Leyes de Kepler

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

10 de septiembre de 2024

Agenda

1. Las Leyes de Kepler

2. Segunda Ley de Kepler

3. Tercera Ley de Kepler

4. Estabilidad de órbitas circulares

- **Primera Ley**: los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, el cual se encuentra en uno de los focos de la elipse. **Forma funcional del potencial gravitacional** $V(r) = -\frac{k}{r}$.

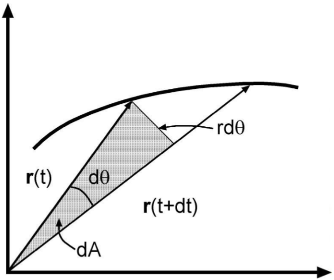
Las Leyes de Kepler

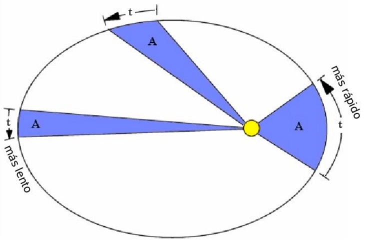
- **Primera Ley**: los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, el cual se encuentra en uno de los focos de la elipse. **Forma funcional del potencial gravitacional** $V(r) = -\frac{k}{r}$.
- **Segunda Ley**: el área barrida por unidad tiempo por el radio vector que va desde el Sol al planeta es constante: $\dot{A} = \text{cte}$. **Existencia de un potencial central** $V(r)$ **y de la conservación de L**.

- **Primera Ley**: los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol, el cual se encuentra en uno de los focos de la elipse. **Forma funcional del potencial gravitacional** $V(r) = -\frac{k}{r}$.
- **Segunda Ley**: el área barrida por unidad tiempo por el radio vector que va desde el Sol al planeta es constante: $\dot{A} = \text{cte}$. **Existencia de un potencial central** $V(r)$ **y de la conservación de L**.
- **Tercera Ley**: el cuadrado del período del movimiento es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita, para todos los planetas: $T_p^2 \propto a^3$. **Forma funcional del potencial gravitacional** $V(r) = -\frac{k}{r}$ **y conservación de L** .

2da Ley: Velocidad aerolar constante

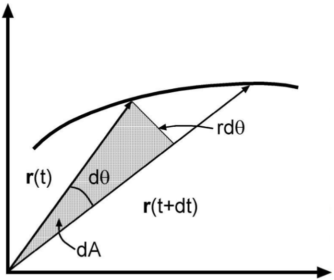
- Un potencial central $V(r)$ implica la conservación del momento angular $L = \mu r^2 \dot{\theta} =$ constante

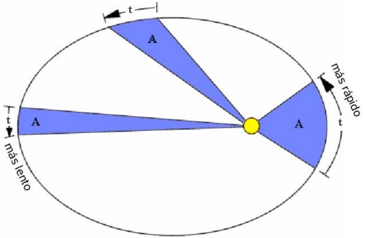




Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Un potencial central $V(r)$ implica la conservación del momento angular $L = \mu r^2 \dot{\theta} =$ constante

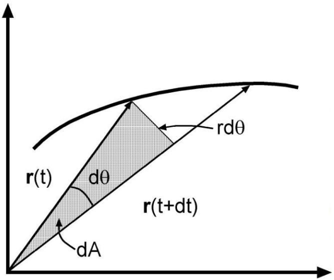


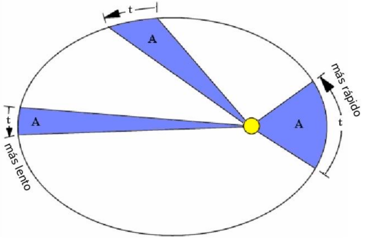


- El diferencial de área barrida por el radio vector **r** en un tiempo infinitesimal dt es $dA = \frac{1}{2}(rd\theta)r = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, entonces $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ es el área barrida por unidad de tiempo

2da Ley: Velocidad aerolar constante

- Un potencial central $V(r)$ implica la conservación del momento angular $L = \mu r^2 \dot{\theta} =$ constante





- El diferencial de área barrida por el radio vector **r** en un tiempo infinitesimal dt es $dA = \frac{1}{2}(rd\theta)r = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, entonces $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ es el área barrida por unidad de tiempo
- Claramente $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right) = \frac{L}{2\mu} =$ const

