral

$$\theta_{\max} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}}, \quad (3.273)$$

$$= b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}, \quad (3.274)$$

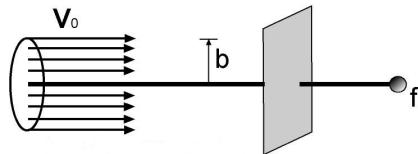
donde hemos sustituido l . Con el cambio de variable $u = 1/r$, la integral Ec. (3.274) se convierte en

$$\theta_{\max} = b \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - b^2 u^2}}, \quad (3.275)$$

donde los nuevos límites son $u = 0$ ($r \rightarrow \infty$) y $u_m = 1/r_{\min}$.

Conociendo θ_{\max} , el ángulo de dispersión χ puede determinarse geométricamente.

Generalmente se emplea un haz de partículas idénticas en experimentos de dispersión. Las diferentes partículas en el haz tienen distintos parámetros de impacto con respecto al centro de fuerza y, por lo tanto, son dispersadas con diferentes ángulos χ .

Figura 3.36: Flujo de partículas incidentes sobre un blanco situado en f .

Se define la intensidad del flujo I como el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo,

$$I = \frac{\# \text{ part.}}{A \times t}. \quad (3.276)$$

Las partículas en el haz incidente que poseen un mismo valor de b son dispersadas en un cono con vértice en el foco f y ángulo de vértice χ , puesto que el problema posee simetría axial. Este cono encierra un ángulo sólido Ω .

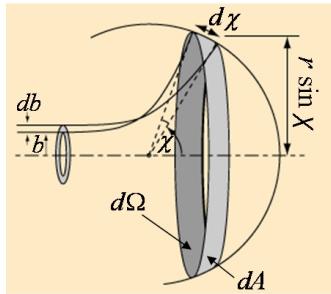


Figura 3.37: Dispersión en ángulo sólido $d\Omega$.

El diferencial de ángulo sólido $d\Omega$ es (Fig. (3.37))

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(2\pi r \sin \chi)(rd\chi)}{r^2} = 2\pi \sin \chi d\chi. \quad (3.277)$$

Sea $n(\Omega)$ el número partículas que son desviadas dentro del ángulo sólido Ω por unidad de tiempo. Se define la *sección eficaz de dispersión* $\sigma(\Omega)$ como la fracción de partículas incidentes que son desviadas dentro del ángulo sólido Ω por unidad de tiempo,

$$\sigma(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{I}. \quad (3.278)$$

Note que la sección eficaz posee unidades de área. Luego, la expresión

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I} d\Omega, \quad (3.279)$$

corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$; es decir, representa la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.

La conservación del número de partículas implica que el número de partículas incidentes en el anillo de radio b y ancho db por unidad de tiempo debe ser igual al número de partículas dispersadas en el diferencial de ángulo $d\Omega$ por unidad de tiempo, $n(\Omega)d\Omega$. Esto es,

$$\begin{aligned} I2\pi b db &= I\sigma(\Omega) d\Omega, \\ 2\pi b db &= \sigma(\Omega)2\pi \sin \chi d\chi. \end{aligned} \quad (3.280)$$

Luego, la sección eficaz $\sigma(\Omega)$ en función del ángulo de dispersión χ se puede expresar como

$$\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|, \quad (3.281)$$

donde se toma el modulo de la derivada para garantizar que la cantidad $\sigma(\chi)$ sea positiva, puesto que representa una probabilidad.

Como un ejemplo, calculemos el ángulo de dispersión de una partícula incidente con energía $E > 0$ y parámetro de impacto b en un potencial central repulsivo $V(r) = k/r$.

La integral Ec. (3.275) para este potencial es

$$\theta_{\max} = b \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{k}{E} u - b^2 u^2}}, \quad (3.282)$$

Usando la integral Ec. (3.112), obtenemos

$$\theta_{\max} = \cos^{-1} \left[\frac{\left(1 + \frac{2b^2 E}{k} u\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}} \right] \Big|_0^{u_m} = \cos^{-1} \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{2b^2 E}{k} u\right) \right] \Big|_0^{u_m}. \quad (3.283)$$

De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo, Ec. (3.267), tenemos

$$r_{\min} = \frac{q}{e-1}, \quad (3.284)$$

$$\frac{l^2}{mk} u_m = e-1, \quad (3.285)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e. \quad (3.286)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \theta_{\max} &= \cancel{\cos^{-1}(1)}^0 - \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) \\ \Rightarrow \cos \theta_{\max} &= \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}}, \end{aligned} \quad (3.287)$$

que es el mismo resultado que se obtiene directamente de la órbita hiperbólica correspondiente a un potencial de Kepler repulsivo, Ec. (3.269). Entonces,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2bE}{k}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \theta_{\max}} - 1 = \tan^2 \theta_{\max}, \\ \Rightarrow \tan \theta_{\max} &= \frac{2bE}{k}. \end{aligned} \quad (3.288)$$

El ángulo de dispersión χ para un potencial de Kepler repulsivo es

$$\chi = \pi - 2\theta_{\max} \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}. \quad (3.289)$$

Luego,

$$\tan \theta_{\max} = \frac{\sin(\pi/2 - \chi/2)}{\cos(\pi/2 - \chi/2)} = \frac{\cos(\chi/2)}{\sin(\chi/2)} = \cot\left(\frac{\chi}{2}\right). \quad (3.290)$$

Sustituyendo en Ec. (3.288), obtenemos

$$\cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{2bE}{k}, \quad (3.291)$$

lo que permite expresar el ángulo de dispersión en función de datos iniciales b , E , y de la constante k del potencial $V(r) = k/r$.

Consideremos los casos límites:

1. $b = 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \chi = \pi.$

Choque frontal; la partícula retrocede completamente.

2. $b \rightarrow \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \rightarrow \infty \Rightarrow \chi = 0.$

La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo; no hay dispersión.

Como una aplicación del cálculo de la sección eficaz de dispersión, Ec. (3.281), consideremos el experimento de Rutherford que condujo al descubrimiento del núcleo atómico. En este caso, tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, donde el núcleo, que actúa como centro dispersor, tiene una carga $q = +Ze$ (Rutherford empleó átomos de oro, $Z = 79$) y las partículas incidentes son partículas α (núcleos de helio), con carga $q' = +2e$, de modo que $k = qq' = 2Ze^2$, donde e es la carga del electrón.

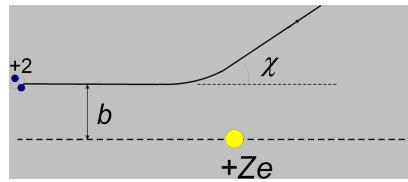


Figura 3.38: Experimento de Rutherford.

De la Ec. (3.291), tenemos

$$b = \frac{k}{2E} \cot\left(\frac{\chi}{2}\right), \quad (3.292)$$

luego,

$$\left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{k}{4E} \csc^2\left(\frac{\chi}{2}\right). \quad (3.293)$$

Sustituyendo en la Ec. (3.281), encontramos la sección eficaz

$$\begin{aligned}
 \sigma(\chi) &= \frac{1}{\sin \chi} \frac{k}{2E} \cot(\chi/2) \frac{k}{4E} \csc^2(\chi/2) \\
 &= \frac{k^2}{8E^2} \frac{\cot(\chi/2) \csc^2(\chi/2)}{2 \sin(\chi/2) \cos(\chi/2)} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \csc^4 \left(\frac{\chi}{2} \right). \tag{3.294}
 \end{aligned}$$

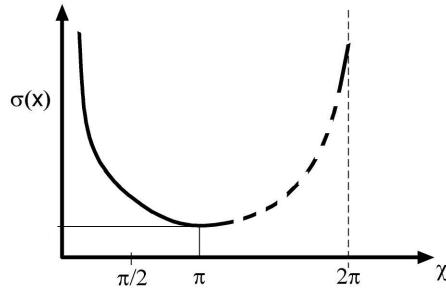


Figura 3.39: Sección eficaz de dispersión en función de χ en el experimento de Rutherford.

Notemos que el valor de $\sigma(\chi)$ es grande para $\chi \rightarrow 0$; lo que indica que la mayoría de las partículas α pasan sin desviarse mucho. Sin embargo, para $\chi = \pi$, $\sigma(\pi)$ alcanza su valor mínimo no nulo; es decir, existe una probabilidad pequeña de observar partículas α dispersadas completamente hacia atrás. Estos comportamientos fueron observados por Rutherford, quien determinó experimentalmente la sección eficaz Ec. (3.294) que se deriva de un potencial central de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$. Este experimento demostró la existencia del núcleo atómico: la carga positiva del átomo está concentrada en una región muy pequeña comparada con el tamaño del átomo¹.



Figura 3.40: Ernest Rutherford (1871-1937).

¹Una expresión similar para $\sigma(\chi)$ se obtiene en Mecánica Cuántica con el potencial $V(r) = k/r$.

3.9. Problemas

1. La velocidad angular máxima de cierto satélite alrededor del Sol es cuatro veces su velocidad angular mínima.
 - a) Encuentre la excentricidad de la órbita del satélite.
 - b) Determine en cuánto debe disminuir su energía para caer en una órbita circular con el mismo momento angular que su órbita original.
2. Dos partículas se mueven una alrededor de la otra en órbitas circulares con período T , bajo la influencia de su mutua atracción gravitacional. Suponga que el movimiento de ambas partículas es detenido repentinamente en un instante dado, y que las partículas se dejan caer una hacia la otra. Encuentre el tiempo que tardan en chocar.
3. Una partícula de masa m se mueve sin fricción sobre la superficie $z = r^2$ (coordenadas cilíndricas), donde z es la dirección vertical.
 - a) Encuentre la condición de estabilidad de una órbita circular de radio r_o sobre esta superficie.
 - b) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de esta órbita circular.
4. La sonda espacial *Mariner IV* fue diseñada para viajar de la Tierra a Marte en una órbita elíptica alrededor del sol, con perihelio igual al radio de la órbita terrestre, $R_T = 1\text{UA}$, y afelio igual al radio de la órbita de Marte, $R_M = 1,5\text{UA}$. Ambas órbitas pueden considerarse aproximadamente circulares. Desprecie los efectos gravitacionales de ambos planetas sobre el *Mariner IV*.
 - a) ¿Cuántos meses tardó el *Mariner IV* en llegar a Marte?
 - b) Calcule con qué velocidad relativa a la Tierra debió ser lanzado el *Mariner IV* y con cuál dirección.
5. Un cometa de masa m se mueve en una trayectoria parabólica alrededor del sol y cruza la órbita terrestre. Suponga que la órbita terrestre es circular y que está en el mismo plano que la trayectoria del cometa. Encuentre el máximo número de días que el cometa puede permanecer dentro de la órbita de la Tierra.
6. Una partícula se mueve en el potencial $V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$.
 - a) Determine la órbita de la partícula.
 - b) Dibuje esquemáticamente el potencial efectivo para este sistema.
7. Una partícula con momento angular l describe la órbita $r = a(1 + \cos \theta)$.
 - a) Encuentre la fuerza central que produce esta órbita.
 - b) Calcule el período de esta órbita.
 - c) Determine la energía mínima que debe tener la partícula para escapar de esta órbita.
8. Encuentre la relación entre la distancia radial y el tiempo para un asteroide con energía igual a cero, sujeto a la atracción solar.

- 9.** Una partícula de masa m se mueve en el potencial de Yukawa

$$V(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a},$$

donde $k > 0$ y $a > 0$ son constantes.

- a) Encuentre la condición de estabilidad de una órbita circular de radio r_o .
- b) Determine el período de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de esta órbita circular.

- 10.** Un planeta de masa m gira alrededor de una estrella de masa M . La estrella está rodeada por un plasma de densidad uniforme ρ , que alcanza a envolver la órbita del planeta.

- a) Calcule el período de una órbita circular estable de radio $r = r_o$ para el planeta.
- b) Calcule el momento angular de esta órbita circular.
- c) Encuentre el ángulo de precesión, si la órbita circular es ligeramente perturbada.

- 11.** Una partícula describe la órbita $r = a\theta^2$, con $a = \text{constante}$. Encuentre la fuerza que causa esta órbita.

- 12.** Se observa que un cometa está a 10^8 km del Sol y se mueve con una velocidad de 50,9 km/s que forma un ángulo de 45° con el radio vector dirigido desde el Sol.

- a) Determine los parámetros e y q de la órbita del cometa.
- b) Calcule el ángulo al cual fue observado el cometa.
- c) Calcule el período del cometa.

- 13.** Una partícula se mueve en el potencial $V(r) = a/r^p + b/r^q$, donde a y b son constantes.

- a) Encuentre los valores de p y q que producen la órbita $r = k\theta^2$, con k constante.
- b) Encuentre los valores de las constantes a y b en ese caso.
- c) Determine y dibuje el potencial efectivo para esta órbita.

- 14.** Un satélite se encuentra en una órbita circular de radio r_o alrededor de la Tierra. En un instante dado, los cohetes propulsores incrementan la velocidad tangencial del satélite en un 20 %.

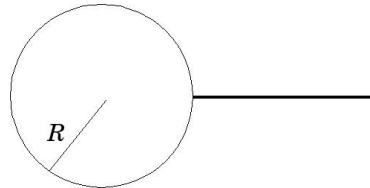
- a) Calcule la excentricidad de la órbita resultante.
- b) Calcule el apogeo de la órbita resultante del satélite.

- 15.** Una partícula de masa m gira en un círculo de radio a , sometida a la fuerza central $f(r) = -kr$ (oscilador armónico esférico).

- a) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de la órbita circular, si ésta es ligeramente perturbada.
- b) Calcule el ángulo de precesión durante una oscilación radial.

- 16.** Dos partículas con masas m_1 y m_2 se sueltan en reposo cuando están separadas por una distancia R . Calcule las velocidades de las partículas cuando la separación entre ellas es r .

17. El perihelio de un asteroide es la mitad del radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (supuesta circular), y su velocidad en el perihelio es el doble de la velocidad orbital de la Tierra. Suponga que la órbita de la Tierra se encuentra en el mismo plano que la órbita del asteroide. Ignore los efectos de la Tierra y otros planetas sobre el asteroide.
- Encuentre la velocidad del asteroide cuando éste cruza la órbita terrestre.
 - Determine si el asteroide escapa del sistema solar.
18. Imagine una “escalera espacial” que consiste en satélite terrestre formado por una larga varilla uniforme alineada a lo largo de la dirección radial desde el centro de la Tierra y colocada en órbita estacionaria ecuatorial. El extremo inferior de la varilla alcanza a tocar la superficie de la Tierra. Calcule la longitud de la varilla en km.



19. La trayectoria de una partícula con momento angular l en un campo central se puede describir por $r = a \cos \theta$.
- Encuentre el potencial asociado a esta trayectoria.
 - Si la partícula se encuentra a una distancia a del centro de atracción, calcule el tiempo que la partícula tarda en caer al centro.
 - Determine la energía total de la partícula.
20. Una partícula describe una órbita circular bajo la influencia de una fuerza central atractiva $f(r) = -k/r^5$, dirigida hacia un punto fijo en el círculo.
- Demuestre que la fuerza debe variar como el inverso de la quinta potencia de la distancia, es decir, $n = 5$.
 - Demuestre que la energía total de la partícula es cero.
 - Encuentre el período del movimiento.
21. Una partícula se mueve en una órbita dada por $r = R e^{-\alpha\theta}$, donde R y α son constantes.
- Encuentre la fuerza que causa esta órbita.
 - Si la partícula se encuentra inicialmente a una distancia R del centro de atracción, calcule el tiempo que tarda en caer al centro.
 - ¿Cuántas revoluciones completa la partícula hasta alcanzar el centro?.
22. La Tierra se mueve en una órbita casi circular de radio 1.5×10^8 km alrededor del Sol con una velocidad de 30 km/s. Se observa que la velocidad de un cometa alrededor del Sol es 50 km/s en su perihelio y 10 km/s en su afelio.
- Calcule la distancia del afelio para el cometa.
 - Calcule el período del cometa alrededor del Sol.

- 23.** Una partícula de masa m y momento angular l se mueve en el potencial $V = -k/r^2$.
- Encuentre la condición para que la partícula caiga al centro de atracción.
 - Determine la órbita descrita por la partícula para alcanzar el centro.
- 24.** Considere el movimiento de una partícula de masa m en el potencial $V = kr^{1/2}$.
- Encuentre el potencial efectivo para esta partícula.
 - Encuentre la relación entre el período y el radio r_o de una órbita circular.
- 25.** Un cometa de masa $M_T/8$ y velocidad $-5\mathbf{v}_T$ tiene una colisión completamente inelástica con la Tierra (i.e., el cometa y la Tierra quedan unidos después de la colisión), donde M_T y \mathbf{v}_T son la masa y la velocidad orbital de la Tierra, respectivamente. La órbita terrestre puede asumirse circular alrededor del Sol con un radio R .
- Calcule el afelio y el perihelio de la órbita de la Tierra después de la colisión.
 - ¿Cuántos días dura un año terrestre después de la colisión?
- 26.** Determine la órbita de una partícula de masa m que incide con parámetro de impacto $b\sqrt{2}$ y momento angular \sqrt{k}/b sobre un punto que ejerce una fuerza central atractiva $f(r) = -k/r^5$.
- 27.** Calcule el ángulo de precesión del perihelio de una partícula con momento angular l y masa m moviéndose alrededor de una estrella de masa M que produce el potencial $V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}$, donde ϵ es una constante muy pequeña.
- 28.** Calcule la sección eficaz $\sigma(\chi)$ para dispersión de partículas con velocidad v_o en el potencial $V(r) = k/r^2$.
- 29.** La sección eficaz total de dispersión σ_T se define como

$$\sigma_T = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\chi) d\chi,$$

donde χ es el ángulo de dispersión. Calcule σ_T para partículas con energía E en el potencial

$$V(r) = \begin{cases} \frac{k}{r} - \frac{k}{a}, & r < a. \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

- 30.** Una partícula con masa m y velocidad v_o incide en el potencial atractivo $V(r) = -k/r^n$, donde $n > 2$.
- Determine el máximo parámetro de impacto para que la partícula caiga al centro de atracción.
 - Calcule la sección eficaz total de dispersión para que la partícula caiga al centro.

Capítulo 4

Oscilaciones pequeñas

4.1. Oscilaciones en una dimensión

Consideremos un sistema con un grado de libertad, o reducible a un problema unidimensional co coordenada q . La energía total se puede expresar como

$$E = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 + V_{\text{ef}}(q), \quad (4.1)$$

donde a representa parámetros constantes del sistema, como la masa de la partícula, etc, y $V_{\text{ef}}(q)$ corresponde a un *potencial efectivo*. El Lagrangiano correspondiente es

$$L = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q), \quad (4.2)$$

La ecuación de movimiento para q , obtenida del Lagrangiano, se puede escribir como

$$a\ddot{q} = f_{\text{ef}}(q), \quad (4.3)$$

donde la *fuerza efectiva* $f_{\text{ef}}(q)$ es

$$f_{\text{ef}}(q) = -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}. \quad (4.4)$$

La posición de equilibrio q_0 de la coordenada q está dada por la condición

$$f_{\text{ef}}(q_0) = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q} \right|_{q_0} = 0. \quad (4.5)$$

El equilibrio es estable si $V_{\text{ef}}(q_0)$ corresponde a un mínimo del potencial efectivo $V_{\text{ef}}(q)$; es decir,

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2} \right|_{q_0} > 0. \quad (4.6)$$

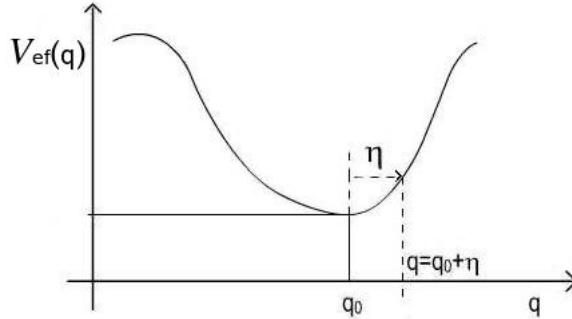


Figura 4.1: Pequeño desplazamiento η alrededor de la posición de equilibrio estable q_0 .

Consideremos un desplazamiento pequeño η alrededor de un punto de equilibrio estable q_0 ,

$$q = q_0 + \eta, \quad \text{con} \quad \frac{\eta}{q_0} \ll 1. \quad (4.7)$$

El valor del potencial $V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}(q_0 + \eta)$ cerca del punto de equilibrio q_0 se puede obtener mediante una expansión de Taylor de $V_{\text{ef}}(q)$ alrededor de $q = q_0$,

$$V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}(q_0 + \eta) = V(q_0) + \left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q} \right|_{q_0} \eta + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2} \right|_{q_0} \eta^2 + \dots, \quad (4.8)$$

donde $V_{\text{ef}}(q_0)$ es un valor constante y el segundo término se anula debido a la condición de equilibrio Eq. (4.5). Luego, despreciando términos muy pequeños en potencias de η de orden superior al cuadrático, se puede escribir el potencial cerca del punto de equilibrio

$$V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}(q_0 + \eta) = \frac{1}{2} K \eta^2, \quad (4.9)$$

donde $\eta = q - q_0$ es el desplazamiento desde el equilibrio y

$$K \equiv \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2} \right|_{q_0} = \text{constante} > 0. \quad (4.10)$$

Luego, cerca del valor de equilibrio q_0 , el potencial corresponde al de un oscilador armónico. La ecuación de movimiento para η se obtiene sustituyendo $q = q_0 + \eta$ en la Ec. (4.3),

$$\begin{aligned} a\ddot{\eta} &= -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}(q_0 + \eta) = -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q} \\ a\ddot{\eta} &= -K\eta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Entonces, la ecuación de movimiento para el pequeño desplazamiento η es

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad (4.12)$$

donde

$$\omega^2 \equiv \frac{K}{a} = \frac{1}{a} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2} \right|_{q_0} \quad (4.13)$$

es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de q_0 .

La Eq. (4.12) tiene solución

$$\eta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.14)$$

donde A es la amplitud de las oscilaciones y φ es la fase. En general, se emplea la notación compleja

$$e^{i(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.15)$$

Luego,

$$\eta(t) = \text{Re}[A e^{i(\omega t + \varphi)}] = \text{Re}(a e^{i\omega t}), \quad (4.16)$$

donde $a = A e^{i\varphi}$ es la amplitud compleja. Se acostumbra escribir simplemente

$$\eta(t) = a e^{i\omega t}, \quad (4.17)$$

sobreentendiéndose que se toma la parte real de esta expresión para η . Las soluciones de ecuaciones de movimiento para sistemas oscilatorios escritas en forma compleja son convenientes porque la expresión e^{ix} no cambia su forma bajo integración o diferenciación.

Ejemplo.

1. Encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones alrededor de un radio de equilibrio r_0 para una partícula de masa m moviéndose sobre un cono vertical con ángulo de vértice α .

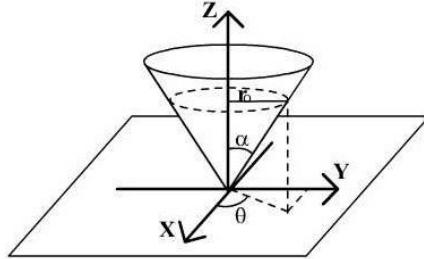


Figura 4.2: Pequeñas oscilaciones alrededor de radio r_0 para una partícula sobre un cono.

El Lagrangiano de este sistema fue calculado en los capítulos anteriores. La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2). \quad (4.18)$$

La energía potencial es

$$V = mgz = mgr \cot \alpha. \quad (4.19)$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cot \alpha. \quad (4.20)$$

La ecuación de movimiento para θ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (4.21)$$

El ángulo θ es una coordenada cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = l_z = \text{cte.} \quad (4.22)$$

La ecuación para r es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (4.23)$$

la cual resulta en

$$m\ddot{r} \csc^2 \alpha - mr\dot{\theta}^2 + mg \cot \alpha = 0. \quad (4.24)$$

Sustituyendo $\dot{\theta} = \frac{l_z}{mr^2}$, podemos expresar la Ec. (4.24) como

$$m\ddot{r} = \frac{l_z^2}{mr^3} \sin^2 \alpha - mg \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.25)$$

la cual tiene la forma de un problema unidimensional Ec. (4.3), con $m = a$, y donde podemos identificar la fuerza efectiva

$$f_{\text{ef}}(r) = -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} = \frac{l_z^2}{mr^3} \sin^2 \alpha - mg \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.26)$$

La posición de equilibrio r_o está dada por

$$f_{\text{ef}}(r_0) = -\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \quad (4.27)$$

$$\Rightarrow \frac{l_z^2}{m^2 r_0^3} = g \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow r_0^3 = \frac{l_z^2 \tan \alpha}{m^2 g}. \quad (4.29)$$

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(r) = \frac{l_z^2 \sin^2 \alpha}{2mr^2} + mgr \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.30)$$

luego,

$$\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} = \frac{3l_z^2 \sin^2 \alpha}{mr_0^4} = \frac{3mg}{r_0} \sin \alpha \cos \alpha \equiv K. \quad (4.31)$$

La frecuencia angular para pequeñas oscilaciones alrededor de r_0 es

$$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} = \frac{3g}{r_0} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.32)$$

y el movimiento de la pequeña oscilación $\eta = r - r_0$ se puede expresar en la forma de la Ec. (4.12).

4.2. Oscilaciones de sistemas con varios grados de libertad

Consideremos un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \dots, s\}$ cuya energía potencial es $V(q_1, \dots, q_s)$. La configuración de equilibrio de este sistema corresponde a un conjunto de valores $\{q_{0i} : i = 1, \dots, s\}$; donde los q_{0i} están dados dados por las s condiciones

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (4.33)$$

La configuración de equilibrio $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \dots, q_{0s})$ es estable si los valores q_{0i} , $\forall i$, corresponden a un mínimo de $V(q_1, q_2, \dots, q_s)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \Big|_{q_{0i}} > 0. \quad (4.34)$$

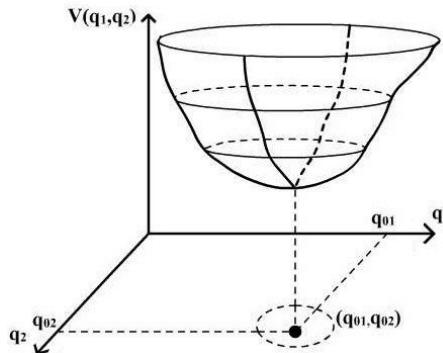


Figura 4.3: Potencial $V(q_1, q_2)$, mostrando las posiciones de equilibrio (q_{01}, q_{02}) .

Consideremos pequeñas oscilaciones alrededor de las posiciones de equilibrio estable q_{0i} . La pequeña desviación del equilibrio correspondiente a la coordenada q_i la denotaremos por η_i ,

$$q_i = q_{0i} + \eta_i, \quad \text{con } \frac{\eta_i}{q_{0i}} \ll 1. \quad (4.35)$$

El valor del potencial $V(q_1, \dots, q_s)$ cerca de la configuración de equilibrio se puede obtener mediante la expansión de Taylor en varias variables de $V(q_1, \dots, q_s)$ alrededor de $\{q_{0i}\}$, con $q_i = q_{0i} + \eta_i$,

$$V(q_1, \dots, q_s) = V(q_{01}, \dots, q_{0s}) + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{\{q_{0i}\}}^0 \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \dots, \quad (4.36)$$

donde $V(q_{01}, \dots, q_{0s})$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \dots, q_{0s})$. Luego, cerca de la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como

$$V(q_1, \dots, q_s) = V(\eta_1, \dots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (4.37)$$

donde definimos los coeficientes

$$V_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\{q_{0i}\}}. \quad (4.38)$$

Estos coeficientes son simétricos, i.e., $V_{ij} = V_{ji}$, y dependen de propiedades locales del potencial cerca de la configuración de equilibrio y, por tanto, son característicos de cada sistema.

La energía cinética del sistema cerca de la configuración de equilibrio también puede expresarse en función de los pequeños desplazamientos η_i ,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} (\dot{q}_{0i}^0 + \dot{\eta}_i)(\dot{q}_{0j}^0 + \dot{\eta}_j), \quad (4.39)$$

(los valores q_{0i} son constantes). Luego,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad (4.40)$$

donde los coeficientes $T_{ij} = T_{ji}$ representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc.).

El Lagrangiano del sistema cerca de la configuración de equilibrio es

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.41)$$

La ecuación de movimiento para una pequeña desviación del equilibrio η_k es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0. \quad (4.42)$$

Evaluamos los términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} (\delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i) = \frac{1}{2} \left(\sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j, \\ \frac{\partial L}{\partial \eta_k} &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de movimiento Ec. (4.42) para la desviación η_k queda

$$\sum_j (T_{kj} \ddot{\eta}_j + V_{kj} \eta_j) = 0, \quad (4.43)$$

donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico. Existen s ecuaciones de movimiento de este tipo para el sistema, $k = 1, 2, \dots, s$. La solución de la Ec. (4.43) tiene la forma

$$\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}, \quad (4.44)$$

donde ω es la frecuencia del movimiento oscilatorio. Sustituyendo en la Ec. (4.43), junto con $\ddot{\eta}_j = -\omega^2 a_j e^{i\omega t}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_j (-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}) a_j e^{i\omega t} &= 0 \\ \Rightarrow \sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j &= 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde hemos renombrado el índice $k \rightarrow i$. El conjunto de ecuaciones Ec. (4.45) para los grados de libertad $i = 1, 2, \dots, s$ constituye un sistema de s ecuaciones lineales homogéneas para los coeficientes a_j , con $j = 1, 2, \dots, s$. Como ejemplo, consideremos el sistema Ec. (4.45) con $s = 2$,

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad (V_{11} - \omega^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega^2 T_{12}) a_2 &= 0 \\ i = 2 : \quad (V_{21} - \omega^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega^2 T_{22}) a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

En general, existe solución no trivial $\eta_j(t) \neq 0$ si $a_j \neq 0, \forall j$. Esta condición se cumple para los coeficientes a_1, \dots, a_s en el sistema Ec. (4.45) si el determinante de estos coeficientes es cero:

$$\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0. \quad (4.47)$$

La condición Ec. (4.47) constituye una ecuación algebraica de grado s para ω^2 , que se denomina *ecuación característica*. Las s raíces de la ecuación característica dan como resultado s valores para las frecuencias ω^2 , llamadas *frecuencias características* del sistema, que corresponden a s diferentes modos de oscilación del sistema alrededor de su configuración de equilibrio.

Las frecuencias características ω deben ser reales para que las soluciones tengan sentido físico. Si alguna ω es compleja, entonces se puede escribir como $\omega = a + bi$ y, por lo tanto, $e^{i\omega t} = e^{iat}e^{-bt}$. Como consecuencia, la solución $\eta(t) \propto e^{-bt}$ crece o decrece en el tiempo y la energía no se conservaría, $E \propto e^{-bt}$.

Ejemplos.

1. Encontrar las frecuencias de un sistema de dos partículas de masa m conectadas mediante resortes horizontales, cada uno con constante k y longitud en reposo l .

El sistema posee dos grados de libertad ($s = 2$). Consideremos pequeños desplazamientos del equilibrio η_1 y η_2 , con $x_i = x_{0i} + \eta_i$, como se muestra en la Fig. (4.4).

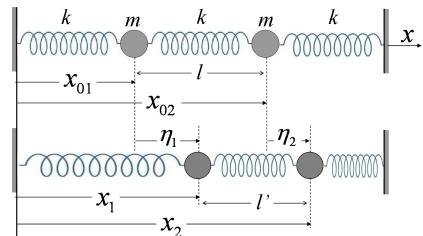


Figura 4.4: Oscilaciones de dos partículas conectadas mediante resortes horizontales.

La energía cinética en función de los pequeños desplazamientos del equilibrio es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \quad (4.48)$$

donde identificamos los coeficientes

$$T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0. \quad (4.49)$$

La energía potencial del sistema en términos de los pequeños desplazamientos del equilibrio es

$$V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k(l' - l)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2], \quad (4.50)$$

donde hemos usado la siguiente relación, observando la Fig. (4.4),

$$l' - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1. \quad (4.51)$$

Luego,

$$V = \frac{1}{2}[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j, \quad (4.52)$$

donde podemos identificar los los coeficientes

$$V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k. \quad (4.53)$$

La condición Ec. (4.47) para este sistema es

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.54)$$

Sustituyendo los coeficientes T_{ij} y V_{ij} , tenemos

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0. \quad (4.55)$$

La ecuación característica resultante es

$$(2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0, \quad (4.56)$$

$$2k - \omega^2 m = \pm k, \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}. \quad (4.58)$$

Luego,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.59)$$

2. Encontrar las frecuencias para pequeñas oscilaciones de un péndulo doble.

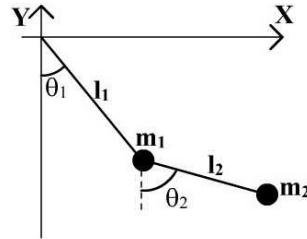


Figura 4.5: Péndulo doble.

Las energías cinética y potencial de este sistema fueron calculadas en el Cap. 1 en términos de las coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2 ,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.60)$$

$$V = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos \theta_2. \quad (4.61)$$

Las posiciones de equilibrio están dadas por

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \right|_{\theta_{01}} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_2} \right|_{\theta_{02}} = 0 \Rightarrow \theta_{01} = 0, \quad \theta_{02} = 0. \quad (4.62)$$

La energía potencial es mínima para estos valores de las coordenadas en el equilibrio. Consideremos pequeñas oscilaciones alrededor de la configuración de equilibrio,

$$\theta_1 = \theta_{01} + \eta_1 = \eta_1, \quad \theta_2 = \theta_{02} + \eta_2 = \eta_2, \quad (4.63)$$

donde η_1 y η_2 son pequeños. Luego, cerca del equilibrio,

$$\cos \theta_1 = \cos \eta_1 \simeq 1 - \frac{\eta_1^2}{2}, \quad \cos \theta_2 = \cos \eta_2 \simeq 1 - \frac{\eta_2^2}{2}, \quad (4.64)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\eta_1 - \eta_2) \simeq 1 - \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta_2)^2. \quad (4.65)$$

Manteniendo términos hasta segundo orden, obtenemos

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\eta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2, \quad (4.66)$$

$$V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1 \eta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 gl_2 \eta_2^2, \quad (4.67)$$

donde se han suprimido términos constantes en V .

Comparando con las formas generales cerca del equilibrio,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (4.68)$$

obtenemos los coeficientes

$$\begin{aligned} T_{11} &= (m_1 + m_2)l_1^2, & T_{22} &= m_2 l_2^2, & T_{12} &= T_{21} = m_2 l_1 l_2, \\ V_{11} &= (m_1 + m_2)gl_1, & V_{22} &= m_2 gl_2, & V_{12} &= V_{21} = 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Los coeficientes V_{ij} también pueden obtenerse directamente como

$$V_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \right)_{(\theta_{01}, \theta_{02})} = (m_1 + m_2)gl_1, \quad (4.70)$$

$$V_{22} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \right)_{(\theta_{01}, \theta_{02})} = m_2 gl_2, \quad (4.71)$$

$$V_{12} = V_{21} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)_{(\theta_{01}, \theta_{02})} = 0. \quad (4.72)$$

La condición Ec. (4.47) para estos coeficientes es

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & -\omega^2 T_{12} \\ -\omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.73)$$

La ecuación característica es

$$(V_{11} - \omega^2 T_{11})(V_{22} - \omega^2 T_{22}) - (\omega^2)^2 T_{12}^2 = 0. \quad (4.74)$$

Con el cambio de notación $\omega^2 \equiv x$, tenemos la ecuación cuadrática

$$V_{11}V_{22} - (T_{11}V_{22} + T_{22}V_{11})x + (T_{11}T_{22} - T_{12}^2)x^2 = 0, \quad (4.75)$$

cuya solución es

$$x = \frac{(T_{11}V_{22} + T_{22}V_{11}) \pm \sqrt{(T_{11}V_{22} + T_{22}V_{11})^2 - 4(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)V_{11}V_{22}}}{2(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)}. \quad (4.76)$$

Sustituimos los términos

$$\begin{aligned} T_{11}V_{22} - T_{22}V_{11} &= (m_1 + m_2)m_2 g l_1^2 l_2 - (m_1 + m_2)m_2 g l_1 l_2^2 \\ &= (m_1 + m_2)m_2 g l_1 l_2(l_1 - l_2), \\ T_{11}T_{22} - T_{12}^2 &= (m_1 + m_2)m_2 l_1^2 l_2^2 - m_2^2 l_1^2 l_2^2 = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2, \\ V_{11}V_{22} &= (m_1 + m_2)m_2 g^2 l_1 l_2, \end{aligned}$$

y obtenemos,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2]} \right]. \quad (4.77)$$

En el caso $m_1 \gg m_2$, las frecuencias tienden a los valores correspondientes a oscilaciones independientes de dos péndulos simples,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} [m_1(l_1 + l_2) \pm m_1(l_1 - l_2)] \quad (4.78)$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{l_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_2}. \quad (4.79)$$

4.3. Modos normales

Hemos visto que las s ecuaciones de movimiento para un sistema con s grados de libertad que realiza pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s\}$ alrededor de los valores de equilibrio de sus coordenadas generalizadas $\{q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0s}\}$ son

$$\sum_j (T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (4.80)$$

La solución particular de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ conduce a las s ecuaciones

$$\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (4.81)$$

La condición Ec. (4.47)

$$\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0, \quad (4.82)$$

implica la existencia de soluciones no triviales $a_j \neq 0$, $\forall j$, y permite calcular las s frecuencias de las pequeñas oscilaciones mediante las soluciones del polinomio característico resultante de la Ec. (4.47). Denotamos estas frecuencias por ω_k , $k = 1, 2, \dots, s$.

Para cada ω_k , existe una solución $\eta_j(t) = a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$ y, por lo tanto, existe un sistema de s ecuaciones del tipo Ec. (4.81) para los coeficientes $a_j(\omega_k)$. Puesto que las frecuencias ω_k son reales, los coeficientes $a_j(\omega_k)$ también deben ser reales.

Por ejemplo, para $s = 2$,

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad & (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0 \\ i = 2 : \quad & (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Hay 2 ecuaciones para cada ω_k , ($k = 1, 2$). Sustitución de una ω_k da 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$ que permiten obtener las amplitudes relativas $a_1(\omega_k)/a_2(\omega_k)$.

La solución general de la ecuación de movimiento para el pequeño desplazamiento $\eta_j(t)$ consiste en la superposición de las soluciones particulares correspondientes a cada ω_k ,

$$\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}, \quad (4.84)$$

donde c_k son coeficientes que representan la fase compleja. Cabe recordar que se debe tomar la parte real para tener las soluciones oscilatorias físicas.

Definimos las *coordenadas o modos normales* del sistema como

$$\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (4.85)$$

Luego, se puede escribir

$$\eta_j(t) = \sum_k a_j(\omega_k) \xi_k, \quad (4.86)$$

es decir, la solución general es una combinación lineal de las coordenadas normales. En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son

$$\eta_1 = a_1(\omega_1) \xi_1 + a_1(\omega_2) \xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_1) \xi_1 + a_2(\omega_2) \xi_2. \quad (4.87)$$

Cada coordenada normal ξ_k satisface la ecuación

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0, \quad (4.88)$$

que corresponde a un oscilador armónico simple. Luego, cada ξ_k describe una oscilación global del sistema con una sola frecuencia ω_k : todas las partículas oscilan con la misma

frecuencia ω_k , pero con amplitudes $a_j(\omega_k)$ que pueden ser distintas entre sí. Por ejemplo, para el modo normal ξ_2 , con $s = 2$, tenemos

$$\eta_1 = a_1(\omega_2)\xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_2)\xi_2; \quad (4.89)$$

es decir, cada uno de los 2 grados de libertad oscila con la frecuencia ω_2 alrededor de su posición de equilibrio, pero con amplitudes respectivas $a_1(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2)$.

En general, la configuración de un modo normal ξ_k está dada por las amplitudes relativas correspondientes a ese modo; es decir, por los cocientes de las amplitudes $a_i(\omega_k)/a_j(\omega_k)$.

En sistemas que presentan oscilaciones pequeñas con varios grados de libertad, la frecuencia mayor corresponde al modo normal con amplitudes en fases opuestas.

Ejemplos.

1. Encontrar las frecuencias y la configuración de los modos normales de vibración en un modelo de la molécula lineal CO_2 .

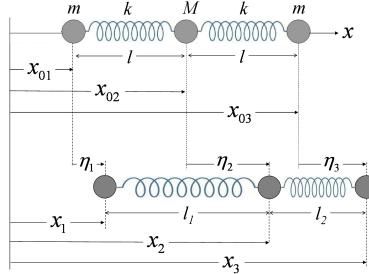


Figura 4.6: Modelo de la molécula triatómica lineal CO_2 .

M es la masa del átomo C; m es masa de los átomos O; l es la separación entre las posiciones de equilibrio de los átomos; la constante k describe la interacción C-O como un resorte; l_1, l_2 , miden las distancias entre los átomos fuera del equilibrio.

