

Paréntesis de Poisson

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



11 de noviembre de 2024

- Definición
- Propiedades
- Dos ejemplos
- Paréntesis de Poisson y Transformaciones Canónicas

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Si f no depende explícitamente del tiempo (cantidad conservada), tenemos $\{f, \mathcal{H}\} = 0$

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$.
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Si f no depende explícitamente del tiempo (cantidad conservada), tenemos $\{f, \mathcal{H}\} = 0$.
- Para $f(q_i, p_i, t)$ y $g(q_i, p_i, t)$ podemos definir el paréntesis de Poisson de f y g como $\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$.

- El paréntesis de Poisson puede ser considerado como una operación entre dos funciones definidas en un espacio algebraico que asigna otra función en ese espacio.

- El paréntesis de Poisson puede ser considerado como una operación entre dos funciones definidas en un espacio algebraico que asigna otra función en ese espacio.
- El paréntesis de Poisson, como operación algebraica, posee las siguientes propiedades (características de lo que se denomina álgebra de Lie):
 - $\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f, f\} = 0$ (antisimetría).
 - $\{f, c\} = 0$, si $c = \text{cte}$.
 - $\{af_1 + bf_2, g\} = a\{f_1, g\} + b\{f_2, g\}$, $a, b = \text{ctes}$, un operador lineal.
 - $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$, (no asociativo).
 - $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ la identidad de Jacobi.

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = - \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = - \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k}}^0 \right) = \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k}}^0 - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = - \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = - \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancel{\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k}}^0 \right) = \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\cancel{\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k}}^0 - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = - \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = - \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = - \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = - \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$
- En Mecánica Cuántica, la operación $[A, B] = AB - BA$ se denomina el conmutador de los operadores u observables A y B .

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = - \sum_{k=1}^s \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = - \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$
- En Mecánica Cuántica, la operación $[A, B] = AB - BA$ se denomina el conmutador de los operadores u observables A y B .
- La estructura algebraica de la Mecánica Clásica, expresada en las propiedades de los paréntesis de Poisson, se preserva en la Mecánica Cuántica. En particular, $\{q_i, p_j\} = i\hbar\delta_{ij}$, donde \hbar es la constante de Planck (dividida por 2π).

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
 - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$
 - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
 - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
 - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

- $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$
 - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
 - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
 - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de \mathbf{p} y \mathbf{L} :

$$\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$$

$$\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$$

$$\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i} \frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i} \frac{\partial L_y}{\partial q_i} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} =$$

$$\left(\frac{\partial L_x}{\partial x} \frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x} \frac{\partial L_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y} \frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y} \frac{\partial L_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z} \frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z} \frac{\partial L_y}{\partial z} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$$

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

- $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$
- $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
- $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
- luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de \mathbf{p} y \mathbf{L} :

$$\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$$

$$\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$$

$$\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i} \frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i} \frac{\partial L_y}{\partial q_i} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} =$$

$$\left(\frac{\partial L_x}{\partial x} \frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x} \frac{\partial L_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y} \frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y} \frac{\partial L_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z} \frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z} \frac{\partial L_y}{\partial z} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$$

- En general, $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$. En Mecánica Cuántica,

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

