

# Simetrías y Cantidades Conservadas

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



23 de mayo de 2025

- 1 Transformaciones canónicas infinitesimales
- 2 Invariancia bajo transformaciones infinitesimales
- 3 Simetrías y cantidades conservadas
- 4 Ejemplo:  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- 5 Transformación como evolución
- 6 Transformaciones y Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas
- 7 Recapitulando
- 8 Para la discusión

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$  y  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$ , donde  $f_i(q_j, p_j)$  y  $g_i(q_j, p_j)$  son funciones dadas y  $\epsilon \lll 1$ .

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$  y  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$ , donde  $f_i(q_j, p_j)$  y  $g_i(q_j, p_j)$  son funciones dadas y  $\epsilon \lll 1$ .
- Podemos considerar que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$  y  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$ , donde  $f_i(q_j, p_j)$  y  $g_i(q_j, p_j)$  son funciones dadas y  $\epsilon \lll 1$ .
- Podemos considerar que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^s q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}(q_i, P_i)$ , con  $\mathcal{G}(q_i, P_i)$  una función a determinar.

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$  y  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$ , donde  $f_i(q_j, p_j)$  y  $g_i(q_j, p_j)$  son funciones dadas y  $\epsilon \lll 1$ .
- Podemos considerar que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^s q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}(q_i, P_i)$ , con  $\mathcal{G}(q_i, P_i)$  una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$  y  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$ , donde  $f_i(q_j, p_j)$  y  $g_i(q_j, p_j)$  son funciones dadas y  $\epsilon \lll 1$ .
- Podemos considerar que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^s q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}(q_i, P_i)$ , con  $\mathcal{G}(q_i, P_i)$  una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i)$  es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \quad \text{y} \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$$

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$  y  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$ , donde  $f_i(q_j, p_j)$  y  $g_i(q_j, p_j)$  son funciones dadas y  $\epsilon \lll 1$ .
- Podemos considerar que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^s q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}(q_i, P_i)$ , con  $\mathcal{G}(q_i, P_i)$  una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i)$  es  $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$  y  $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces  $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$  y  $g_i(q_j, p_j) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$



- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$  y  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$ , donde  $f_i(q_j, p_j)$  y  $g_i(q_j, p_j)$  son funciones dadas y  $\epsilon \lll 1$ .
- Podemos considerar que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^s q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}(q_i, P_i)$ , con  $\mathcal{G}(q_i, P_i)$  una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i)$  es  $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$  y  $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces  $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$  y  $g_i(q_j, p_j) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$
- Si existe  $\mathcal{G}(q_i, P_i)$ , entonces la transformación infinitesimal es canónica.

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \right)$  y hasta primer orden en  $\epsilon$ ,  
 $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$  y hasta primer orden en  $\epsilon$ ,  
 $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función  $\mathcal{G}$ .

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$  y hasta primer orden en  $\epsilon$ ,  
 $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función  $\mathcal{G}$ .
- El cambio en la función  $K(q_i, p_i)$  definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es  
$$\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$$

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \right)$  y hasta primer orden en  $\epsilon$ ,  
 $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función  $\mathcal{G}$ .
- El cambio en la función  $K(q_i, p_i)$  definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es  
$$\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$$
- Desarrollando por Taylor  $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \right)$  y hasta primer orden en  $\epsilon$ ,  
 $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función  $\mathcal{G}$ .
- El cambio en la función  $K(q_i, p_i)$  definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es  
$$\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$$
- Desarrollando por Taylor  $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo  $f_i$  y  $g_i$ ,  $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \right)$  y hasta primer orden en  $\epsilon$ ,  
 $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función  $\mathcal{G}$ .
- El cambio en la función  $K(q_i, p_i)$  definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es  
$$\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$$
- Desarrollando por Taylor  $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo  $f_i$  y  $g_i$ ,  $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$
- Si una función  $K(q_i, p_i)$  en el espacio de fase es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, entonces  $\delta K = 0$  y  $\{K, \mathcal{G}\} = 0$ .

- Si  $K = \mathcal{H}$  entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es  $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$



- Si  $K = \mathcal{H}$  entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es  $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos  $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$

- Si  $K = \mathcal{H}$  entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es  $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos  $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}}^0 = 0 \Rightarrow \mathcal{G}(q_i, p_i) = \text{cte.}$$

- Si  $K = \mathcal{H}$  entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es  $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos  $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$

- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \overset{0}{=} 0 \Rightarrow \mathcal{G}(q_i, p_i) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.

- Si  $K = \mathcal{H}$  entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es  $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos  $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$

- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}}^0 = 0 \Rightarrow \mathcal{G}(q_i, p_i) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

- Si  $K = \mathcal{H}$  entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es  $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos  $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$

- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancel{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}}^0 = 0 \Rightarrow \mathcal{G}(q_i, p_i) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.
- La relación entre invariancia y constantes de movimiento se expresa más simple en la formulación hamiltoniana.

Ejemplo:  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

Ejemplo:  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde  $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$ , y  $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$  son constantes del movimiento.

## Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde  $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$ , y  $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$  son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos

$$[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0, \text{ del mismo modo}$$

$$[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0. \text{ **Son constantes de movimiento**}$$



## Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde  $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$ , y  $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$  son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos

$$[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0, \text{ del mismo modo}$$

$$[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0. \text{ **Son constantes de movimiento**}$$

- Por simetría podemos proponer  $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$  y al evaluar

$$[f_3, H] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_3}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0, \text{ **también es constante**}$$

## Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde  $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$ , y  $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$  son constantes del movimiento.