Sean x_{01}, x_{02}, x_{03} las posiciones de equilibrio de las tres partículas, respectivamente. Consideremos pequeños desplazamientos del equilibrio,

$$\eta_i = x_i - x_{0i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.90)$$

La energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2. \end{aligned} \quad (4.91)$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2, \quad (4.92)$$

donde

$$l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1, \quad (4.93)$$

$$l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2. \quad (4.94)$$

Luego,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Comparando con las formas generales cerca del equilibrio,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (4.96)$$

identificamos los coeficientes T_{ij} ,

$$\begin{array}{lll} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m, \end{array} \quad (4.97)$$

y los coeficientes V_{ij} ,

$$\begin{array}{lll} V_{11} = k & V_{12} = -k & V_{13} = 0 \\ V_{21} = -k & V_{22} = 2k & V_{23} = -k \\ V_{31} = 0 & V_{32} = -k & V_{33} = k. \end{array} \quad (4.98)$$

Las frecuencias están dadas por la condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$; es decir,

$$\left| \begin{array}{ccc} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{array} \right| = 0, \quad (4.99)$$

la cual conduce a la siguiente ecuación característica cúbica para ω^2 ,

$$(k - \omega^2 m) [(2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2] - k^2(k - \omega^2 m) = 0 \quad (4.100)$$

$$\Rightarrow \omega^2(k - \omega^2 m) [k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0. \quad (4.101)$$

con soluciones

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}. \quad (4.102)$$

Las frecuencias ω_2 y ω_3 para la molécula de CO_2 se encuentran en el infrarrojo. La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ corresponde a una traslación uniforme de la molécula, puesto que la Ec. (4.88) implica

$$\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 = \text{cte} \Rightarrow \text{receso o velocidad constante.} \quad (4.103)$$

La ecuación para las amplitudes a_j

$$\sum_j (V_{ij} - \omega_k^2 T_{ij}) a_j = 0, \quad (4.104)$$

equivale a un sistema de 3 ecuaciones para cada ω_k ,

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad (k - \omega_k^2 m) a_1 - k a_2 &= 0 \\ i = 2 : \quad -k a_1 + (2k - \omega_k^2 M) a_2 - k a_3 &= 0 \\ i = 3 : \quad -k a_2 + (k - \omega_k^2 m) a_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Para ω_1 ,

$$a_1(\omega_1) = a_2(\omega_1) = a_3(\omega_1). \quad (4.106)$$

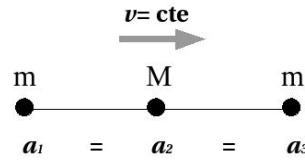


Figura 4.7: Configuración del modo normal correspondiente a ω_1 .

Para ω_2 ,

$$k - \omega_2^2 m = 0, \quad (4.107)$$

luego,

$$a_2(\omega_2) = 0, \quad a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2). \quad (4.108)$$

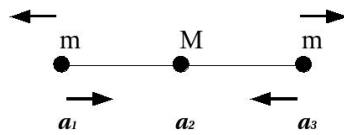


Figura 4.8: Configuración del modo normal correspondiente a ω_2 .

Para ω_3 , tenemos

$$k - \omega_3^2 m = k - k \left(1 + \frac{2m}{M} \right) = -\frac{2mk}{M} \quad (4.109)$$

luego,

$$a_1(\omega_3) = a_3(\omega_3) \quad (4.110)$$

$$a_2(\omega_3) = \frac{k - \omega_3^2 m}{k} a_1(\omega_3) = -\frac{2m}{M} a_1(\omega_3) \quad (4.111)$$

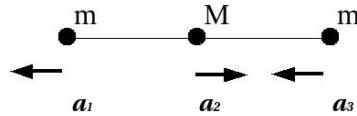


Figura 4.9: Configuración del modo normal correspondiente a ω_3 .

La configuración de los modos normales refleja el hecho que el momento lineal total de la molécula es constante, puesto que la fuerza externa total sobre la molécula es cero.

2. Encontrar las frecuencias de pequeñas oscilaciones y los modos normales de un péndulo con soporte deslizante horizontalmente.

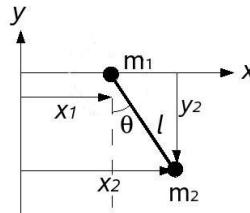


Figura 4.10: Péndulo con soporte deslizante horizontalmente.

El Lagrangiano de este sistema ya fue obtenido en el Cap. 1. La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\theta}\cos\theta), \quad (4.112)$$

y la energía potencial,

$$V = -m_2gl\cos\theta. \quad (4.113)$$

Las posiciones de equilibrio son $\theta_0 = 0$, x_0 ; luego

$$\eta_1 = x_1 - x_0, \quad \eta_2 = \theta - \theta_0 = \theta. \quad (4.114)$$

Para pequeños desplazamientos, $\cos\theta = \cos\eta \approx 1 - \frac{\eta^2}{2}$. Luego,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\eta}_2^2 + 2l\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2) \quad (4.115)$$

$$V = \frac{1}{2} m_2 g l \eta_2^2. \quad (4.116)$$

Comparando con las formas generales cerca del equilibrio,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad (4.117)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad (4.118)$$

identificamos los coeficientes V_{ij} ,

$$\begin{aligned} V_{11} &= 0, & V_{12} &= 0 \\ V_{21} &= 0, & V_{22} &= m_2 g l \end{aligned} \quad (4.119)$$

y los coeficientes T_{ij} ,

$$\begin{aligned} T_{11} &= (m_1 + m_2), & T_{12} &= m_2 l \\ T_{21} &= m_2 l, & T_{22} &= m_2 l^2. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Las frecuencias están dadas por la condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$,

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 T_{11} & -\omega^2 T_{12} \\ -\omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.121)$$

la cual conduce a la siguiente ecuación característica cuadrática para ω^2 ,

$$(\omega^2)^2 T_{12}^2 + \omega^2 T_{11}(V_{22} - \omega^2 T_{22}) = 0, \quad (4.122)$$

cuyas soluciones son

$$\omega_1^2 = 0, \quad (4.123)$$

$$\omega_2^2 = \frac{T_{11}V_{22}}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2} = \frac{(m_1 + m_2)m_2 g l}{(m_1 + m_2)m_2 l^2 - m_2^2 l^2} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{g}{l}. \quad (4.124)$$

Note que si $m_1 \rightarrow \infty$ (soporte fijo), entonces $\omega_2^2 = g/l$, correspondiente a la frecuencia para pequeñas oscilaciones de un péndulo simple.

La ecuación para las amplitudes a_j

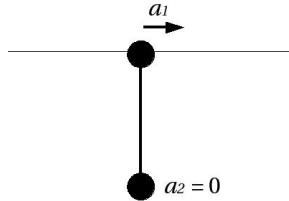
$$\sum_j (V_{ij} - \omega_k^2 T_{ij}) a_j = 0, \quad (4.125)$$

equivale a un sistema de 2 ecuaciones para cada ω_k ,

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad -\omega_k^2(m_1 + m_2)a_1 - \omega_k^2 m_2 l a_2 &= 0 \\ i = 2 : \quad -\omega_k^2 m_2 l a_1 - (m_2 g l - \omega_k^2 m_2 l^2)a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Para $\omega_1 = 0$, las amplitudes del modo correspondiente resultan en

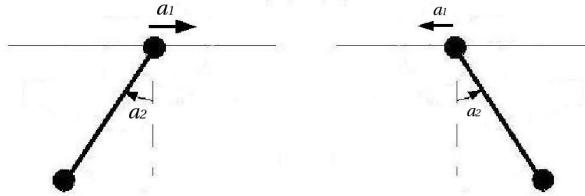
$$a_2(\omega_1) = 0, \quad a_1(\omega_1) = \text{arbitrario.} \quad (4.127)$$

Figura 4.11: Configuración del modo normal correspondiente a ω_1 .

Para ω_2 ,

$$\frac{a_1(\omega_2)}{a_2(\omega_2)} = -\frac{m_2 l}{(m_1 + m_2)} < 0, \quad (4.128)$$

es decir, en este modo las partículas se mueven siempre con amplitudes opuestas.

Figura 4.12: Configuración del modo normal correspondiente a ω_2 .

3. Dos osciladores armónicos con masas m_1 y m_2 , acoplados verticalmente mediante resortes de constante k y longitud en reposo l .

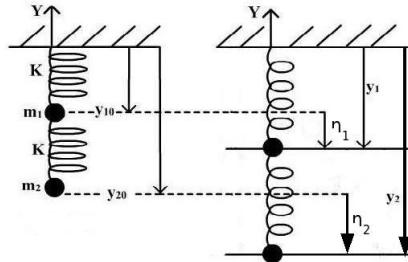


Figura 4.13: Osciladores armónicos acoplados verticalmente.

Las posiciones de equilibrio de las masas m_1 y m_2 son y_{01} y y_{02} , respectivamente. Los pequeños desplazamientos del equilibrio son $\eta_1 = y_1 - y_{01}$, $\eta_2 = y_2 - y_{02}$.

La energía potencial del sistema es

$$V = \frac{1}{2}k(y_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(y_2 - y_1 - l)^2 - m_1gy_1 - m_2gy_2. \quad (4.129)$$

Las posiciones de equilibrio están dadas por

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y_1} \right|_{(y_{01}, y_{02})} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y_2} \right|_{(y_{01}, y_{02})} = 0; \quad (4.130)$$

esto es,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y_1} \right|_{(y_{01}, y_{02})} = k(y_{01} - l) - k(y_{02} - y_{01} - l) - m_1g = 0 \quad (4.131)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y_2} \right|_{(y_{01}, y_{02})} = k(y_{02} - y_{01} - l) - m_2g = 0, \quad (4.132)$$

lo que conduce a

$$y_{01} = l + \frac{(m_1 + m_2)g}{k}, \quad y_{02} = y_{01} + l + \frac{m_2g}{k}. \quad (4.133)$$

La energía potencial, Ec. (4.129), se puede expresar en términos de los pequeños desplazamientos,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j, \quad \text{donde } V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{(y_{01}, y_{02})}. \quad (4.134)$$

Luego,

$$V_{11} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} \right|_{(y_{01}, y_{02})} = 2k \quad (4.135)$$

$$V_{22} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} \right|_{(y_{01}, y_{02})} = k \quad (4.136)$$

$$V_{12} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \right|_{(y_{01}, y_{02})} = -k = V_{21}. \quad (4.137)$$

La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos del equilibrio se puede obtener directamente de las contribuciones de la energía potencial de los resortes como

$$V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2, \quad (4.138)$$

lo que da los coeficientes V_{ij} ya encontrados.

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\eta}_2^2. \quad (4.139)$$

Comparando con la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j, \quad (4.140)$$

tenemos

$$T_{11} = m_1, \quad T_{12} = 0 = T_{21}, \quad T_{22} = m_2. \quad (4.141)$$

Las frecuencias de oscilación están dadas por la condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$,

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.142)$$

Note que la energía potencial gravitacional no influye en las frecuencias de las oscilaciones, sólo cambia las posiciones de equilibrio de las partículas. Luego,

$$(2k - m_1 \omega^2)(k - m_2 \omega^2) - k^2 = 0. \quad (4.143)$$

Llamando $x = \omega^2$, tenemos

$$m_1 m_2 x^2 - k(m_1 + m_2)x + k^2 = 0, \quad (4.144)$$

$$x = \omega_{\pm}^2 = \frac{k}{2m_1 m_2} \left[(m_1 + 2m_2) \pm \sqrt{m_1^2 + 4m_2^2} \right]. \quad (4.145)$$

Las ecuaciones para las amplitudes $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$, resultan

$$\begin{aligned} (2k - \omega_k^2 m_1) a_1 - k a_2 &= 0 \\ -k a_1 + (k - \omega_k^2 m_2) a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.146)$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(\omega_k)}{a_2(\omega_k)} = 1 - \frac{m_2 \omega_k^2}{k}. \quad (4.147)$$

Para $\omega_1 = \omega_+$,

$$\frac{a_1(\omega_1)}{a_2(\omega_1)} = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \right) + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2} \right] < 0. \quad (4.148)$$

En el modo normal correspondiente a $\omega_1 = \omega_+$, las amplitudes están siempre en fases opuestas.

Para $\omega_2 = \omega_-$,

$$\frac{a_1(\omega_2)}{a_2(\omega_2)} = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \right) - \sqrt{1 + 4 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2} \right] > 0. \quad (4.149)$$

Para el modo normal asociado a $\omega_2 = \omega_-$, las amplitudes están en fase.

4.4. Oscilaciones forzadas y amortiguadas

Consideremos el movimiento de pequeñas oscilaciones de un sistema sobre el cual actúa una fuerza externa. Supongamos, además, que el movimiento ocurre en un medio cuyo efecto sobre el movimiento no puede ser despreciado. Cuando una partícula se mueve en un medio, éste ejerce una fuerza de resistencia o fricción sobre la partícula que tiende a retrasar su movimiento. La energía suministrada por la fuerza externa a la partícula en movimiento eventualmente se disipa en el medio en forma de calor. Los movimientos oscilatorios en presencia de fuerzas externas y de fricción, se denominan *oscilaciones forzadas y amortiguadas*.

Para velocidades suficientemente pequeñas, se sabe experimentalmente que la fuerza de fricción sobre un cuerpo que se mueve en un medio es opuesta a la dirección de la velocidad del cuerpo y proporcional a su magnitud. Esto es, $f_{\text{fr}} = -\alpha v$, donde $\alpha > 0$ es el coeficiente de fricción característico del medio.

La fuerza externa puede tener cualquier forma; aquí consideraremos el caso de fuerzas oscilatorias porque tienen mucho interés y aplicaciones en sistemas físicos. Esto es, supondremos fuerzas externas de la forma $F_{\text{ext}} = f \cos \nu t$, donde f y ν son la amplitud y la frecuencia angular de la fuerza, respectivamente.

Por simplicidad, consideremos un partícula que realiza un movimiento oscilatorio con un grado de libertad, sujeto a una fuerza externa y amortiguado. Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, la ecuación de movimiento de la partícula es

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + f_{\text{fr}} + F_{\text{ext}} \\ \Rightarrow m\ddot{x} &= -kx - \alpha\dot{x} + f \cos \nu t. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Esta ecuación también describe el movimiento de un modo normal de un sistema con varios grados de libertad, forzado y amortiguado en un medio homogéneo.

La Ec. (4.150) se puede escribir como

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = \frac{f}{m} \cos \nu t, \quad (4.151)$$

donde $\omega^2 = k/m$ y hemos definido la constante $2\lambda \equiv \alpha/m$. La Ec. (4.151) se puede escribir en forma compleja como

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = \frac{f}{m} e^{i\nu t}. \quad (4.152)$$

La Ec. (4.152) es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea. Su solución tiene la forma $x = x_h + x_p$, donde x_h es la solución de la ecuación homogénea y x_p es una solución particular de la Ec. (4.152). La solución de la Ec. (4.151) corresponde a la parte real de la solución de la Ec. (4.152).

Buscamos una solución particular de la Ec. (4.152) en la forma

$$x_p = B e^{i\nu t} = b e^{i(\nu t + \delta)}, \quad (4.153)$$

donde $B = b e^{i\delta}$ es una amplitud compleja, y $b, \delta \in \Re$ son parámetros a determinar. Sustitución de x_p en la Ec. (4.152) conduce a

$$-\nu^2 b + i2\lambda\nu b + \omega^2 b = \frac{f}{m} e^{-i\delta}. \quad (4.154)$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria en ambos lados de la Ec. (4.154), tenemos

$$b(\omega^2 - \nu^2) = \frac{f}{m} \cos \delta, \quad (4.155)$$

$$2\lambda\nu b = -\frac{f}{m} \sin \delta, \quad (4.156)$$

de donde obtenemos

$$\tan \delta = \frac{2\lambda\nu}{\nu^2 - \omega^2}, \quad (4.157)$$

$$b = \frac{f}{m} \frac{1}{[(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2\lambda^2]^{1/2}}. \quad (4.158)$$

Tomando la parte real de x_p , tenemos

$$x_p = b \cos(\nu t + \delta). \quad (4.159)$$

La solución x_h satisface la ecuación homogénea

$$\ddot{x}_h + 2\lambda\dot{x}_h + \omega^2 x_h = 0. \quad (4.160)$$

Buscamos una solución en la forma $x_h = e^{irt}$, donde r es un parámetro a determinar. Sustitución en la Ec. (4.160) conduce a la siguiente ecuación para r ,

$$r^2 - i2\lambda r - \omega^2 = 0. \quad (4.161)$$

La Ec. (4.161) da dos valores complejos para r ,

$$r_{1,2} = i\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} = i\lambda \pm \gamma, \quad (4.162)$$

donde hemos definido

$$\gamma \equiv \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}, \quad (4.163)$$

y hemos asumido que $\omega > \lambda$, de manera que exista movimiento oscilatorio para tiempo asintótico. Luego, la solución general de la ecuación homogénea Ec. (4.160) debe ser la combinación lineal de $e^{ir_1 t}$ y $e^{ir_2 t}$, que son complejos conjugados. Entonces, podemos expresar x_h como

$$\begin{aligned} x_h &= e^{-\lambda t} [A e^{i\gamma t} + A^* e^{-i\gamma t}] \\ &= 2 e^{-\lambda t} \operatorname{Re} [A e^{i\gamma t}], \end{aligned} \quad (4.164)$$

donde $A = (a/2)e^{i\phi}$ es una amplitud compleja, con $a, \phi \in \mathbb{R}$. Tomando la parte real de x_h , obtenemos

$$x_h = a e^{-\lambda t} \cos(\gamma t + \phi). \quad (4.165)$$

Luego, la solución de la ecuación de movimiento, Ec. (4.152), es

$$x(t) = a e^{-\lambda t} \cos(\gamma t + \phi) + b \cos(\nu t + \delta). \quad (4.166)$$

Para tiempos suficientemente grandes, $t \gg 1/\lambda$, el primer término en la Ec. (4.166) decae, y el movimiento está determinado por el segundo término, el cual representa el estado asintótico y estacionario del sistema. Esto es, el movimiento estacionario corresponde a la solución

$$x_e(t) = b \cos(\nu t + \delta). \quad (4.167)$$

La respuesta del sistema en el estado estacionario está desfasada en un factor δ con respecto a la fuerza externa. En el movimiento estacionario, existe un flujo de energía que entra y sale del sistema. La energía es continuamente absorbida por el sistema desde la fuerza externa, y disipada en el medio por la fricción.

La frecuencia de resonancia de la fuerza externa ν_R es aquella para la cual la respuesta del sistema exhibe su máxima amplitud. El valor de ν_R se puede determinar a partir de la condición

$$\left. \frac{db}{d\nu} \right|_{\nu_R} = 0, \quad (4.168)$$

donde b es la amplitud dada por la Ec. (4.158). Calculamos la derivada como

$$\frac{db}{d\nu} = \frac{f}{m} \frac{2\nu[(\omega^2 - \nu^2) - 2\lambda^2]}{[(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2\lambda^2]^{3/2}}. \quad (4.169)$$

La condición Ec. (4.168) conduce al valor de la frecuencia de resonancia,

$$\nu_R = \omega^2 - 2\lambda^2. \quad (4.170)$$

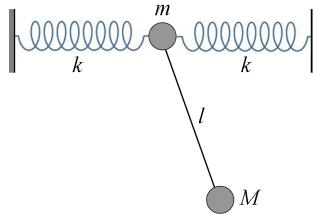
El valor de la amplitud de respuesta del sistema en resonancia es

$$b_{\max} = \frac{f}{m} \frac{1}{2\lambda(\omega^2 - \lambda^2)^{1/2}}. \quad (4.171)$$

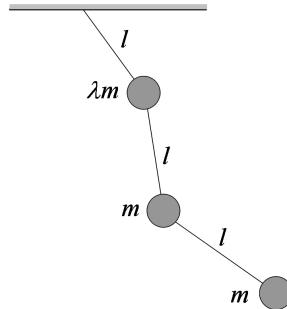
En ausencia de fricción, $\lambda = 0$; entonces $\nu_R = \omega$ y $b \rightarrow \infty$. Luego, el amortiguamiento reduce el valor de la frecuencia de resonancia y limita el crecimiento de la amplitud en resonancia. Note que si $\omega^2 < 2\lambda^2$, la frecuencia ν_R tiene un valor imaginario y no hay resonancia; la amplitud b simplemente decrece con el incremento de ν .

4.5. Problemas

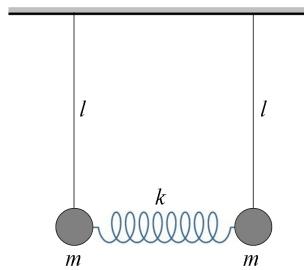
1. Una partícula de masa m se mueve sin fricción sobre la superficie $z = kr^2$ (coordenadas cilíndricas), donde z es la dirección vertical y k es constante.
 - a) Encuentre la condición de estabilidad de una órbita circular de radio r_o sobre esta superficie.
 - b) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de esta órbita circular.
2. Una partícula de masa M cuelga de una varilla de masa despreciable y longitud l , cuyo punto de soporte consiste en otra partícula de masa m sujetada horizontalmente a dos resortes de constante k cada uno.
 - a) Encuentre las frecuencias de pequeñas oscilaciones para este sistema.
 - b) Encuentre y dibuje esquemáticamente la configuración de los modos normales correspondientes a esas frecuencias.



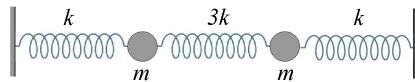
3. Un péndulo triple consiste en tres masas, λm , m y m , unidas por varillas de longitud l cada una.
 - a) Determine el valor del parámetro λ tal que una de las frecuencias para pequeñas oscilaciones de este sistema sea igual a la frecuencia para pequeñas amplitudes de un péndulo simple con longitud $l/2$.
 - b) Encuentre y dibuje esquemáticamente el modo normal correspondiente a esta frecuencia del sistema.



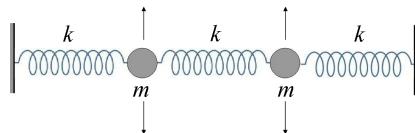
4. Considere dos péndulos de longitud l y masa m cada uno, acoplados por un resorte de constante k .
- Encuentre las frecuencias de pequeñas oscilaciones del sistema.
 - Encuentre y dibuje esquemáticamente las configuraciones de los modos normales correspondientes a estas frecuencias.



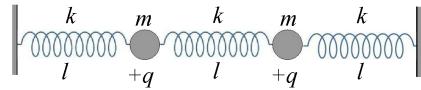
5. Encuentre las frecuencias y las configuraciones de los modos normales correspondientes a pequeñas oscilaciones longitudinales del sistema de dos masas y tres resortes mostrado en la figura.



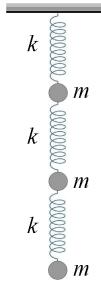
6. Considere un sistema formado por tres partículas de masa m cada una, las cuales se mueven sin fricción sobre una circunferencia de radio R , conectadas entre sí por resortes idénticos de constante k a lo largo de la circunferencia.
- Encuentre las frecuencias para pequeñas oscilaciones de este sistema.
 - Encuentre y dibuje esquemáticamente la configuración de los modos normales correspondientes a estas frecuencias.
7. Calcule las frecuencias y las configuraciones de los modos normales para pequeñas oscilaciones transversales de un sistema formado por dos masas m , conectadas entre sí y a las paredes por resortes horizontales de constante k cada uno.



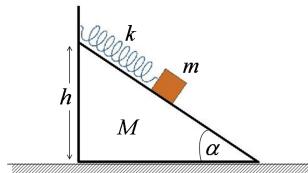
8. Dos partículas con masa m y carga $+q$ cada una están conectadas entre sí y a paredes fijas mediante resortes iguales de constante k y longitud en reposo l . Encuentre la ecuación característica para las frecuencias del sistema.



9. Encuentre las frecuencias para oscilaciones verticales y los correspondientes modos normales para el sistema de tres masas y tres resortes mostrado en la figura.

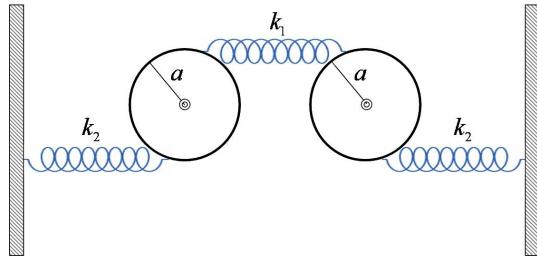


10. Un bloque de masa m se encuentra unido por medio de un resorte de constante k a una cuña de masa M y altura h que forma un ángulo α con la horizontal, como se muestra en la figura. La masa M puede deslizarse sobre la superficie horizontal. Desprecie la fricción.
- Calcule las frecuencias de pequeñas oscilaciones del sistema alrededor del equilibrio.
 - Encuentre y dibuje esquemáticamente las configuraciones relativas de los modos normales correspondientes a cada frecuencia del sistema.



11. Considere una masa m colgada verticalmente de un resorte de constante k en el campo gravitacional terrestre, e inmersa en un medio viscoso cuyo coeficiente de fricción es α .
- Encuentre la ecuación de movimiento de la masa.
 - Encuentre la trayectoria en función del tiempo.
 - Describa el estado estacionario del sistema.

12. Un sistema consiste en dos aros, de radio a y masa m cada uno, que pueden girar sin fricción alrededor de ejes que pasan por sus respectivos centros fijos. Los aros están conectados entre ellos por un resorte de constante k_1 y, a su vez, cada uno está conectado a una pared fija mediante un resorte de constante k_2 .
- Calcule las frecuencias para pequeñas oscilaciones en este sistema.
 - Encuentre y dibuje las configuraciones de los modos normales correspondientes a cada frecuencia del sistema.



Capítulo 5

Movimiento de cuerpos rígidos

5.1. Velocidad angular de un cuerpo rígido

Un *cuerpo rígido* es un sistema de partículas cuyas distancias mutuas son fijas, i.e., no varían en el tiempo. Por ejemplo, los cuerpos sólidos, las estructuras fijas, andamios, son cuerpos rígidos.

La descripción del movimiento de un cuerpo rígido se puede hacer en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio. Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:

1. Un sistema inercial o laboratorio, denotado por (x, y, z) y con origen O .
2. Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa (CM), identificado por (x_1, x_2, x_3) .

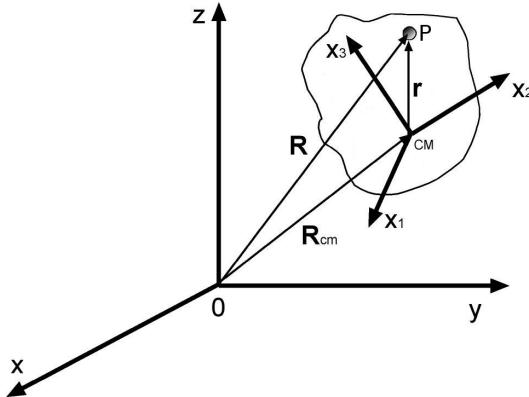


Figura 5.1: Sistemas de coordenadas para un cuerpo rígido.

Mediante estos sistemas de coordenadas, un pequeño desplazamiento general del cuerpo rígido se puede representar como la suma de dos movimientos:

1. Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) .
2. Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

La posición \mathbf{R} de cualquier punto P del cuerpo rígido en un instante dado con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{cm}} + \mathbf{r}, \quad (5.1)$$

donde

$$\mathbf{R}_{\text{cm}} : \text{posición del centro de masa con respecto al laboratorio } (x, y, z), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{r} : \text{posición de } P \text{ con respecto al sistema fijo en el cuerpo } (x_1, x_2, x_3). \quad (5.3)$$

Consideremos un desplazamiento infinitesimal de P en el laboratorio,

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\text{cm}} + d\mathbf{r}. \quad (5.4)$$

Un cambio infinitesimal $d\mathbf{r}$ en las coordenadas (x_1, x_2, x_3) sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector \mathbf{r} , no a un cambio de su magnitud (puesto que la distancia de P al centro de masa es fija). Luego, un cambio $d\mathbf{r}$ debe ser el resultado de una rotación infinitesimal alrededor de un eje dado instantáneo que pasa por el centro de masa del cuerpo rígido.

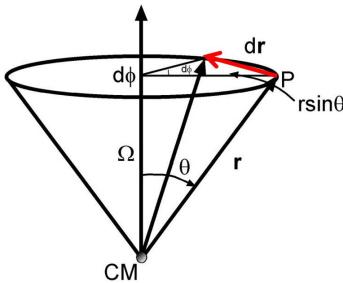


Figura 5.2: Rotación infinitesimal alrededor de un eje instantáneo con dirección $d\Phi$ que pasa por el centro de masa.

Sea $d\Phi$ la magnitud el ángulo infinitesimal de rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa cuya dirección es $d\Phi$. El sentido de la rotación se asigna según la regla de la mano derecha, con el pulgar derecho apuntando en la dirección $d\Phi$.

Sea θ el ángulo entre la dirección $d\Phi$ y el vector \mathbf{r} . El vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\Phi, \mathbf{r})$. Su magnitud es $dr = (r \sin \theta)d\Phi$ y su dirección está dada por

$$d\mathbf{r} = d\Phi \times \mathbf{r}. \quad (5.5)$$

Luego,

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{cm} + d\Phi \times \mathbf{r}, \quad (5.6)$$

y la variación en el tiempo es

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{cm}}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} \times \mathbf{r}, \quad (5.7)$$

lo cual puede escribirse como

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (5.8)$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} : \text{ velocidad de } P \text{ en el laboratorio } (x, y, z), \quad (5.9)$$

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d\mathbf{R}_{cm}}{dt} : \text{ velocidad de traslación del centro de masa en } (x, y, z), \quad (5.10)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\Phi}{dt} : \text{ velocidad angular instantánea de rotación.} \quad (5.11)$$

La dirección de la velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma que la del vector $d\Phi$. En general, la dirección y la magnitud de $\boldsymbol{\Omega}$ pueden cambiar durante el movimiento del cuerpo rígido. En un instante dado, todos los puntos del cuerpo están girando con la misma velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$.

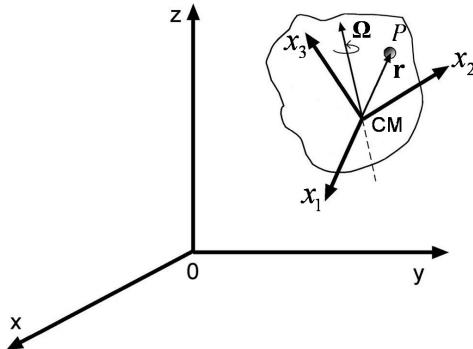


Figura 5.3: Velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

5.2. Ángulos de Euler

La ubicación de un punto P de un cuerpo rígido en el sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) está dada por el vector \mathbf{R}_{cm} y por la dirección del vector \mathbf{r} , ya que la magnitud de \mathbf{r} no puede cambiar. La dirección de \mathbf{r} está dada por la orientación relativa de los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema de referencia fijo en el cuerpo con respecto a

los ejes (x, y, z) del sistema de referencia del laboratorio. La descripción de la orientación relativa entre dos sistemas de coordenadas cartesianas requiere de tres ángulos entre los respectivos ejes de cada sistema. Luego, un cuerpo rígido posee en total 6 grados de libertad: tres coordenadas para la posición del centro de masa en el laboratorio y tres ángulos para describir la orientación del cuerpo con respecto al sistema del laboratorio.

Se escogen como ángulos convenientes los *ángulos de Euler*, por cuanto éstos describen de manera natural los movimientos giratorios de un cuerpo rígido, tal como un trompo. Estos movimientos son: *precesión* (rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio), *nutación* (inclinación con respecto al eje fijo) y *rotación* (rotación del cuerpo sobre sí mismo).

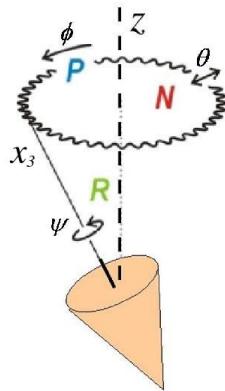
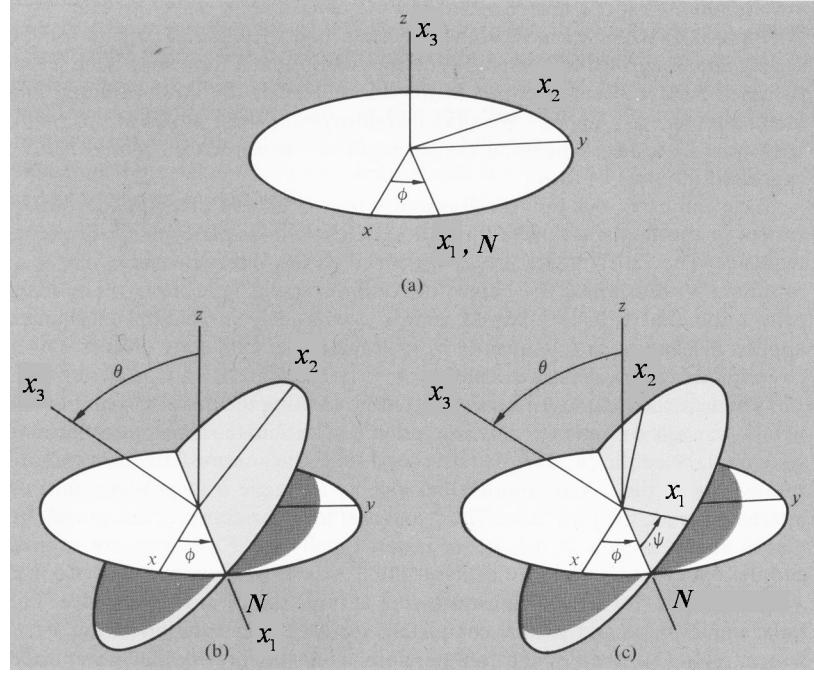


Figura 5.4: Movimientos de un cuerpo rígido en términos de ángulos de Euler. P : precesión ϕ (rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio); N : nutación θ (inclinación con respecto al eje fijo); y R : rotación ψ (rotación del cuerpo sobre sí mismo).

Para determinar la orientación de los ejes (x_1, x_2, x_3) con respecto a los ejes (x, y, z) mediante los ángulos de Euler, hacemos coincidir los orígenes de ambos sistemas, CM y O . Los ángulos de Euler se definen de acuerdo a las rotaciones de los ejes (x_1, x_2, x_3) con respecto a los ejes fijos (x, y, z) , mostradas en la Fig. (5.5), de la siguiente manera:

- Angulo de precesión*, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z , sobre el plano (x, y) , medido desde el eje x hasta el eje $x_1 = N$, donde N es la línea de intersección del plano (x_1, x_2) con el plano (x, y) , y se denomina *línea nodal*.
- Angulo de nutación*, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N , medido desde z hasta x_3 .
- Angulo de rotación*, $\psi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje x_3 , sobre el plano (x_1, x_2) , medido desde N a x_1 .

Figura 5.5: Angulos de Euler ϕ , θ y ψ .

Las velocidades angulares correspondientes a los ángulos de Euler apuntan en las siguientes direcciones, siguiendo la regla de la mano derecha:

- (a) $\dot{\phi}$: dirección z ;
- (b) $\dot{\theta}$: dirección lineal nodal N , perpendicular al plano (x_3, z) ;
- (c) $\dot{\psi}$: dirección x_3 .

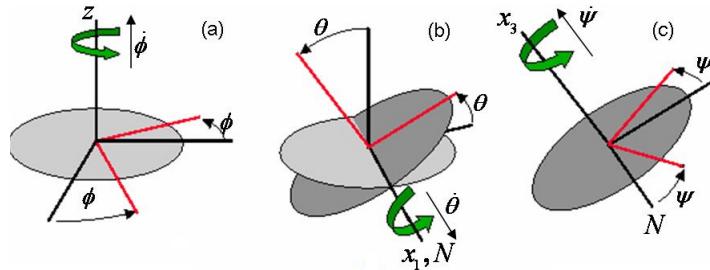


Figura 5.6: Angulos de Euler y sus respectivas velocidades.

Las velocidades angulares $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus componentes o proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3).

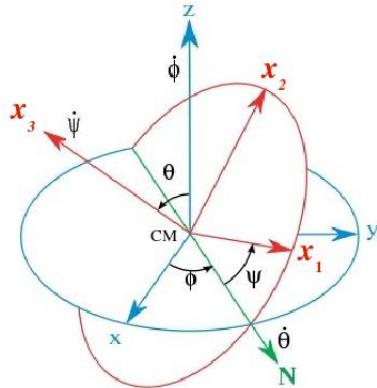


Figura 5.7: Angulos de Euler y orientación de los ejes (x_1, x_2, x_3) con respecto a los ejes (x, y, z).

Las componentes de $\dot{\psi} = (\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3)$ sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) son:

$$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}, \quad \text{en dirección del eje } x_3, \quad (5.12)$$

$$\dot{\psi}_2 = 0, \quad (5.13)$$

$$\dot{\psi}_1 = 0. \quad (5.14)$$

Para obtener las componentes de $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ sobre los ejes (x_1, x_2, x_3), consideraremos la Fig. (5.8).

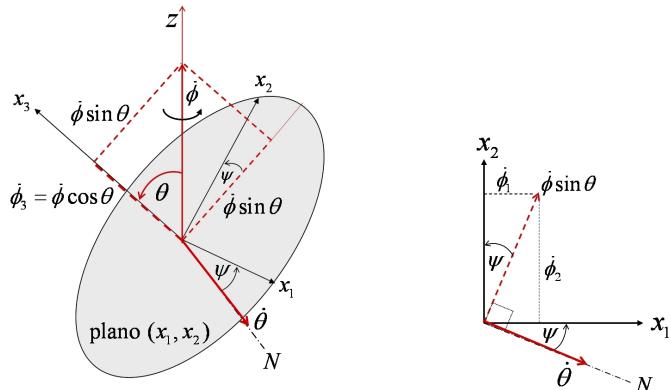


Figura 5.8: Izquierdo: componente $\dot{\phi}_3$ y proyección de $\dot{\phi}$ sobre el plano (x_1, x_2). Derecho: Componentes $\dot{\phi}_2$ y $\dot{\phi}_2$ de la proyección de $\dot{\phi}$ sobre el plano (x_1, x_2).

Las componentes de $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)$ en la Fig. (5.8) son:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \quad (5.15)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad (5.16)$$

$$\dot{\theta}_3 = 0, \quad \text{puesto que } \dot{\theta} \text{ es perpendicular a } x_3. \quad (5.17)$$

Por último, consideremos las componentes de $\dot{\phi} = (\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3)$. La proyección de $\dot{\phi}$ sobre el eje x_3 es

$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta. \quad (5.18)$$

La proyección de $\dot{\phi}$ sobre el plano (x_1, x_2) es igual a $\dot{\phi} \sin \theta$. Luego, las componentes $\dot{\phi}_2$ y $\dot{\phi}_1$ sobre el plano (x_1, x_2) son

$$\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \sin \theta) \sin \psi, \quad (5.19)$$

$$\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \sin \theta) \cos \psi. \quad (5.20)$$

La velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ de un cuerpo rígido es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler. Las componentes del vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ en el sistema (x_1, x_2, x_3) se pueden expresar en términos de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus correspondientes velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.

Para cada componente Ω_i , podemos escribir

$$\Omega_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.21)$$

Reagrupando las componentes de $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$, y sustituyendo en la Ec. (5.21), tenemos

$$\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (5.22)$$

$$\Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (5.23)$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \quad (5.24)$$

5.3. Energía cinética y tensor de inercia

La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante; toda la energía potencial del cuerpo equivale a la energía potencial de su centro de masa.

Por otro lado, la energía cinética de un cuerpo rígido cuya velocidad angular instantánea es $\boldsymbol{\Omega}$, está dada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (5.25)$$

donde la sumatoria sobre j se extiende a todas las partículas del cuerpo, m_j es la masa de la partícula j del cuerpo y \mathbf{v}_j es su velocidad, dada por la Ec. (5.8),

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j, \quad (5.26)$$

donde $\mathbf{r}_j = (x_1(j), x_2(j), x_3(j))$. La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo. Luego,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_j m_j v_{\text{cm}}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

El primer término en la Ec. (5.27) es

$$\frac{1}{2} \sum_j m_j v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j \right) v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2. \quad (5.28)$$

donde $M = \sum_j m_j$ es la masa total del cuerpo.

El segundo término en la Ec. (5.27) se puede evaluar usando la identidad vectorial $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, la cual conduce a

$$\sum_j m_j \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \cdot (\mathbf{v}_{\text{cm}} \times \boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{v}_{\text{cm}} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \left(\sum_j m_j \mathbf{r}_j \right) = 0, \quad (5.29)$$

puesto que en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa

$$\mathbf{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum_j m_j \mathbf{r}_j}{M} = 0. \quad (5.30)$$

El tercer término en la Ec. (5.27) se puede evaluar usando la identidad vectorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, la cual da

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{\Omega}^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2. \quad (5.31)$$

Sustituyendo en la Ec. (5.27), tenemos

$$T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j [\boldsymbol{\Omega}^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2] \quad (5.32)$$

$$= T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}, \quad (5.33)$$

donde el primer término es la energía cinética de traslación del cuerpo y el segundo término corresponde a la contribución debida a la rotación del cuerpo rígido.

Se puede expresar

$$\Omega_i = \sum_k \Omega_k \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (5.34)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k \delta_{ik} = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}, \quad (5.35)$$

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_i(j) \right) \left(\sum_k \Omega_k x_k(j) \right) = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k x_i(j) x_k(j). \quad (5.36)$$

En lo que sigue, suprimiremos el índice j de las partículas en la componentes de \mathbf{r}_j , i.e., $x_k(j) \rightarrow x_k$. Luego,

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k} (\Omega_i \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \Omega_i \Omega_k x_i x_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \sum_j m_j (r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde $i, k = 1, 2, 3$ y el índice j cuenta las partículas del cuerpo. La Ec. (5.37) se puede escribir en la forma

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \quad (5.38)$$

donde hemos definido el *tensor de inercia* del cuerpo rígido como

$$I_{ik} \equiv \sum_j m_j (r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \quad (5.39)$$

El tensor de inercia se puede expresar como una matriz,

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_j m_j (x_2^2 + x_3^2) & -\sum_j m_j x_1 x_2 & -\sum_j m_j x_1 x_3 \\ -\sum_j m_j x_2 x_1 & \sum_j m_j (x_1^2 + x_3^2) & -\sum_j m_j x_2 x_3 \\ -\sum_j m_j x_3 x_1 & -\sum_j m_j x_3 x_2 & \sum_j m_j (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

El tensor de inercia es simétrico, $I_{ik} = I_{ki}$, por lo que posee solamente seis componentes independientes. El tensor I_{ik} es una propiedad del cuerpo rígido que caracteriza la distribución de masa del cuerpo en torno a los ejes (x_1, x_2, x_3) . Físicamente, cada componente del tensor de inercia expresa la resistencia o inercia de un cuerpo a ser rotado en torno a un eje dado. Por ejemplo, I_{33} mide la resistencia del cuerpo a ser rotado alrededor del eje x_3 .