- Si la órbita es finita, $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$, el área total A encerrada por la órbita barrida por el radio $\mathbf{r}$ en un tiempo igual al período del movimiento T_p, es $A = \frac{l}{2\mu} \int_0^{T_p} dt = \frac{l}{2\mu} T_p$

3ra Ley: $T_p^2 \propto a^3$

- Si la órbita es finita, $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$, el área total A encerrada por la órbita barrida por el radio $\mathbf{r}$ en un tiempo igual al período del movimiento T_p, es $A = \frac{l}{2\mu}\int_0^{T_p} dt = \frac{l}{2\mu} T_p$
- Si la órbita es una elipse en el potencial $V(r) = -k/r$, el área encerrada elipse $A = \pi ab$, donde a, semieje mayor, y b semieje menor

3ra Ley: $T_p^2 \propto a^3$

- Si la órbita es finita, $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$, el área total A encerrada por la órbita barrida por el radio $\mathbf{r}$ en un tiempo igual al período del movimiento T_p, es $A = \frac{l}{2\mu}\int_0^{T_p} dt = \frac{l}{2\mu} T_p$
- Si la órbita es una elipse en el potencial $V(r) = -k/r$, el área encerrada elipse $A = \pi ab$, donde a, semieje mayor, y b semieje menor
- Tercera Ley de Kepler en su forma exacta es $T_p = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}$

3ra Ley: $T_p^2 \propto a^3$

- Si la órbita es finita, $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$, el área total A encerrada por la órbita barrida por el radio $\mathbf{r}$ en un tiempo igual al período del movimiento T_p, es $A = \frac{l}{2\mu} \int_0^{T_p} dt = \frac{l}{2\mu} T_p$
- Si la órbita es una elipse en el potencial $V(r) = -k/r$, el área encerrada elipse $A = \pi ab$, donde a, semieje mayor, y b semieje menor
- Tercera Ley de Kepler en su forma exacta es $T_p = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}$
- M_S es la masa del Sol en el foco, y m del planeta en una órbita elíptica. Entonces $m/M_S \ll 1$ y despreciando términos de orden cuadrático en m/M_S, la masa reducida correspondiente al sistema Sol-planeta se puede expresar como
  $\mu = \frac{mM_S}{M_S+m} = m\left(1 + \frac{m}{M_S}\right)^{-1} = m\left(1 - \frac{m}{M_S} + \cdots\right) \approx m$

3ra Ley: $T_p^2 \propto a^3$

- Si la órbita es finita, $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$, el área total A encerrada por la órbita barrida por el radio $\mathbf{r}$ en un tiempo igual al período del movimiento T_p, es $A = \frac{l}{2\mu} \int_0^{T_p} dt = \frac{l}{2\mu} T_p$
- Si la órbita es una elipse en el potencial $V(r) = -k/r$, el área encerrada elipse $A = \pi ab$, donde a, semieje mayor, y b semieje menor
- Tercera Ley de Kepler en su forma exacta es $T_p = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}$
- M_S es la masa del Sol en el foco, y m del planeta en una órbita elíptica. Entonces $m/M_S \ll 1$ y despreciando términos de orden cuadrático en m/M_S, la masa reducida correspondiente al sistema Sol-planeta se puede expresar como
  $\mu = \frac{mM_S}{M_S+m} = m\left(1 + \frac{m}{M_S}\right)^{-1} = m\left(1 - \frac{m}{M_S} + \cdots\right) \approx m$
- Usando $k = GM_S m$ tendremos $T_p^2 \approx \frac{4\pi^2}{GM_S} a^3 \Rightarrow T_p^2 \propto a^3$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f\left(r_0\right) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f\left(r_0\right) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual $-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{3f(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3f(r_0)}{r_0} + f'\left(r_0\right) < 0$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f\left(r_0\right) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual $-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{3f(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3f(r_0)}{r_0} + f'\left(r_0\right) < 0$
- En general para fuerzas de la forma $f(r) = -kr^n (k > 0)$, la condición de estabilidad se cumple para $n > -3$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f(r_0) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual $-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{3f(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0$
- En general para fuerzas de la forma $f(r) = -kr^n (k > 0)$, la condición de estabilidad se cumple para $n > -3$
- La fuerza gravitacional $(n = -2)$ y la fuerza de un resorte $(n = 1)$ producen órbitas circulares estables.