Con una escogencia adecuada de los ejes (x_1, x_2, x_3) para cuerpos simétricos, es posible hacer que I sea diagonal: $I_{ik} = 0$, si $i \neq k$. En ese caso,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11} \Omega_1^2 + I_{22} \Omega_2^2 + I_{33} \Omega_3^2). \quad (5.41)$$

Para una distribución continua de masa, pasamos al límite continuo $\sum_j m_j \rightarrow \int \rho dV$, donde ρ es la densidad y $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ es el elemento de volumen del cuerpo. En ese caso, el tensor de inercia se expresa como

$$I_{ik} = \int \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{ik} - x_i x_k] dV. \quad (5.42)$$

Teorema de los ejes paralelos.

Sea I_{ik} el tensor de inercia de un cuerpo rígido, expresado en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo. Entonces, en un sistema diferente de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) , cuyo origen O' se encuentra en una posición \mathbf{a} con respecto al centro de masa del cuerpo, el tensor de inercia es

$$I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad (5.43)$$

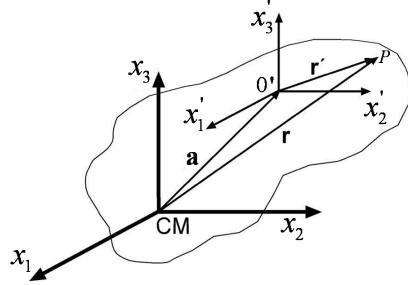


Figura 5.9: Diferentes sistemas de coordenadas fijas para un cuerpo rígido.

Demostración:

El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es

$$I_{ik} = \sum_j m_j (r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \quad (5.44)$$

Supongamos un sistema diferente de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) , cuyo origen O' se encuentra en una posición \mathbf{a} con respecto al centro de masa del cuerpo. La posición de un punto P del cuerpo en el sistema (x_1, x_2, x_3) es

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j, \quad (5.45)$$

$$\Rightarrow x_i = a_i + x'_i. \quad (5.46)$$

Luego, en el sistema de coordenadas (x'_1, x'_2, x'_3) , tenemos

$$I'_{ik} = \sum_j m_j (r'_j{}^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k), \quad (5.47)$$

donde

$$r'_j{}^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{a})^2 = r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l x_l a_l. \quad (5.48)$$

Sustituyendo,

$$I'_{ik} = \sum_j m_j \left[\left(r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l x_l a_l \right) \delta_{ik} - (x_i - a_i)(x_k - a_k) \right] \quad (5.49)$$

$$= \sum_j m_j (r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k) + \sum_j m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k) \quad (5.50)$$

$$- 2 \sum_j m_j \sum_l x_l a_l \delta_{ik} + \sum_j m_j x_i a_k + \sum_j m_j x_k a_i. \quad (5.51)$$

Pero en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , tenemos

$$\sum_j m_j x_i a_k = a_k \left(\sum_j m_j x_i(j) \right)^0 = 0, \quad (5.52)$$

$$\sum_j m_j x_k a_i = a_i \left(\sum_j m_j x_k(j) \right)^0 = 0. \quad (5.53)$$

Además,

$$\sum_j m_j \sum_l x_l a_l = \sum_l a_l \left(\sum_j m_j x_l(j) \right)^0 = 0. \quad (5.54)$$

Luego tenemos,

$$I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad \blacklozenge \quad (5.55)$$

En particular, si $i = k$, el teorema de ejes paralelos implica que

$$\begin{aligned} I'_{33} &= I_{33} + \sum m_j (a^2 - a_3^2) \\ &= I_{33} + \sum m_j (a_1^2 + a_2^2) \\ &= I_{33} + M a_\perp^2, \end{aligned} \quad (5.56)$$

donde M es la masa total del cuerpo y $a_\perp = a_1^2 + a_2^2$ es la distancia perpendicular entre ejes x_3 y x'_3 .

En general,

$$I'_{ii} = I_{ii} + M a_\perp^2, \quad (5.57)$$

donde a_\perp es la distancia perpendicular entre ejes x_i y x'_i .

Ejemplos.

1. Momentos de inercia de un cuerpo rígido plano.

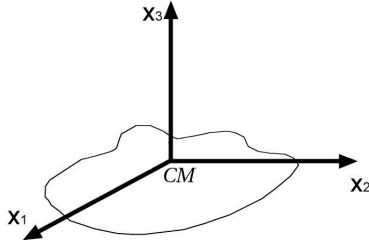


Figura 5.10: Cuerpo rígido plano.

Llamemos (x_1, x_2) al plano del cuerpo rígido. Entonces el eje x_3 es perpendicular al cuerpo y $\mathbf{r}_j = (x_1(j), x_2(j), 0)$, $\forall j$. Luego,

$$I_{11} = \sum_j m_j x_2^2, \quad (5.58)$$

$$I_{22} = \sum_j m_j x_1^2, \quad (5.59)$$

$$I_{33} = \sum_j m_j (x_1^2 + x_2^2) = I_{11} + I_{22}. \quad (5.60)$$

2. Momentos de inercia de un aro uniforme, de masa M y radio R .

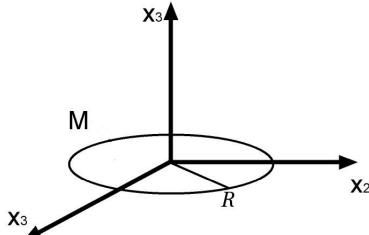


Figura 5.11: Aro.

Sea x_3 el eje perpendicular al plano del aro. Entonces,

$$I_{33} = \int (x_1^2 + x_2^2) \rho dV = R^2 \int \rho dV = MR^2. \quad (5.61)$$

El aro posee simetría axial con respecto al eje x_3 ; luego $I_{11} = I_{22}$. Adicionalmente, puesto que el aro es un cuerpo rígido plano, tenemos

$$I_{11} = I_{22} = \frac{I_{33}}{2} = \frac{1}{2}MR^2. \quad (5.62)$$

3. Momentos de inercia de un cilindro uniforme de altura h , radio R y masa M .

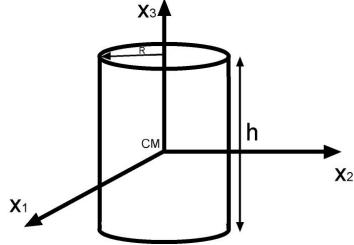


Figura 5.12: Cilindro.

La densidad de masa del cilindro es $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$. El elemento de volumen de un cascarón cilíndrico se puede expresar como $dV = 2\pi r h dr$, donde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} I_{33} &= \rho \int (x_1^2 + x_2^2) dV \\ &= 2\pi \rho h \int_0^R r^2 r dr \\ &= \frac{1}{2} M R^2. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Notemos que, por definición,

$$I_{11} + I_{22} = \int \rho(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) dV = I_{33} + 2 \int \rho x_3^2 dV. \quad (5.64)$$

Adicionalmente, por la simetría axial, los momentos de inercia $I_{11} = I_{22}$. Luego,

$$I_{11} = I_{22} = \frac{I_{33}}{2} + \int \rho x_3^2 dV. \quad (5.65)$$

Usando el elemento de volumen $dV = \pi R^2 dx_3$, correspondiente a una sección transversal (disco) de espesor dx_3 , calculamos

$$\int \rho x_3^2 dV = \rho \pi R^2 \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 = \rho \pi R^2 \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} M h^2. \quad (5.66)$$

Entonces,

$$I_{11} = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M h^2 = I_{22}. \quad (5.67)$$

A partir de los resultados para un cilindro, pueden obtenerse los momentos de inercia correspondientes a otros cuerpos rígidos.

Si $R \rightarrow 0$, tenemos una varilla uniforme de longitud h y masa M .

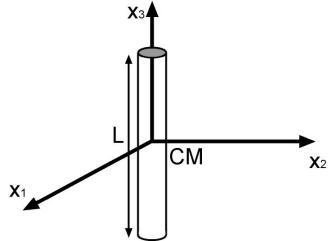


Figura 5.13: Varilla de longitud L .

En ese caso,

$$I_{33} = 0, \quad (5.68)$$

$$I_{11} = I_{22} = \frac{1}{12}ML^2, \quad (5.69)$$

donde hemos llamado $h = L$.

Por otro lado, si $h \rightarrow 0$ tenemos un disco uniforme de masa M y radio R . Entonces,

$$I_{33} = \frac{1}{2}MR^2. \quad (5.70)$$

$$I_{11} = I_{22} = \frac{I_{33}}{2}. \quad (5.71)$$

4. Sea una varilla de longitud L y masa M . Calcular el momento de inercia I'_{22} con respecto a un eje x'_2 que pasa por un extremo de la varilla, paralelo al eje x_2 .

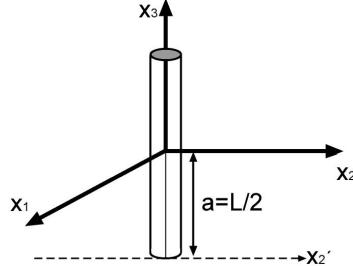


Figura 5.14: Ejes paralelos x_2 y x'_2 para un varilla de longitud L .

Tenemos $\mathbf{a} = (0, 0, -L/2)$ y $a_\perp = a = L/2$. Luego,

$$I'_{22} = I_{22} + Ma_\perp^2 \quad (5.72)$$

$$= I_{22} + M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 \quad (5.73)$$

$$= \frac{1}{3}ML^2. \quad (5.74)$$

5. Momentos de inercia de una esfera uniforme, de masa M y radio R .

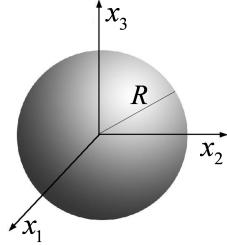


Figura 5.15: Cuerpo rígido esférico.

La simetría esférica implica que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$. Por otro lado, la suma

$$I_{11} + I_{22} + I_{33} = 2 \sum_j m_j(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2 \sum_j m_j r_j^2 \quad (5.75)$$

$$\Rightarrow I_{11} = \frac{2}{3} \sum_j m_j r_j^2. \quad (5.76)$$

Para una distribución continua y uniforme de masa, tenemos

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{2}{3} \int \rho r^2 dV \\ &= \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^2 (4\pi r^2) dr = \frac{2}{3} 4\pi \rho \frac{R^5}{5}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde hemos empleado el elemento de volumen $dV = 4\pi r^2 dr$. Sustituyendo la densidad de masa $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$, obtenemos

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{5} MR^2. \quad (5.78)$$

Si tenemos un cascarón esférico de radio R y masa M , la densidad de masa se puede expresar como $\rho = \frac{M}{4\pi R^2} \delta(r - R)$, donde $\delta(r - R)$ es la función delta de Dirac, tal que $\delta(r - R) = 0$ si $r \neq R$. La integral de volumen de esta densidad da la masa del cascarón,

$$\int \rho dV = \frac{M}{4\pi R^2} \int_0^\infty 4\pi r^2 \delta(r - R) dr = M. \quad (5.79)$$

Luego, los momentos de inercia de un cascarón esférico de radio R y masa M son

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22} = I_{33} &= \frac{2}{3} \int r^2 \rho dV \\ &= \frac{2}{3} \frac{M}{4\pi R^2} \int_0^R 4\pi r^4 \delta(r - R) dr \\ &= \frac{2}{3} MR^2. \end{aligned} \quad (5.80)$$

6. Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω , y sobre eje CD con velocidad angular ν , como se muestra en la Fig. (5.16).

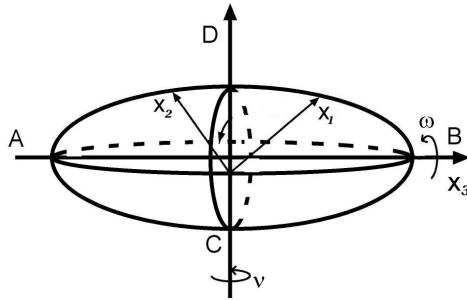


Figura 5.16: Elipsoide en rotación simultánea sobre dos ejes perpendiculares.

Escogemos eje AB en la dirección x_3 . Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de ω es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2) .

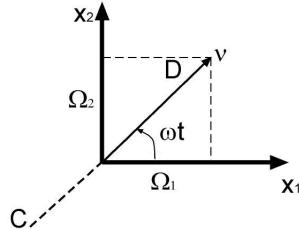


Figura 5.17: Velocidad angular ν sobre el plano (x_1, x_2) .

La velocidad angular del cuerpo es $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, donde

$$\Omega_3 = \omega, \quad (5.81)$$

$$\Omega_1 = \nu \cos \omega t, \quad (5.82)$$

$$\Omega_2 = \nu \sin \omega t. \quad (5.83)$$

Luego,

$$\begin{aligned} T = T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}I_{11}\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_{22}\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_{33}\Omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2}(I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \sin^2 \omega t)\nu^2 + \frac{1}{2}I_{33}\omega^2. \end{aligned} \quad (5.84)$$

7. Energía cinética de un cilindro de masa M y radio a , rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica de radio $R > a$.

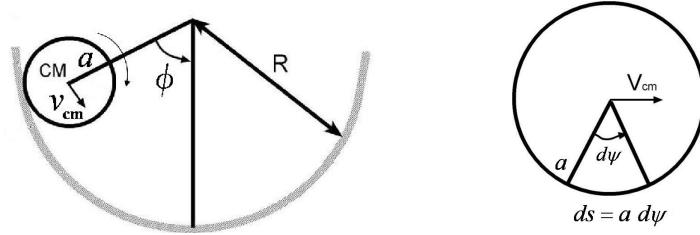


Figura 5.18: Izquierda: Cilindro rodando sin deslizar dentro de otro cilindro. Derecha: Condición de rodar sin deslizar para el cilindro de radio a

La energía cinética es

$$T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}, \quad (5.85)$$

donde

$$T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2. \quad (5.86)$$

La velocidad de traslación del centro de masa es

$$v_{\text{cm}} = (R - a) \dot{\phi}. \quad (5.87)$$

Sea $x_3 = z$ el eje del cilindro rodante. Entonces $\Omega = \Omega_3 \hat{x}_3$, con $\Omega_3 = \dot{\psi}$, y

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{33} \Omega_3^2 = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\psi}^2. \quad (5.88)$$

La condición de rodar sin deslizar implica que

$$v_{\text{cm}} = a \dot{\psi}. \quad (5.89)$$

Luego,

$$\dot{\psi} = \frac{v_{\text{cm}}}{a} = \frac{(R - a) \dot{\phi}}{a}. \quad (5.90)$$

Sustitución en la Ec. (5.85) da

$$T = \frac{1}{2} M (R - a)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{33} \frac{(R - a)^2}{a^2} \dot{\phi}^2. \quad (5.91)$$

Para el cilindro rodante, $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M (R - a)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{4} M (R - a)^2 \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{3}{4} M (R - a)^2 \dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (5.92)$$

5.4. Momento angular de un cuerpo rígido

El momento angular de un sistema depende del conjunto de coordenadas con respecto al cual estén definidas las posiciones de las partículas del sistema. Para un cuerpo rígido, es conveniente escoger el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del cuerpo,

$$\mathbf{l} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j), \quad (5.93)$$

donde \mathbf{r}_j es el vector de posición de la partícula j en las coordenadas (x_1, x_2, x_3) .

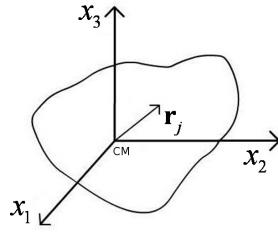


Figura 5.19: Sistema de referencia para definir el momento angular de un cuerpo rígido.

La velocidad de la partícula j en este sistema se debe sólo a la rotación del cuerpo, y está dada por

$$\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j, \quad (5.94)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular instantánea del cuerpo. Luego,

$$\mathbf{l} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j). \quad (5.95)$$

Usando la identidad vectorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, podemos expresar

$$\mathbf{l} = \sum_j m_j [r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j] \quad (5.96)$$

Consideremos la componente i del vector \mathbf{l} en la Ec. (5.96),

$$\begin{aligned} l_i &= \sum_j m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_i(j) \sum_k x_k(j) \Omega_k \right] \\ &= \sum_j m_j \left[\sum_k \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k x_i(j) x_k(j) \Omega_k \right] \\ &= \sum_j m_j \sum_k \Omega_k [r_j^2 \delta_{ik} - x_i(j) x_k(j)] \\ &= \sum_k \Omega_k \sum_j m_j [r_j^2 \delta_{ik} - x_i(j) x_k(j)]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Recordemos que el tensor de inercia es

$$I_{ik} = \sum_j m_j [r_j^2 \delta_{ik} - x_i(j)x_k(j)]. \quad (5.98)$$

Luego, podemos escribir la componente i del vector \mathbf{l} como

$$l_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \Omega_k. \quad (5.99)$$

En forma vectorial esto es

$$\mathbf{l} = I \boldsymbol{\Omega}, \quad (5.100)$$

donde I es la forma matricial del tensor de inercia, Ec. (5.40).

En particular, si I es diagonal,

$$l_1 = I_{11} \Omega_1, \quad (5.101)$$

$$l_2 = I_{22} \Omega_2, \quad (5.102)$$

$$l_3 = I_{33} \Omega_3. \quad (5.103)$$

Note que, en general, el momento angular \mathbf{l} no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$.

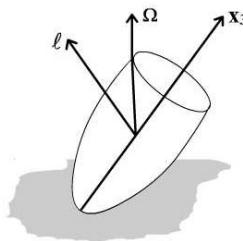


Figura 5.20: Momento angular \mathbf{l} y velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de un cuerpo rígido.

Si el vector $\boldsymbol{\Omega}$ posee solamente una componente sobre un eje x_k , tenemos $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{x}}_k$ y entonces $\mathbf{l} = I_{kk} \Omega \hat{\mathbf{x}}_k$; es decir, el momento angular \mathbf{l} es paralelo a la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$. Igualmente, para cuerpos esféricos, $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, y $\mathbf{l} = I_{11} \boldsymbol{\Omega}$; \mathbf{l} es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$.

Ejemplo.

1. Rotación libre de un trompo.

Un trompo es un cuerpo rígido que posee dos momentos principales de inercia iguales, por ejemplo $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$. Se escoge x_3 como el eje de simetría axial. Los ejes x_1 y x_2 pueden apuntar en cualquier dirección, manteniendo su mutua perpendicularidad.

Un trompo libre de torque tiene $\boldsymbol{\tau} = 0$ y, por lo tanto $\mathbf{l} = \text{cte}$. Por ejemplo, la fuerza de gravedad no ejerce torque sobre un trompo en caída libre o sobre un satélite artificial en órbita. Escogemos la dirección constante del vector \mathbf{l} en la dirección del eje z , sobre el plano (x_2, x_3) . Entonces, $l_1 = 0$. La simetría axial implica que la descripción del movimiento no depende del valor del ángulo ψ ; podemos fijar $\psi = 0$. Esto equivale a escoger la dirección del eje x_1 paralela a la linea nodal.

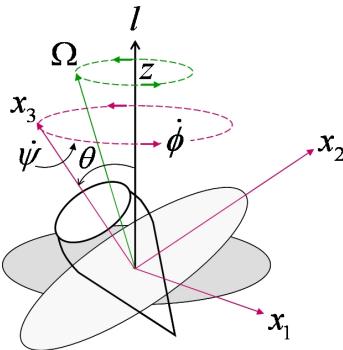


Figura 5.21: Rotación de un trompo libre.

Sea θ el ángulo entre la dirección de \mathbf{l} y el eje x_3 . Las componentes de \mathbf{l} son entonces

$$l_1 = 0, \quad (5.104)$$

$$l_2 = l \sin \theta, \quad (5.105)$$

$$l_3 = l \cos \theta. \quad (5.106)$$

En términos de los ángulos de Euler, las componentes de \mathbf{l} (con $\psi = 0$) se pueden expresar como

$$l_1 = I_{11}\Omega_1 = I_{11}\dot{\theta}, \quad (5.107)$$

$$l_2 = I_{22}\Omega_2 = I_{11}\dot{\phi} \sin \theta, \quad (5.108)$$

$$l_3 = I_{33}\Omega_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta). \quad (5.109)$$

Luego,

$$0 = I_{11}\dot{\theta} \Rightarrow \theta = \text{cte}, \quad (5.110)$$

es decir, no hay movimiento de nutación en un trompo libre. Por otro lado,

$$l \sin \theta = I_{11}\dot{\phi} \sin \theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{I_{11}} = \text{cte}, \quad (5.111)$$

es decir, el eje axial x_3 del trompo precesa con velocidad angular constante $\dot{\phi}$ alrededor de la dirección fija de \mathbf{l} , describiendo un cono con vértice en el centro de masa del trompo y cuyo ángulo de vértice es θ . Entonces, todo el plano (x_2, x_3) rota con velocidad angular $\dot{\phi} = \text{cte}$ alrededor de \mathbf{l} .

La velocidad angular de rotación del trompo sobre su eje de simetría x_3 se obtiene de

$$l \cos \theta = I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (5.112)$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{l \cos \theta (I_{11} - I_{33})}{I_{11} I_{33}} = \text{cte.} \quad (5.113)$$

Las componentes de la velocidad angular Ω son

$$\Omega_1 = \dot{\theta} = 0, \quad (5.114)$$

$$\Omega_2 = \frac{l \sin \theta}{I_{11}} = \text{cte}, \quad (5.115)$$

$$\Omega_3 = \frac{l \cos \theta}{I_{33}} = \text{cte}; \quad (5.116)$$

por lo tanto, el vector Ω yace siempre sobre el plano (x_2, x_3) . Como el plano (x_2, x_3) rota alrededor de \mathbf{l} , entonces Ω también precesa alrededor de la dirección fija de \mathbf{l} con velocidad angular $\dot{\phi} = \text{cte.}$

5.5. Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos pueden plantearse en términos de los ángulos de Euler, que describen los grados de libertad correspondientes al movimiento de rotación del cuerpo.

La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido está dada por la Ec. (5.38),

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \quad (5.117)$$

Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus correspondientes velocidades,

$$\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (5.118)$$

$$\Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (5.119)$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \quad (5.120)$$

La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y en general también puede expresarse en términos de los ángulos de Euler. Luego, el Lagrangiano de un cuerpo rígido puede expresarse como

$$L = T - V = L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t). \quad (5.121)$$

En general, las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos pueden ser complicadas. Los casos más simples son los que presentan simetrías, como los cuerpos con simetría axial (trompos) o con simetría esférica.

Ejemplos.

1. Trompo de Lagrange.

Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo. Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde su centro de masa al punto fijo O .

En este problema, denotamos como $I_{11}^{\text{cm}} = I_{22}^{\text{cm}} \neq I_{33}^{\text{cm}}$ a los momentos de inercia del trompo con respecto a un sistema de coordenadas fijo en su centro de masa.

Es conveniente tomar el sistema del laboratorio (x, y, z) y un sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, ambos con origen en el punto O . Denotamos por $\mathbf{d} = (0, 0, d)$ el vector de posición del centro de masa del trompo con respecto a O en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) .

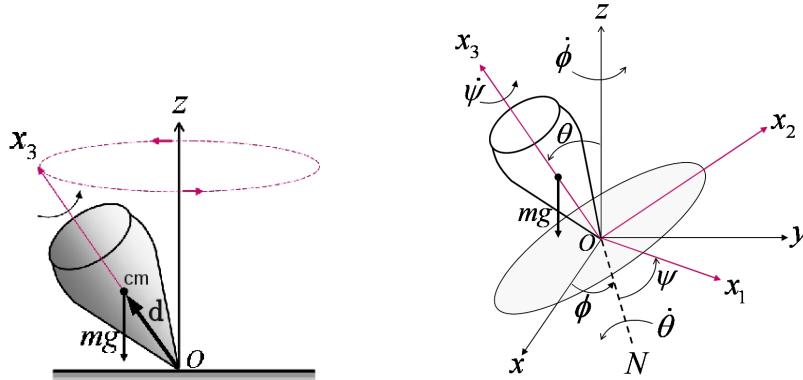


Figura 5.22: Trompo con punto inferior fijo.

Consideremos los momentos de inercia con respecto al sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , el cual está ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa. De acuerdo al teorema de ejes paralelos, los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son

$$I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k). \quad (5.122)$$

Luego,

$$I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2, \quad (5.123)$$

$$I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2, \quad (5.124)$$

$$I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}. \quad (5.125)$$

La energía potencial del trompo, con respecto a O , es

$$V = mgz = mgd \cos \theta. \quad (5.126)$$

La energía cinética de traslación del centro de masa puede ser considerada constante (el trompo no se traslada con respecto al punto fijo O ; la magnitud del vector \mathbf{d} es constante).

La energía cinética de rotación es

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2), \quad (5.127)$$

donde las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler, Ec. (5.118). Sustitución da

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (5.128)$$

También hubiéramos podido tomar $\psi = 0$ (eje x_1 igual a la linea nodal) en las componentes de la velocidad angular, debido a la simetría axial del trompo alrededor del eje x_3 .

El Lagrangiano del sistema es

$$L = T - V = \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgd \cos \theta. \quad (5.129)$$

El sistema posee tres grados de libertad, dados por los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ .

La ecuación de Lagrange para ψ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0. \quad (5.130)$$

La coordenada ψ es cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (5.131)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = l_3 = \text{cte.} \quad (5.132)$$

La ecuación de Lagrange para ϕ es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (5.133)$$

La coordenada ϕ también es cíclica,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad (5.134)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_{33}\dot{\psi} \cos \theta = l_z = \text{cte.} \quad (5.135)$$

Para interpretar las cantidades conservadas relacionadas con las coordenadas cílicas ψ y ϕ , notamos que el torque ejercido por el peso del trompo (fuerza externa) es $\tau = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, el cual tiene dirección perpendicular al plano (x_3, z), al igual que el vector $d\mathbf{l}$ del cambio de momento angular del trompo. Luego, no hay componentes del torque en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}_3$ ni $\hat{\mathbf{z}}$, como tampoco hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que $l_3 = \text{cte}$ y $l_z = \text{cte}$.

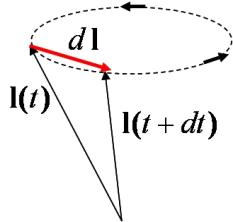


Figura 5.23: La dirección del torque τ es igual a la dirección del cambio de momento angular dl .

La energía constituye una tercera cantidad conservada en este sistema,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = T + V = \text{cte}. \quad (5.136)$$

Luego,

$$E = \frac{1}{2}I_{11}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgd \cos \theta = \text{cte}. \quad (5.137)$$

Las tres cantidades conservadas, l_3 , l_z y E , hacen que este sistema sea integrable.

Despejando $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ de las Ecs. (5.132) y (5.135) en términos de θ , tenemos

$$\dot{\phi} = \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)}{I'_{11} \sin^2 \theta} \quad (5.138)$$

$$\dot{\psi} = \frac{l_3 - I_{33}\dot{\phi} \cos \theta}{I_{33}} = \frac{l_3}{I_{33}} - \frac{(l_z - l_3 \cos \theta) \cos \theta}{I'_{11} \sin^2 \theta}. \quad (5.139)$$

Sustituyendo estas expresiones para $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ en la ecuación Ec. (5.137), obtenemos

$$E = \frac{1}{2}I_{11}\dot{\theta}^2 + \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)^2}{2I'_{11} \sin^2 \theta} + \frac{l_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta, \quad (5.140)$$

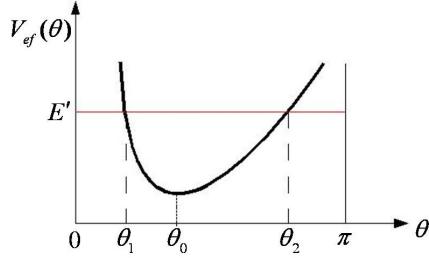
lo cual se puede escribir como

$$E' = \frac{1}{2}I_{11}\dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta) = \text{cte}, \quad (5.141)$$

donde

$$E' = E - \frac{l_3^2}{2I_{33}} = \text{cte}, \quad (5.142)$$

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta. \quad (5.143)$$

Figura 5.24: Esquema del potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$.

La Ec. (5.141) constituye un problema unidimensional equivalente para la coordenada θ , con un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ dado por la Ec. (5.143). Notemos que

$$V_{\text{ef}}(\theta = 0) \rightarrow \infty, \quad V_{\text{ef}}(\theta = \pi) \rightarrow \infty. \quad (5.144)$$

El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ posee un valor mínimo para un ángulo θ_0 tal que

$$\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0. \quad (5.145)$$

El movimiento posible del ángulo θ ocurre para valores tales que $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$. Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 están dados por las soluciones de la ecuación

$$E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(l_z - l_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta; \quad (5.146)$$

luego, el movimiento ocurre en el intervalo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

De la Ec. (5.141) obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}{I_{11}}} \quad (5.147)$$

y

$$t(\theta) = \sqrt{I_{11}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}. \quad (5.148)$$

La integral en la Ec. (5.148) corresponde a una integral de funciones elípticas. En principio, $t(\theta)$ permite obtener $\theta(t)$ por inversión. Sustitución de $\theta(t)$ en las Ecs. (5.138) y (5.139) permite calcular $\psi(t)$ y $\phi(t)$ por integración directa. Luego, el trompo de Lagrange es un sistema integrable: existen tres grados de libertad ψ , ϕ y θ , y tres cantidades conservadas, l_3 , l_z y E , asociadas a simetrías del sistema.

El período de nutación es

$$T_{\text{nut}} = 2\sqrt{I_{11}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}. \quad (5.149)$$

La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, dada por la Ec. (5.138), cambia su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2 , dependiendo del signo de $(l_z - l_3 \cos \theta)$ en esos puntos, según los siguientes casos:

- a) $\dot{\phi} > 0$ siempre ($l_z > l_3 \cos \theta, \forall \theta$).
- b) $\dot{\phi}$ cambia de signo en θ_1 ó en θ_2 (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).
- c) $\dot{\phi} = 0$ en θ_1 ó en θ_2 ($l_z = l_3 \cos \theta_{1,2}$).

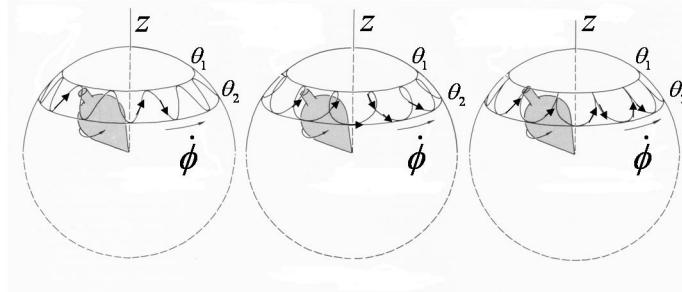


Figura 5.25: Movimiento de nutación en θ y de precesión en ϕ . Izquierda: $\dot{\phi} > 0$, no cambia de signo. Centro: $\dot{\phi}$ cambia de signo en $\theta = \theta_1$. Derecha: $\dot{\phi} = 0$ en $\theta = \theta_1$.

Puesto que el trompo tiene simetría axial, se puede tomar $\psi = 0$ en las componentes de la velocidad angular; luego $\Omega_1 = \dot{\theta}$. La velocidad angular de nutación $\dot{\theta}$ es una función periódica (con un período largo) en el tiempo.

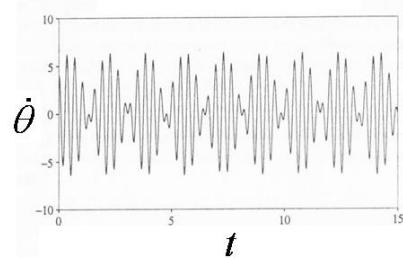


Figura 5.26: Velocidad angular de nutación $\dot{\theta} = \Omega_1$ en función del tiempo para un trompo simétrico, $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$ con su punto inferior fijo.

2. Trompo de Kovalevskaya.

Además del trompo de Lagrange, se conoce otro caso integrable de un trompo simétrico en un campo gravitacional con un punto fijo a una distancia d de su centro de masa.

Supongamos que el vector de posición \mathbf{d} del centro de masa con respecto al punto fijo O es perpendicular al eje de simetría del trompo, y supongamos que los momentos principales de inercia con respecto al sistema fijo en el cuerpo satisfacen la condición

$$I_{11} = I_{22} = 2I_{33}. \quad (5.150)$$

Este sistema se conoce como el *trompo de Kovalevskaya*, y es un problema famoso de la Mecánica.

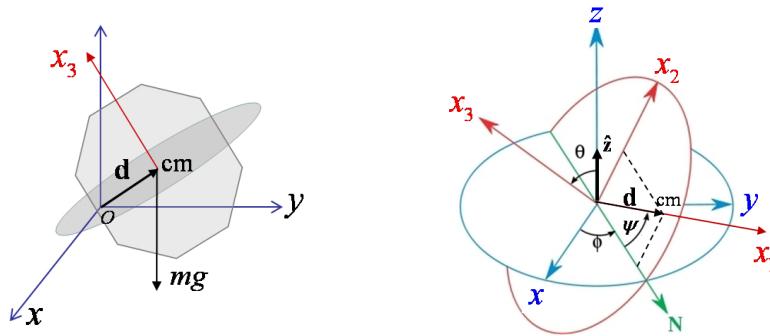


Figura 5.27: Trompo de Kovalevskaya. Izquierda: Posición \mathbf{d} del centro de masa con respecto al punto fijo O . Derecha: Proyección del vector \mathbf{d} en la dirección z corresponde a la altura del centro de masa.

Escogemos el punto fijo O como origen, tanto para el sistema del laboratorio (x, y, z) como para el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, tal que x_3 corresponde al eje de simetría del trompo. Entonces, el vector de posición \mathbf{d} del centro de masa del trompo con respecto a O se encuentra sobre el plano (x_1, x_2) . Podemos escoger el vector $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ en la dirección x_1 . Note que si $\mathbf{d} = (0, 0, d)$, en la dirección x_3 , tenemos el caso de un trompo de Lagrange con momentos de inercia dados por la Ec. (5.150).

Definimos el vector unitario en la dirección del eje z ,

$$\hat{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, z_3), \quad (5.151)$$

cuyas componentes en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo son

$$z_1 = \sin \theta \sin \psi, \quad (5.152)$$

$$z_2 = \sin \theta \cos \psi, \quad (5.153)$$

$$z_3 = \cos \theta. \quad (5.154)$$

La energía cinética del trompo se debe a su rotación, y está dada por

$$T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2). \quad (5.155)$$

La energía potencial del trompo corresponde a la energía potencial de su centro de masa en el campo gravitacional terrestre,

$$V = mgz = mg\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{d} = mgd \sin \theta \sin \psi. \quad (5.156)$$

El Lagrangiano del sistema, en términos de los ángulos de Euler, es

$$\begin{aligned} L &= I_{33} (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + I_{33} (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 \\ &+ \frac{I'_{33}}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgd \sin \theta \sin \psi \\ &= I_{33} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_{33}}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgd \sin \theta \sin \psi. \end{aligned} \quad (5.157)$$

La coordenada ϕ es cíclica, por lo que su momento conjugado es constante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 2I_{33} \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \\ &= I_{33} [\dot{\phi}(1 + \sin^2 \theta) + \dot{\psi} \cos \theta] \equiv l_z = \text{cte.} \end{aligned} \quad (5.158)$$

La cantidad conservada es la componente z del momento angular, puesto que el torque ejercido por la fuerza gravitacional es perpendicular a la dirección z .

El Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, lo que implica que la energía mecánica total se conserva,

$$\begin{aligned} E &= T + V = \text{cte.} \\ &= I_{33} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_{33}}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgd \sin \theta \sin \psi. \end{aligned} \quad (5.159)$$

El sistema posee tres grados de libertad (los ángulos de Euler) y dos cantidades conservadas E y l_z , relacionadas con las simetrías explícitas del Lagrangiano del sistema.

Sofía Kovalevskaya encontró una tercera cantidad conservada no trivial,

$$K \equiv \left(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \frac{mgd}{I_{33}} z_1 \right)^2 + \left(2\Omega_1 \Omega_2 - \frac{mgd}{I_{33}} z_2 \right)^2 = \text{cte.} \quad (5.160)$$

Sustitución de Ω_1 , Ω_2 , z_1 y z_2 en términos de los ángulos de Euler, conduce a la expresión

$$\begin{aligned} K &= (\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)^2 + 2 \frac{mgd}{I_{33}} [(\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \sin \psi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi] \sin \theta \\ &+ \left(\frac{mgd}{I_{33}} \right)^2 \sin^2 \theta = \text{cte.} \end{aligned} \quad (5.161)$$

La existencia de la constante de Kovalevskaya K , junto con E y l_z , permite que este sistema sea integrable, aunque el procedimiento matemático para resolver las

ecuaciones de movimiento es bastante laborioso. La constante K no tiene una interpretación física directa, como E , l_z o l_3 . La simetría asociada con la cantidad conservada K no es en absoluto evidente. El método desarrollado por Kovalevskaya para encontrar esta cantidad conservada no trivial sigue siendo un tema abierto de investigación. Se han descubierto unos pocos sistemas dinámicos que poseen cantidades conservadas no triviales para ciertos valores de sus parámetros, y que están relacionadas con simetrías no evidentes (también llamadas *ocultas*) del sistema.

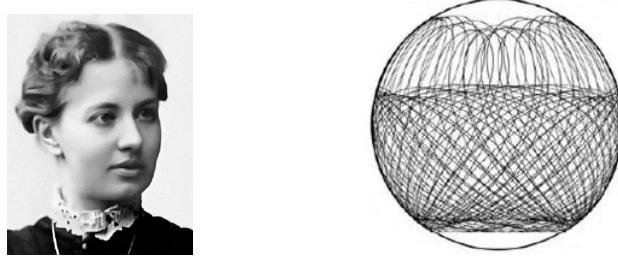


Figura 5.28: Izquierda: Sofía Kovalevskaya (1850 -1891). Derecha: Movimiento del eje del trompo de Kovalevskaya en el espacio. A pesar de su apariencia, el movimiento no es caótico.

3. Consideraremos un trompo asimétrico, $I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$, con un punto fijo sobre su eje x_3 . En ese caso, no existen suficientes simetrías en el sistema, por lo que éste no es integrable. Bajo estas condiciones, el movimiento del cuerpo es caótico para ciertos valores de parámetros.

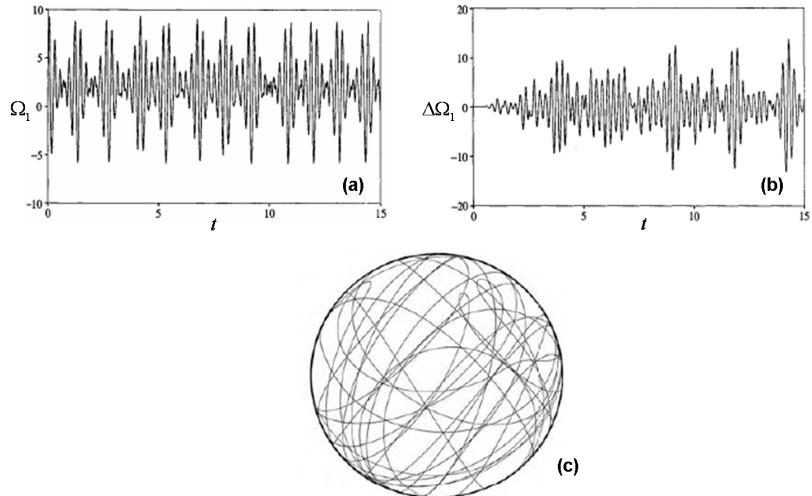


Figura 5.29: Movimiento caótico de un trompo asimétrico con su punto inferior fijo sobre su eje x_3 . (a) Ω_1 vs. t . (b) Diferencia $\Delta\Omega_1$ vs. t para dos trayectorias correspondientes a dos condiciones iniciales separadas en $\Delta\Omega_1(0) = 10^{-6}$. (c) Movimiento caótico del eje del trompo en el espacio.

5.6. Ecuaciones de Euler para cuerpos rígidos

En el ejemplo de un trompo simétrico con su punto inferior fijo, vimos como las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido se pueden derivar a partir del Lagrangiano del sistema expresado en términos de los ángulos de Euler.

Alternativamente, es posible derivar las ecuaciones de movimiento a partir de las relaciones de transformación de cantidades vectoriales, desde el sistema de coordenadas del laboratorio (x, y, z) al sistema (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa y que se mueve con el cuerpo. Para hacer esto, consideremos que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden y observemos un vector \mathbf{A} en ambos sistemas. El sistema (x_1, x_2, x_3) puede rotar con una velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$. Un cambio infinitesimal en el vector \mathbf{A} observado en ambos sistemas de coordenadas solamente puede diferir debido al efecto causado por la rotación de los ejes (x_1, x_2, x_3) , es decir,

$$d\mathbf{A}_{(x,y,z)} = d\mathbf{A}_{(x_1,x_2,x_3)} + d\mathbf{A}_{\text{rot}}. \quad (5.162)$$

El cambio $d\mathbf{A}_{\text{rot}}$ causado por la rotación de (x_1, x_2, x_3) no modifica la magnitud del vector \mathbf{A} , sino su dirección, al igual que un vector posición \mathbf{r} de una partícula del cuerpo rígido mantiene su magnitud en el sistema de coordenadas fijo en el cuerpo. En ese caso, vimos que un cambio $d\mathbf{r}$ es el resultado de una rotación infinitesimal $d\boldsymbol{\Phi}$ alrededor de un eje instantáneo que pasa por el origen del sistema (x_1, x_2, x_3) , y está dado por la Ec. (5.5), $d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{r}$. Luego,

$$d\mathbf{A}_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{A}, \quad (5.163)$$

donde $d\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega} dt$. La variaciones temporales del vector \mathbf{A} , vistas por dos observadores en los sistemas de coordenadas (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) , están relacionadas por

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_{(x_1,x_2,x_3)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (5.164)$$

Esta relación es general para cualquier vector \mathbf{A} . En particular, si $\mathbf{A} = \mathbf{l}$,

$$\left(\frac{d\mathbf{l}}{dt} \right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt} \right)_{(x_1,x_2,x_3)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}. \quad (5.165)$$

Pero el torque en el sistema (x, y, z) es $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt} \right)_{(x,y,z)}$. Luego, podemos escribir

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{l}}{dt} \right)_{(x_1,x_2,x_3)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}. \quad (5.166)$$

Las componentes de \mathbf{l} en el sistema (x_1, x_2, x_3) están dadas por $l_i = \sum_k I_{ik}\Omega_k$. Luego, la componente i de la Ec. (5.166) es

$$\tau_i = \sum_k I_{ik}\dot{\Omega}_k + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l})_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.167)$$

Las Ecs. (5.166) constituyen las *ecuaciones de Euler* para cuerpos rígidos.

Si I_{ik} es diagonal, podemos escribir las ecuaciones de Euler como

$$\begin{aligned}\tau_1 &= I_{11}\dot{\Omega}_1 + \Omega_2\Omega_3(I_{33} - I_{22}), \\ \tau_2 &= I_{22}\dot{\Omega}_2 + \Omega_1\Omega_3(I_{11} - I_{33}), \\ \tau_3 &= I_{33}\dot{\Omega}_3 + \Omega_1\Omega_2(I_{22} - I_{11}).\end{aligned}\quad (5.168)$$

Las ecuaciones de Euler representan una alternativa útil para analizar el movimiento de cuerpos rígidos en muchas situaciones. Las ecuaciones de Euler son ecuaciones diferenciales de primer orden para las componentes Ω_i de la velocidad angular, mientras que las ecuaciones de Lagrange corresponden a ecuaciones diferenciales de segundo orden para los ángulos de Euler, que son las coordenadas generalizadas para un cuerpo rígido. Puesto que las componentes Ω_i se pueden expresar en términos de ángulos de Euler, ambas descripciones son equivalentes.

Ejemplos.

1. Trompo de Euler.

Consiste en cuerpo rígido asimétrico, $I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$, y libre de torque, $\boldsymbol{\tau} = 0$.

Puesto que no hay torque, $\mathbf{l} = \text{cte}$, i.e., la dirección y la magnitud del vector momento angular son constantes. Por otro lado, el Lagrangiano de este sistema es independiente del tiempo; luego la energía E se conserva. Existen tres grados de libertad (los tres ángulos de Euler) y tres cantidades conservadas (dirección de \mathbf{l} , magnitud l y E); por lo tanto, este sistema es integrable.

Este sistema puede considerarse como un trompo asimétrico con su centro de masa fijo en el campo gravitacional terrestre; esto es; la distancia desde un punto fijo a su centro de masa es $d = 0$. El trompo de Lagrange ($\mathbf{d} = (0, 0, d)$), el trompo de Kovasvkaya ($\mathbf{d} = (d, 0, 0)$) y el trompo de Euler ($\mathbf{d} = (0, 0, 0)$) constituyen los casos conocidos de cuerpos rígidos en un campo gravitacional que son sistemas integrables.

Supongamos los momentos de inercia tales que $I_{33} > I_{22} > I_{11}$. El movimiento se analiza más fácilmente en términos de las componentes Ω_i de la velocidad angular en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , usando las ecuaciones de Euler para cuerpos rígidos, Ecs. (5.168).

La dirección del vector \mathbf{l} , vista en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, no es constante; pero la magnitud l y la energía, que son cantidades escalares, sí lo son.

La magnitud de la velocidad angular en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) es

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2 = \text{cte}, \quad (5.169)$$

donde hemos utilizado $l_i = I_{ii}\Omega_i$.

La energía es

$$E = \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2) = \text{cte.} \quad (5.170)$$

Luego, las componentes de \mathbf{l} satisfacen el par de ecuaciones

$$\frac{l_1^2}{2EI_{11}} + \frac{l_2^2}{2EI_{22}} + \frac{l_3^2}{2EI_{33}} = 1, \quad (5.171)$$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = l^2. \quad (5.172)$$

La primera ecuación describe un elipsoide en las componentes (l_1, l_2, l_3) con semiejes $\sqrt{2EI_{11}}$, $\sqrt{2EI_{22}}$ y $\sqrt{2EI_{33}}$, donde $\sqrt{2EI_{33}}$ es el semieje mayor y $\sqrt{2EI_{11}}$ es el semieje menor. La segunda ecuación corresponde a una esfera de radio igual a l en el sistema (x_1, x_2, x_3) . Ambas ecuaciones deben satisfacerse simultáneamente. Luego, el movimiento relativo del vector \mathbf{l} descrito en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) debe ocurrir sobre una trayectoria de intersección de las dos superficies, el elipsoide y la esfera, vistas en ese sistema. La condición para que exista tal intersección es que el radio de la esfera se encuentre entre el semieje menor y el semieje mayor del elipsoide, es decir,

$$2EI_{11} < l^2 < 2EI_{33}. \quad (5.173)$$

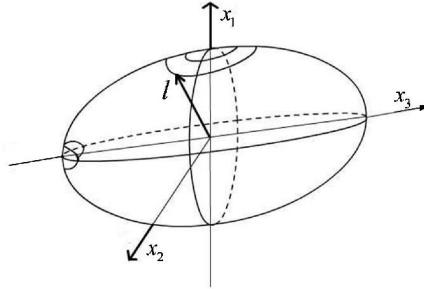


Figura 5.30: Movimiento de \mathbf{l} en (x_1, x_2, x_3) para un cuerpo rígido asimétrico libre.

Las intersecciones de la esfera con el elipsoide corresponden a curvas cerradas alrededor de los ejes x_1 y x_3 . Luego, el movimiento del vector \mathbf{l} relativo al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo debe ser periódico; durante un período de oscilación el vector \mathbf{l} describe una especie de superficie cónica alrededor de x_1 o de x_3 , y regresa a su posición original.

Las ecuaciones de Euler (5.168) para un cuerpo asimétrico libre, con $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$, son

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\Omega}_1 + \Omega_2\Omega_3(I_{33} - I_{22}) &= 0, \\ I_{22}\dot{\Omega}_2 + \Omega_1\Omega_3(I_{11} - I_{33}) &= 0, \\ I_{33}\dot{\Omega}_3 + \Omega_1\Omega_2(I_{22} - I_{11}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.174)$$

Estas tres ecuaciones, junto con las dos cantidades conservadas l (Ec. (5.169)) y E (Ec. (5.170)), son integrables. En efecto, multiplicando la Ec. (5.170) por $2I_{33}$ y restando la Ec. (5.169), obtenemos

$$2EI_{33} - l^2 = I_{11}(I_{33} - I_{11})\Omega_1^2 + I_{22}(I_{33} - I_{22})\Omega_2^2. \quad (5.175)$$

Despejamos Ω_1 en función de Ω_2 ,

$$\Omega_1^2 = \frac{(2EI_{33} - l^2) - I_{22}(I_{33} - I_{22})\Omega_2^2}{I_{11}(I_{33} - I_{11})}. \quad (5.176)$$

Por otro lado, multiplicando la Ec. (5.170) por $2I_{11}$ y restando ésta de la Ec. (5.169), tenemos

$$l^2 - 2EI_{11} = I_{22}(I_{22} - I_{11})\Omega_2^2 + I_{33}(I_{33} - I_{11})\Omega_3^2. \quad (5.177)$$

Despejando Ω_3 en función de Ω_2 ,

$$\Omega_3^2 = \frac{(l^2 - 2EI_{11}) - I_{22}(I_{22} - I_{11})\Omega_2^2}{I_{33}(I_{33} - I_{11})}. \quad (5.178)$$

Sustituyendo las expresiones de Ω_1 y de Ω_3 en la segunda de las ecuaciones Ec. (5.174),

$$\dot{\Omega}_2 = \Omega_1\Omega_2 \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{22}}, \quad (5.179)$$

obtenemos una ecuación diferencial que depende solamente de Ω_2 ,

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_2 &= \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{1}{I_{22}[I_{11}I_{33}]^{1/2}} [(2EI_{33} - l^2) - I_{22}(I_{33} - I_{22})\Omega_2^2]^{1/2} \\ &\quad \times [(l^2 - 2EI_{11}) - I_{22}(I_{22} - I_{11})\Omega_2^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.180)$$

De la Ec. (5.180), podemos calcular $t = t(\Omega_2)$ mediante integración explícita en términos de funciones elípticas y, por inversión, obtenemos $\Omega_2(t)$. Sustitución de $\Omega_2(t)$ en Ec. (6.323) y en la Ec. (5.178) permite obtener $\Omega_1(t)$ y $\Omega_3(t)$, respectivamente.

La dependencia temporal de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) para el cuerpo rígido asímtrico puede obtenerse sustituyendo las soluciones $\Omega_i(t)$ en las Ecs. (5.22); sin embargo, el procedimiento es laborioso.

Este ejemplo ilustra las dificultades matemáticas generadas por la presencia de no linealidades en las ecuaciones de evolución de sistemas dinámicos, aunque éstos sean integrables.

Puesto que el movimiento del vector \mathbf{l} relativo al sistema (x_1, x_2, x_3) es periódico, podemos simplificar las ecuaciones Ecs. (5.174) considerando el movimiento de pequeñas oscilaciones de \mathbf{l} alrededor de los ejes x_1 , x_2 y x_3 .

i) Pequeñas oscilaciones de \mathbf{l} alrededor de x_1 .

Supongamos que las componentes l_2 y l_3 son pequeñas. Entonces, las relaciones

$$l_2 = I_{22}\Omega_2, \quad l_3 = I_{33}\Omega_3, \quad (5.181)$$

implican que también las componentes Ω_2 y Ω_3 son pequeñas. Luego, el producto $\Omega_2\Omega_3$ es muy pequeño y puede ser despreciado en la ecuación de Euler para $\dot{\Omega}_1$ en las Ecs. (5.174), lo cual da

$$\dot{\Omega}_1 \approx 0 \Rightarrow \Omega_1 \approx \text{cte.} \quad (5.182)$$

Entonces, la segunda y la tercera de las ecuaciones de Euler Ecs. (5.174) dan

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{22}}\Omega_1\Omega_3, \quad (5.183)$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\frac{(I_{22} - I_{11})}{I_{33}}\Omega_1\Omega_2. \quad (5.184)$$

Derivando respecto al tiempo la Ec. (5.183) o la Ec. (5.184), y sustituyendo el resultado en la otra ecuación, tenemos

$$\ddot{\Omega}_{2,3} = -\frac{(I_{33} - I_{11})(I_{22} - I_{11})}{I_{22}I_{33}}\Omega_1^2\Omega_{2,3}, \quad (5.185)$$

la cual se puede escribir como la ecuación de un oscilador armónico,

$$\ddot{\Omega}_{2,3} = -\omega_{x_1}^2\Omega_{2,3}, \quad (5.186)$$

con $\omega_{x_1}^2 > 0$, donde

$$\omega_{x_1} = \Omega_1 \sqrt{\frac{(I_{33} - I_{11})(I_{22} - I_{11})}{I_{22}I_{33}}}, \quad (5.187)$$

es la frecuencia de pequeñas oscilaciones estables del vector \mathbf{l} alrededor del eje x_1 .

ii) Pequeñas oscilaciones de \mathbf{l} alrededor del eje x_3 .

En este caso, asumimos que las componentes l_1 y l_2 son pequeñas y, por lo tanto, Ω_1 y Ω_2 también son pequeñas. Despreciando el producto $\Omega_1\Omega_2$ en la ecuación de Euler para $\dot{\Omega}_3$ en las Ecs. (5.174), obtenemos

$$I_{33}\dot{\Omega}_3 \approx 0 \Rightarrow \Omega_3 \approx \text{cte.} \quad (5.188)$$

La primera y la segunda de las ecuaciones Ecs. (5.174) dan

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{(I_{33} - I_{22})}{I_{11}}\Omega_3\Omega_2, \quad (5.189)$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{22}}\Omega_3\Omega_1, \quad (5.190)$$

las cuales conducen a

$$\ddot{\Omega}_{1,2} = -\frac{(I_{33} - I_{22})(I_{33} - I_{11})}{I_{11}I_{22}}\Omega_3^2\Omega_{1,2}, \quad (5.191)$$

$$\ddot{\Omega}_{1,2} = -\omega_{x_3}^2\Omega_{1,2}, \quad (5.192)$$

con $\omega_{x_3}^2 > 0$, donde

$$\omega_{x_3} = \Omega_3 \sqrt{\frac{(I_{33} - I_{22})(I_{33} - I_{11})}{I_{11}I_{22}}}. \quad (5.193)$$

es la frecuencia de pequeñas oscilaciones estables del vector **l** alrededor del eje x_3 .

iii) Pequeñas oscilaciones de **l** alrededor del eje x_2 .

Entonces, tomamos las componentes l_1 y l_3 pequeñas y también Ω_1 y Ω_3 . Entonces el producto $\Omega_1\Omega_3$ puede despreciarse en la ecuación de Euler para $\dot{\Omega}_3$ en las Ecs. (5.174), lo cual da

$$I_{22}\dot{\Omega}_2 \approx 0 \Rightarrow \Omega_2 \approx \text{cte.} \quad (5.194)$$

La primera y la tercera de las ecuaciones Ecs. (5.174) dan

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{(I_{33} - I_{22})}{I_{11}}\Omega_3\Omega_2, \quad (5.195)$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\frac{(I_{22} - I_{11})}{I_{33}}\Omega_2\Omega_1. \quad (5.196)$$

las cuales llevan a

$$\ddot{\Omega}_{1,3} = \frac{(I_{33} - I_{22})(I_{22} - I_{11})}{I_{11}I_{33}}\Omega_2^2\Omega_{1,3}, \quad (5.197)$$

$$\ddot{\Omega}_{1,3} = \omega_{x_2}^2\Omega_{1,3}, \quad (5.198)$$

con $\omega_{x_2}^2 > 0$, donde

$$\omega_{x_2} = \Omega_2 \sqrt{\frac{(I_{33} - I_{22})(I_{22} - I_{11})}{I_{11}I_{33}}}. \quad (5.199)$$

En este caso, las soluciones $\Omega_{1,3} = Ke^{\omega_{x_2}t}$ crecen con el tiempo y, por lo tanto, las componentes l_1 y l_3 aumentan. Luego, el vector **l** se aleja del eje x_2 y el movimiento de pequeñas oscilaciones de **l** alrededor de x_2 es inestable.

2. Movimiento libre de un trompo simétrico ($I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$).

Este sistema fue analizado en la Sec. (5.4) considerando la conservación de su momento angular. También puede verse como un caso especial del trompo de Euler. Las ecuaciones de Euler (5.168) se reducen a

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\Omega}_1 &= -\Omega_2\Omega_3(I_{33} - I_{11}) \\ I_{11}\dot{\Omega}_2 &= \Omega_1\Omega_3(I_{33} - I_{11}) \\ I_{33}\dot{\Omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.200)$$

La tercera ecuación da $\Omega_3 = \text{cte}$. Puesto que $l_3 = l \cos \theta$, tenemos

$$l_3 = I_{33}\Omega_3 = l \cos \theta \Rightarrow \Omega_3 = \frac{l \cos \theta}{I_{33}} = \text{cte} \Rightarrow \theta = \text{cte.} \quad (5.201)$$

La primera y la segunda ecuación se pueden entonces escribir como

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \quad (5.202)$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\omega\Omega_1, \quad (5.203)$$

donde definimos

$$\omega = \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{11}}\Omega_3 = \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{11}I_{33}}l \cos \theta = \text{cte.} \quad (5.204)$$

Luego,

$$\ddot{\Omega}_1 = -\omega\dot{\Omega}_2 \Rightarrow \ddot{\Omega}_1 = -\omega^2\Omega_1. \quad (5.205)$$

Las soluciones para Ω_1 y Ω_2 son

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= A \cos \omega t, \\ \Omega_2 &= A \sin \omega t, \end{aligned} \quad (5.206)$$

donde $A = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^{1/2}$ es constante.

Si tomamos la dirección constante de \mathbf{l} en la dirección z , entonces $\boldsymbol{\Omega}$ rota con respecto a la dirección de \mathbf{l} , manteniendo su proyección Ω_3 sobre el eje x_3 constante, mientras que su proyección sobre el plano (x_1, x_2) rota con velocidad angular constante ω .

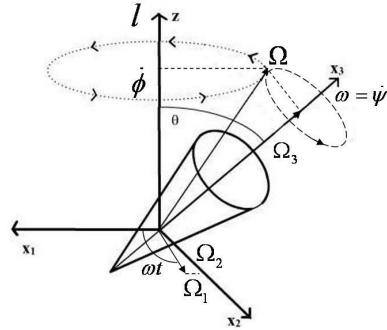


Figura 5.31: Movimiento libre de un trompo.

La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, tanto del eje x_3 como del vector $\boldsymbol{\Omega}$, alrededor de \mathbf{l} (eje z) se puede calcular a partir de

$$l_2 = I_{22}\Omega_2 = l \sin \theta. \quad (5.207)$$

Sustituyendo la expresión de Ω_2 en términos de los ángulos de Euler, y tomando $\psi = 0$ (usando la simetría axial del trompo), tenemos

$$I_{22}\dot{\phi} \sin \theta = l \sin \theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{I_{11}}. \quad (5.208)$$

La velocidad angular de rotación $\dot{\psi}$ del trompo sobre su eje x_3 se puede calcular usando

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \quad (5.209)$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \Omega_3 - \dot{\phi} \cos \theta \quad (5.210)$$

$$= \frac{l \cos \theta}{I_{33}} - \frac{l}{I_{11}} \cos \theta \quad (5.211)$$

$$= \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{11} I_{33}} l \cos \theta = \omega. \quad (5.212)$$

El vector Ω ejecuta dos rotaciones, vistas desde los dos sistemas de referencia: una rotación en el sistema (x, y, z) describiendo un cono alrededor de la dirección $z = 1$, con velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$; y una rotación en el sistema (x_1, x_2, x_3) describiendo otro cono alrededor del eje x_3 del trompo, con velocidad angular $\omega = \dot{\psi}$. El vector \mathbf{l} también rota con velocidad angular $\dot{\psi}$ alrededor de x_3 , visto desde el sistema (x_1, x_2, x_3) .

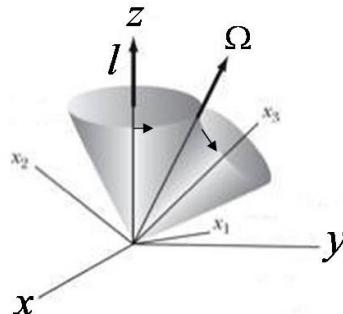


Figura 5.32: Rotación del vector Ω en los sistemas de referencia (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) .

3. El girocompás.

Es un instrumento usado en la navegación que permite indicar el Norte geográfico sin referencia al campo magnético terrestre. Consiste en un disco con momentos principales de inercia $I_{11} = I_{22} \neq I_{33}$, el cual gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje perpendicular a su plano, que llamamos x_3 . Simultáneamente, el disco puede rotar libremente un ángulo θ alrededor de un eje perpendicular a x_3 , como se muestra en la Fig. (5.33).

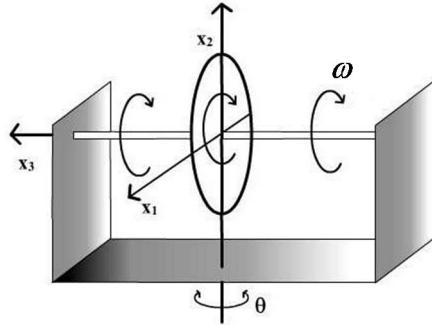


Figura 5.33: Girocompás.

Sea ν la magnitud de la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje Norte-Sur, y supongamos que $\omega \gg \nu$. Llamemos α al ángulo de latitud sobre el Ecuador del instrumento. Consideremos el sistema de coordenadas (x, y, z) fijo en la Tierra y el sistema (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del disco, como se indica en la Fig. (5.34).

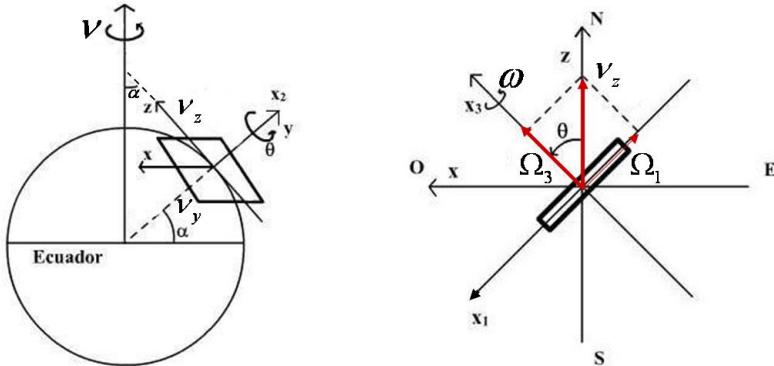


Figura 5.34: Sistemas de referencia (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) para el girocompás. Izquierda: velocidad angular de la Tierra y latitud α del instrumento. Derecha: vista instantánea del girocompás desde el eje x_2 , paralelo al eje y y a la dirección de $\dot{\theta}$. La dirección Norte-Sur local, NS, corresponde al eje z .

Las componentes de la velocidad angular de la Tierra en (x, y, z) son

$$\nu_x = 0, \quad (5.213)$$

$$\nu_y = \nu \sin \alpha, \quad (5.214)$$

$$\nu_z = \nu \cos \alpha. \quad (5.215)$$

Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación). Entonces, las componentes de la velocidad

angular instantánea Ω del disco en (x_1, x_2, x_3) se pueden expresar como (Fig. (5.34))

$$\Omega_1 = -\nu_z \sin \theta = -\nu \cos \alpha \sin \theta, \quad (5.216)$$

$$\Omega_2 = \nu_y + \dot{\theta} = \nu \sin \alpha + \dot{\theta}, \quad (5.217)$$

$$\Omega_3 = \nu_z \cos \theta + \omega = \nu \cos \alpha \cos \theta + \omega. \quad (5.218)$$

Puesto que el instrumento es libre de rotar sobre el eje y , no hay componente del torque en dirección de y , que corresponde en este instante al eje x_2 . Entonces, consideremos la ecuación de Euler Ec. (5.168) correspondiente a $\tau_2 = 0$,

$$\tau_2 = I_{22}\dot{\Omega}_2 + \Omega_1\Omega_3(I_{11} - I_{33}) = 0. \quad (5.219)$$

Sustitución de las componentes de Ω da

$$I_{11}\ddot{\theta} + (I_{33} - I_{11})\nu \cos \alpha \sin \theta (\nu \cos \alpha \cos \theta + \omega) = 0, \quad (5.220)$$

donde hemos usado $I_{11} = I_{22}$.

Pero $\omega \gg \nu$, lo cual implica que $\omega \gg \nu \cos \alpha \cos \theta$. Luego, podemos escribir

$$I_{11}\ddot{\theta} + (I_{33} - I_{11})\nu \omega \cos \alpha \sin \theta \approx 0. \quad (5.221)$$

La Ec. (5.221) tiene la misma forma que la ecuación de movimiento de un péndulo simple. En el límite de pequeñas oscilaciones en θ , tenemos $\sin \theta \approx \theta$. Luego,

$$\ddot{\theta} + \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{11}}\nu \omega \cos \alpha \theta \approx 0. \quad (5.222)$$

La Ec. (5.222) es similar a la ecuación de un oscilador armónico,

$$\ddot{\theta} + \omega_c^2 \theta \approx 0, \quad (5.223)$$

donde

$$\omega_c^2 = \frac{(I_{33} - I_{11})}{I_{11}}\nu \omega \cos \alpha, \quad (5.224)$$

es la frecuencia para pequeñas oscilaciones del eje x_3 del disco alrededor del eje z , que apunta hacia el Norte. Luego, el punto de equilibrio $\theta = 0$ de la oscilación del eje x_3 señala la dirección del Norte geográfico.

Notemos que la medida directa de la frecuencia de oscilación ω_c en la Ec. (5.223) permite a su vez calcular la latitud α sin ninguna referencia externa. Por ejemplo,

$$\omega_c = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Polo Norte.} \quad (5.225)$$

$$\omega_c = \text{máxima} \Rightarrow \alpha = 0, \quad \text{Ecuador.} \quad (5.226)$$

4. Efecto Coriolis.

Una aplicación importante de la Ec. (5.164) es la descripción del movimiento de una partícula en un sistema en rotación, y por tanto, no inercial.



Figura 5.35: Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843).

Sean (x, y, z) un sistema inercial (por ejemplo, con respecto a las estrellas fijas) y (x_1, x_2, x_3) un sistema de coordenadas en rotación (por ejemplo, la Tierra) con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ relativa al sistema inercial. Entonces, la Ec. (5.164) aplicada al vector de posición \mathbf{r} de la partícula desde el origen común de ambos sistemas da

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (5.227)$$

donde suprimimos el subíndice (x, y, z) en las cantidades referidas al sistema inercial y usamos el subíndice “rot” en lugar de (x_1, x_2, x_3) para las cantidades medidas en el sistema en rotación.

La derivada temporal del vector \mathbf{v} vista por dos observadores en los sistemas de coordenadas (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3) está dada a su vez por la Ec. (5.164),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \quad (5.228)$$

Sustituyendo Ec. (5.227) en la Ec. (5.228), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{v}_{\text{rot}}}{dt} \right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{v}_{\text{rot}}}{dt} \right)_{\text{rot}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.229)$$

Multiplicando por la masa de la partícula m , la Ec. (5.229) queda

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \left(\frac{d\mathbf{v}_{\text{rot}}}{dt} \right)_{\text{rot}} + 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rot}} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (5.230)$$

La ecuación de movimiento en el sistema inercial (x, y, z) es simplemente

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (5.231)$$

Entonces, la Ec. (5.230) puede expresarse como

$$\mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rot}} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = m \left(\frac{d\mathbf{v}_{\text{rot}}}{dt} \right)_{\text{rot}}. \quad (5.232)$$

Luego, para un observador en el sistema en rotación, el movimiento de la partícula se describe como si ésta estuviera sujeta a una fuerza efectiva

$$\mathbf{F}_{\text{ef}} = m \left(\frac{d\mathbf{v}_{\text{rot}}}{dt} \right)_{\text{rot}}, \quad (5.233)$$

donde

$$\mathbf{F}_{\text{ef}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{co}} + \mathbf{F}_c, \quad (5.234)$$

e identificamos

$$\mathbf{F}_c = -m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (5.235)$$

como la fuerza centrífuga, cuya magnitud es la expresión familiar $F_c = m\Omega^2 r \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{r} , mientras que el término

$$\mathbf{F}_{\text{co}} = 2m \mathbf{v}_{\text{rot}} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (5.236)$$

se denomina *fuerza de Coriolis*.

Tanto la fuerza de Coriolis como la fuerza centrífuga son fuerzas ficticias, introducidas por un observador en el sistema no inercial en rotación para describir el movimiento de una partícula. En particular, la fuerza de Coriolis es un ejemplo de una fuerza dependiente de la velocidad.

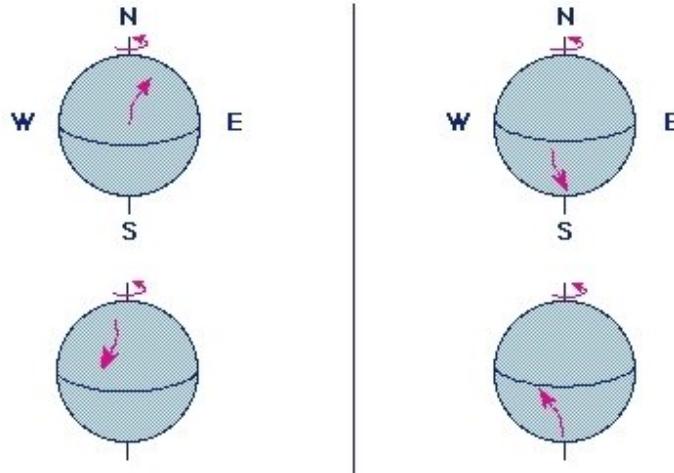
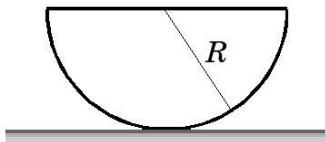


Figura 5.36: Desviación de la trayectoria de un proyectil en la Tierra debida al efecto Coriolis. Izquierda: hemisferio Norte. Derecha: hemisferio Sur.

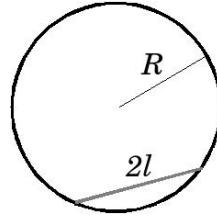
5.7. Problemas

1. Una moneda de masa m y radio a está rodando sin deslizar por el suelo con velocidad de magnitud constante v , describiendo una circunferencia de radio R y manteniendo un ángulo constante θ con respecto al suelo. Determine θ .
2. Un placa uniforme, formada por un triángulo con dos lados iguales de longitud a , rota con velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por uno de esos lados.
 - a) Calcule el vector de momento angular de la placa.
 - b) Calcule la energía cinética de la placa.
3. Un trompo uniforme de masa M con su extremo inferior fijo en el suelo está girando sobre su eje de simetría con velocidad angular Ω , inicialmente en posición vertical ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$). Los momentos principales de inercia son $I_3, I_1 = I_2$. El centro de masa se ubica a una distancia a del punto inferior del trompo.
 - a) Encuentre las cantidades conservadas en el sistema en función de las condiciones iniciales.
 - b) Calcule el ángulo máximo que se puede inclinar el trompo.
4. Un disco uniforme de masa m y radio a está girando con velocidad angular constante Ω alrededor de un eje que pasa por su centro y que forma un ángulo θ con la normal a la superficie del disco.
 - a) Calcule el valor de θ para que el ángulo entre la velocidad angular y el momento angular del disco sea de 15° .
 - b) Encuentre la energía cinética del disco.
5. Calcule los momentos principales de inercia de un cono uniforme de masa M , altura h y base circular de radio R .
6. Una placa semicircular uniforme de masa m y radio a se encuentra sobre una superficie plana. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la placa alrededor de su posición de equilibrio.

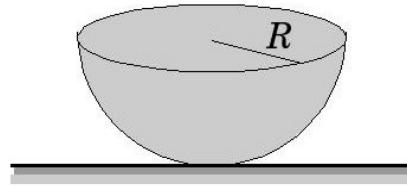


7. Un aro de masa M y radio R está girando con velocidad angular constante Ω alrededor de un eje que pasa por su centro y que forma un ángulo α con la normal al plano del aro. Calcule la magnitud y dirección del momento angular del aro.
8. Un cilindro de densidad uniforme ρ , radio R y altura h gira con velocidad angular constante ω alrededor de su eje longitudinal. El cilindro tiene una cavidad esférica de radio $R/2$ tangente a su eje. Calcule la energía cinética del cilindro.

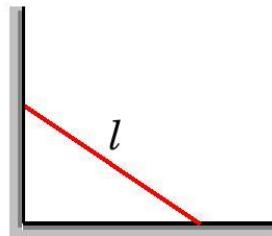
9. Una varilla uniforme de longitud $2l$ posee sus extremos en contacto sin fricción con un aro vertical fijo de radio $R > l$. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la varilla.



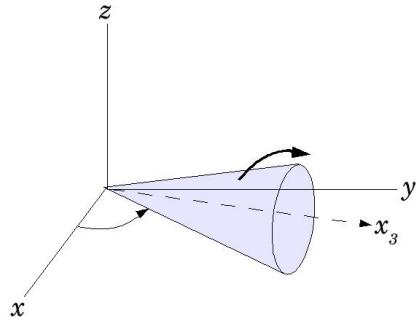
10. Un hemisferio sólido y uniforme de masa M y radio R se encuentra sobre una superficie plana. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones del hemisferio alrededor de su posición de equilibrio.



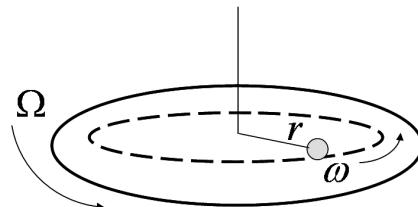
11. Una varilla de masa m y longitud l tiene un extremo en una pared y el otro en el suelo. Desprecie la fricción.
- Encuentre la ecuación de movimiento de la varilla.
 - Si la varilla se suelta desde el reposo, formando un ángulo α con el suelo, calcule la velocidad de su centro de masa cuando la varilla choca contra el suelo.
 - Determine el tiempo que tarda en chocar.



- 12.** Una placa rectangular uniforme, de masa m y lados a y $2a$, está rotando con velocidad angular constante ω alrededor de una de sus diagonales.
- Encuentre la energía cinética de rotación de la placa.
 - Determine la magnitud del momento angular de la placa.
 - Encuentre el ángulo entre el momento angular y la velocidad angular.
- 13.** Encuentre la frecuencia para pequeñas oscilaciones de un péndulo plano formado por varilla de masa despreciable, con un extremo fijo y el otro extremo unido a una esfera de radio R y masa M .
- 14.** Tres estrellas, con masas m_1 , m_2 y m_3 , se encuentran ubicadas en el espacio formando los vértices de un triángulo equilátero. Determine la velocidad angular del movimiento de rotación tal que esta configuración permanezca invariante.
- 15.** Un cono circular uniforme de altura h , ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y) .
- Encuentre la energía cinética.
 - Calcule el tiempo requerido para retornar a la posición original del cono.
 - Calcule las componentes del momento angular del cono.



- 16.** Una bola de densidad uniforme rueda sin deslizar sobre un disco que gira en un plano horizontal con velocidad angular Ω . La bola se mueve en un círculo de radio r centrado en el eje del disco, con velocidad angular ω . Encuentre ω .



Capítulo 6

Dinámica Hamiltoniana

6.1. Ecuaciones de Hamilton

La formulación de la Mecánica a partir del Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, describe el movimiento de un sistema en términos de sus coordenadas y velocidades generalizadas, lo cual se denomina el *espacio de configuración* (q_i, \dot{q}_i).

Otra descripción alternativa del movimiento de un sistema es posible en términos de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i , lo cual se llama el *espacio de fase* (p_i, q_i) del sistema. El espacio de fase es empleado para representar la evolución de sistemas en diversas áreas de la Física, tales como Mecánica Estadística y Sistemas Dinámicos.

Veamos cómo transformar la descripción del movimiento desde el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) al espacio de fase (p_i, q_i). Consideremos un sistema cuyo Lagrangiano es $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. El diferencial total del Lagrangiano como función de sus argumentos es

$$dL(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.1)$$

Los momentos conjugados asociado a las coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ son

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_i, \dot{q}_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (6.2)$$

A partir del conjunto de Ecs. (6.2) es posible, en principio, obtener las velocidades generalizadas \dot{q}_i como función de los momentos p_i , las coordenadas q_i y t ,

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_i, q_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (6.3)$$

Las ecuaciones de Lagrange correspondientes se pueden escribir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (6.5)$$

Sustitución en la Ec. (6.1) da

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (6.6)$$

lo que se puede expresar como

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \left(\sum_i d(p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt; \quad (6.7)$$

es decir,

$$d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.8)$$

El lado izquierdo de la Ec. (6.8) corresponde al diferencial total de una función de varias variables. El lado derecho de la Ec. (6.8), que contiene los diferenciales dp_i, dq_i y dt , indica que los argumentos de esta función son (p_i, q_i, t) . Si expresamos las velocidades generalizadas $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_i, q_i, t)$, podemos definir esta función como

$$H(p_i, q_i, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i p_i \dot{q}_i(p_i, q_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i(p_i, q_i, t), t). \quad (6.9)$$

La función $H(p_i, q_i, t)$ se llama el *Hamiltoniano* del sistema. Entonces, la Ec. (6.8) se puede escribir como

$$dH(q_i, p_i, t) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.10)$$

Por otro lado, como función de sus argumentos (q_i, p_i, t) , el diferencial total del Hamiltoniano es

$$dH(q_i, p_i, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (6.11)$$

Comparando términos en las Ecs. (6.10) y (6.11), tenemos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (6.12)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (6.13)$$

además de

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.14)$$

Las ecuaciones Ecs. (6.12) y (6.13) se denominan *ecuaciones de Hamilton* y constituyen un sistema de 2s ecuaciones diferenciales de primer orden con respecto al tiempo para q_i

y p_i , $i = 1, 2, \dots, s$. Las soluciones $q_i(t)$ y $p_i(t)$ de las ecuaciones de Hamilton requieren $2s$ constantes de integración relacionadas con las s condiciones iniciales $q_i(0)$ para las coordenadas y las $p_i(0)$ s condiciones iniciales para los momentos. El estado dinámico del sistema en un tiempo t se puede representar como un punto $(q_i(t), p_i(t))$ en el espacio euclídeo $2s$ -dimensional (q_i, p_i) , denominado espacio de fase, donde cada coordenada q_i y cada momento p_i corresponde a un eje cartesiano de ese espacio. Las soluciones de las ecuaciones de Hamilton corresponden a una trayectoria $(q_i(t), p_i(t))$ en el espacio de fase $2s$ -dimensional (q_i, p_i) que pasan por el punto $(q_i(0), p_i(0))$.

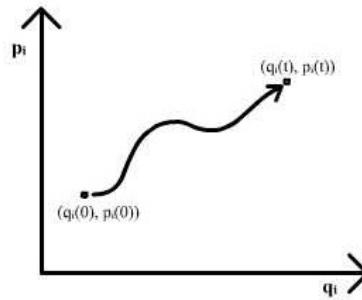


Figura 6.1: Trayectoria en el espacio de fase.

Note que el Hamiltoniano H es equivalente a la función de energía (Cap. 1) expresada en variables del espacio de fase,

$$\begin{aligned} E(q_i, \dot{q}_i) &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L = H(q_i, p_i, t) \quad \text{en coordenadas } (q_i, p_i). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(q_i, p_i, t) &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Es decir, si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, entonces $H(q_i, p_i)$ es constante. Similarmente, si el Lagrangiano L no depende explícitamente de t , la función de energía es constante.

Si el Hamiltoniano es constante, la ecuación $H(q_i, p_i) = \text{cte}$ representa una superficie de $(2s - 1)$ dimensiones sobre la cual se mueve la trayectoria $(q_i(t), p_i(t))$ en el espacio de fase $2s$ -dimensional. La trayectoria correspondiente a un sistema oscilatorio debe ser una curva cerrada sobre la superficie $H(q_i, p_i) = \text{cte}$, de modo que los valores de las coordenadas y de los momentos del sistema se repiten en el tiempo.

Un sistema caracterizado por un Lagrangiano siempre tiene un Hamiltoniano asociado. En la formulación Lagrangiana, el movimiento de un sistema con s grados de libertad se describe en términos de s ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en el tiempo para las coordenadas generalizadas q_i , ($i = 1, 2, \dots, s$); mientras que en la formulación Hamiltoniana, la dinámica del sistema se expresa mediante $2s$ ecuaciones diferenciales de primer orden con respecto al tiempo: s ecuaciones para las coordenadas q_i y s ecuaciones para los momentos conjugados p_i . Las coordenadas y los momentos conjugados poseen el mismo estatus en la formulación Hamiltoniana.

Formalmente, el Hamiltoniano corresponde a una transformación de Legendre del Lagrangiano (Apéndice B). Desde el punto de vista matemático, ambas formulaciones son equivalentes. Sin embargo, la formulación Hamiltoniana permite conectar la Mecánica Clásica con otras áreas de la Física, tales como Sistemas Dinámicos, Mecánica Estadística y Teorías de Campos.

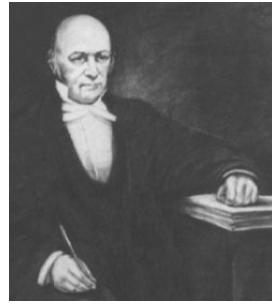


Figura 6.2: William Rowan Hamilton (1805-1865).

Ejemplos.

1. Encontrar las ecuaciones de movimiento de un oscilador armónico en la formulación Hamiltoniana.

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2. \quad (6.16)$$

Puesto que $s = 1$, hay un momento conjugado:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (6.17)$$

El Hamiltoniano es

$$H(q, p) = p\dot{q} - L = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2. \quad (6.18)$$

Sustituyendo $\dot{q} = \frac{p}{m}$,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2. \quad (6.19)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (6.20)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq. \quad (6.21)$$

Las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico se pueden resolver, al igual que la correspondiente ecuación de Lagrange. Derivando la Ec. (6.21) obtenemos,

$$\ddot{p} = -k\dot{q} = -\frac{k}{m}p, \quad (6.22)$$

cuya solución es

$$p(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.23)$$

Sustituyendo en la Ec. (6.20), obtenemos

$$q(t) = \frac{A}{m\omega} \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.24)$$

El Hamiltoniano es independiente del tiempo, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, lo cual implica que

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \text{cte.} \quad (6.25)$$

La función $H(q, p) = \text{cte}$ describe una elipse (curva unidimensional) en el espacio de fase bidimensional (q, p) y determina los valores posibles de $q(t)$ y $p(t)$ para todo tiempo t . La trayectoria descrita por $q(t), p(t)$ se mueve sobre la elipse $H = \text{cte}$.

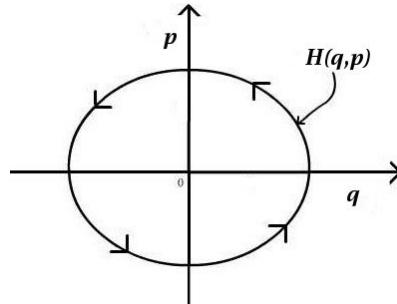


Figura 6.3: La función $H(q, p) = \text{cte}$ para un oscilador armónico en su espacio de fase.

2. Encontrar las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa m moviéndose sobre un cono vertical cuyo ángulo en el vértice es α .

El Lagrangiano fue calculado en el Cap. 1,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha. \quad (6.26)$$

Los momentos conjugados a las coordenadas r y φ son

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha, \quad (6.27)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \quad (6.28)$$

Luego,

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}, \quad (6.29)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}. \quad (6.30)$$

El Hamiltoniano es

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha. \quad (6.31)$$

Sustituyendo \dot{r} y $\dot{\varphi}$, obtenemos

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha. \quad (6.32)$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad (6.33)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha} \quad (6.34)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{cte} \quad (6.35)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg \cot \alpha. \quad (6.36)$$

Adicionalmente,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \text{cte}. \quad (6.37)$$

La función $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \text{cte}$ describe una hipersuperficie 3-dimensional en el espacio de fase 4-dimensional correspondiente a las coordenadas y momentos $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$.

3. Hamiltoniano de una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en un campo electromagnético $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

El Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético es (Cap. 2)

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (6.38)$$

donde el potencial escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$ y el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ están relacionados con los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ mediante

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.39)$$

En coordenadas cartesianas, L se puede expresar como

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - q\phi + \frac{q}{c} \sum_{i=1}^3 A_i \dot{x}_i. \quad (6.40)$$

Los momentos conjugados son

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + \frac{q}{c}A_j; \quad (6.41)$$

luego,

$$\dot{x}_j = \frac{1}{m} \left(p_j - \frac{q}{c}A_j \right). \quad (6.42)$$

El Hamiltoniano de la partícula es

$$H = \sum_j p_j \dot{x}_j - L. \quad (6.43)$$

Sustituyendo la velocidad \dot{x}_j de la Ec. (6.42), obtenemos el Hamiltoniano para una partícula en un campo electromagnético,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{1}{m} \sum_j p_j \left(p_j - \frac{q}{c}A_j \right) - \frac{1}{2m} \sum_j \left(p_j - \frac{q}{c}A_j \right)^2 \\ &\quad + q\phi - \frac{1}{m} \frac{q}{c} \sum_j A_j \left(p_j - \frac{q}{c}A_j \right) \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi - \frac{1}{m} \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \\ &= \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi \\ &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Cabe destacar que el Hamiltoniano para una partícula en un campo electromagnético en Mecánica Cuántica tiene la misma forma que en la Mecánica Clásica, Ec. (6.44).

6.2. Sistemas dinámicos y espacio de fase

El estado de un sistema general (físico, químico, biológico, económico, etc) puede describirse mediante un conjunto de variables que corresponden a cantidades observables (presión, temperatura, velocidad, posición, densidad, etc). El estado de un sistema dinámico descrito por n variables $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, en un instante t se puede representar por un vector definido en un espacio euclídeo n -dimensional (x_1, x_2, \dots, x_n) , donde cada dimensión representa una variable, denominado *espacio de fase* del sistema, tal que

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (6.45)$$

Un sistema cuyo estado (conjunto de variables) evoluciona de acuerdo a reglas determinadas constituye un *sistema dinámico*. Las reglas especifican cómo cambia el estado del sistema a partir de un estado dado. Estas reglas pueden consistir en ecuaciones diferenciales, funciones iterativas, o en un algoritmo (conjunto de instrucciones).

La evolución del estado $\mathbf{x}(t)$ en un subespacio $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en muchos sistemas se puede describir mediante ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (6.46)$$

donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})). \quad (6.47)$$

La Ec. (6.46) equivale al sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots && \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (6.48)$$

En general, una ecuación diferencial ordinaria de orden n para una variable se puede expresar como un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para n variables. La solución del sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden Ec. (6.46) para $\mathbf{x}(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ requiere el conocimiento de n condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$.

La evolución del estado de un sistema en su espacio de fase es análogo al movimiento de una partícula en un espacio euclídeo n -dimensional, cuya posición instantánea es $\mathbf{x}(t)$ y su velocidad está dada por $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$.

Los *puntos fijos* o *soluciones estacionarias* \mathbf{x}^* del sistema Ec. (6.46) están dados por

$$\left. \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|_{\mathbf{x}^*} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (6.49)$$

Si el tiempo no aparece explícitamente en la Ec. (6.46), se dice que el sistema dinámico es *autónomo*.

Ejemplos.

1. Las ecuaciones de Hamilton de un sistema mecánico con s grados de libertad constituyen un sistema dinámico $2s$ -dimensional, $i = 1, \dots, s$,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i(q_j, p_j), \quad i = 1, \dots, s \quad (6.50)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = f_i(q_j, p_j), \quad i = s + 1, \dots, 2s \quad (6.51)$$

2. El modelo de Lotka-Volterra describe la evolución de dos poblaciones, predadores y presas, en un sistema ecológico, mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \alpha c - \beta cz = f_1(c, z) \\ \dot{z} &= -\gamma z + \delta cz = f_2(c, z), \end{aligned} \quad (6.52)$$

donde c representa el número de presas (por ejemplo conejos), y z corresponde al número de sus depredadores (por ejemplo zorros). Las derivadas \dot{c} , \dot{z} representan la tasa de crecimiento de cada población, respectivamente. Los parámetros son: α : tasa de nacimiento de las presas; β : tasa de presas comidas por los depredadores; γ : tasa de muerte de los depredadores; δ : tasa de crecimiento de los depredadores alimentándose de las presas. Las variables $c(t)$ y $z(t)$ describen una trayectoria cerrada (periódica) en el espacio de fase del sistema, descrita por una función $h(c, z) = \text{cte}$. El sistema posee un punto fijo, $c^* = \frac{\gamma}{\delta}$, $z^* = \frac{\alpha}{\beta}$.

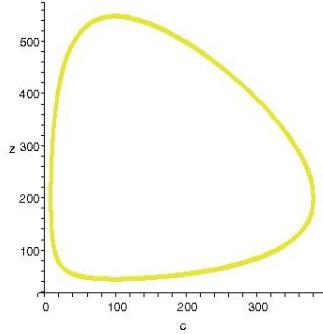


Figura 6.4: Espacio de fase bidimensional (c, z) en el modelo de Lotka-Volterra para valores dados de los parámetros α, β, γ y δ .

3. Las ecuaciones de Lorenz, propuestas originalmente como un modelo simplificado de variables climáticas, forman un sistema dinámico no lineal, tridimensional,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + ay = f_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y = f_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= xy - bz = f_3(x, y, z). \end{aligned} \quad (6.53)$$

El fenómeno de *caos* fue descubierto por primera vez en estas ecuaciones. Para cierto rango de valores de los parámetros a , b , y r , este sistema es caótico; es decir, la trayectoria en su espacio de fase presenta sensibilidad extrema ante pequeños cambios de las condiciones iniciales. En ese caso, la trayectoria del vector $\mathbf{x}(t) = (x, y, z)$ no se cierra (es aperiódica) y describe una intrincada estructura geométrica en el espacio de fase del sistema, denominada *atractor de Lorenz*.

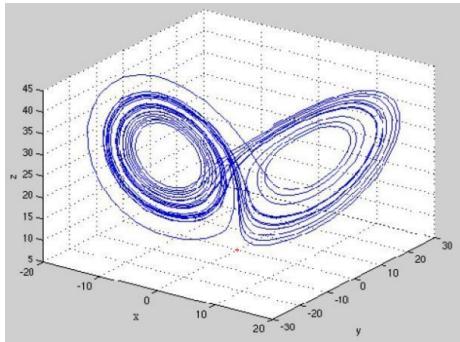


Figura 6.5: Atractor de Lorenz.

Teorema de existencia y unicidad.

Dado un sistema dinámico descrito por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

definido en un subespacio $U \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ satisface la propiedad

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq k |\mathbf{y} - \mathbf{x}|,$$

denominada *propiedad de Lipschitz*, para algún $k < \infty$, donde $|\mathbf{x}| \equiv |x_1^2 + \dots + x_n^2|^{1/2}$, y dado un punto $\mathbf{x}(0) \in U$, existe una solución *única* $\mathbf{x}(t)$ que satisface esta ecuación para $t \in (0, \tau)$ con condición inicial $\mathbf{x}(0)$.

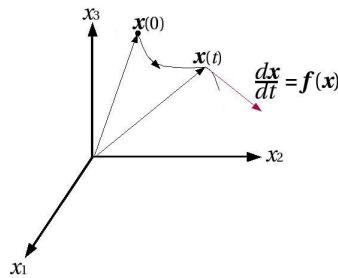


Figura 6.6: Teorema de unicidad en un espacio de fase tridimensional.

La propiedad de Lipschitz (no singularidad) es, en general, satisfecha por las funciones que describen sistemas físicos.

El vector de estado del sistema $\mathbf{x}(t)$ en el espacio de fase se *asemeja* a un vector de posición de una partícula en un sistema de coordenadas espaciales cartesianas. El vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ describe la velocidad $d\mathbf{x}/dt$ y es siempre tangente a la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ en el espacio de fase.

El teorema de unicidad constituye el fundamento matemático del principio del *determinismo* y de la predicción en la Física: el estado de un sistema en un instante dado está determinado únicamente por su estado en un instante anterior.

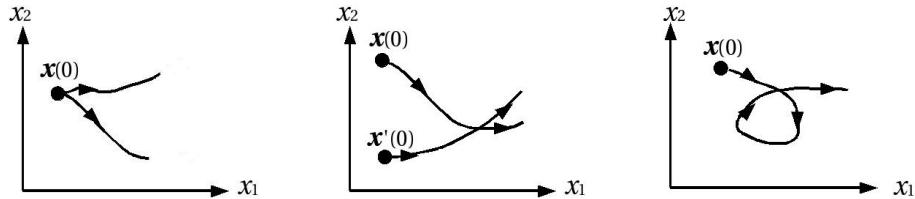


Figura 6.7: Situaciones prohibidas por el Teorema de Unicidad en el espacio de fase: dos trayectorias no pueden surgir del mismo punto (izquierda); dos trayectorias no pueden intersectarse (centro); una trayectoria no puede cruzarse a sí misma (derecha).

El teorema de unicidad tiene importantes implicaciones. En particular, en un espacio de fase bidimensional se cumple el siguiente teorema:

Teorema de Poincaré-Bendixson.

Los únicos estados asintóticos posibles en el espacio de fase de un sistema dinámico bidimensional son puntos fijos o trayectorias cerradas (también llamadas *ciclos límites*).

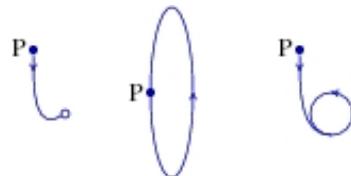


Figura 6.8: Teorema de Poincaré-Bendixson.

Puesto que una trayectoria cerrada en el espacio de fase es periódica y un punto fijo es estacionario, el teorema de Poincaré-Bendixson implica que un comportamiento caótico solamente puede surgir en sistemas dinámicos continuos cuyo espacio de fase posee al menos tres dimensiones. En particular, un sistema con un grado de libertad posee un espacio de fase bidimensional y, por lo tanto, solamente puede exhibir soluciones asintóticamente periódicas (por ejemplo, un oscilador armónico) o de punto fijo (por ejemplo, un oscilador armónico con fricción).

6.3. Teorema de Liouville

Un conjunto de condiciones iniciales en el espacio de fase de un sistema se denomina un *ensemble*. Un ensemble puede interpretarse como un conjunto de sistemas idénticos o réplicas con diferentes condiciones iniciales, o como diferentes realizaciones de un mismo sistema en un instante inicial.

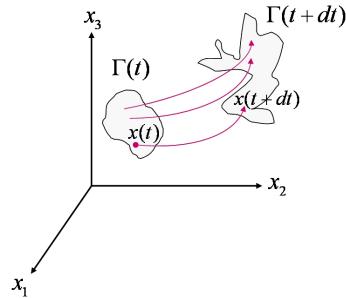


Figura 6.9: Evolución de un ensemble en el espacio de fase.

Cada punto en el ensemble evoluciona de acuerdo con la ecuación dinámica del sistema, Ec. (6.46), dando lugar a un estado $\mathbf{x}(t)$ en un tiempo t . Denotamos por $\Gamma(t)$ el volumen ocupado por el conjunto de puntos $\mathbf{x}(t)$ en el espacio de fase n -dimensional en el tiempo t . Debido a la evolución del sistema, Γ cambia en el tiempo. El teorema de unicidad establece que no puede surgir más de una trayectoria a partir de una condición inicial. Como consecuencia, Γ no puede aumentar en el tiempo. Es decir, el teorema de unicidad implica que en un sistema dinámico siempre debe ocurrir

$$\frac{d\Gamma}{dt} \leq 0. \quad (6.54)$$

Supongamos que el volumen n -dimensional $\Gamma(t)$ está encerrado por una superficie S ($n - 1$)-dimensional en el espacio de fase. El cambio de Γ en el tiempo está dado por el número total de trayectorias que atraviesan (entran o salen) S por unidad de tiempo. Las trayectorias se comportan como un flujo de “partículas” o un campo de velocidades a través de la superficie S . El flujo a través de un diferencial de área $d\mathbf{a}$ por unidad de tiempo es igual a $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$, donde $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ es la velocidad de la partícula incidente y $d\mathbf{a}$ es el vector normal al diferencial de área.

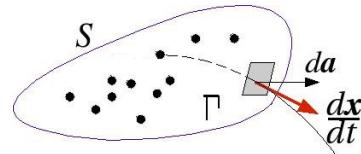


Figura 6.10: Flujo de trayectorias a través de una superficie S que encierra un volumen Γ en el espacio de fase.

Entonces, el cambio de Γ en el tiempo es igual al flujo total por unidad de tiempo a través de S ,

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_S \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{flujo total a través de } S \text{ por unidad de tiempo}) \\ &= \oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\Gamma} \nabla \cdot \mathbf{f} \, d\Gamma' \quad (\text{teorema de la divergencia en } n \text{ dimensiones}), \quad (6.55)\end{aligned}$$

donde

$$d\Gamma' = dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \prod_{i=1}^n dx_i, \quad (6.56)$$

es el diferencial de volumen en el espacio de fase n -dimensional, y

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}. \quad (6.57)$$

Luego, la condición Ec. (6.54) que satisface todo sistema dinámico, equivale a

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \text{si} \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \quad (6.58)$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} < 0, \quad \text{si} \quad \nabla \cdot \mathbf{f} < 0. \quad (6.59)$$

Un sistema de ecuaciones tal que $\nabla \cdot \mathbf{f} > 0$ viola el teorema de unicidad y no representa a un sistema dinámico.

Teorema de Liouville.

El volumen representado por un ensemble de un sistema mecánico (que obedece las ecuaciones de Hamilton) en su espacio de fase es constante, $\Gamma = \text{cte}$, i.e.,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Demostración:

La dinámica del sistema está descrita por las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

donde

$$\mathbf{f} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_s}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_s} \right). \quad (6.60)$$

Luego,

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_i \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \quad (6.61)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 \quad (6.62)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad \blacklozenge \quad (6.63)$$



Figura 6.11: Joseph Liouville (1809-1882).

Los sistemas dinámicos que satisfacen $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ ($\frac{d\Gamma}{dt} = 0$) se llaman *conservativos*, mientras que los sistemas tales que $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$ ($\frac{d\Gamma}{dt} < 0$) se denominan *disipativos*.

Los sistemas Hamiltonianos son conservativos; el volumen de un ensemble puede cambiar su forma en el tiempo, pero no su tamaño, mientras se mueve en el espacio de fase. La evolución de un ensemble en el espacio de fase de un sistema Hamiltoniano es similar al movimiento de un fluido incompresible en el espacio real.

En los sistemas disipativos, las trayectorias en el espacio de fase convergen asintóticamente a un objeto geométrico que tiene un volumen (o dimensión) menor que el espacio de fase que lo contiene, y que se denomina *atractor* del sistema. Esta situación es típica de los sistemas con fricción y de los sistemas fuera de equilibrio.

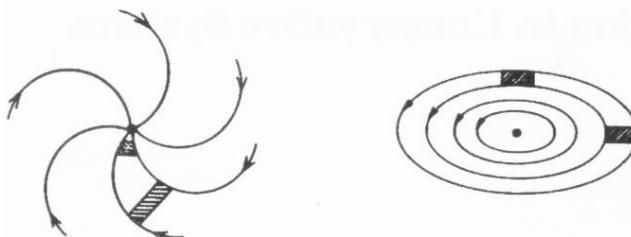


Figura 6.12: Evolución esquemática de un ensemble en el espacio de fase de un sistema disipativo (izquierda), y de un sistema conservativo (derecha).

El Teorema de Liouville tiene importantes implicaciones. Una consecuencia de este teorema es que las trayectorias en el espacio de fase de un sistema Hamiltoniano eventualmente retornan arbitrariamente cerca de sus condiciones iniciales.

Teorema de recurrencia de Poincaré.

Consideremos alguna condición inicial $\mathbf{x}(0) = (q_i(0), p_i(0))$ en un espacio de fase finito D de un sistema Hamiltoniano. Entonces, para cualquier vecindad finita U de $\mathbf{x}(0)$, existen trayectorias originadas en puntos de U que eventualmente retornan a U .

Demostración:

Consideremos imágenes sucesivas de la evolución de U bajo las ecuaciones de Hamilton, en intervalos de tiempo Δt . Denotamos por $C(U)$ la imagen de U después de un intervalo Δt . Sucesivas imágenes corresponden a $C^n(U)$, donde C^n indica la composición o iteración n -ésima de C . Existen dos posibilidades: las imágenes sucesivas de U se intersectan, o no lo hacen. Si éstas imágenes no se intersectan, entonces en cada iteración, un volumen de D igual al volumen de U se ocupa y, por tanto, no puede pertenecer a ninguna imagen subsiguiente. Puesto que el volumen D es finito, no es posible acomodar un número infinito de volúmenes finitos dentro de D . Luego, las imágenes sucesivas de U se deben intersectar después de un número finito de iteraciones. Supongamos que $C^i(U)$ se intersecta con $C^j(U)$, con $i > j$. Entonces, las pre-imágenes $C^{i-1}(U)$ y $C^{j-1}(U)$ de estos subconjuntos también deben intersectarse, puesto que la pre-imagen de un punto en la intersección pertenece a ambos subconjuntos. Esto puede ser continuado hasta que finalmente $C^{i-j}(U)$ intersecta a U . Luego, después de $i - j$ iteraciones de la evolución C , existe un conjunto de puntos inicialmente en U que retornan a U . ♦



Figura 6.13: Henri Poincaré (1854 - 1912).

El Teorema de recurrencia de Poincaré no establece el tiempo requerido para el retorno cercano a las condiciones iniciales de un sistema dinámico Hamiltoniano; este tiempo puede ser extremadamente largo, especialmente si el espacio de fase posee alta dimensión.

Ejemplos.

1. Las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico

$$\dot{q} = \frac{p}{m} = f_1(q, p), \quad (6.64)$$

$$\dot{p} = -kq = f_2(q, p), \quad (6.65)$$

conducen a

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial p} = 0. \quad (6.66)$$

Este sistema es conservativo.

2. Las ecuaciones de Lorenz Ecs. (6.53) dan

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -(a + b + 1). \quad (6.67)$$

Luego, el sistema de Lorenz es disipativo si $a + b + 1 > 0$. Estas son las condiciones que producen el atractor de Lorenz en la Fig. (6.5).

6.4. Paréntesis de Poisson

Consideremos una función general $f(q_i, p_i, t)$ definida en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico. La derivada total con respecto al tiempo de esta función es

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.68)$$

Las ecuaciones de Hamilton para este sistema son

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (6.69)$$

Sustituyendo las ecuaciones de Hamilton en la Ec. (6.68), tenemos

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.70)$$

Definimos el *paréntesis de Poisson* de H con f como la operación

$$[f, H] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (6.71)$$

Luego, podemos escribir

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.72)$$

Si f es una cantidad conservada en el espacio de fase, o una primera integral del movimiento, entonces $\frac{df}{dt} = 0$, y f satisface

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \quad (6.73)$$

Si, adicionalmente, la integral del movimiento f no depende explícitamente del tiempo, tenemos

$$[f, H] = 0. \quad (6.74)$$

En general, dadas dos funciones $f(q_i, p_i, t)$ y $g(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase, podemos definir el *paréntesis de Poisson* de f y g como la operación

$$[f, g] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (6.75)$$

El paréntesis de Poisson puede ser considerado como una operación entre dos funciones definidas en un espacio algebraico que asigna otra función en ese espacio.



Figura 6.14: Siméon Denis Poisson (1781-1840).

El paréntesis de Poisson es una operación que posee las siguientes propiedades (características de lo que se denomina *álgebra de Lie*):

1. $[f, g] = -[g, f]$, $[f, f] = 0$ (antisimetría).
2. $[f, c] = 0$, si c = cte.
3. $[af_1 + bf_2, g] = a[f_1, g] + b[f_2, g]$, a, b = ctes. (operador lineal).
4. $[f_1 f_2, g] = f_1[f_2, g] + f_2[f_1, g]$, (no asociativo).
5. $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ (suma de permutaciones cíclicas es cero). Esta propiedad se conoce como la *identidad de Jacobi*.

Estas propiedades pueden demostrarse directamente a partir de la definición en la Ec. (6.71).

Adicionalmente, puesto que los p_i y q_i representan coordenadas independientes en el espacio de fase, tenemos $\forall f$,

$$[q_i, f] = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}^0 \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_k \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad (6.76)$$

$$[p_i, f] = \sum_k \left(\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}^0 \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = - \sum_k \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = - \frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (6.77)$$

Note que si $f = p_j$, ó $f = q_j$,

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}. \quad (6.78)$$

Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H] \quad (6.79)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H]. \quad (6.80)$$

En Mecánica Cuántica, la operación $[A, B] = AB - BA$ se denomina el *comutador* de los operadores u observables A y B . La estructura algebraica de la Mecánica Clásica se preserva en la Mecánica Cuántica. En particular, $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$.

Ejemplos.

- Calcular $[r, \mathbf{p}]$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

$$[r, \mathbf{p}] = [r, p_x] \hat{\mathbf{i}} + [r, p_y] \hat{\mathbf{j}} + [r, p_z] \hat{\mathbf{k}}. \quad (6.81)$$

Calculamos la componente

$$\begin{aligned} [r, p_x] &= \sum_i \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Similarmente,

$$[r, p_y] = \frac{y}{r}, \quad [r, p_z] = \frac{z}{r}. \quad (6.83)$$

Luego,

$$[r, \mathbf{p}] = \frac{x}{r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{r} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{r} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}. \quad (6.84)$$

2. Las componentes del momento angular $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ son

$$l_x = yp_z - zp_y, \quad l_y = zp_x - xp_z, \quad l_z = xp_y - yp_x. \quad (6.85)$$

Calcular los siguientes paréntesis de Poisson para las componentes de \mathbf{p} y \mathbf{l} :

$$\text{a) } [p_y, l_x] = -\frac{\partial l_x}{\partial y} = -p_z \quad (6.86)$$

$$\text{b) } [p_x, l_x] = -\frac{\partial l_x}{\partial x} = 0 \quad (6.87)$$

$$\text{c) } [p_z, l_y] = -\frac{\partial l_y}{\partial z} = -p_x \quad (6.88)$$

$$\text{d) } [p_x, l_y] = -\frac{\partial l_y}{\partial x} = p_z \quad (6.89)$$

$$\begin{aligned} \text{e) } [l_x, l_y] &= \sum_i \left(\frac{\partial l_x}{\partial q_i} \frac{\partial l_y}{\partial p_i} - \frac{\partial l_x}{\partial p_i} \frac{\partial l_y}{\partial q_i} \right) \\ &= \left(\frac{\partial l_x}{\partial x} \frac{\partial l_y}{\partial p_x} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x} \frac{\partial l_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial l_x}{\partial y} \frac{\partial l_y}{\partial p_y} - \frac{\partial l_x}{\partial p_y} \frac{\partial l_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial l_x}{\partial z} \frac{\partial l_y}{\partial p_z} - \frac{\partial l_x}{\partial p_z} \frac{\partial l_y}{\partial z} \right) \\ &= (-p_y)(-x) - yp_x \\ &= xp_y - yp_x = l_z. \end{aligned} \quad (6.90)$$

$$\text{f) } [l_y, l_z] = l_x. \quad (6.91)$$

$$\text{g) } [l_z, l_x] = l_y.$$

En general, $[l_i, l_j] = \epsilon_{ijk} l_k$. En Mecánica Cuántica, estas relaciones corresponden a $[l_i, l_j] = \epsilon_{ijk} i \hbar l_k$.

Teorema de Poisson.

Si f y g son ambas constantes de movimiento, entonces, $[f, g] = \text{cte.}$

Demostración:

Si f y g son constantes de movimiento, entonces satisfacen

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = 0. \quad (6.92)$$

Calculemos

$$\frac{d}{dt} [f, g] = \frac{\partial}{\partial t} [f, g] + [[f, g], H]. \quad (6.93)$$

Calculemos la derivada parcial

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[f, g] &= \sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial p_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right) \right) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right].\end{aligned}\quad (6.94)$$

Usando la identidad de Jacobi, tenemos

$$[[f, g], H] = -[[g, H], f] - [[H, f], g]. \quad (6.95)$$

Sustituyendo Ec. (6.94) y Ec. (6.95) en Ec. (6.93), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f, g] &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [[g, H], f] - [[H, f], g] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [f, [g, H]] + [[f, H], g] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H], g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] \right] \\ &= \left[\frac{df}{dt}, g \right] + \left[f, \frac{dg}{dt} \right] = 0 \quad (6.96) \\ \Rightarrow [f, g] &= \text{cte.} \quad \blacklozenge \quad (6.97)\end{aligned}$$

El Teorema de Poisson puede ser útil para encontrar una nueva constante de movimiento en un sistema, si se conocen dos de ellas.

La condición de integrabilidad de un sistema en la formulación Hamiltoniana puede expresarse en el lenguaje de los paréntesis de Poisson, de la siguiente manera, denominada *integrabilidad de Liouville*:

Un sistema con s grados de libertad es *integrable* si existen s funciones independientes $I_k(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$, $k = 1, \dots, s$, denominadas *constantes del movimiento*, cuyos paréntesis de Poisson mutuos son cero,

$$[I_k, I_j] = 0. \quad \forall k, j = 1, \dots, s. \quad (6.98)$$

En ese caso, se dice que las s funciones $I_k(q_i, p_i)$ están en *involución*. Luego, $I_k(q_i, p_i) = C_k$, donde cada C_k es una constante, debido a la propiedad 2 de los paréntesis de Poisson. En sistemas conservativos, el Hamiltoniano $H(q_i, p_i)$ explícitamente independiente del tiempo es una de las constantes del movimiento.

La trayectoria $q_i(t), p_i(t)$ de un sistema integrable con s grados de libertad debe satisfacer simultáneamente las s condiciones $I_k(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = C_k$ en su espacio de fase $2s$ -dimensional. Cada relación $I_k(q_i, p_i) = C_k$ representa una superficie $(2s - 1)$ -dimensional sobre la cual se encuentra la trayectoria $q_i(t), p_i(t)$. La trayectoria debe estar en la intersección de las s superficies $(2s - 1)$ -dimensionales. Cada intersección de dos superficies representa un subespacio que posee una dimensión menor que la dimensión de las superficies. Luego, la trayectoria yace sobre un subespacio o superficie s -dimensional que corresponde a la intersección de las s superficies $I_k(q_i, p_i) = C_k$.

Por ejemplo, una partícula moviéndose sobre un cono vertical invertido (Sec. 6.1) posee $s = 2$ grados de libertad y dos constantes de movimiento, el Hamiltoniano H y el momento angular p_ϕ . Cada constante de movimiento representa una superficie 3-dimensional en el espacio de fase de 4 dimensiones (r, ϕ, p_r, p_ϕ) . La trayectoria del sistema en su espacio de fase ocurre sobre una superficie bidimensional resultante de la intersección de las dos superficies $H = \text{cte}$ y $p_\phi = \text{cte}$, la cual puede representarse como un toroide, como veremos en este Capítulo.

6.5. Transformaciones canónicas

La escogencia del conjunto específico de coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ es arbitraria. Por ejemplo, las posiciones de un sistema de partículas en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc. Las ecuaciones de Lagrange en términos de un conjunto dado $\{q_i\}$ tienen la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (6.99)$$

En la Sec. 1.6, vimos que la derivación de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas generalizadas específicas; por lo tanto, la forma de las ecuaciones de Lagrange no depende de un conjunto particular de coordenadas $\{q_i\}$. Se puede escoger otro conjunto de s coordenadas independientes $\{Q_i = Q_i(q_j, t)\}$, y las ecuaciones de Lagrange también se cumplen en esas coordenadas,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0. \quad (6.100)$$

En la formulación Hamiltoniana, las coordenadas q_i y los momentos conjugados p_i son considerados como un conjunto de $2s$ variables independientes en un espacio de fase $2s$ -dimensional. En términos de estas variables, el Hamiltoniano es $H(q_i, p_i, t)$. Las ecuaciones de Hamilton correspondientes son

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (6.101)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (6.102)$$

Consideremos un cambio de variables en el espacio de fase que incluya tanto las coordenadas como momentos,

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), \quad P_i = P_i(q_j, p_j, t). \quad (6.103)$$

Este tipo de transformaciones se denominan *transformaciones puntuales* en el espacio de fase y, en principio, son invertibles, i.e., $q_i = q_i(Q_j, P_j, t)$, $p_i = p_i(Q_j, P_j, t)$. Denotamos por $H'(Q_i, P_i, t)$ al Hamiltoniano en términos de las nuevas variables $\{Q_i, P_i\}$.

En contraste con la formulación Lagrangiana, la forma de las ecuaciones de Hamilton, en general, no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$. Por ejemplo, supongamos un sistema con Hamiltoniano $H(q_i, p_i)$ en el cual se cumplen las ecuaciones de Hamilton (6.101)-(6.102), y consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase,

$$Q_i = -p_i, \quad P_i = q_i. \quad (6.104)$$

El Hamiltoniano en las nuevas variables será $H'(Q_i, P_i)$. Las ecuaciones de Hamilton en las variables $\{Q_i, P_i\}$ se transforman de acuerdo a

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \implies \dot{P}_i = \frac{\partial H'}{\partial p_i} = \sum_k \left(\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial H'}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \\ &= - \sum_k \frac{\partial H'}{\partial Q_k} \delta_{ik} = - \frac{\partial H'}{\partial Q_i}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \implies -\dot{Q}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} = - \sum_k \left(\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial H'}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \\ &= - \sum_k \frac{\partial H'}{\partial P_k} \delta_{ik} = - \frac{\partial H'}{\partial P_i}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Luego, en las variables $\{Q_i, P_i\}$ también se satisfacen las ecuaciones de Hamilton. Sin embargo, es fácil notar que la transformación puntual

$$Q_i = p_i, \quad P_i = q_i, \quad (6.107)$$

no preserva la forma de las ecuaciones de Hamilton en las variables $\{P_i, Q_i\}$.

Una transformación puntual de variables del espacio de fase que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton, se denomina *transformación canónica*.

$H(q_i, p_i, t)$	\rightarrow Transformación canónica \rightarrow	$H'(Q_i, P_i, t)$
$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$	$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$	$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}$
$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$	$P_i = P_i(q_j, p_j, t)$	$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$

(6.108)

Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando aparecen coordenadas cíclicas en las nuevas variables $\{Q_i, P_i\}$, es decir, cuando el Hamiltoniano transformado $H'(Q_i, P_i, t)$ no depende explícitamente de alguna coordenada Q_j o momento conjugado P_j . En ese caso, la derivada de H' con respecto a esa coordenada o momento se hace cero en la correspondiente ecuación de Hamilton y, por lo tanto, existe una cantidad conservada asociada a la variable cíclica.

La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica puede derivarse a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.

Consideremos el Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$,

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ \delta S = 0 &\Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.109)$$

el cual implica que se cumplen las ecuaciones de Lagrange y, por lo tanto, las ecuaciones de Hamilton en las variables $\{q_i, p_i\}$. En términos del Hamiltoniano

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (6.110)$$

tenemos

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt = 0. \quad (6.111)$$

En las variables $\{Q_i, P_i\}$ se debe cumplir el Principio de Mínima Acción,

$$\delta S' = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_i P_i \dot{Q}_i - H' \right) dt = 0, \quad (6.112)$$

para que también se cumplan las ecuaciones de Hamilton en $\{Q_i, P_i\}$.

Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos en la Ec. (6.109) y la Ec. (6.112) difieren, a lo sumo, en una derivada total con respecto al tiempo de una función arbitraria F de las variables $\{Q_i, P_i\}$, $\{q_i, p_i\}$ y t ; esto es,

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dF}{dt}, \quad (6.113)$$

pues, en este caso,

$$\delta S = \delta S' + \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt \right) = \delta S' + \delta[F(t_2) - F(t_1)] = \delta S'. \quad (6.114)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Hamilton que se derivan de la condición $\delta S = 0$ en las variables $\{q_i, p_i\}$ tienen la misma forma que las ecuaciones de Hamilton que se deducen de la condición $\delta S' = 0$ en las variables $\{Q_i, P_i\}$.

Luego, la *condición* para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica puede escribirse como

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i + (H' - H). \quad (6.115)$$

La función F se llama *función generadora* de la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$. Dada una $F(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{dF}{dt}$ debe satisfacer la condición Ec. (6.115) para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica. Entonces, las derivadas parciales de F con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{dF}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$. Luego, la función F genera una conexión entre ambos conjuntos de coordenadas y momentos que garantiza que las ecuaciones de Hamilton preserven su forma bajo esta transformación.

Las funciones generadoras pueden no depender de todas las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i, t) y tener forma arbitraria. Para ver cómo una transformación canónica surge de una función generadora, consideremos las siguientes formas de *funciones generadoras básicas*:

1. $F_1 = F_1(q_i, Q_i, t)$.

Calculemos la derivada total con respecto al tiempo,

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (6.116)$$

Comparando con la condición Ec. (6.115) para funciones generadoras, tenemos

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i(q, Q, t) \quad (6.117)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = P_i(q, Q, t) \quad (6.118)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (6.119)$$

La función F_1 genera la transformación canónica $p_i = p_i(q, Q, t)$, $P_i = P_i(q, Q, t)$, a través de sus derivadas parciales.

2. $F_2 = F_2(q_i, P_i, t)$.

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (6.120)$$

Para comparar con la condición Ec. (6.115),

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i + (H' - H),$$

sustituimos

$$\frac{d}{dt}(P_i Q_i) = P_i \dot{Q}_i + Q_i \dot{P}_i \rightarrow P_i \dot{Q}_i = \frac{d}{dt}(P_i Q_i) - Q_i \dot{P}_i, \quad (6.121)$$

de modo que la concisión Ec. (6.115) se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \left(F + \sum_i P_i Q_i \right) = \sum_i \left(p_i \dot{q}_i + Q_i \dot{P}_i \right) + (H' - H), \quad (6.122)$$

donde el lado izquierdo es la derivada total de una función arbitraria de (Q_i, P_i, q_i, p_i) . Comparando con la Ec. (6.120), obtenemos

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i(q, P, t) \quad (6.123)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i(q, P, t) \quad (6.124)$$

$$F_2 = F + \sum_i P_i Q_i \quad (6.125)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (6.126)$$

3. $F_3 = F_3(p_i, Q_i, t)$

$$\frac{dF_3}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (6.127)$$

La condición Ec. (6.115) puede expresarse como

$$\frac{d}{dt} \left(F - \sum_i p_i q_i \right) = \sum_i \left(-q_i \dot{p}_i - P_i \dot{Q}_i \right) + H' - H \quad (6.128)$$

donde hemos sustituido

$$p_i \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(p_i q_i) - q_i \dot{p}_i \quad (6.129)$$

Comparando con la Ec. (6.127), tenemos

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = q_i(p, Q, t) \quad (6.130)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = P_i(p, Q, t) \quad (6.131)$$

$$F_3 = F - \sum_i p_i q_i \quad (6.132)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (6.133)$$

4. $F_4 = F_4(p, P, t)$.

$$\frac{dF_4}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (6.134)$$

La condición Ec. (6.115) puede expresarse como

$$\frac{d}{dt} \left(F - \sum_i p_i q_i + \sum_i Q_i P_i \right) = \sum_i \left(-q_i \dot{p}_i + Q_i \dot{P}_i \right) + H' - H \quad (6.135)$$

donde hemos sustituido

$$p_i \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (p_i q_i) - q_i \dot{p}_i, \quad P_i \dot{Q}_i = \frac{d}{dt} (P_i Q_i) - Q_i \dot{P}_i \quad (6.136)$$

Comparando con la Ec. (6.134), tenemos

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = q_i(p, P, t) \quad (6.137)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i(p, P, t) \quad (6.138)$$

$$F_4 = F + \sum_i P_i Q_i - \sum_i p_i q_i \quad (6.139)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (6.140)$$

La transformación canónica asociada a una función generadora F es una propiedad característica de la función F ; no depende del Hamiltoniano de un sistema específico. Por lo tanto, una transformación canónica dada $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{Q_i, P_i, t\}$ puede emplearse para transformar diversos Hamiltonianos; su utilidad en cada caso dependerá del problema específico. La relación entre el Hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$ y el Hamiltoniano transformado $H'(Q_i, P_i, t)$ resultante de la transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{Q_i, P_i, t\}$ generada por una F siempre es

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (6.141)$$

Luego, si F es independiente del tiempo, entonces $H = H'$.

Dada una función generadora F , es posible encontrar una transformación canónica asociada a F . El problema inverso también se puede plantear en algunos casos: dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación. Por ejemplo, consideremos una transformación

$$p_i = p_i(q, Q, t), \quad (6.142)$$

$$P_i = P_i(q, Q, t), \quad (6.143)$$

la cual posee la forma de la transformación canónica asociada a una función generadora de tipo $F_1(q_i, Q_i, t)$. Luego, podemos escribir las siguientes ecuaciones en derivadas parciales para F_1 ,

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i(q, Q, t), \quad (6.144)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = P_i(q, Q, t), \quad (6.145)$$

las cuales, en principio, pueden integrarse para encontrar la función F_1 .

Ejemplos.

1. Encontrar la transformación canónica generada por la función $F_2(q_i, P_i) = \sum_i q_i P_i$.

Las transformaciones entre las coordenadas (q_i, p_i) y (Q_i, P_i) producidas por una función generadora de tipo $F_2(q_i, P_i, t)$ conducen a

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i \quad (6.146)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i. \quad (6.147)$$

Luego, la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ generada por esta F_2 corresponde a la *transformación identidad*.

2. Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $G = q_1(P_1 + 2p_2) + p_2P_2$.

La función es de la forma $G(q_1, P_1, p_2, P_2)$. Calculamos la derivada

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial G}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial G}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial G}{\partial P_2} \dot{P}_2 \\ &= (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2. \end{aligned} \quad (6.148)$$

Debemos comparar con la condición general Ec. (6.115) que debe cumplir una transformación canónica,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^2 P_i \dot{Q}_i + (H' - H) \\ &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + (H' - H). \end{aligned} \quad (6.149)$$

Para llevar la Ec. (6.149) a la forma de la Ec. (6.148), expresamos

$$\begin{aligned} p_2 \dot{q}_2 &= \frac{d}{dt}(p_2 q_2) - q_2 \dot{p}_2 \\ P_1 \dot{Q}_1 &= \frac{d}{dt}(P_1 Q_1) - Q_1 \dot{P}_1 \\ P_2 \dot{Q}_2 &= \frac{d}{dt}(P_2 Q_2) - Q_2 \dot{P}_2 \end{aligned}$$

y sustituimos en la Ec. (6.149),

$$\frac{dF}{dt} = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \frac{d}{dt}(p_2 q_2 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2) + (H' - H) \quad (6.150)$$

$$\frac{d}{dt}(F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (H' - H). \quad (6.151)$$

El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , $i = 1, 2$, por lo tanto, la Ec. (6.151) sigue correspondiendo a la condición general para una transformación canónica, Ec. (6.115). Comparando Ec. (6.148) y Ec. (6.151), tenemos

$$\begin{aligned} G &= F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2 \\ p_1 &= P_1 + 2p_2, \quad Q_1 = q_1 \\ -q_2 &= 2q_1 + P_2, \quad Q_2 = p_2 \end{aligned}$$

Luego, la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ generada por G es

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 - 2p_2, \\ Q_1 &= q_1 \\ P_2 &= -2q_1 - q_2 \\ Q_2 &= p_2. \end{aligned}$$

6.6. Transformaciones canónicas infinitesimales

En el Capítulo 2 vimos que una transformación infinitesimal de coordenadas, $q'_i = q_i + \delta q_i$, en el espacio de configuración de un sistema, que deja invariante las ecuaciones de Lagrange, constituye una simetría del sistema e implica la existencia de una cantidad conservada asociada a esa simetría. Denominamos corriente de Noether a la cantidad conservada.

Podemos extender el concepto de transformaciones infinitesimales al espacio de fase $\{q_i, p_i\}$, mediante una transformación de las coordenadas y momentos conjugados. Consideraremos una transformación infinitesimal de la forma

$$Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j), \quad (6.152)$$

$$P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j), \quad (6.153)$$

donde $f_i(q_j, p_j)$, $g_i(q_j, p_j)$ son funciones dadas y $\epsilon \rightarrow 0$. Para que la transformación Ecs. (6.152)-(6.153) sea canónica, debe existir una función generadora para ella. Podemos considerar las Ecs. (6.152)-(6.153) como una desviación infinitesimal de una transformación identidad, la cual, como vimos en un ejemplo anterior, posee la función generadora $F_2(q_i, P_i) = \sum_i q_i P_i$. Entonces, podemos asumir que la función generadora de la transformación infinitesimal Ecs. (6.152)-(6.153) corresponde a una pequeña desviación de la función generadora de la transformación identidad; esto es,

$$F_2(q_i, P_i) = \sum_i q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i), \quad (6.154)$$

donde $G(q_i, P_i)$ es una función a ser determinada.

La transformación canónica generada por esta función de tipo $F_2(q_i, P_i)$ es

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (6.155)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}. \quad (6.156)$$

Comparando las Ecs. (6.152)-(6.153) y Ecs. (6.155)-(6.156), obtenemos las condiciones para $G(q_i, P_i)$,

$$f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad (6.157)$$

$$g_i(q_j, p_j) = -\frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (6.158)$$

Si existe tal función $G(q_i, P_i)$, entonces la transformación infinitesimal Ecs. (6.152)-(6.153) es canónica. La función $G(q_i, P_i)$ es la función generadora de esa transformación canónica infinitesimal. Por otro lado, si la función $F_2(q_i, P_i)$ y, por tanto $G(q_i, P_i)$, está dada, entonces la correspondiente transformación infinitesimal puede determinarse mediante las Ecs. (6.155)-(6.156).

Podemos expresar la función f_i , hasta primer orden en ϵ , como

$$\begin{aligned} f_i(q_j, p_j) &= \frac{\partial G}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial G}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial G}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial G}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (6.159)$$

Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función G . Supongamos una función general $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase. El cambio en la función K debido a una transformación canónica infinitesimal, Ecs. (6.152)-(6.153), hasta primer orden en ϵ , es

$$\begin{aligned} \delta K &= K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) \\ &= K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i) \\ &= \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right) \\ &= \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \\ &= \epsilon [K, G]. \end{aligned} \quad (6.160)$$

Supongamos ahora que $K = H$; entonces el cambio en el Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal está dado por

$$\delta H = \epsilon [H, G]. \quad (6.161)$$

Si el Hamiltoniano es invariante ante la transformación canónica infinitesimal, debemos tener $\delta H = 0$ y, por lo tanto,

$$[H, G] = 0 \Rightarrow \frac{dG}{dt} = 0, \quad (6.162)$$

puesto que $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$. Luego, $\delta H = 0 \Rightarrow G = \text{cte}$. Tenemos el siguiente resultado:

Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.

Este resultado establece la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo Hamiltoniano. En comparación con la descripción Lagrangiana, la relación entre invariancia y constantes de movimiento se expresa de manera más simple en la formulación Hamiltoniana.

Como una importante aplicación de una función generadora de una transformación canónica infinitesimal, supongamos que $G(q, P) = H(q, p)$ y $\epsilon = dt$ en $F_2(q_i, P_i)$, Ec. (6.154). Entonces, hasta primer orden en dt , podemos escribir las Ecs. (6.155)-(6.156) como

$$P_i = p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt, \quad (6.163)$$

$$Q_i = q_i + \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \simeq q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt. \quad (6.164)$$

Usando las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (6.165)$$

podemos expresar

$$P_i = p_i + \dot{p}_i dt \simeq p_i(t + dt), \quad (6.166)$$

$$Q_i \simeq q_i + \dot{q}_i dt \simeq q_i(t + dt). \quad (6.167)$$

Entonces, el Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal que corresponde a la evolución temporal de las coordenadas y momentos de un sistema en su espacio de fase.

6.7. Propiedades de las transformaciones canónicas

Consideremos una transformación canónica

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), \quad (6.168)$$

$$P_i = P_i(q_j, p_j, t). \quad (6.169)$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Los paréntesis de Poisson entre ambos conjuntos de variables satisfacen

$$[Q_i, P_j]_{(p,q)} = \delta_{ij} = [q_i, p_j]_{(p,q)} = [Q_i, P_j]_{(P,Q)}. \quad (6.170)$$

Igualmente,

$$[P_i, P_j]_{(p,q)} = [P_i, P_j]_{(P,Q)} = 0, \quad (6.171)$$

$$[Q_i, Q_j]_{(p,q)} = [Q_i, Q_j]_{(P,Q)} = 0. \quad (6.172)$$

2. El paréntesis de Poisson de dos funciones es invariante bajo una transformación canónica,

$$[f, g]_{(p,q)} = [f, g]_{(P,Q)}, \quad (6.173)$$

donde

$$[f, g]_{(p,q)} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right), \quad (6.174)$$

$$[f, g]_{(P,Q)} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial Q_k} \frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \right). \quad (6.175)$$

Demostración de la Propiedad 1:

Supongamos que en las variables (p, q) se cumplen las ecuaciones de Hamilton para un $H(q, p)$,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q, p), \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q, p) \quad (6.176)$$

Si la transformación $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ es canónica, entonces existe un Hamiltoniano transformado $H'(P, Q)$ tal que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_j}(Q, P), \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}(Q, P), \quad (6.177)$$

y existe una función generadora F de la transformación canónica, tal que

$$H = H' - \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (6.178)$$

Por otro lado,

$$\dot{Q}_i(p_j, q_j, t) = \sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \quad (6.179)$$

Sustituyendo las Ecs. (6.176), tenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_i &= \sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \\
 &= \sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H'}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial t} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H'}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial t} \right) + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \\
 &= \sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \left[\sum_j \left(\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial H'}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \right) \right] \\
 &\quad - \sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \left[\sum_j \left(\frac{\partial H'}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + \frac{\partial H'}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \right] \\
 &\quad + \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right] + \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \quad (6.180)
 \end{aligned}$$

Reagrupando términos y cambiando el orden de las sumas, tenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_i &= \sum_j \frac{\partial H'}{\partial P_j} \left[\sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \right] \\
 &\quad + \sum_j \frac{\partial H'}{\partial Q_j} \left[\sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \right) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial t}, Q_i \right]_{(p,q)} + \frac{\partial Q_i}{\partial t}; \quad (6.181)
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_i &= \sum_j \frac{\partial H'}{\partial P_j} [Q_i, P_j]_{(p,q)} + \sum_j \frac{\partial H'}{\partial Q_j} [Q_i, Q_j]_{(p,q)} \\
 &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial t}, Q_i \right]_{(p,q)} + \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \quad (6.182)
 \end{aligned}$$

Para que se satisfaga $\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}$ en la Ec. (6.182), debemos tener necesariamente,

i) $[Q_i, P_j]_{(p,q)} = \delta_{ij}$.

El primer término en la Ec. (6.182) entonces da

$$\sum_j \frac{\partial H'}{\partial P_j} \delta_{ij} = \frac{\partial H'}{\partial P_i}. \quad (6.183)$$

ii) $[Q_i, Q_j]_{(p,q)} = 0$.

El segundo término en la Ec. (6.182) entonces se anula.

$$\text{iii}) \left[\frac{\partial F}{\partial t}, Q_i \right] + \frac{\partial Q_i}{\partial t} = 0.$$

Si calculamos $\dot{P}_i(p, q, t)$ y comparamos con $\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$, obtenemos adicionalmente

$$[P_i, P_j]_{(p,q)} = 0. \quad \blacklozenge \quad (6.184)$$

Demostración de la propiedad 2:

$$\begin{aligned} [f, g]_{(p,q)} &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_k \left[\sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \sum_j \left(\frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \right) \right] \\ &\quad - \sum_k \left[\sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \right) \sum_j \left(\frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.185)$$

Reagrupando términos y cambiando el orden de las sumas, tenemos

$$\begin{aligned} [f, g]_{(p,q)} &= \sum_j \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_j} \left[\sum_k \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \right] \\ &\quad - \sum_j \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \left[\sum_k \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \right] \\ &\quad + \sum_k \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right). \end{aligned} \quad (6.186)$$

El tercer término (doble suma) es igual a cero; luego podemos reagrupar los dos primeros términos

$$\begin{aligned} [f, g]_{(p,q)} &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \right) \sum_k \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \\ &= [f, g]_{(P,Q)} [Q_j, P_j]_{(p,q)}, \end{aligned} \quad (6.187)$$

pero $[Q_j, P_j]_{(p,q)} = 1$; luego,

$$[f, g]_{(p,q)} = [f, g]_{(P,Q)}. \quad \blacklozenge$$

Ejemplos.

1. Demostrar que la evolución temporal de una condición inicial en el espacio de fase es una transformación canónica.

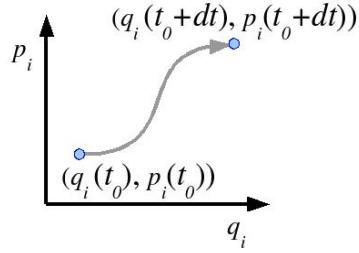


Figura 6.15: Evolución infinitesimal en el espacio de fase.

Consideremos la evolución de una condición inicial en el espacio de fase en un intervalo de tiempo infinitesimal,

$$(q_i(t_0), p_i(t_0)) \rightarrow (q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)). \quad (6.188)$$

Sean $q_i = q_i(t_0)$ y $p_i = p_i(t_0)$, y definamos las nuevas coordenadas y momentos como

$$\begin{aligned} P_j &\equiv p_j(t_0 + dt) \\ &= p_j(t_0) + \dot{p}_j dt + \dots = p_j + \dot{p}_j dt + \dots \\ Q_j &\equiv q_j(t_0 + dt) \\ &= q_j(t_0) + \dot{q}_j dt + \dots = q_j + \dot{q}_j dt + \dots \end{aligned} \quad (6.189)$$

Luego, manteniendo solamente términos de primer orden en dt , obtenemos

$$\begin{aligned} [Q_i, P_j]_{(p,q)} &= \sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \\ &= \sum_k \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \\ &= \sum_k \left[\delta_{ik} \delta_{jk} + \left(\delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \\ &= \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt. \end{aligned} \quad (6.190)$$

Usamos las ecuaciones de Hamilton en la Ec. (6.190),

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (6.191)$$

y tenemos,

$$[Q_i, P_j]_{(p,q)} = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}. \quad (6.192)$$

Por lo tanto, la transformación infinitesimal Ec. (6.189) es canónica. Esta transformación puede escribirse en la forma

$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial H}{\partial q_i}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots \quad (6.193)$$

$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial H}{\partial p_j}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots. \quad (6.194)$$

Comparando las Ecs. (6.193)-(6.194) con las Ecs. (6.155)-(6.156), vemos que el Hamiltoniano actúa como la función generadora de la transformación canónica infinitesimal $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \rightarrow \{q_i(t_0+dt), p_i(t_0+dt)\}$. Puesto que la condición inicial puede tomarse en cualquier punto de la trayectoria, concluimos que la evolución temporal de un sistema en su espacio de fase es una transformación canónica inducida por el Hamiltoniano del sistema.

2. Demostrar que la siguiente transformación es canónica:

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 - 2p_2, & Q_1 &= q_1 \\ P_2 &= -2q_1 - q_2, & Q_2 &= p_2. \end{aligned} \quad (6.195)$$

Las transformaciones canónicas deben satisfacer la propiedad $[Q_i, P_j]_{(p,q)} = \delta_{ij}, \forall i, j$. Calculamos, para la transformación Ec. (6.195), los siguientes paréntesis de Poisson,

$$\begin{aligned} [Q_1, P_1]_{(p,q)} &= \sum_i \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} \frac{\partial P_1}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_i} \frac{\partial P_1}{\partial q_i} \right) \\ &= \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \right) = 1. \end{aligned}$$

$$[Q_2, P_2]_{(p,q)} = \left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \right) = 1.$$

$$[Q_2, P_1]_{(p,q)} = \left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \right) = 0.$$

$$[Q_1, P_2]_{(p,q)} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \right) + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \right) = 0.$$

Luego la transformación Ec. (6.195) es canónica.

6.8. Aplicaciones de transformaciones canónicas

Una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ es particularmente conveniente cuando el cambio de variables es tal que alguna coordenada Q_j o momento P_k no aparece explícitamente en el Hamiltoniano transformado $H'(Q_i, P_i, t)$. Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para H' . Por ejemplo, si

$$\frac{\partial H'}{\partial Q_j} = 0, \quad (6.196)$$

entonces, la ecuación de Hamilton para el momento P_j es

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{cte.} \quad (6.197)$$

Es decir, el momento P_j es una cantidad conservada. En este caso, las ecuaciones de Hamilton resultan más fáciles de integrar en las nuevas variables (P_i, Q_i) que en las variables originales (q_i, p_i) . Una vez encontradas las soluciones $P_i(t)$ y $Q_i(t)$, la transformación canónica puede ser empleada para expresar la solución en las variables originales $q_i = q_i(Q_i(t), P_i(t), t)$ y $p_i = p_i(Q_i(t), P_i(t), t)$.

Como una aplicación de este procedimiento, consideremos un oscilador armónico simple cuyo Hamiltoniano es

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2q^2), \quad \omega^2 = k/m. \quad (6.198)$$

Busquemos una transformación canónica $\{p, q\} \rightarrow \{P, Q\}$ donde Q sea cíclica en el nuevo Hamiltoniano $H'(Q, P)$. La forma de H (suma de dos términos cuadráticos) en la Ec. (6.198) sugiere una transformación canónica del tipo

$$\begin{aligned} p &= f(P) \cos Q, \\ q &= \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q, \end{aligned} \quad (6.199)$$

donde $f(P)$ es una función de P a ser determinada. Sustituyendo la transformación Ecs. (6.199) en $H(q, p)$, tenemos el Hamiltoniano transformado en las nuevas variables

$$H'(Q, P) = \frac{1}{2m} [(p(Q, P))^2 + m^2\omega^2(q(Q, P))^2] = \frac{1}{2m} [f(P)]^2, \quad (6.200)$$

el cual es independiente de Q . Para encontrar la función $f(P)$, busquemos la función generadora que produce la transformación Ecs. (6.199). De estas ecuaciones obtenemos

$$p = m\omega q \cot Q \Rightarrow p = p(q, Q), \quad (6.201)$$

lo cual corresponde a una transformación asociada a una función generadora del tipo $F_1(q, Q)$, pues recordemos que

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = p(q, Q), \quad (6.202)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = P(q, Q). \quad (6.203)$$

Sustituyendo la Ec. (6.201) en la Ec. (6.202), tenemos

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \quad (6.204)$$

lo cual implica que

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q, \quad (6.205)$$

mientras que

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q. \quad (6.206)$$

Despejando q ,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P). \quad (6.207)$$

Sustituyendo q en la Ec. (6.201), obtenemos

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P). \quad (6.208)$$

Comparando con la forma de la transformación propuesta, Ecs. (6.199), vemos que

$$f(P) = (2m\omega P)^{1/2}. \quad (6.209)$$

Luego,

$$H'(Q, P) = \omega P. \quad (6.210)$$

Por otro lado, puesto que $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$, tenemos

$$H(q, p) = H'(Q, P). \quad (6.211)$$

Adicionalmente, tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E = \text{cte}, \quad (6.212)$$

donde E es la energía total del sistema. Entonces,

$$H' = \omega P = E. \quad (6.213)$$

Las ecuaciones de Hamilton para Q y P dan

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}. \\ \dot{Q} &= \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi. \end{aligned}$$

Sustituyendo en $q(P, Q)$ y $p(P, Q)$ en las Ecs. (6.207)-(6.208), obtenemos las soluciones para las coordenadas y momentos originales,

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.214)$$

$$p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.215)$$

donde $\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}$ es la amplitud de la oscilación y φ es la fase.

6.9. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Hemos visto que una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$, $i = 1, \dots, s$, puede ser usada para encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para un sistema con un Hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$, mediante las soluciones de esas ecuaciones para un Hamiltoniano transformado en nuevas variables $H'(Q_i, P_i, t)$, tal que alguna (o varias) coordenada Q_j sea cíclica en H' . Una vez encontrada la solución en las nuevas variables $(Q_i(t), P_i(t))$, donde el momento conjugado $P_j = \text{cte}$, las relaciones de la transformación canónica pueden ser empleadas para expresar la solución en las variables originales,

$$q_i = q_i(Q_i(t), P_i(t), t), \quad p_i = p_i(Q_i(t), P_i(t), t). \quad (6.216)$$

Este procedimiento puede ser generalizado. Supongamos que encontramos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que las $2s$ nuevas coordenadas y momentos (P_i, Q_i) correspondan a constantes. En este caso, el nuevo Hamiltoniano $H'(Q_i, P_i)$ es constante y todas las Q_i y P_i son cíclicas en H' . A su vez, las $2s$ cantidades constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales $(q_i(0), p_i(0))$; es decir, $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$, $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$. Entonces, las ecuaciones de la transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento,

$$q_i = q(q_j(0), p_j(0), t), \quad p_i = p(q_j(0), p_j(0), t). \quad (6.217)$$

En particular, si requerimos que la transformación canónica que conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, sea tal que $H'(Q_i, P_i) = 0$, entonces debe existir una función generadora F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0. \quad (6.218)$$

La condición que debe cumplirse para que tal transformación canónica exista, es la ecuación de Hamilton-Jacobi, y corresponde a la Ec. (6.218) para una F apropiada.

Para derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi y encontrar la función generadora apropiada, consideremos la acción de un sistema,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (6.219)$$

El valor de la acción S , como integral definida, depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$. En particular, para las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange correspondientes, el valor de S es mínimo (extremo).

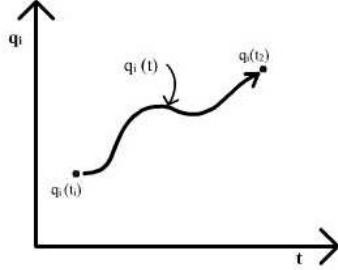


Figura 6.16: Trayectoria $q_i(t)$ que pasa por los puntos $q_i(t_1)$ y $q_i(t_2)$.

Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e., $t_2 = t$. Entonces, la acción dependerá de las trayectorias y del tiempo, $S = S(q_i, t)$. Luego, como función de sus argumentos q_i y t , la derivada temporal de la acción es

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (6.220)$$

Por otro lado, si $t_2 = t$, la definición de la acción Ec. (6.219) implica que

$$\frac{dS}{dt} = L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t). \quad (6.221)$$

Comparando la Ec. (6.220) con la Ec. (6.221), obtenemos las relaciones

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t), \quad (6.222)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + H(p_i, q_i, t) = 0, \quad (6.223)$$

las cuales se pueden expresar mediante la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0. \quad (6.224)$$

La Ec. (6.224) es la *ecuación de Hamilton-Jacobi*.

Comparando la Ec. (6.218) con la ecuación de Hamilton-Jacobi Ec. (6.224), vemos que la acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica buscada. Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora de tipo $F_2(q_i, P_i, t)$, Ec. (6.120), que satisface la Ec. (6.218) y tal que $P_i = \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i = \beta_i = \text{cte}$.



Figura 6.17: Carl Gustav Jacobi (1804-1851).

Calculamos la derivada total de $F_2(q_i, P_i, t)$,

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (6.225)$$

Usando la relación $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ satisfecha por las funciones generadoras de tipo F_2 , la condición Ec. (6.218) que debe cumplir $F = F_2$, y el hecho que $\dot{P}_i = 0$, tenemos

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H, \quad (6.226)$$

que es análoga a la Ec. (6.221) satisfecha por S . Luego, la acción debe poseer la forma $S(q_i, P_i, t)$, donde $P_i = \alpha_i = \text{cte}$. Si comparamos las relaciones satisfechas por una función $F_2(q_i, P_i, t)$ y por $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$\begin{array}{ll} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & \left| \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \end{array} \right. \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & \\ H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H' & \left| \begin{array}{l} H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad (6.227)$$

donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$. Entonces $H'(P_i, Q_i) = \text{cte}$. Luego, para que exista una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, Ec. (6.227), generada por $F_2 = S$, tal que $H'(P_i, Q_i) = 0$, debe cumplirse la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \quad (6.228)$$

Note que la solución $S(q_i, P_i, t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi, o más bien, las derivadas parciales de S , proporcionan la transformación $\{p_i, q_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$. Por otro lado, las constantes P_i y Q_i se pueden expresar, en principio, en términos de las

2s condiciones iniciales $(q_i(0), p_i(0))$. Luego, el proceso de solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema suministra la trayectoria $q_i(t) = q_i(q_i(0), p_i(0), t)$ y $p_i(t) = p_i(q_i(0), p_i(0), t)$ como resultado adicional. Consecuentemente, la ecuación de Hamilton-Jacobi constituye el método más poderoso para encontrar la integración general de las ecuaciones de movimiento de un sistema.

Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi corresponde a una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S(q_i, t)$ en $s + 1$ variables,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0. \quad (6.229)$$

La solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, Ec. (6.229), para la acción $S(q_i, t)$ requiere de $s+1$ constantes de integración. Pero S no figura explícitamente como incógnita en la Ec. (6.229), sólo aparecen sus derivadas con respecto a las q_i y t . Luego, si S es solución de la Ec. (6.229), entonces $S + \text{cte}$, también es una solución. Por lo tanto, una de las $(s + 1)$ constantes de integración es irrelevante para la solución. Las s constantes deben ser las $P_i = \alpha_i$, para que la acción tenga la forma $S(q_i, P_i, t)$. Luego, la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi puede expresarse en la forma

$$S = S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t) = S(q_i, \alpha_i, t), \quad i = 1, \dots, s. \quad (6.230)$$

Si el Hamiltoniano H es independiente del tiempo, entonces H es constante e igual a la energía total del sistema, $H(q_i, p_i) = \text{cte} = E$. En ese caso, se puede buscar una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, Ec. (6.229), por separación de variables; esto es, suponemos que la solución S tiene la forma

$$S(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, P_i) - Et = W(q_i, \alpha_i) - Et, \quad (6.231)$$

donde una de las s constantes α_i es E . La función $W(q_i, P_i) = W(q_i, \alpha_i)$ se llama *función característica o principal de Hamilton*. En ese caso, sustitución de S en la Ec. (6.229) resulta en una ecuación para la función $W(q_i, P_i)$, de la forma

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, E, P_j), q_i\right) = E, \quad (6.232)$$

donde escogemos $P_1 = \alpha_1 = E$, $P_j = \alpha_j$, $j = 2, \dots, s$. La Ec. (6.232) se denomina *ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo*.

En particular, si el Hamiltoniano es independiente del tiempo, la coordenada constante $Q_1 = \beta_1$ asociada a $P_1 = E$ satisface

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{\partial S}{\partial E} \\ &= \frac{\partial W}{\partial E} - t = \beta_1. \end{aligned} \quad (6.233)$$

Las relaciones de la transformación canónica en términos de la función característica $W(q_i, P_i)$ corresponden a

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \forall i, \quad (6.234)$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad i \neq 1. \quad (6.235)$$

Entonces, la condición $H(q_i, p_i) = E$ se puede expresar como

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, P_i), q_i\right) = E, \quad (6.236)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo satisfecha por la función característica $W(q_i, P_i)$.

El método de separación de variables para buscar una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi también puede emplearse cuando una coordenada es cíclica. Una coordenada q_k cíclica no aparece explícitamente en el Hamiltoniano y, por lo tanto, tampoco aparece en la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi. Si el Hamiltoniano es constante, entonces se puede buscar una solución de esta ecuación en la forma

$$S(q_i, P_i, t) = W(q_j, P_i) + P_k q_k - Et, \quad j \neq k. \quad (6.237)$$

Entonces,

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = P_k = \alpha_k = \text{cte.} \quad (6.238)$$

La constante $P_k = \alpha_k$ es justamente el valor constante del momento conjugado p_k asociado a la variable cíclica q_k . La presencia del término $-Et$ en la expresión Ec. (6.237) para un sistema conservativo corresponde a la separación de la variable t , que no aparece explícitamente en el Hamiltoniano.

En ciertos sistemas, es posible encontrar una solución por separación de variables en forma aditiva; esto es, suponemos la acción de la forma

$$S(q_i, P_i, t) = W(q_i, P_i) - Et = \sum_{k=1}^s W_k(q_k, P_i) - Et, \quad (6.239)$$

donde cada función W_k depende solamente de una coordenada q_k . Si una coordenada q_k es cíclica, tomamos $W_k = P_k q_k$. Las relaciones de la transformación canónica se convierten en

$$p_k = \frac{\partial W_k}{\partial q_k}(q_k, P_1, \dots, P_s), \quad (6.240)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^s \frac{\partial W_i}{\partial P_k}(q_k, P_1, \dots, P_s) - \delta_{1i}t. \quad (6.241)$$

En este caso, se dice que el sistema es *completamente separable*.

Para sistemas completamente separables es posible reducir el problema de la ecuación de Hamilton-Jacobi a un conjunto de s ecuaciones diferenciales de primer orden, Ecs. (6.240); una ecuación para cada función W_k que depende de q_k y de constantes $P_i = \alpha_i$. Cada ecuación permite encontrar la correspondiente W_k mediante una integración explícita sobre la coordenada q_k . Adicionalmente, las s Ecs. (6.241) permiten obtener, por inversión, las coordenadas $q_k = q_k(Q_i, P_i, t)$.

Aunque la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema dinámico dado puede ser completamente separable en un sistema de coordenadas, puede no serlo en otro. En general, no existen condiciones de separabilidad a priori; aunque consideraciones de simetría pueden ayudar. Por ejemplo, un problema con simetría esférica usualmente puede ser separable en coordenadas esféricas.

La ecuación de Hamilton-Jacobi, cuando es separable, es el método más poderoso para encontrar la solución general de las ecuaciones de movimiento para un sistema.

Ejemplos.

1. Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y obtención de la trayectoria $(q(t), p(t))$ y de la acción asociada a este sistema.

El Hamiltoniano es

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2\omega^2 q^2). \quad (6.242)$$

La acción para este sistema con $s = 1$ tiene la forma $S(q, t)$. La ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + H(p, q) = 0. \quad (6.243)$$

Hay una sola relación para el momento,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, t) \quad (6.244)$$

y, sustituyendo en la Ec. (6.243), obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador armónico,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2 q^2 \right] = 0. \quad (6.245)$$

Puesto que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, el Hamiltoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $H = E$. Luego, podemos buscar una solución de la Ec. (6.245) mediante separación de variables,

$$S(q, E, t) = W(q, E) - Et, \quad (6.246)$$

donde $P = E = \alpha$ es la única constante de integración para la Ec. (6.245). Sustitución en la Ec. (6.245) da

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = E. \quad (6.247)$$

Calculamos $W(q, E)$,

$$\frac{\partial W}{\partial q} = (2mE - m^2 \omega^2 q^2)^{1/2}, \quad (6.248)$$

$$W(q, E) = \int (2mE - m^2 \omega^2 q^2)^{1/2} dq. \quad (6.249)$$

Luego,

$$S(q, E, t) = \int (2mE - m^2 \omega^2 q^2)^{1/2} dq - Et. \quad (6.250)$$

La función $S(q, E, t)$ permite encontrar las relaciones de la transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad (6.251)$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial E} = \beta = \text{cte.} \quad (6.252)$$

Derivando S con respecto a E en la Ec. (6.250), la relación Ec. (6.252) da

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t. \quad (6.253)$$

Integrando la Ec. (6.253), obtenemos

$$Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}} \right), \quad (6.254)$$

y despejando q ,

$$q(Q, E, t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta'), \quad \beta' = Q\omega = \text{cte.} \quad (6.255)$$

La relación Ec. (6.251) da

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2}, \quad (6.256)$$

y sustituyendo q de la Ec. (6.255), tenemos

$$p(Q, E, t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta'). \quad (6.257)$$

Las constantes $Q = \beta$ y $P = E$ se pueden expresar en términos de las condiciones iniciales $q(0) = q_0$ y $p(0) = p_0$. Evaluando las Ecs. (6.255) y (6.257) en $t = 0$, tenemos

$$q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega Q), \quad (6.258)$$

$$p_0 = \sqrt{2mE} \cos(\omega Q). \quad (6.259)$$

Luego,

$$\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left(m\omega \frac{q_0}{p_0} \right). \quad (6.260)$$

Evaluando la Ec. (6.256) en $t = 0$,

$$E = \frac{1}{2m} (p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2) = P. \quad (6.261)$$

Las Ecs. (6.255) y (6.257), junto con las relaciones (6.260) y (6.261), expresan la solución de las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico en términos de las condiciones iniciales, $p = p(q_0, p_0, t)$ y $q = q(q_0, p_0, t)$.

Aunque la solución explícita para la acción S no es necesaria para la obtención de la trayectoria $p(q_0, p_0, t)$ y $q(q_0, p_0, t)$, la cantidad S puede encontrarse a partir de la integración de la Ec. (6.250),

$$\begin{aligned} S(q, E, t) &= \sqrt{2mE} \int \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}} dq - Et \\ &= \sqrt{2mE} \int \sqrt{1 - \frac{q^2}{a^2}} dq - Et \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2mE} \left[q \left(1 - \frac{q^2}{a^2} \right)^{1/2} + a \sin^{-1} \left(\frac{q}{a} \right) \right] - Et, \end{aligned} \quad (6.262)$$

donde $a \equiv \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$. Sustituyendo q de la Ec. (6.255) en la Ec. (6.262), podemos obtener S como función de t ,

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} a \sqrt{2mE} [\sin(\omega t + \beta') \cos(\omega t + \beta') + \sin^{-1} (\sin(\omega t + \beta'))] - Et \\ &= \frac{E}{\omega} \left[\frac{1}{2} \sin[2(\omega t + \beta')] + (\omega t + \beta') \right] - Et \\ &= \frac{E}{2\omega} \sin[2(\omega t + \beta')], \end{aligned} \quad (6.263)$$

donde las constantes han sido suprimidas en la Ec. (6.263).

2. Relación entre la ecuación de onda de Schrödinger de la Mecánica Cuántica y la ecuación de Hamilton-Jacobi de la Mecánica Clásica.

Consideremos, por simplicidad, la ecuación de Schrödinger unidimensional para la función de onda $\Psi(x, t)$ de una partícula de masa m en el potencial $V(x, t)$,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi. \quad (6.264)$$



Figura 6.18: Erwin Schrödinger (1887-1961).

Suspongamos una solución de la forma

$$\Psi(x, t) = R(x, t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x, t)}, \quad (6.265)$$

donde $R(x, t)$ es la parte real que da la amplitud de la función de onda y $S(x, t)$ es la fase correspondiente. Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \dot{\Psi} = \dot{R}e^{\frac{i}{\hbar}S} + \frac{i}{\hbar}R\dot{S}e^{\frac{i}{\hbar}S} = \left(\dot{R} + \frac{i}{\hbar}R\dot{S} \right) e^{\frac{i}{\hbar}S}. \quad (6.266)$$

$$\Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left(R' + \frac{i}{\hbar}RS' \right) e^{\frac{i}{\hbar}S}. \quad (6.267)$$

$$\begin{aligned} \Psi'' &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left[R'' + \frac{i}{\hbar}(R'S' + RS'') \right] e^{\frac{i}{\hbar}S} + \left(R' + \frac{i}{\hbar}RS' \right) \frac{i}{\hbar}S'e^{\frac{i}{\hbar}S} \\ &= \left[R'' + 2\frac{i}{\hbar}R'S' + \frac{i}{\hbar}RS'' - \frac{1}{\hbar^2}RS'^2 \right] e^{\frac{i}{\hbar}S}. \end{aligned} \quad (6.268)$$

Sustituyendo las derivadas de Ψ en la Ec. (6.264), tenemos

$$i\hbar \left(\dot{R} + \frac{i}{\hbar}R\dot{S} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(R'' + 2\frac{i}{\hbar}R'S' + \frac{i}{\hbar}RS'' - \frac{1}{\hbar^2}RS'^2 \right) + V R. \quad (6.269)$$

En el límite clásico $\hbar \rightarrow 0$, la Ec. (6.269) queda

$$-R\dot{S} = \frac{1}{2m}RS'^2 + V R, \quad (6.270)$$

la cual se puede escribir como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V = 0. \quad (6.271)$$

Pero el Hamiltoniano de la partícula es

$$H = \frac{p^2}{2m} + V, \quad (6.272)$$

y el momento, en términos de la acción clásica S , es

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (6.273)$$

Luego, la Ec. (6.271) es la ecuación de Hamilton-Jacobi para la fase $S(x, t)$.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(\frac{\partial S}{\partial x}, x \right) = 0. \quad (6.274)$$

En el límite clásico, la fase $S(x, t)$ de la función de onda $\Psi(x, t)$ corresponde a la acción y satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi.

3. Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi en coordenadas esféricas en un sistema cuyo potencial posee simetría azimutal.

Consideremos una partícula en un potencial con simetría azimutal alrededor del eje z (independiente del ángulo ϕ) en coordenadas esféricas de la forma,

$$V(r, \theta) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \quad (6.275)$$

donde $a(r)$ y $b(\theta)$ son funciones dadas. Por ejemplo, el potencial de un campo gravitacional uniforme o el potencial eléctrico de un dipolo, ambos expresados en coordenadas esféricas, poseen simetría azimutal. En particular, el problema de Kepler corresponde a $a(r) = -k/r$ y $b(\theta) = 0$.

El Lagrangiano para este sistema, en coordenadas esféricas, es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \left(a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \right). \quad (6.276)$$

Para este sistema, se obtiene el siguiente Hamiltoniano

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \left(a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \right). \quad (6.277)$$

La acción para este sistema es una función $S(r, \theta, \phi, t)$. Los momentos conjugados satisfacen

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad (6.278)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad (6.279)$$

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi}. \quad (6.280)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \quad (6.281)$$

Sustituyendo H y los momentos en la Ec. (6.281), obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] + \left[a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \right] = 0. \quad (6.282)$$

Puesto que el Hamiltoniano es independiente del tiempo y la coordenada ϕ es cíclica, podemos buscar una solución en la forma separable

$$S(r, \theta, \phi, P_1, P_2, P_3, t) = W_r(r, E, P_\phi, P_3) + W_\theta(\theta, E, P_\phi, P_3) + P_\phi \phi - Et, \quad (6.283)$$

donde hemos tomado $W_\phi = P_\phi \phi$, y $P_1 = E$, $P_2 = P_\phi$ y P_3 son constantes.

Las Ecs. (6.280) y (6.283) implican que $p_\phi = P_\phi = \text{cte}$. La cantidad constante p_ϕ es el valor de la componente l_z del momento angular.

Sustituyendo S en la Ec. (6.282), obtenemos

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + 2m b(\theta) \right] + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} = E, \quad (6.284)$$

lo cual se puede expresar como

$$r^2 \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + 2mr^2 a(r) - 2mr^2 E = - \left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + 2m b(\theta) \right] - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}. \quad (6.285)$$

En términos de las coordenadas, el lado izquierdo del la Ec. (6.285) corresponde a una función que depende solamente de r , mientras que el lado derecho representa a una función dependiente solamente de θ . Entonces, para que ambos lados sean iguales en la Ec. (6.285), ambas funciones deben ser iguales a una misma constante,

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + 2m b(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = P_3, \quad (6.286)$$

$$r^2 \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + 2mr^2 a(r) - 2mr^2 E = -P_3, \quad (6.287)$$

donde hemos fijado la constante como $-P_3$, puesto que las funciones W_r y W_θ deben depender de las tres constantes E, p_ϕ, P_3 . Despejando, tenemos

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \left[P_3 - 2m b(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right]^{1/2}, \quad (6.288)$$

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} = \left[2m \left(E - \frac{P_3}{2mr^2} - a(r) \right) \right]^{1/2}. \quad (6.289)$$

Mediante integración obtenemos

$$W_\theta(\theta, p_\phi, P_3) = \int \left[P_3 - 2m b(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right]^{1/2} d\theta, \quad (6.290)$$

$$W_r(r, E, P_3) = \int \left[2m(E - a(r)) - \frac{P_3^2}{r^2} \right]^{1/2} dr, \quad (6.291)$$

y ya teníamos $W_\phi = p_\phi \phi$. Luego, el sistema es completamente separable.

La acción correspondiente es

$$S = \int \sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{P_3^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{P_3 - 2m b(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + p_\phi \phi - Et. \quad (6.292)$$

Las coordenadas constantes Q_1, Q_2 y Q_3 de la transformación canónica generada por S satisfacen las relaciones

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W_r}{\partial E}(r, E, P_3) - t = Q_1(r, E, P_3, t), \quad (6.293)$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial p_\phi} = \frac{\partial W_\theta}{\partial p_\phi}(\theta, p_\phi, P_3) + \phi = Q_2(\theta, \phi, p_\phi, P_3), \quad (6.294)$$

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial P_3} = \frac{\partial W_r}{\partial P_3} + \frac{\partial W_\theta}{\partial P_3} = Q_3(r, \theta, E, \phi, P_3). \quad (6.295)$$

La Ec. (6.293) permite encontrar la solución $r = r(E, P_3, Q_1, t)$. Esta solución para r se puede sustituir en la Ec. (6.295), y entonces las Ecs. (6.294) y (6.295) constituyen un sistema de dos ecuaciones para θ y ϕ , las cuales pueden resolverse dando como resultado $\theta = \theta(E, p_\phi, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, t)$ y $\phi = \phi(E, p_\phi, P_3, Q_1, Q_2, Q_3, t)$.

Por otro lado, consideremos las Ecs. (6.278)-(6.279) para los momentos

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial W_r}{\partial r} = p_r(r, E, P_3), \quad (6.296)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = p_\theta(\theta, P_3, p_\phi). \quad (6.297)$$

Sustitución de las soluciones para las coordenadas r y θ en estas ecuaciones conduce a las soluciones para los momentos p_r y p_θ (p_ϕ es una constante) en función del tiempo y de las constantes $E, p_\phi, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$.

Luego, el método de la ecuación de Hamilton-Jacobi permite obtener la solución completa de las ecuaciones de movimiento (coordenadas y momentos) en términos de seis constantes $(E, p_\phi, P_3, Q_1, Q_2, Q_3)$.

6.10. Variables de acción-ángulo

Supongamos que tenemos un sistema dinámico con las siguientes condiciones:

- (1) su Hamiltoniano $H(q_i, p_i)$ es constante,
- (2) el sistema es completamente separable,
- (3) sus movimientos son finitos.

La condición (1) implica que podemos escribir la ecuación Hamilton-Jacobi independiente del tiempo para el sistema,

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, P_i), q_i\right) = E, \quad (6.298)$$

donde $P_i = \alpha_i = \text{cte}$.

La función característica de Hamilton $W(q_i, P_i)$, que satisface la Ec. (6.298), puede interpretarse como una función generadora de tipo $F_2(q_i, P_i)$, independiente del tiempo, que produce una transformación canónica $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ tal que las coordenadas Q_i son cíclicas en el nuevo Hamiltoniano; es decir, $H'(P_i)$.

En efecto, con esta condición sobre H' , los nuevos momentos P_i son constantes, pues

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'(P_i)}{\partial Q_i} = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i = \text{cte}. \quad (6.299)$$

Entonces, $H'(P_i) = H'(\alpha_i) = \text{cte}$. La función generadora $F_2(q_i, P_i) = W(q_i, P_i) = W(q_i, \alpha_i)$ satisface la relación

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \Rightarrow H' = H. \quad (6.300)$$

Puesto que $H(q_i, p_i) = E$, tenemos

$$H(q_i, p_i) = E = H'(P_i). \quad (6.301)$$

Las relaciones de la transformación canónica generada por $W(q_i, P_i)$ corresponden a

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (6.302)$$

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}. \quad (6.303)$$

Luego, la relación $H(q_i, p_i) = E$ se puede expresar como

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, P_i), q_i\right) = E, \quad (6.304)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo satisfecha por la función característica $W(q_i, P_i)$.

Debido a la condición (2), podemos expresar la función característica de Hamilton como

$$W(q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \sum_{i=1}^s W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (6.305)$$

Entonces, las relaciones de la transformación canónica $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, \alpha_i)$ generada por $W(q_i, P_i) = W(q_i, \alpha_i)$ están dadas por

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (6.306)$$

$$Q_i = \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s). \quad (6.307)$$

El nuevo Hamiltoniano entonces tiene la forma $H'(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = E$.

La Ec. (6.306) implica la relación funcional

$$p_i = p_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (6.308)$$

la cual define una curva o trayectoria sobre el plano (q_i, p_i) que depende de los parámetros $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Esta curva es una proyección sobre el plano (q_i, p_i) de la trayectoria del sistema en su espacio de fase 2s-dimensional. Adicionalmente, la condición (3) implica que esta curva debe ser una órbita cerrada o periódica en el plano (q_i, p_i) , que denotamos por \mathcal{C}_i . Existe una tal órbita \mathcal{C}_i en cada uno de los planos (q_i, p_i) del espacio de fase.

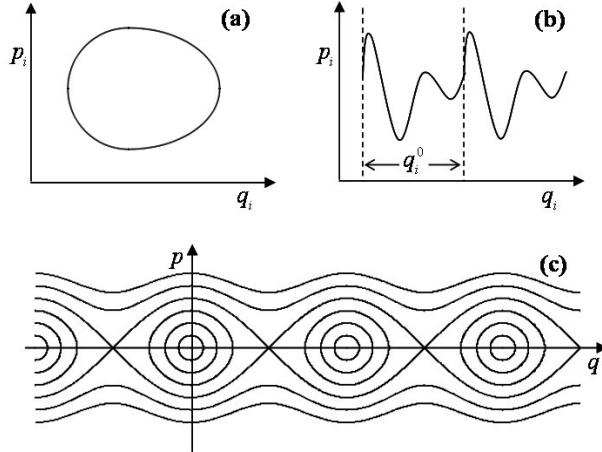


Figura 6.19: (a) Libración. (b) Rotación. (c) Libración y rotación en el espacio de fase de un péndulo simple.

La órbita \mathcal{C}_i en un plano (q_i, p_i) refleja la periodicidad de las variables conjugadas p_i y q_i , y puede ser de dos tipos:

1. *Libración:* ocurre cuando los valores de ambos, q_i y p_i , se repiten, trazando una órbita cerrada. En este caso, tanto q_i como p_i , son funciones periódicas en el tiempo. El oscilador armónico y el problema de Kepler con $E < 0$ son ejemplos de este tipo de órbitas. Las órbitas de libración son curvas cerradas que no siempre son elipses.
2. *Rotación:* corresponde a una órbita tal que p_i es una función periódica de q_i , con período q_i^0 . Los valores de p_i están acotados, pero los de q_i pueden incrementarse indefinidamente. Ejemplos son los movimientos de un cuerpo rígido libre y de un trompo simétrico con un punto fijo, donde la coordenada q_i es un ángulo que puede incrementarse en 2π sin cambio en la configuración del sistema. En general, la coordenada q_i asociada a este tipo de órbita corresponde a un ángulo de rotación.

Ambos tipos de órbitas periódicas pueden aparecer en un sistema dinámico, dependiendo de los valores de sus parámetros.

Ejemplo.

1. El péndulo simple es un ejemplo clásico, donde la coordenada q es el ángulo θ con respecto a la vertical. La energía del sistema es

$$E = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q, \quad (6.309)$$

de donde obtenemos la órbita en el plano (q, p) ,

$$p(q, E) = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos q)}. \quad (6.310)$$

Si $E < mgl$, entonces q oscila entre los puntos de retorno $q_{1,2} = \pm \cos^{-1} \left(-\frac{E}{mgl} \right)$, para los cuales $p = 0$. Bajo estas condiciones, la trayectoria en el plano (q, p) es una órbita cerrada y corresponde a un movimiento periódico de libración. Por otro lado, si $E > mgl$, todos los valores del ángulo q son físicamente posibles, y q se incrementa indefinidamente para producir un movimiento periódico del tipo de rotación. En este caso, el péndulo posee suficiente energía para dar la vuelta en una dirección por encima de la posición vertical invertida $q = \pi$ y, por lo tanto, continúa rotando en esa dirección.

Cada órbita \mathcal{C}_i tiene un período asociado; es decir, las variables q_i y p_i en el plano (q_i, p_i) se repiten en el tiempo. En general, los períodos de las órbitas \mathcal{C}_i pueden ser distintos entre sí; como consecuencia la trayectoria de *todo* el sistema en su espacio de fase puede no ser periódica, en el sentido de que todas las 2s variables q_i y p_i se repitan al cabo de un determinado intervalo de tiempo. Recordemos que las órbitas \mathcal{C}_i son proyecciones en los distintos planos (q_i, p_i) de la trayectoria del sistema en su espacio de fase; todas las proyecciones no tienen que cerrarse necesariamente después de un período de tiempo dado.

Las variables de acción-ángulo son un conjunto de coordenadas y momentos que resultan convenientes para describir la coexistencia de múltiples movimientos periódicos en la dinámica de sistemas completamente separables con movimientos finitos, i. e., que satisfacen las condiciones (1), (2) y (3). Para esta clase de sistemas, podemos introducir una transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{\varphi_i, J_i\}$ tal que las nuevas coordenadas φ_i , denominadas *variables de ángulo*, sean cíclicas en el nuevo Hamiltoniano, i. e., $H'(J_1, \dots, J_s)$.

Definimos los nuevos momentos J_i como las *variables de acción*

$$J_i \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} p_i dq_i, \quad (6.311)$$

donde la integral se realiza sobre un ciclo completo de la coordenada q_i a lo largo de la órbita \mathcal{C}_i que yace en el plano (q_i, p_i) , ya sea retornando al valor inicial de q_i (libración) o sobre un intervalo q_i^0 (rotación).

Puesto que el sistema es completamente separable, podemos usar la Ec. (6.306) para escribir

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s) dq_i \\ &= J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \text{cte}, \end{aligned} \quad (6.312)$$

debido a que las α_i son constantes. La Ec. (6.312) constituye un sistema de s ecuaciones para las s variables de acción J_i en función de las α_i , las cuales puede ser invertidas para obtener $\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_s)$. Luego, las variables J_i son un conjunto de funciones independientes que pueden ser usadas como los nuevos momentos constantes. Entonces, el nuevo Hamiltoniano se puede expresar como $H'(J_1, \dots, J_s) = E = \text{cte}$.

La función característica de Hamilton, que es generadora de la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{\varphi_i, J_i\}$, debe tener la forma $W(q_i, J_i) = \sum_i W_i(q_i, J_1, \dots, J_s)$. Entonces, las relaciones de la transformación canónica son

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, J_1, \dots, J_s), \quad (6.313)$$

$$\varphi_i = \frac{\partial W_i}{\partial J_i}(q_i, J_1, \dots, J_s). \quad (6.314)$$

Para entender el significado de las variables de ángulo, calculemos el cambio de una variable φ_i en un ciclo completo de la coordenada q_i sobre una órbita \mathcal{C}_i , dado por

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_i = \oint_{\mathcal{C}_i} d\varphi_i &= \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial W_i}{\partial J_i} \right) dq_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial W_i}{\partial q_i} dq_i \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathcal{C}_i} p_i dq_i = 2\pi \frac{\partial J_i}{\partial J_i} = 2\pi. \end{aligned} \quad (6.315)$$

Luego, un ciclo completo de q_i corresponde a un cambio de φ_i en 2π ; la variable φ_i se puede interpretar como un ángulo de rotación tal que el período de la órbita \mathcal{C}_i equivale a una rotación completa de φ_i manteniendo J_i constante. Puesto que no todas las órbitas tienen el mismo período, no todas las variables de ángulo φ_i realizan una rotación completa al mismo tiempo, aunque todas las variables de acción correspondientes se mantienen constantes.

Las ecuaciones de Hamilton en las nuevas variables son

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H'(J_j)}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (6.316)$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H'(J_j)}{\partial J_i} \equiv \omega_i(J_j) = \text{cte.} \quad (6.317)$$

Las Ecs. (6.316) confirman que las J_i son constantes, mientras las Ecs. (6.317) definen s funciones constantes $\omega_i(J_j)$. Adicionalmente, las Ecs. (6.317) conducen a

$$\varphi_i = \omega_i t + \theta_i, \quad (6.318)$$

donde θ_i equivale a una fase inicial para cada variable φ_i . Cada nueva coordenada φ_i se comporta efectivamente como un ángulo que se incrementa con una correspondiente velocidad angular constante ω_i ; de allí su nombre *variables de ángulo*. El período correspondiente de φ_i es

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i(J_j)}, \quad (6.319)$$

el cual es igual al período de la órbita \mathcal{C}_i . Entonces, las Ecs. (6.317) permiten obtener directamente las frecuencias de las órbitas periódicas del sistema, sin hacer aproximaciones de pequeños desplazamientos y sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones de movimiento.

En resumen, el empleo de las variables de acción-ángulo permite encontrar las múltiples frecuencias del movimiento de un sistema caracterizado por un Hamiltoniano $H(q_i, p_i)$ que satisface las condiciones (1)-(3), mediante el siguiente procedimiento:

1. Escribir la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo,

$$H\left(\frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s), q_i\right) = E. \quad (6.320)$$

2. Separar la Ec. (6.320) en s ecuaciones para las derivadas $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$. La separación provee las constantes $\alpha_1 = E, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

3. Calcular las variables de acción,

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_i} \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s) dq_i \\ &= J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s). \end{aligned} \quad (6.321)$$

4. Invertir las s relaciones $J_i = J_i(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ para obtener $\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_s)$.
5. Sustituir $\alpha_i(J_1, \dots, J_s)$ en las derivadas $\frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ que aparecen en el Hamiltoniano (lado izquierdo) de la Ec. (6.320), para obtener $H'(J_1, \dots, J_s)$.
6. Calcular las frecuencias

$$\omega_i(J_j) = \frac{\partial H'}{\partial J_i}(J_1, \dots, J_s). \quad (6.322)$$

La descripción del movimiento de un sistema finito completamente separable resulta simple en términos de las variables de acción-ángulo: cada órbita \mathcal{C}_i trazada sobre el plano (q_i, p_i) es equivalente a una rotación sobre una circunferencia de un ángulo φ_i con velocidad angular constante ω_i . El radio de la circunferencia corresponde al valor constante J_i .

En lenguaje topológico, cada curva cerrada \mathcal{C}_i se distorsiona continuamente en una circunferencia, denotada en topología por el símbolo \mathbb{S}^1 , debido a la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{\varphi_i, J_i\}$. La trayectoria en el espacio de fase de las variables $\{\varphi_i, J_i\}$ yace en todas esas s circunferencias simultáneamente. Si $s = 2$, hay 2 circunferencias; para cada punto (φ_1, J_1) de la primera circunferencia \mathbb{S}^1 existe una segunda circunferencia \mathbb{S}^1 con valores de (φ_2, J_2) . Es decir, a cada punto de \mathbb{S}^1 está asociada otra \mathbb{S}^1 . Esto describe un *toroide*, designado por $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Entonces, la trayectoria transcurre sobre el toroide \mathbb{T}^2 . Aunque esto se puede visualizar con uno o dos grados de libertad; es más difícil de hacerlo para s en general. En ese caso, la trayectoria tiene lugar sobre un toroide s -dimensional $\mathbb{T}^s = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ descrito por las variables de acción-ángulo $\{\varphi_i, J_i\}$. Las variables de acción-ángulo proveen una representación geométrica elegante del movimiento de un sistema completamente separable.

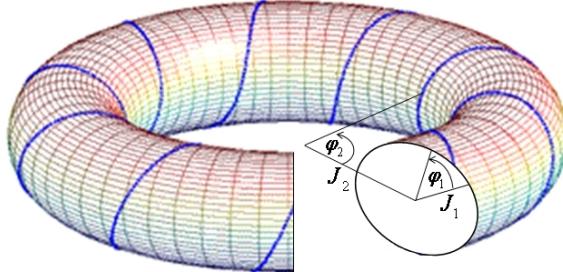


Figura 6.20: Variables de acción-ángulo y una trayectoria sobre un toroide para un sistema con $s = 2$.

La trayectoria sobre un toroide \mathbb{T}^2 es cerrada si el cociente de las frecuencias ω_1/ω_2 es un número racional. En tal caso, se dice que la trayectoria es periódica. Si ω_1/ω_2 es igual a un número irracional; entonces la trayectoria se denomina *cuasiperiódica*, y en su evolución cubre uniformemente toda la superficie del toroide. Del mismo modo, una trayectoria sobre un toroide s -dimensional \mathbb{T}^s es cerrada o periódica si el cociente de las frecuencias ω_i/ω_j es racional $\forall i, j$, mientras que una trayectoria sobre \mathbb{T}^s es cuasiperiódica si ω_i/ω_j es irracional $\forall i, j$.

Mediante variables de acción-ángulo, diferentes sistemas con el mismo número s de grados de libertad pueden ser mapeados sobre un toroide s -dimensional. Luego, el movimiento sobre un toroide \mathbb{T}^s constituye un tipo de sistema dinámico universal que abarca la dinámica de sistemas separables aparentemente diferentes.

Ejemplos.

1. Encontrar la frecuencia de un oscilador armónico usando variables de acción-ángulo.

El Hamiltoniano es

$$H(q, p) = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \right) = E = \text{cte.} \quad (6.323)$$

Las órbitas $H(q, p) = \text{cte}$ en el plano (q, p) corresponden a elipses.

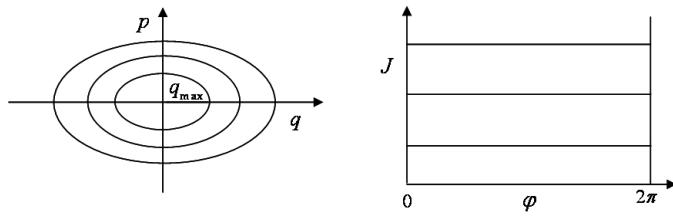


Figura 6.21: Órbitas en espacio de fase (q, p) para el oscilador armónico y variables de acción-ángulo (J, φ) correspondientes.

El momento es

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}. \quad (6.324)$$

Sustituyendo en la Ec. (6.323), tenemos

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = E, \quad (6.325)$$

de donde

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2}kq^2 \right)}. \quad (6.326)$$

La variable de acción es

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint_C p dq = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial W}{\partial q} dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mE} \oint_C \sqrt{1 - \frac{k}{2E}q^2} dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mE} 4 \int_0^{q_{\max}} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}q^2} dq, \end{aligned} \quad (6.327)$$

puesto que un ciclo \mathcal{C} equivale a cuatro veces la variación de la coordenada q desde el valor $q = 0$ hasta el valor $q_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, para el cual $p = 0$.

Con el cambio de variables $\sin x = \sqrt{\frac{k}{2E}} q$, obtenemos

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{k}} 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{m}{k}} E \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{m}{k}} E. \end{aligned} \quad (6.328)$$

Luego, el Hamiltoniano en términos de J es

$$H'(J) = E = \sqrt{\frac{k}{m}} J. \quad (6.329)$$

La frecuencia del movimiento es

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{\partial H'}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.330)$$

Note que las variables de acción-ángulo (φ, J) corresponden a las variables (Q, P) en la transformación canónica $\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}$ empleada para el oscilador armónico en la Sec. 6.8, tal que la coordenada Q sea cíclica en el Hamiltoniano transformado $H'(P)$.

2. Encontrar el período del movimiento de una partícula de masa m y velocidad v que choca elásticamente entre dos paredes paralelas separadas por una distancia L .

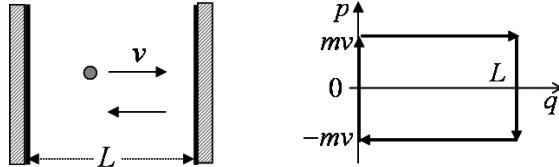


Figura 6.22: Partícula chocando elásticamente entre dos paredes paralelas. Izquierda: espacio físico. Derecha: espacio de fase (q, p) .

La energía de la partícula es constante,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \text{cte}, \quad (6.331)$$

y el Hamiltoniano correspondiente es

$$H = \frac{p^2}{2m} = E. \quad (6.332)$$

Usando

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad (6.333)$$

obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo,

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = E. \quad (6.334)$$

Luego,

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE}. \quad (6.335)$$

La variable de acción da

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint_C p dq = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mE} \oint_C dq \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2mE} 2 \int_0^L dq = \frac{L}{\pi} \sqrt{2mE}. \end{aligned} \quad (6.336)$$

Luego, $p = \pi J/L$. El Hamiltoniano como función de J es

$$H'(J) = \frac{\pi^2}{2mL^2} J^2, \quad (6.337)$$

y la frecuencia del movimiento está dada por

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{\partial H'}{\partial J} = \frac{\pi^2}{mL^2} J \quad (6.338)$$

$$= \frac{\pi^2}{mL^2} \frac{L}{\pi} \sqrt{2mE} = \frac{\pi}{L} v. \quad (6.339)$$

Luego, el período resulta en

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2L}{v}. \quad (6.340)$$

3. Una partícula se mueve sin fricción sobre un cilindro vertical de radio R en el campo gravitacional terrestre, conservando su energía E y alcanzando una altura máxima h después de cada choque contra el suelo. Encontrar las frecuencias del movimiento usando variables de acción-ángulo.

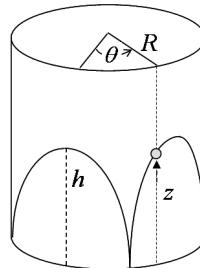


Figura 6.23: Partícula moviéndose sobre un cilindro vertical.

Hay dos grados de libertad, θ y z . El Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (6.341)$$

El Hamiltoniano es

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz = E = \text{cte.} \quad (6.342)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo tiene la forma

$$H \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}, q_i, \alpha_i \right) = E. \quad (6.343)$$

Buscamos solución por separación de variables. Asumimos la función característica de Hamilton en la forma $W = W_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2) + W_z(z, \alpha_1, \alpha_2)$, con $\alpha_1 = E$.

Los momentos correspondientes son

$$p_\theta = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}, \quad (6.344)$$

$$p_z = \frac{\partial W_z}{\partial z}. \quad (6.345)$$

Sustituyendo en la Ec. (6.342), tenemos

$$\frac{1}{2mR^2} \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 + mgz = E, \quad (6.346)$$

lo cual se puede expresar como

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 + mgz = E - \frac{1}{2mR^2} \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 \quad (6.347)$$

El lado izquierdo en la Ec. (6.347) es función de z solamente y el lado derecho es una función de θ . Ambos lados deben ser iguales a la misma constante, $\alpha_2 = \text{cte.}$ Entonces, podemos escribir

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 + mgz = \alpha_2 \quad (6.348)$$

$$E - \frac{1}{2mR^2} \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 = \alpha_2 \quad (6.349)$$

Luego,

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = R \sqrt{2m} \sqrt{E - \alpha_2} = \text{cte}, \quad (6.350)$$

y la variable de acción J_θ está dada por

$$\begin{aligned}
 J_\theta &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\theta} p_\theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\theta} \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} R \sqrt{2m} \sqrt{E - \alpha_2} \oint_{C_\theta} d\theta \\
 &= R \sqrt{2m} \sqrt{E - \alpha_2} = p_\theta.
 \end{aligned} \tag{6.351}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2gz}, \tag{6.352}$$

y la variable de acción J_z correspondiente es

$$J_z = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_z} p_z dz = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_z} \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2gz} dz. \tag{6.353}$$

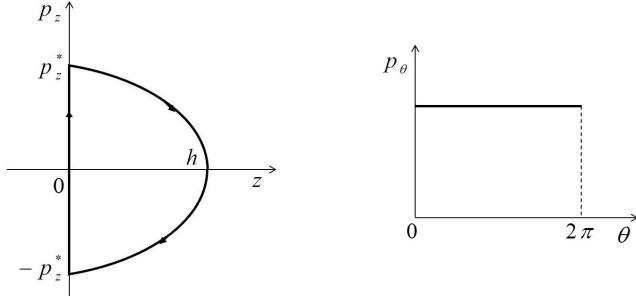


Figura 6.24: Izquierda: Órbita C_z en el plano (z, p_z) . En $z = 0$, el momento p_z cambia de signo de $-p_z^*$ a $p_z^* = m\sqrt{2gh}$. Derecha: Órbita C_θ en el plano (θ, p_θ) .

La integral sobre la órbita C_z corresponde a un ciclo de $z = 0$ a $z = h$ y viceversa.

$$J_z = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^h \sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2gz} dz \tag{6.354}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{2m^2g} \int_0^h \sqrt{\frac{\alpha_2}{mg} - z} dz \tag{6.355}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sqrt{2m^2g} \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_2}{mg} - z \right)^{3/2} \Big|_0^h \tag{6.356}$$

$$= \frac{2}{3\pi} \sqrt{2m^2g} \left(\frac{\alpha_2}{mg} \right)^{3/2} \tag{6.357}$$

$$= \frac{1}{3\pi g \sqrt{m}} (2\alpha_2)^{3/2}. \tag{6.358}$$

Para escribir $H'(J_z, J_\theta)$, debemos expresar p_z y p_θ en términos de J_z y J_θ . Obtenimos $J_\theta = p_\theta$. De la Ec (6.358) tenemos

$$\alpha_2 = \frac{(3\pi g \sqrt{m} J_z)^{2/3}}{2}, \quad (6.359)$$

luego,

$$\begin{aligned} p_z^2 &= \left(\frac{\partial W_z}{\partial z} \right)^2 = 2m\alpha_2 - 2m^2gz \\ &= (3\pi g m^2 J_z)^{2/3} - 2m^2gz. \end{aligned} \quad (6.360)$$

Sustituyendo en H , obtenemos

$$H'(J_z, J_\theta) = \frac{1}{2mR^2} J_\theta^2 + \frac{1}{2m} (3\pi m^2 g J_z)^{2/3} = E. \quad (6.361)$$

Las frecuencias están dadas por

$$\dot{\varphi}_\theta = \omega_\theta = \frac{\partial H'}{\partial J_\theta} = \frac{J_\theta}{mR^2} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad (6.362)$$

$$\dot{\varphi}_z = \omega_z = \frac{\partial H'}{\partial J_z} = \frac{1}{3m} \left[\frac{(3\pi m^2 g)^2}{J_z} \right]^{1/3}. \quad (6.363)$$

Podemos expresar las frecuencia en términos de E y h . Cuando $z = h$, el momento $p_z = 0$. Entonces, de la Ec (6.360) obtenemos

$$\alpha_2 = mgh \quad (6.364)$$

y

$$J_z = \frac{2}{3} \frac{m}{\pi} \sqrt{2gh^3}. \quad (6.365)$$

De la Ec (6.351), podemos expresar

$$p_\theta = R \sqrt{2m} \sqrt{E - mgh}. \quad (6.366)$$

Luego,

$$\omega_\theta = \frac{\sqrt{2}}{R} \sqrt{\frac{E}{m} - gh}, \quad (6.367)$$

$$\omega_z = \pi \sqrt{\frac{g}{2h}}. \quad (6.368)$$

El período del movimiento en z es

$$T_z = \frac{2\pi}{\omega_z} = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (6.369)$$

que es igual al tiempo de vuelo entre dos choques consecutivos contra el suelo.

4. Encontrar las frecuencias del movimiento en el problema de Kepler utilizando variables de acción-ángulo.

El problema de Kepler se refiere en el potencial central $V(r) = -\frac{k}{r}$. Puesto que el vector momento angular se conserva en un potencial central, el movimiento ocurre en un plano perpendicular a la dirección de ese vector.

Usando coordenadas polares (r, θ) sobre el plano del movimiento, el Hamiltoniano de una partícula de masa reducida μ en un potencial $V(r)$ se puede expresar como

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r) = E. \quad (6.370)$$

Asumimos separación de variables; luego escribimos los momentos

$$p_r = \frac{\partial W_r}{\partial r}, \quad (6.371)$$

$$p_\theta = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}. \quad (6.372)$$

Sustituyendo en H , obtenemos

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\mu r^2} \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + V(r) = E, \quad (6.373)$$

lo cual se puede escribir como

$$r^2 \left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + 2\mu(V - E) \right] = - \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2. \quad (6.374)$$

El lado izquierdo de la Ec. (6.374) depende solamente de r , mientras que el lado derecho depende de θ . Luego, ambos lados deben ser constantes e iguales. Entonces debemos tener

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \alpha_\theta = \text{cte}, \quad (6.375)$$

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right)^2 + 2\mu(V - E) = -\frac{\alpha_\theta^2}{r^2}. \quad (6.376)$$

La Ec. (6.375) implica que $p_\theta = \alpha_\theta = \text{cte}$. El valor constante de p_θ es la magnitud del momento angular l . Entonces,

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\theta} p_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\theta} \left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\theta} \alpha_\theta d\theta = \alpha_\theta. \quad (6.377)$$

De las Ecs. (6.376) y (6.377), obtenemos

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} = \sqrt{2\mu(E - V) - \frac{J_\theta^2}{r^2}}. \quad (6.378)$$

La variable de acción J_r está dada por

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_r} p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_r} \left(\frac{\partial W_r}{\partial r} \right) dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_r} \sqrt{2\mu(E - V) - \frac{J_\theta^2}{r^2}} dr. \end{aligned} \quad (6.379)$$

Puesto que consideramos movimientos finitos, en un ciclo C_r la coordenada radial varía dos veces entre los valores $r = r_{\min}$ y $r = r_{\max}$. Entonces,

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2\mu \left(E + \frac{k}{r} \right) - \frac{J_\theta^2}{r^2}} dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r} \sqrt{2\mu Er^2 + 2\mu kr - J_\theta^2} dr. \end{aligned} \quad (6.380)$$

Recordemos del Cap. 3 (Sec. 3.4) que r_{\min} y r_{\max} son las raíces de

$$2\mu Er^2 + 2\mu kr - l^2 = 2\mu Er^2 + 2\mu kr - J_\theta^2 = 0, \quad (6.381)$$

(puesto que $J_\theta = l$) dadas por

$$r_{\min} = -\frac{k}{2E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EJ_\theta^2}{\mu k^2}} \right), \quad (6.382)$$

$$r_{\max} = -\frac{k}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EJ_\theta^2}{\mu k^2}} \right). \quad (6.383)$$

Para realizar la integración en la Ec. (6.380) de una manera más simple, usamos el siguiente artilugio. Obtenemos primero la derivada parcial

$$\frac{\partial J_r}{\partial E} = \frac{\mu}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r}{\sqrt{2\mu Er^2 + 2\mu kr - J_\theta^2}} dr. \quad (6.384)$$

La integral en la Ec. (6.384) es de la forma

$$\int \frac{r}{\sqrt{ar^2 + br + c}} dr = \frac{\sqrt{ar^2 + br + c}}{a} + \frac{b}{2(-a)^{3/2}} \sin^{-1} \left(\frac{b + 2ar}{b^2 - 4ac} \right), \quad (6.385)$$

donde identificamos $a = 2\mu E$, $b = 2\mu k$ y $c = -J_\theta^2$. Evaluamos

$$\frac{b}{2(-a)^{3/2}} = \frac{k}{2\sqrt{2\mu}(-E)^{3/2}}, \quad (6.386)$$

$$b^2 - 4ac = 2\mu k \sqrt{1 + \frac{2EJ_\theta^2}{\mu k^2}} \quad (6.387)$$

$$b + 2ar_{\max} = -2\mu k \sqrt{1 + \frac{2EJ_\theta^2}{\mu k^2}}, \quad (6.388)$$

$$b + 2ar_{\min} = 2\mu k \sqrt{1 + \frac{2EJ_\theta^2}{\mu k^2}}. \quad (6.389)$$

El primer término en la integración Ec. (6.385) se anula al evaluarlo en ambos límites r_{\min} y r_{\max} . Entonces la integral Ec. (6.384) evaluada en esos límites da

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_r}{\partial E} &= \frac{\mu}{\pi} \frac{k}{2\sqrt{2\mu}(-E)^{3/2}} \pi \\ &= \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} (-E)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (6.390)$$

En el problema de Kepler tenemos $E < 0$ para una órbita finita.

Ahora integramos la Ec. (6.390) y obtenemos

$$J_r = C + k \sqrt{\frac{\mu}{2}} (-E)^{-1/2}, \quad (6.391)$$

donde C es una constante de integración. Para determinar C , notamos que la expresión Ec. (6.391) debe ser válida para cualquier órbita con $E < 0$ en el problema de Kepler. En particular, consideremos una órbita circular con $r = \text{cte}$. Entonces, $r_{\min} = r_{\max}$ y $J_r = 0$ para esa órbita. La energía correspondiente a una órbita circular es

$$E = -\frac{\mu k^2}{2J_\theta^2}. \quad (6.392)$$

Entonces, la Ec. (6.391) para una órbita circular da

$$0 = C + k \sqrt{\frac{\mu}{2}} \sqrt{\frac{2J_\theta^2}{\mu k^2}} \Rightarrow C = -J_\theta. \quad (6.393)$$

Luego,

$$J_r = -J_\theta + k \sqrt{\frac{\mu}{2}} (-E)^{-1/2}. \quad (6.394)$$

El Hamiltoniano en función de las variables de acción se puede expresar como

$$H'(J_r, J_\theta) = E = -\frac{\mu k^2}{2(J_r + J_\theta)^2}. \quad (6.395)$$

Las frecuencias están dadas por

$$\omega_\theta = \frac{\partial H'}{\partial J_\theta} = \frac{\mu k^2}{(J_r + J_\theta)^3}, \quad (6.396)$$

$$\omega_r = \frac{\partial H'}{\partial J_r} = \frac{\mu k^2}{(J_r + J_\theta)^3}. \quad (6.397)$$

Las frecuencias radial y angular son iguales, lo que implica que la órbita es cerrada, como se espera.

Para expresar la frecuencia en función de la energía, sustituimos

$$J_r + J_\theta = k \sqrt{\frac{\mu}{2(-E)}} \quad (6.398)$$

en la Ec. (6.396) y obtenemos

$$\omega_\theta = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{2}{\mu}} (-E)^{3/2} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{2}{\mu}} |E|^{3/2}. \quad (6.399)$$

Recordemos del Cap. 3 (Sec. 3.4) que el semieje mayor de una órbita elíptica está relacionado con la energía por

$$a = \frac{k}{2|E|}. \quad (6.400)$$

Entonces, podemos escribir ω_θ en función del semieje mayor como

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{k}{\mu}} a^{-3/2} = \frac{2\pi}{T_\theta}, \quad (6.401)$$

donde T_θ es el período de la órbita. Luego,

$$T_\theta = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}, \quad (6.402)$$

que es la Tercera Ley de Kepler (Cap. 3).

5. La temprana formulación de la Mecánica Cuántica de Bohr y Sommerfeld para el átomo de hidrógeno, incluía los siguientes postulados:

- a) Cuantización de las variables de acción,

$$J_k \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{C_k} p_k dq_k = n_k \hbar, \quad (6.403)$$

donde n_i es un número entero y \hbar es la constante de Planck dividida por 2π .

- b) La frecuencia de la radiación emitida cuando un electrón cambia discontinuamente su movimiento, desde una órbita con energía E_i a otra órbita con energía E_f , es

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}. \quad (6.404)$$

El potencial del átomo de hidrógeno corresponde al potencial de Coulomb, $V(r) = -e^2/r$, que es similar al potencial de Kepler con $k = e^2$. Luego, en términos de las variables de acción, la energía del electrón en una órbita está dada por la Ec. (6.395),

$$E = -\frac{mk^2}{2(J_r + J_\theta)^2}. \quad (6.405)$$

donde hemos tomado $\mu \approx m$, masa del electrón. Utilizando la hipótesis de cuantización, obtenemos

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (6.406)$$

donde n es un número entero, ya que la suma de dos números enteros es otro entero. Entonces, la frecuencia emitida en una transición $E_i \rightarrow E_f$ satisface

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right). \quad (6.407)$$

Usando $\nu = c/\lambda$, podemos expresar la longitud de la onda emitida como

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad (6.408)$$

donde

$$R_\infty \equiv \frac{me^4}{4\pi c \hbar^3}, \quad (6.409)$$

es la constante de Rydberg. Esta teoría temprana permitió explicar las longitudes de onda de las líneas principales observadas en el espectro del hidrógeno.

6.11. Integrabilidad

En el Cap. 2, establecimos que un sistema con s grados de libertad $\{q_1, \dots, q_s\}$ es integrable si posee s cantidades conservadas o constantes del movimiento. En la formulación Hamiltoniana, la condición de integrabilidad de un sistema puede caracterizarse por la existencia de s funciones independientes y constantes $I_k(q_i, p_i) = C_k$, $k = 1, \dots, s$, tales que $[I_k, I_j] = 0$; $\forall k, j$, siendo el Hamiltoniano $H(q_i, p_i)$ una de esas funciones. Esta es la condición de integrabilidad de Liouville.

Cada función $I_k(q_i, p_i) = C_k$ representa una superficie $(2s - 1)$ -dimensional Σ_k sobre la cual evoluciona la trayectoria $(q_i(t), p_i(t))$ en el espacio de fase $2s$ -dimensional del sistema. Puesto que la trayectoria $(q_i(t), p_i(t))$ debe satisfacer simultáneamente las s condiciones $I_k(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) = C_k$, esta trayectoria yace sobre el subespacio de la intersección de las s superficies Σ_k , el cual corresponde a una superficie s -dimensional definida como $\Sigma^s \equiv \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \dots \cap \Sigma_s$.

Teorema de Liouville-Arnold.

Para sistemas integrables según la condición de Liouville se cumple que: (i) la superficie Σ^s es difeomórfica (i.e., se puede transformar continuamente) a un toroide s -dimensional \mathbb{T}^s ; y (ii) existe un conjunto canónico de coordenadas y momentos $\{\varphi_i, J_i\}$ tales que las J_1, J_2, \dots, J_s definen el toroide \mathbb{T}^s y $\dot{\varphi}_i = 0$ sobre \mathbb{T}^s (i.e., $\{\varphi_i, J_i\}$ son variables de acción-ángulo).

Aunque la demostración de este teorema requiere conceptos avanzados de topología, podemos visualizar su plausibilidad para sistemas finitos completamente separables. En este caso, vimos que la trayectoria en el espacio de fase de las variables de acción-ángulo del sistema efectivamente se puede describir sobre un toroide s -dimensional \mathbb{T}^s .

Recordemos que un sistema es completamente separable si la solución de su correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi puede encontrarse por separación de variables en forma aditiva de s funciones W_k , tal que cada función W_k depende de una sola coordenada q_k y de un conjunto de s constantes $\{P_1, \dots, P_s\}$. En ese caso, es posible reducir la ecuación de Hamilton-Jacobi a un conjunto de s ecuaciones diferenciales de primer orden para las funciones $W_k(q_k)$; cada ecuación permite encontrar la correspondiente función $W_k(q_k)$ en términos de una integral explícita sobre la coordenada q_k . Luego, un sistema completamente separable siempre es integrable y posee s constantes del movimiento, i.e., $\{P_1, \dots, P_s\}$.

Por otro lado, un sistema integrable no siempre es completamente separable. Un ejemplo de este tipo de sistemas de enorme interés en la Física, es la famosa *red de Toda*. Morikazu Toda (1917–2010) introdujo un modelo simple para un cristal unidimensional que consiste en una cadena periódica de partículas con potenciales de interacción exponenciales entre vecinos mas cercanos. Para una red de Toda con tres partículas de igual masa, el Hamiltoniano del sistema se puede expresar como

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24} \left[e^{(2y+2\sqrt{3}x)} + e^{(2y-2\sqrt{3}x)} + e^{-4y} \right] - \frac{1}{8}, \quad (6.410)$$

el cual representa un sistema con $s = 2$ grados de libertad. Puesto que H es independiente del tiempo, H es una constante del movimiento. No existen otras simetrías aparentes que sugieran alguna cantidad conservada adicional en este sistema. No obstante, este sistema posee la siguiente cantidad conservada no trivial,

$$I = 8p_x(p_x^2 - 3p_y^2) + (p_x + \sqrt{3}p_y)e^{(2y-2\sqrt{3}x)} + (p_x - \sqrt{3}p_y)e^{(2y+2\sqrt{3}x)} - 2p_xe^{-4y}. \quad (6.411)$$

La demostración de la conservación de la cantidad I se deja para los problemas de este Capítulo. La existencia de las constantes de movimiento H e I hacen que la red de Toda sea un sistema integrable y, por lo tanto, satisface el Teorema de Liouville-Arnold.

Una manera de visualizar la topología toroidal del espacio de fase de la red de Toda es dibujar las intersecciones de la trayectoria con una sección de superficie dada en el espacio de fase del sistema. Consideraremos la intersección de la trayectoria con la superficie $x = 0$ para $H = E = \text{cte}$. Fijamos $x = 0$ y despejamos $p_x = p_x(p_y, y, I)$ de la Ec. (6.411); sustituimos p_x en la Ec. (6.410) para obtener la función $H(p_y, y, I) = E$, con I, E constantes.

La Fig. (6.25) muestra las curvas $H(p_y, y, I) = E$ así obtenidas, proyectadas en el plano (y, p_y) .

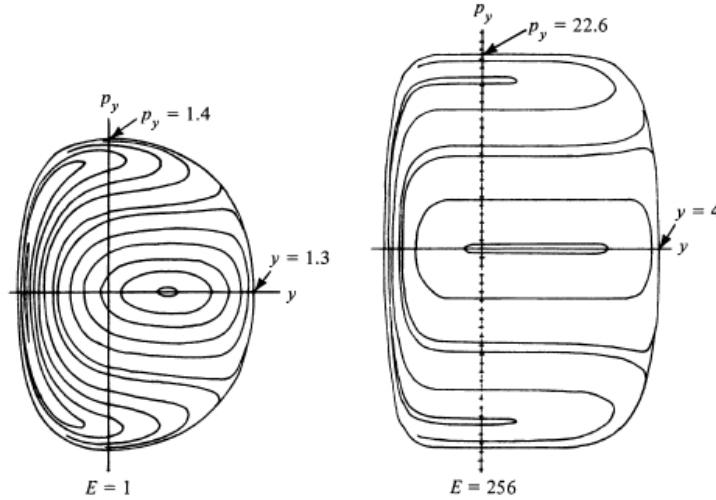


Figura 6.25: Proyecciones de las trayectorias sobre el plano (y, p_y) con $x = 0$ para el Hamiltoniano $H = E$ de la red de Toda, Ec. (6.410), con valores de energía $E = 1$ (izquierda) y $E = 256$ (derecha), para diferentes valores de I . Las flechas indican los valores máximos de y y p_y .

Las curvas mostradas, correspondientes a valores $E = 1$ y $E = 256$, son suaves y cerradas. Esto indica que las variables (x, y, p_x, p_y) son susceptibles de ser transformadas a variables canónicas de acción-ángulo $(\varphi_1, \varphi_2, J_1, J_2)$ que describen un toroide \mathbb{T}^2 .

Se puede verificar que la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al Hamiltoniano Ec. (6.410) no es separable en forma aditiva de 2 funciones $W_x(x)$ y $W_y(y)$, debido a la forma no lineal de H . Esto significa que la red de Toda es un sistema integrable, pero no completamente separable.

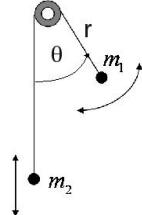
El trompo de Kovalevskaya constituye otro ejemplo de un sistema integrable no trivial. La red de Toda y el trompo de Kovalevskaya revelan que las cantidades conservadas en un sistema dinámico no siempre están asociadas con simetrías conocidas.

El estudio de la integrabilidad y de sistemas con simetrías *ocultas* o no triviales tiene mucho interés en la Física contemporánea. En 1986, Nick Tufillaro encontró un sistema integrable sorprendentemente simple, con una simetría oculta. Se trata de una máquina de Atwood con dos grados de libertad, tal que una masa (m_2) se mueve verticalmente mientras la otra masa (m_1) puede oscilar libremente sobre un plano vertical.

Podemos escribir el Hamiltoniano de este sistema como

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_r^2}{m_1 + m_2} + \frac{p_\theta^2}{m_1 r^2} \right) + gr(m_2 - m_1 \cos \theta), \quad (6.412)$$

el cual es una cantidad constante.

Figura 6.26: Máquina de Atwood con dos grados de libertad, r y θ .

Tufillaro demostró que, para valores $m_2/m_1 = 3$, este sistema posee además la siguiente cantidad conservada,

$$I = \frac{p_\theta}{4m_1^2} \left[p_r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2p_\theta}{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + gr^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (6.413)$$

la cual no es susceptible de ser asociada con ninguna simetría evidente en el sistema. Luego, al menos para estos valores particulares de parámetros, este sistema es integrable.

La integrabilidad no es una propiedad genérica; sino que depende de la existencia de suficientes simetrías en un sistema, algunas de las cuales pueden no resultar obvias. Esta condición es mas bien restrictiva. En realidad, la lista de sistemas integrables conocidos en Mecánica Clásica es corta; entre ellos se encuentran:

- Un sistema con un grado de libertad.
- El oscilador armónico con s grados de libertad.
- El problema de 2 cuerpos sujetos a una fuerza central.
- Los trompos de Lagrange, Euler y Kovalevskaya.
- La máquina de Atwood, donde una masa se mueve verticalmente mientras la otra oscila sobre un plano vertical, para ciertos valores de parámetros.
- La red de Toda.

Los sistemas integrables exhiben trayectorias regulares (periódicas o cuasiperiódicas) en su espacio de fase. Sin embargo, la gran mayoría de los sistemas dinámicos son no integrables, como sucede en sistemas disipativos y en muchos sistemas no lineales cuyo espacio de fase posee dimensión mayor que dos. La no integrabilidad es una condición necesaria, pero no suficiente para la ocurrencia del fenómeno de caos en un sistema (trayectoria irregular en el espacio de fase, con sensibilidad extrema en las condiciones iniciales). La insuficiencia de simetrías implica la no integrabilidad, y abre las puertas al caos en muchos sistemas dinámicos en una variedad de contextos.

6.12. Problemas

1. Considere una varilla de peso despreciable suspendida por un extremo fijo, de modo que puede oscilar en un plano vertical. Una partícula de masa m se mueve sin fricción a lo largo de la varilla.
 - a) Obtenga las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana.
 - b) Indique si hay alguna cantidad conservada.
2. El Lagrangiano de un sistema se puede expresar

$$L = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{a + bq_1} + k_1 q_1^2 + k_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2,$$

donde a, b, k_1, k_2 son constantes. Encuentre las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana.

3. El Hamiltoniano de una partícula es

$$H = \frac{p^2}{2m} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r},$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores constantes.

- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento.
- b) Si inicialmente la partícula se encuentra en reposo en la posición \mathbf{r}_0 , encuentre su posición en función del tiempo.
- c) Determine el Lagrangiano del sistema.

4. El Lagrangiano de un sistema es

$$L = a\dot{x}^2 + b\frac{\dot{y}}{x} + c\dot{x}\dot{y} + fy^2\dot{x}\dot{z} + g\dot{y} - k\sqrt{x^2 + y^2},$$

donde a, b, c, f, g y k son constantes.

- a) Encuentre el Hamiltoniano del sistema.
- b) Encuentre las cantidades conservadas en el sistema.

5. El modelo de Lotka-Volterra para la dinámica de predadores z y presas c se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{c} &= \alpha c - \beta cz \\ \dot{z} &= -\gamma z + \delta cz,\end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son parámetros positivos.

- a) Encuentre las condiciones para que este sistema sea conservativo.
- b) Encuentre las transformaciones de variables que permiten expresar estas ecuaciones en la forma adimensional

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - y) \\ \dot{y} &= \mu y(x - 1).\end{aligned}$$

- c) Encuentre una cantidad conservada en términos de las variables adimensionales.

6. Considere un péndulo formado por una varilla de longitud l y masa despreciable de la cual cuelga una partícula de masa m_1 . El soporte del péndulo consiste en otra partícula de masa m_2 , libre de moverse en una dirección horizontal. Encuentre las ecuaciones de movimiento para este sistema en la formulación hamiltoniana.
7. El elemento de volumen de un ensemble en el espacio de fase n -dimensional para el sistema dinámico $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es

$$\Delta\Gamma = \prod_{i=1}^n dx_i.$$

Demuestre que

$$\frac{d(\Delta\Gamma)}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{f} \Delta\Gamma.$$

8. La ecuación de movimiento unidimensional amortiguado y forzado de una partícula de masa m sujetada a un resorte de constante k es

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2x = A \cos \nu t,$$

donde $\omega^2 = k/m$, $\lambda > 0$ es el coeficiente de fricción del medio, A es la amplitud de la fuerza externa que actúa sobre la partícula y ν es la frecuencia de esa fuerza. Demuestre que este sistema es disipativo.

9. El atractor de Rössler se genera con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz\end{aligned}$$

donde a, b, c son parámetros.

- a) Encuentre la condición para que este sistema sea disipativo.
b) Calcule los puntos fijos de este sistema en función de los parámetros.

10. El Hamiltoniano de un sistema es

$$H = q_1p_1 - q_2 - p_2 - aq_1^2 + bq_2^2,$$

donde a y b son constantes.

- a) Obtenga las ecuaciones de Hamilton para este sistema.
b) ¿Cuáles de las siguientes funciones son integrales de movimiento para este sistema?

$$f = \frac{p_1 - aq_1}{q_2}; \quad g = q_1q_2; \quad h = p_1p_2^2.$$

11. a) Encuentre las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana de un péndulo de masa m y longitud l , cuyo soporte se mueve sin fricción sobre la parábola $y = ax^2$ en el plano vertical (x, y) .
b) Determine si existe alguna cantidad conservada en el sistema.

- 12.** a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de un péndulo esférico de longitud a y masa m , con coordenadas (θ, ϕ) , en la formulación Hamiltoniana.
 b) Evalúe el siguiente paréntesis de Poisson para este sistema: $[l_x, p_\phi]$.
- 13.** El Hamiltoniano de una partícula que se mueve en dos dimensiones es:

$$H = |\mathbf{p}|^n - a|\mathbf{r}|^{-n}, \quad a = \text{cte.}$$

- a) Encuentre las ecuaciones de Hamilton para el movimiento.
 b) Determine el Lagrangiano del sistema.
 c) ¿Cuál de las siguientes funciones es una integral de movimiento para este sistema?

$$f = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{n} - Ht, \quad g = |\mathbf{p}|.$$

- 14.** El siguiente Hamiltoniano bidimensional

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24} \left[e^{(2y+2\sqrt{3}x)} + e^{(2y-2\sqrt{3}x)} + e^{-4y} \right] - \frac{1}{8},$$

aparece asociado a una *red de Toda*, un sistema de gran interés en Física No Lineal.

- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para este sistema.
 b) Demuestre que este sistema posee la siguiente cantidad conservada,

$$I = 8p_x(p_x^2 - 3p_y^2) + (p_x + \sqrt{3}p_y)e^{(2y-2\sqrt{3}x)} + (p_x - \sqrt{3}p_y)e^{(2y+2\sqrt{3}x)} - 2p_x e^{-4y}.$$

La existencia de las constantes de movimiento H e I hace que este sistema sea integrable. Sin embargo, la cantidad I no está relacionada con ninguna simetría evidente del sistema.

- c) Calcule I en el límite de x y y pequeños.

- 15.** El Lagrangiano de un trompo con momentos principales de inercia $I_{11} = I_{22} = 2I_{33}$ y un punto fijo, moviéndose en el campo gravitacional terrestre, en términos de los ángulos de Euler es

$$L = I_{33} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_{33}}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 - mgd \sin \theta \sin \psi,$$

donde I_{33} es el momento de inercia con respecto al eje de simetría axial del trompo, m es su masa, y d es la distancia entre el punto fijo del trompo y su centro de masa. Este sistema se conoce como el *trompo de Kovalevskaya*.

- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana.
 b) ¿Cuáles son las cantidades conservadas para este sistema?
 c) Demuestre que la siguiente cantidad, denominada la constante de Kovalevskaya y no asociada a ninguna simetría obvia, se conserva en este sistema,

$$\begin{aligned} K &= \left(\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)^2 + 2 \frac{mgd}{I_{33}} \left[\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \sin \psi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \right] \sin \theta \\ &\quad + \left(\frac{mgd}{I_{33}} \right)^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

16. El vector de Laplace-Runge-Lenz para el problema de Kepler se define como $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} - mk\hat{\mathbf{r}}$. Calcule $[A_i, l_j]$.

17. Evalúe los siguientes paréntesis de Poisson:

- a) $[\mathbf{l}, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})]$; b) $[\mathbf{p}, \mathbf{r}^n]$; c) $[\mathbf{p}, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^n]$;
donde \mathbf{a} es un vector constante.

18. Considere la transformación de coordenadas

$$q^{2m} = Q^2 + P^2, \quad P = Q \tan np;$$

donde m y n son constantes.

- a) Determine los valores de m y n para los cuales esta transformación es canónica.
b) Encuentre una función generadora de tipo $F_3(p, Q)$ para esta transformación canónica.

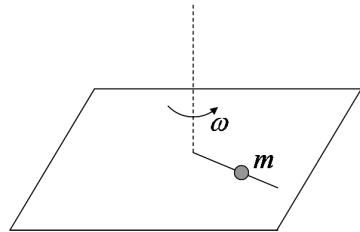
19. Una partícula de masa $m = 1$ se mueve sin fricción a lo largo de una varilla que gira extendida sobre una superficie horizontal con velocidad angular constante ω .

- a) Demuestre que las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para este sistema son

$$\begin{aligned} q &= i\lambda [Pe^{-\omega t} + Qe^{\omega t}], \\ p &= -i\lambda\omega [Pe^{-\omega t} - Qe^{\omega t}]; \end{aligned}$$

donde q es la coordenada que describe la posición de la partícula sobre la varilla, p es el momento, y P, Q y λ son constantes.

- b) Calcule el valor de λ para que una transformación de variables (q, p) a (Q, P) sea canónica.



20. Considere la transformación de coordenadas y momentos

$$Q = q^\alpha e^{\beta p}, \quad P = q^\alpha e^{-\beta p};$$

donde α y β son constantes.

- a) Determine α y β tal que esta transformación sea canónica.
b) Demuestre que una función generadora de esta transformación es

$$F = -\frac{Q^2}{2} e^{2p}.$$

21. a) Demuestre que la siguiente transformación es canónica:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2), \\y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2), \\p_x &= \frac{1}{2}\sqrt{m\omega}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2), \\p_y &= \frac{1}{2}\sqrt{m\omega}(-\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2).\end{aligned}$$

b) Encuentre las ecuaciones de movimiento en la formulación hamiltoniana en términos de las variables (Q_1, Q_2, P_1, P_2) para una partícula de masa m y carga q que se mueve en el plano (x, y) , sujeta al potencial vector $\mathbf{A} = (-yB/2, xB/2, 0)$, usando $\omega = qB/mc$.

22. Considere la transformación infinitesimal de traslación

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \epsilon \mathbf{a}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p},$$

donde \mathbf{a} es un vector fijo en el espacio y ϵ es un parámetro infinitesimal. Encuentre G tal que esta transformación sea generada por la función $F_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} + \epsilon G(\mathbf{r}, \mathbf{P})$.

23. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión q con una energía potencial $V(q)$ y sujeta a una fuerza de fricción $-2m\gamma\dot{q}$.

a) Demuestre que el Lagrangiano del sistema es

$$L = e^{2\gamma t} \left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \right].$$

b) Encuentre las ecuaciones de Hamilton para la partícula.

c) Si $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2$, $\omega = \text{cte}$, demuestre que la función generadora

$$F_2(q, P, t) = e^{\gamma t}qP$$

permite transformar a un Hamiltoniano constante.

24. Las ecuaciones de transformación entre dos conjuntos de coordenadas son

$$\begin{aligned}Q &= \log(1 + \sqrt{q}\cos p), \\P &= 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\sqrt{q}\sin p.\end{aligned}$$

a) Demuestre que la transformación es canónica.

b) Demuestre que la función generadora de esta transformación es

$$F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

- 25.** Considere la transformación infinitesimal de rotación

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{r} + \epsilon(\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p} + \epsilon(\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{p}),\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\Phi}$ es el vector a lo largo del eje de rotación, $|\boldsymbol{\Phi}| = \phi$ es el ángulo de rotación y ϵ es un parámetro infinitesimal.

- a) Demuestre que esta transformación es canónica.
- b) Suponga que esta transformación es generada por la función $F_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} + \epsilon G(\mathbf{r}, \mathbf{P})$. Determine G .

- 26.** Una partícula de masa m se suelta en reposo desde una altura h a lo largo de un plano inclinado sin fricción, el cual forma un ángulo α con el suelo.

- a) Encuentre la posición de la partícula sobre el plano en función del tiempo, a partir de la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema.
- b) Encuentre el momento de la partícula en función del tiempo.

- 27.** La energía cinética relativista de una partícula de masa m es

$$T = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2},$$

donde c es la velocidad de la luz. Considere una partícula relativista sujetada a la fuerza gravitacional terrestre $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{y}}$, tal que inicialmente se suelta del reposo en $y = 0$. Determine la trayectoria de la partícula en función del tiempo a partir de la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema.

- 28.** Encuentre la expresión de la acción correspondiente a un péndulo simple a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema.

- 29.** a) Empleando la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi, calcule la posición en función del tiempo para una partícula libre con masa m y energía E que se encuentra en el origen en $t = 0$.
- b) Encuentre la acción en función del tiempo.

- 30.** Una partícula de masa m y energía E se mueve en el potencial unidimensional $V(q) = k/q^2$, donde k es constante.

- a) Encuentre la acción $S(q, t)$ asociada a esta partícula.
- b) Encuentre la posición de la partícula en función del tiempo.

- 31.** Una partícula sujeta a un potencial unidimensional posee el siguiente Hamiltoniano,

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda tx, \quad \lambda = \text{cte.}$$

- a) ¿Es conservativo este sistema dinámico en su espacio de fase?
- b) Si inicialmente la partícula se encuentra en reposo en $x = 0$, calcule su trayectoria.
- c) Demuestre que la función $f(x, p) = 9\lambda m^2 x^2 - 2p^3$ es una integral de movimiento para este sistema.
- d) ¿Es este sistema completamente separable?

- 32.** Un proyectil de masa m se lanza con velocidad v_o desde el suelo, formando un ángulo α con la horizontal.
- Encuentre la trayectoria del proyectil en función del tiempo, usando el formalismo de Hamilton-Jacobi.
 - Encuentre la acción para este sistema.
- 33.** Considere un oscilador armónico bidimensional de masa m y cuyas constantes de resorte son k_x y k_y en las direcciones x y y , respectivamente.
- Encuentre las coordenadas y momentos de la partícula en función del tiempo utilizando ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema.
 - Encuentre la acción para este sistema.
- 34.** Una partícula con carga q y masa m se mueve en un plano sujeta a un potencial central $V = \frac{1}{2}kr^2$ y a un campo magnético perpendicular al plano, tal que $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.
- Determine la ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema, en coordenadas polares.
 - Encuentre la solución para la trayectoria de la partícula en términos de integrales explícitas.
- 35.** Considere una curva cerrada $C(t)$ en un instante t en el espacio de fase (q_i, p_i) de un sistema. Demuestre que la integral

$$I = \sum_i \oint_{C(t)} p_i dq_i$$

es una constante del movimiento.

- 36.** Una partícula de masa m se encuentra inicialmente en $x = 0$ con velocidad $v_o\hat{\mathbf{x}}$ y se mueve en el potencial unidimensional

$$V(x) = k \sin^2\left(\frac{x}{a}\right), \quad \frac{x}{a} \in [-\pi/2, \pi/2],$$

y $V(x) = \infty$, para $\frac{x}{a} \notin [-\pi/2, \pi/2]$, con k, a constantes. Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi, encuentre el período de oscilación de la partícula en este potencial si $x \ll a$.

- 37.** Una partícula con masa m y energía E se mueve periódicamente en el potencial unidimensional $V = k|x|$, $k = \text{cte}$. Usando variables de acción-ángulo, encuentre el período del movimiento de la partícula.
- 38.** Una partícula de masa m se mueve en una dimensión sujeta al potencial $V(x) = k \sec^2(x/a)$.
- Encuentre una expresión para la acción S utilizando ecuación de Hamilton-Jacobi para este sistema.
 - Encuentre la frecuencia de las oscilaciones de la partícula usando variables de acción-ángulo. Calcule esta frecuencia en el límite de pequeñas amplitudes.

39. Una partícula de masa m y energía E se mueve en el potencial unidimensional

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + \frac{\lambda}{q^2}, \quad k, \lambda = \text{cte}, \quad q > 0.$$

- a) Dibuje el espacio de fase del sistema.
- b) Calcule la variable de acción.

40. Considere un oscilador armónico con masa m y constante de resorte k que puede moverse en un plano.

- a) Encuentre el Hamiltoniano del sistema en coordenadas polares.
- b) Calcule las frecuencias del movimiento usando variables de acción-ángulo.

41. Utilizando el método de las variables de acción-ángulo, demuestre que el período de libración de un péndulo simple, de masa m y longitud l , y cuya amplitud inicial es θ_0 , se puede expresar como

$$T = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

42. Considere una partícula de masa m sujeta a moverse sin fricción sobre un cono invertido, con ángulo de vértice β , en el campo gravitacional terrestre. Calcule las frecuencias del movimiento mediante el uso de variables de acción-ángulo para este sistema.

43. Considere el Hamiltoniano

$$H(q_i, p_i) = \sum_{k=1}^s \beta_k G_k(q_i, q_i),$$

donde los coeficientes β_k son constantes y

$$G_k(q_i, q_i) = ap_k^2 + (b+c)p_kq_k + dq_k^2 - (ad-bd) \sum_{i \neq k} \frac{(p_i q_k - q_k p_i)^2}{\alpha_k - \alpha_i}, \quad k = 1, \dots, s,$$

con a, b, c, d y α_k distintas constantes. Demuestre que las funciones $G_k(q_i, q_i)$ son constantes del movimiento y, por lo tanto, este sistema es integrable.

Apéndice A

Lagrangiano de una partícula relativista

Hacia finales del siglo XIX, la Física consistía en dos grandes teorías para explicar la mayoría de los fenómenos conocidos hasta entonces:

- Mecánica, expresada en las leyes de Newton, que presentaba una descripción unificada de los fenómenos del movimiento.
- Electromagnetismo, contenido en las ecuaciones de Maxwell, que representaba la unificación de la descripción de los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos, y que condujo al descubrimiento de las ondas electromagnéticas y de la naturaleza de la luz.

En sus estudios sobre el movimiento, Galileo estableció el principio de relatividad:

Principio de Relatividad de Galileo.

Las leyes de la Mecánica son las mismas en diferentes sistemas de coordenadas inerciales que se encuentran en movimiento relativo uniforme.

Dados dos sistemas de coordenadas S con origen O , y S' con origen O' , tal que O' se mueve con velocidad constante \mathbf{v} con respecto a O , las *transformaciones de Galileo* entre estos sistemas de coordenadas son

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' &= t.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Si $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, las transformaciones de Galileo resultan en

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t.\end{aligned}\tag{A.2}$$

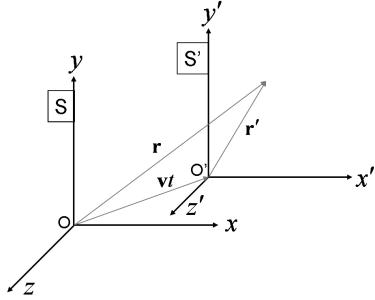


Figura A.1: Transformaciones de Galileo para sistemas inerciales en movimiento relativo.

Derivando con respecto al tiempo la Ec. (A.1), se obtiene la suma de velocidades,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} + \mathbf{v} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{u} &= \mathbf{u}' + \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

puesto que $dt = dt'$ y donde \mathbf{u} es la velocidad de una partícula medida en S y \mathbf{u}' corresponde a la velocidad de esa partícula medida en S' . En particular, si $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, la suma de velocidades da

$$u'_x = u_x - v. \quad (\text{A.4})$$

La forma de las leyes de Newton es invariante bajo las transformaciones de Galileo. Consideremos la Segunda Ley de Newton en S' ,

$$m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = -\nabla' V(\mathbf{r}') = \mathbf{F}(\mathbf{r}'). \quad (\text{A.5})$$

Tenemos,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v} \right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (\text{A.7})$$

Por otro lado, notamos que para cualquier f ,

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (\text{A.8})$$

y similarmente

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (\text{A.9})$$

Luego,

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \nabla. \quad (\text{A.10})$$

La coordenada \mathbf{r}' se puede expresar, en general, como la distancia entre la partícula en consideración y otra partícula (o influencia externa) con la cual aquella interactúa. Es decir,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}. \quad (\text{A.11})$$

Luego, $\nabla' V(\mathbf{r}') = \nabla V(\mathbf{r})$. De acuerdo a las transformaciones de Galileo Ec. (A.1), la Ec. (A.5) en el sistema de referencia S' se expresa en el sistema S como

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto, la Segunda ley de Newton es invariante (conserva su forma) bajo las transformaciones de Galileo, y el principio de relatividad de Galileo es válido para estas transformaciones.

Sin embargo, en contraste con el comportamiento de las leyes de la Mecánica, las leyes del Electromagnetismo no son invariantes ante las transformaciones de Galileo.

Las ecuaciones de Maxwell para los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ en el sistema S son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (\text{A.16})$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Las ecuaciones de Maxwell fuera de las fuentes ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$) implican que, tanto el campo eléctrico \mathbf{E} como el campo magnético \mathbf{B} , satisfacen la ecuación de onda electromagnética en S ,

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.17})$$

donde $\psi = E_j$, o $\psi = B_j$ (componente j del campo eléctrico o del campo magnético).

Consideremos la componente $E_j(\mathbf{r}', t')$ en S' . Entonces,

$$\frac{\partial E_j}{\partial t'}(\mathbf{r}', t') = \sum_i \frac{\partial E_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial t'} + \frac{\partial E_j}{\partial t'} = - \sum_i \frac{\partial E_j}{\partial x'_i} v_i + \frac{\partial E_j}{\partial t}, \quad (\text{A.18})$$

donde hemos usado las transformaciones de Galileo

$$x'_i = x_i - v_i t, \quad t' = t \quad (\text{A.19})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x'_i}{\partial t'} = \frac{\partial x'_i}{\partial t} = -v_i. \quad (\text{A.20})$$

Luego,

$$\frac{\partial E_j}{\partial t} = \frac{\partial E_j}{\partial t'} + \mathbf{v} \cdot \nabla' E_j. \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las transformaciones de Galileo sólo si $\mathbf{v} = 0$; es decir, conservan su forma solamente en un sistema de referencia inercial en reposo con respecto al medio en el cual se propaga una onda electromagnética. (El “medio” correspondiente al vacío se denominaba *éter*).

Ante esta situación, se presentan los siguientes escenarios posibles:

1. Las transformaciones de Galileo son correctas, tanto para la Mecánica como para el Electromagnetismo, lo cual implica que las ecuaciones de Maxwell son incorrectas.
2. Las transformaciones de Galileo son válidas para la Mecánica en todo sistema inercial, pero las ecuaciones de Maxwell sólo son válidas en un sistema inercial en reposo con respecto al éter ($\mathbf{v} = 0$).
3. Tanto las leyes de la Mecánica como las del Electromagnetismo son invariantes en todo sistema inercial, pero no bajo las transformaciones de Galileo. Esto implica que las leyes de Newton son incorrectas y que se requiere otra transformación de coordenadas.

El éxito de las ecuaciones de Maxwell en la predicción de las ondas electromagnéticas (experimentos de Hertz, Marconi, y otros) sugiere descartar el escenario (i). Por otro lado, la falla en la detección del movimiento relativo al éter (experimento de Michelson-Morley) requiere descartar la posibilidad (ii). El escenario (iii) fue el camino elegido por Einstein en 1905.

Postulados de la Relatividad Especial.

- 1) Las leyes de la Naturaleza (los resultados de los experimentos) son las mismas en todos los sistemas iniciales.
- 2) La velocidad de la luz es constante en todos los sistemas iniciales.

Según el postulado 1, la ecuación de onda electromagnética se cumple en los sistemas de referencia S y S' . El postulado 2 implica que la forma de una onda electromagnética debe ser igual en los sistemas de referencia iniciales S y S' . Entonces, consideremos un pulso esférico de luz emitido en el origen O de S en el instante $t = t' = 0$, cuando ambos orígenes O y O' coinciden.

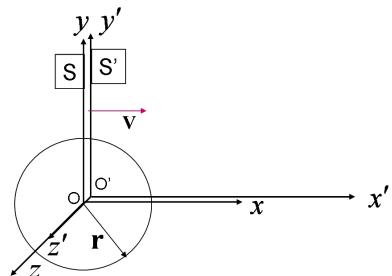


Figura A.2: Pulso electromagnético emitido en O cuando los orígenes O y O' coinciden.

Luego,

$$\begin{aligned} \text{En } S: \quad & |\mathbf{r}| = ct \\ \text{En } S': \quad & |\mathbf{r}'| = ct', \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde c es la magnitud constante de la velocidad de la luz en ambos sistemas. En términos de las coordenadas en cada sistema, tenemos

$$\begin{aligned} \text{En } S: \quad & x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ \text{En } S': \quad & x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Las relaciones (A.23) no son compatibles con las transformaciones de Galileo. Esto se puede verificar sustituyendo las transformaciones Ecs. (A.2) en la relación (A.23) para S' , lo que da

$$x^2 - 2vxt + v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (\text{A.24})$$

y lo cual es distinto de la expresión correspondiente en S .

Las transformaciones compatibles con los postulados de la Relatividad deben ser lineales en t y en x para preservar la forma de una onda esférica en ambos sistemas de coordenadas. Además, deben tender a las transformaciones de Galileo cuando la velocidad relativa entre los dos sistemas es pequeña, puesto que la suma de velocidades derivada de esas transformaciones, Ec. (A.3), funciona en la práctica en tales situaciones. La simetría de los sistemas sugiere invarianza en las coordenadas y, x perpendiculares a la dirección del movimiento. Entonces, si la velocidad de O' es $\mathbf{v} = v\hat{x}$, supongamos unas transformaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - fx) \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

donde γ y f son factores a determinar, tales que $\gamma \rightarrow 1$ y $f \rightarrow 0$ cuando v es pequeña. Sustitución de las transformaciones (A.25) en la relación (A.23) para S' consistente con el segundo postulado, da

$$x^2 \gamma^2 (1 - c^2 f^2) + 2(f c^2 - v) \gamma^2 x t + y^2 + z^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \gamma^2 c^2 t^2. \quad (\text{A.26})$$

Comparando con la relación (A.23) para S , requerimos

$$f c^2 - v = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad (\text{A.28})$$

$$\gamma^2 (1 - f^2 c^2) = 1 \quad (\text{A.29})$$

lo cual conduce a

$$f = \frac{v}{c^2}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (\text{A.30})$$

Luego, las transformaciones buscadas son

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}\tag{A.31}$$

Las Ecs. (A.31) son las *transformaciones de Lorentz*. La ecuación de una onda electromagnética y, por tanto, las ecuaciones de Maxwell, son invariantes bajo estas transformaciones.

Se acostumbra emplear la notación $\beta \equiv v/c$, con la cual las transformaciones de Lorentz se escriben en forma compacta como

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \\y' &= y \\z' &= z.\end{aligned}\tag{A.32}$$

Note que $\beta \leq 1$ y $\gamma \geq 1$.

En el límite de pequeñas velocidades $v \ll c$, tenemos $\beta \ll 1$ y $\gamma \approx 1$, y las transformaciones de Lorentz se aproximan a las transformaciones de Galileo,

$$\begin{aligned}x' &\approx x - vt \\t' &\approx t.\end{aligned}\tag{A.33}$$

Las transformaciones de Lorentz inversas se pueden obtener haciendo $v \rightarrow -v$, $x \rightarrow -x'$, $t \rightarrow t'$, en las Ecs. (A.32),

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + \beta ct') \\t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \\y &= y' \\z &= z'.\end{aligned}\tag{A.34}$$

A partir de las transformaciones de Lorentz se obtiene la regla de adición de velocidades,

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \gamma\left(\frac{dx}{dt'} - \beta c \frac{dt}{dt'}\right), \\ \frac{dx}{dt'} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} = u_x \frac{dt}{dt'},\end{aligned}\tag{A.35}$$

luego,

$$u'_x = \gamma(u_x - \beta c) \frac{dt}{dt'} = \gamma(u_x - \beta c) \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1}, \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} u_x \right), \quad (\text{A.37})$$

lo cual conduce a

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{\beta}{c} u_x}. \quad (\text{A.38})$$

La relación inversa de la suma de velocidades se obtiene haciendo $v \rightarrow -v$, $u_x \rightarrow u'_x$, en la Ec. (A.38),

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x}. \quad (\text{A.39})$$

Contracción de la longitud.

Consideremos un objeto de longitud L_o en reposo a lo largo del eje x en el sistema S . Luego, independiente de t ,

$$L_o = x_2 - x_1, \quad (\text{A.40})$$

Consideremos la longitud del objeto medida en el sistema S' . Un observador en S' debe realizar una medida de los extremos x'_2 y x'_1 simultáneamente en S' , es decir, para un mismo tiempo t' ,

$$L' = x'_2(t') - x'_1(t'). \quad (\text{A.41})$$

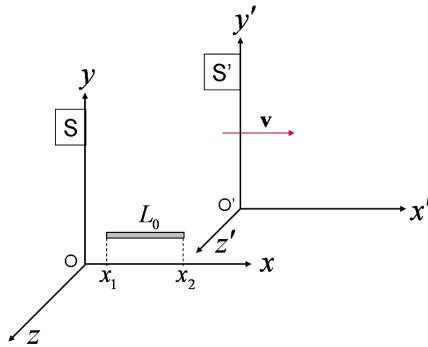


Figura A.3: Contracción de la longitud.

Las transformaciones de Lorentz, Ecs. (A.32), dan las coordenadas x_1 y x_2 en S para un mismo tiempo t' en S' ,

$$\begin{aligned} x_2 &= \gamma(x'_2 + \beta ct') \\ x_1 &= \gamma(x'_1 + \beta ct') \\ \Rightarrow x_2 - x_1 &= \gamma(x'_2 - x'_1). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Luego,

$$L' = \frac{L_o}{\gamma} = L_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{A.43})$$

Como $\gamma > 1$, la longitud L' del objeto medida en S' es menor que la longitud L_o en S donde el objeto se encuentra en reposo.

Dilatación del tiempo.

Un observador con un reloj en S , presente en dos eventos que ocurren en las mismas coordenadas con respecto al observador, mide el *tiempo propio* entre esos eventos. El tiempo propio entre dos eventos que ocurren en un mismo punto x de S es

$$\tau \equiv t_2(x) - t_1(x). \quad (\text{A.44})$$

Las transformaciones de Lorentz inversas, Ecs. (A.34), dan para ese intervalo de tiempo en S' ,

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left(t_2 - \frac{\beta}{c}x \right) - \gamma \left(t_1 - \frac{\beta}{c}x \right) = \gamma(t_2 - t_1). \quad (\text{A.45})$$

Luego,

$$\Delta t' = \gamma \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{A.46})$$

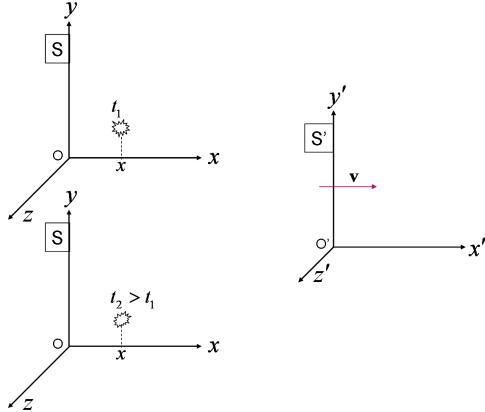


Figura A.4: Un observador en S mide el tiempo propio entre dos eventos que ocurren en las mismas coordenadas en S .

Puesto que $\gamma > 1$, el intervalo de tiempo medido en S' es mayor que el tiempo propio medido en S . En general, el tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto posible entre dos eventos.

Dinámica relativista.

Los postulados de la Relatividad y las transformaciones de Lorentz son compatibles con las ecuaciones de Maxwell, pero requieren modificaciones de las leyes de Newton. Einstein propuso redefinir el momento lineal de una partícula que se mueve con velocidad \mathbf{u} en un sistema S , del siguiente modo

$$p_i = m \frac{dx_i}{d\tau}, \quad (\text{A.47})$$

donde τ es el tiempo propio (el tiempo medido en el sistema donde la partícula está en reposo), el cual está definido únicamente (tiene el mismo valor) para todos los observadores inerciales. Tenemos,

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma u_i. \quad (\text{A.48})$$

Luego, el momento relativista es

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (\text{A.49})$$

donde \mathbf{u} es la velocidad de la partícula en el sistema de referencia S .

La Segunda Ley de Newton relativista se escribe entonces,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (\text{A.50})$$

donde \mathbf{p} está definido en la Ec. (A.49). En esta forma, la Segunda Ley de Newton es invariante bajo las transformaciones de Lorentz,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}. \quad (\text{A.51})$$

Note que en el límite de bajas velocidades, $\beta = \frac{u}{c} \ll 1$, obtenemos $\mathbf{p} \approx m\mathbf{u}$.

Invariantes relativistas.

Existen cantidades escalares que tienen el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Una cantidad cuyo valor es independiente del sistema de coordenadas se denomina *invariante de Lorentz*. Por ejemplo, la invariancia de la cantidad

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (\text{A.52})$$

se deduce inmediatamente de las Ecs. (A.23). Un invariante de Lorentz es el *intervalo* entre dos eventos, definido como

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (\text{A.53})$$

lo cual se demuestra directamente usando las transformaciones de Lorentz.

Igualmente, la cantidad

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \quad (\text{A.54})$$

tiene el mismo valor en todos los sistemas. Multiplicando la Ec. (A.54) por la constante m^2c^4 , obtenemos otra cantidad invariante,

$$m^2c^4\gamma^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = \text{cte.} \quad (\text{A.55})$$

Energía relativista.

Si definimos la cantidad

$$\mathcal{E} \equiv \gamma mc^2, \quad (\text{A.56})$$

entonces podemos expresar la Ec. (A.55) como

$$\mathcal{E}^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = \text{cte.} \quad (\text{A.57})$$

lo cual equivale a

$$\mathcal{E}^2 - p_x^2c^2 - p_y^2c^2 - p_z^2c^2 = \text{cte.} \quad (\text{A.58})$$

Los términos en la Ec. (A.57) poseen unidades de energía al cuadrado. Luego, la cantidad \mathcal{E} es un tipo de energía que se puede interpretar físicamente si hacemos una expansión en términos de $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$,

$$\mathcal{E} = mc^2(1 - \beta^2)^{-1/2} = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \mathcal{O}(\beta^4) \right] \quad (\text{A.59})$$

Luego,

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (\text{A.60})$$

El primer término en la Ec. (A.60) es constante y no depende de la velocidad de la partícula,

$$\mathcal{E}_o = mc^2, \quad (\text{A.61})$$

por lo que representa la *energía en reposo* de la masa m . El segundo término en la Ec. (A.60) corresponde a la energía cinética de la partícula para bajas velocidades. Luego, la cantidad \mathcal{E} se interpreta como la energía total relativista de una partícula libre,

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + T_{\text{rel.}} \quad (\text{A.62})$$

Transformaciones relativistas del momento y de la energía.

Comparando la Ec. (A.58) con la Ec. (A.52), podemos inferir que las cantidades \mathcal{E}/c^2 , p_x , p_y y p_z deben transformarse del mismo modo como lo hacen t , x , y y z , respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - \frac{\beta}{c}\mathcal{E}) \\ \mathcal{E}' &= \gamma(\mathcal{E} - \beta cp_x) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Lagrangiano para una partícula relativista.

Las leyes de Newton se cumplen en Relatividad con la definición apropiada de \mathbf{p} , dada en la Ec. (A.49). Luego, las ecuaciones de Lagrange también se deben cumplir para un Lagrangiano \mathcal{L} definido apropiadamente,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{A.64})$$

Consideremos una partícula con velocidad \mathbf{v} y posición \mathbf{r} en un potencial $V(\mathbf{r})$. Luego,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = p_i = \gamma m \dot{x}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i. \quad (\text{A.65})$$

Supongamos la velocidad a lo largo del eje x_i , i.e., $\dot{x}_i = v$. Entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \gamma mv, \quad (\text{A.66})$$

luego, la dependencia funcional del Lagrangiano con la velocidad es

$$\mathcal{L}(v) = m \int \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \int \frac{\beta d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{A.67})$$

lo cual da

$$\mathcal{L}(v) = -mc^2(1 - \beta^2)^{1/2}. \quad (\text{A.68})$$

Para $\beta \ll 1$, $\mathcal{L}(v)$ se aproxima a la energía cinética newtoniana

$$\mathcal{L}(v) \approx \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (\text{A.69})$$

Luego, el Lagrangiano para una partícula relativista debe tener la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v) - V(\mathbf{r})$, es decir,

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(\mathbf{r}). \quad (\text{A.70})$$

Note que $\mathcal{L} \neq \mathcal{E} - V$, y $\mathcal{L} \neq T_{\text{rel}} - V$. Sin embargo, puesto que \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo, la función de energía es una cantidad constante para este sistema,

$$E = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - \mathcal{L} = \text{cte.} \quad (\text{A.71})$$

Utilizando \mathcal{L} de la Ec. (A.70), obtenemos

$$E = m \frac{\sum_i \dot{x}_i \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + V, \quad (\text{A.72})$$

lo cual se reduce a

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + V = \mathcal{E} + V = \text{cte.} \quad (\text{A.73})$$

La inclusión de potenciales dependientes de la velocidad no representa problema, y se hace del mismo modo que en el caso no relativista. En particular, recordemos que en Mecánica Clásica la energía potencial de una partícula con carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} en un campo electromagnético caracterizado por los potenciales φ y \mathbf{A} está dada por

$$V = q\varphi - \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.74})$$

La fuerza de Lorentz sobre una partícula en un campo electromagnético se deriva de este potencial. Luego, el Lagrangiano relativista para una partícula en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.75})$$

Ejemplo.

- Partícula con masa m sujeta a la fuerza $F = ma$, donde a es una constante.

El potencial es $V = -max$ y el Lagrangiano relativista es

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + max, \quad (\text{A.76})$$

donde $\beta = \dot{x}/c$. La ecuación de Lagrange para x da:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{a}{c}. \quad (\text{A.77})$$

Integrando, tenemos

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{at + \alpha}{c} \Rightarrow \beta = \frac{at + \alpha}{\sqrt{c^2 + (at + \alpha)^2}} \quad (\text{A.78})$$

donde α es una constante de integración. Integrando otra vez,

$$x = c \int \frac{(at + \alpha)dt}{\sqrt{c^2 + (at + \alpha)^2}} \quad (\text{A.79})$$

$$x - x_0 = \frac{c}{a} \left(\sqrt{c^2 + (at + \alpha)^2} - \sqrt{c^2 + a^2} \right) \quad (\text{A.80})$$

donde hemos introducido la condición inicial $x = x_0$ en $t = 0$. Si la partícula se encuentra en reposo $\dot{x}(0) = 0$ en el origen x_0 en $t = 0$, entonces $\alpha = 0$ y tenemos

$$\left(x + \frac{c^2}{a^2} \right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2}, \quad (\text{A.81})$$

lo cual corresponde a una hipérbola en el plano (x, t) . Note que en el límite no relativista, $\beta \ll 1$, la Ec. (A.78) da la trayectoria parabólica usual en el plano (x, t) ,

$$x \approx \frac{1}{2} at^2 + \alpha t + x_0. \quad (\text{A.82})$$

Apéndice B

Transformaciones de Legendre

Dada una función $f(x)$, con x como variable, una transformación de Legendre permite encontrar otra función $g(y)$ que contiene la misma información que $f(x)$, usando como argumento la pendiente $y = f'(x)$.

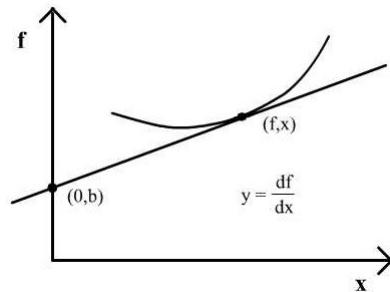


Figura B.1: Transformación de Legendre.

Cada punto (f, x) en la curva $f(x)$ define una línea recta que pasa por un punto $(0, b)$ con pendiente $y = f'(x)$.

El conjunto de todas las rectas (y, b) describe las envolventes de la curva $f(x)$ y contiene la misma información que $f(x)$. Ambas descripciones, en términos de (f, x) o de (y, b) , son equivalentes.

De la Fig. (B.1), tenemos

$$y = \frac{f - b}{x} \Rightarrow (-b) = yx - f \quad (\text{B.1})$$

Por otro lado,

$$y(x) = \frac{df}{dx} \Rightarrow x = x(y) \quad (\text{inversión}). \quad (\text{B.2})$$

Definimos la función

$$g(y) \equiv yx(y) - f(x(y)). \quad (\text{B.3})$$

La función $g(y)$ se denomina la *transformada de Legendre* de $f(x)$. Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a $(-b, y)$ y, por lo tanto, describen la misma curva que $f(x)$.

Si tenemos una función de s variables $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$, existen s derivadas

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \dots, x_s), \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (\text{B.4})$$

Mediante inversión, es posible obtener las s variables

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_s). \quad (\text{B.5})$$

La transformada de Legendre de $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ se define como

$$g(y_1, y_2, \dots, y_s) = \sum_{i=1}^s x_i y_i - f(x_1, x_2, \dots, x_s) \quad (\text{B.6})$$

donde las variables x_i se sustituyen usando las Ecs. (B.5).

La transformada de Legendre se puede aplicar a un subconjunto de los argumentos de una función. Por ejemplo, si tenemos $f(z_i, x_i)$, se puede definir su transformada

$$g(z_i, y_i) = \sum_{i=1}^s z_i y_i - f(z_i, x_i), \quad (\text{B.7})$$

donde

$$y_i = \frac{\partial f(z_i, x_i)}{\partial x_i} = y_i(x_i, z_i) \Rightarrow x_i = x_i(z_i, y_i). \quad (\text{B.8})$$

Las transformadas de Legendre se emplean en Termodinámica y en otras áreas de la Física para introducir descripciones alternativas que resultan útiles para diversos sistemas.

En particular, si tenemos un sistema caracterizado por el Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, los momentos conjugados son

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_1, \dots, q_s). \quad (\text{B.9})$$

Entonces, el Hamiltoniano del sistema corresponde a la transformada de Legendre del Lagrangiano,

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^s q_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (\text{B.10})$$

Apéndice C

Teorema del virial

Se trata de un teorema estadístico en Mecánica. Se refiere a promedios temporales de cantidades dinámicas.

Consideremos un sistema de N partículas cuyas masas, posiciones y velocidades están dados por m_i , \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i , respectivamente, $i = 1, 2, \dots, N$. Entonces, la ecuación de movimiento de la partícula i se puede expresar como

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (\text{C.1})$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza neta sobre la partícula i y $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$.

La energía cinética total del sistema es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \sum_i (\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Recordemos que el promedio de una variable g que toma valores discretos g_1, g_2, \dots, g_N , corresponde a la cantidad

$$\langle g \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i. \quad (\text{C.4})$$

Si $g(t)$ es una función que toma valores continuos en el tiempo, su promedio temporal se define como

$$\langle g \rangle \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau g(t) dt. \quad (\text{C.5})$$

Si $g(t) = \frac{df}{dt}$, para una función f acotada, $|f(t)| < \infty$, entonces

$$\langle g \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{df}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f(\tau) - f(0)}{\tau} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Si tomamos el promedio temporal en todos los términos de la Ec. (C.3), y suponiendo que los movimientos de las partículas son finitos, obtenemos el *teorema del virial*,

$$2\langle T \rangle = -\left\langle \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \right\rangle. \quad (\text{C.7})$$

Si $\mathbf{F}_i = -\nabla V(\mathbf{r}_i)$ (fuerzas conservativas), el teorema del virial tiene la forma

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{r}_i \cdot \nabla V(\mathbf{r}_i) \right\rangle. \quad (\text{C.8})$$

Como una aplicación, consideremos una partícula en campo central $V(r) = kr^n$. Entonces, el teorema del virial para esta fuerza conservativa establece que

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle r \frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle = \frac{n}{2} \langle V \rangle. \quad (\text{C.9})$$

Para el potencial de Kepler, con $n = -1$, el teorema del virial, Ec. (C.9), da

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle. \quad (\text{C.10})$$

El promedio de la energía total se puede expresar como

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \text{constante} = E \quad (\text{C.11})$$

$$E = -\langle T \rangle < 0, \quad (\text{C.12})$$

puesto que $\langle T \rangle$ siempre es una cantidad positiva. El hecho de que la energía total sea negativa es compatible con un movimiento finito de la partícula en el potencial de Kepler (Capítulo 3).

El potencial de un oscilador armónico corresponde a $n = 2$. En este caso, la Ec. (C.9) resulta en

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle, \quad (\text{C.13})$$

y la energía total es positiva, como se espera,

$$E = \langle T \rangle + \langle V \rangle = 2\langle T \rangle > 0. \quad (\text{C.14})$$

Apéndice D

Bibliografía

1. H. Iro, *A modern approach to Classical Mechanics*, World Scientific (2002).
2. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd. Edition, Pergamon Press (1976).
3. H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd. edition, Addison-Wesley (2002).
4. J. José and E. J. Saletan, *Classical Mechanics: a contemporary approach*, Cambridge University Press (1998).
5. T. Tél and M. Gruiz, *Chaotic Dynamics: an introduction based on Classical Mechanics*, Cambridge University Press (2006).
6. F. Scheck, *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, 5th. edition, Springer (2010).
7. J. L. McCauley, *Classical Mechanics: transformations, flows, integrable and chaotic dynamics*, Cambridge University Press (1997).
8. J. Michael Finn, *Classical Mechanics*, Infinity Science Press LLC (2008).
9. T. W. B. Kibble and F. H. Berkshire, *Classical Mechanics*, Imperial College Press (2004).
10. G. J. Sussman and J. Wisdom, *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*, MIT Press (2001).
11. A. J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd. Edition, Springer-Verlag (1992).
12. D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics*, Pergamon Press (1971).
13. G. L. Kotkin and V. G. Serbo, *Collection of problems in Classical Mechanics*, Pergamon Press (1971).
14. G. L. Baker and J. A. Blackburn, *The pendulum: a case study in Physics*, Oxford University Press (2005).

Explicit Forms of Vector Operations

Let $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ be orthogonal unit vectors associated with the coordinate directions specified in the headings on the left, and A_1, A_2, A_3 be the corresponding components of \mathbf{A} . Then

$$\begin{aligned}\text{Cartesian } (x_1, x_2, x_3 = x, y, z) \\ \nabla\psi &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \\ \nabla^2\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cylindrical } (\rho, \phi, z) \\ \nabla\psi &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho} \right) + \mathbf{e}_3 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi} \right) \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Spherical } (r, \theta, \phi) \\ \nabla\psi &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_2) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_3}{\partial\phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\phi} \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta} \right] \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\ &\quad \left[\text{Note that } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi). \right]\end{aligned}$$