- Para comprobar que son constantes tenemos

$$[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0, \text{ del mismo modo}$$

$$[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0. \text{ **Son constantes de movimiento**}$$

- Por simetría podemos proponer  $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$  y al evaluar

$$[f_3, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_3}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_3, \mathcal{H}] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_2 = 0, \text{ **también es constante**}$$

- Para encontrar  $f_4$ , se pueden usar las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t} \text{ con } A \text{ una constante de integración}$$

## Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde  $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$ , y  $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$  son constantes del movimiento.

- Para comprobar que son constantes tenemos

$$[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0, \text{ del mismo modo}$$

$$[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0. \text{ **Son constantes de movimiento**}$$

- Por simetría podemos proponer  $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$  y al evaluar

$$[f_3, H] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_3}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0, \text{ **también es constante**}$$

- Para encontrar  $f_4$ , se pueden usar las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t} \text{ con } A \text{ una constante de integración}$$

- Por lo cual  $f_4 = p_1 e^t$  es una cantidad conservada

## Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano  $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde  $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$ , y  $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$  son constantes del movimiento.

- Para comprobar que son constantes tenemos

$$[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0, \text{ del mismo modo}$$

$$[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0. \text{ **Son constantes de movimiento**}$$

- Por simetría podemos proponer  $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$  y al evaluar

$$[f_3, H] = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f_3}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_3}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

$$[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0, \text{ **también es constante**}$$

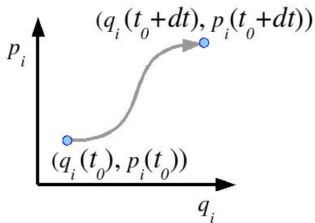
- Para encontrar  $f_4$ , se pueden usar las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t} \text{ con } A \text{ una constante de integración}$$

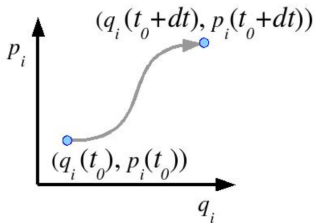
- Por lo cual  $f_4 = p_1 e^t$  es una cantidad conservada

- También  $f_5 = p_2 e^t$  es una cantidad conservada pero  $f_2 = f_4/f_5$

- $$(q_i(t_0), p_i(t_0)) \rightarrow (q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$$



- $$(q_i(t_0), p_i(t_0)) \rightarrow (q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$$



- $$P_j \equiv p_j(t_0 + dt) = p_j(t_0) + \dot{p}_j dt + \cdots = p_j + \dot{p}_j dt + \cdots \text{ y}$$

$$Q_j \equiv q_j(t_0 + dt) = q_j(t_0) + \dot{q}_j dt + \cdots = q_j + \dot{q}_j dt + \cdots$$

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left[ \delta_{ik} \delta_{jk} + \left( \delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left[ \delta_{ik} \delta_{jk} + \left( \delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe

$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots$$

$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots$$



- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left[ \delta_{ik} \delta_{jk} + \left( \delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$
- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe
$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots$$
$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots$$
- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal  $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \rightarrow \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^s \left[ \delta_{ik} \delta_{jk} + \left( \delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$
- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe
$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots$$
$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(q_i(t_0), p_i(t_0)) dt + \dots$$
- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal  $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \rightarrow \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$
- La evolución temporal de un sistema en su espacio de fase es una transformación canónica inducida por el Hamiltoniano.

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_k$  en el Hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ .

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_k$  en el Hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ .
- Si  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$ , entonces, la ecuación de Hamilton para el momento  $P_j$  es  $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{cte.}$  Es decir, **momento conservado**.

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_k$  en el Hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ .
- Si  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$ , entonces, la ecuación de Hamilton para el momento  $P_j$  es  $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{cte.}$  Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_k$  en el Hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ .
- Si  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$ , entonces, la ecuación de Hamilton para el momento  $P_j$  es  $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{cte.}$  Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
- Encontrar la transformación canónica  $\{p, q\} \rightarrow \{P, Q\}$  con  $Q$  cíclica en  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ .

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_k$  en el Hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ .
- Si  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$ , entonces, la ecuación de Hamilton para el momento  $P_j$  es  $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{cte.}$  Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
- Encontrar la transformación canónica  $\{p, q\} \rightarrow \{P, Q\}$  con  $Q$  cíclica en  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ .
- Sea una transformación canónica  $p = f(P) \cos Q$  y  $q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q$ , entonces debemos determinar  $f(P)$

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_k$  en el Hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ .
- Si  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$ , entonces, la ecuación de Hamilton para el momento  $P_j$  es  $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{cte.}$  Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
- Encontrar la transformación canónica  $\{p, q\} \rightarrow \{P, Q\}$  con  $Q$  cíclica en  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ .
- Sea una transformación canónica  $p = f(P) \cos Q$  y  $q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q$ , entonces debemos determinar  $f(P)$
- $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \frac{1}{2m} [(p(Q, P))^2 + m^2\omega^2 (q(Q, P))^2] = \frac{1}{2m}[f(P)]^2$



- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_k$  en el Hamiltoniano  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ .
- Si  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$ , entonces, la ecuación de Hamilton para el momento  $P_j$  es  $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{cte.}$  Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
- Encontrar la transformación canónica  $\{p, q\} \rightarrow \{P, Q\}$  con  $Q$  cíclica en  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$ .
- Sea una transformación canónica  $p = f(P) \cos Q$  y  $q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q$ , entonces debemos determinar  $f(P)$
- $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \frac{1}{2m} [(p(Q, P))^2 + m^2\omega^2 (q(Q, P))^2] = \frac{1}{2m}[f(P)]^2$
- La transformación se reescribe como  $p = m\omega q \cot Q \Rightarrow p = p(q, Q) \Rightarrow \mathcal{F}_1(q, Q)$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo  $q$ , obtenemos  $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$ .

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo  $q$ , obtenemos  $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$ .
- Comparando vemos que  $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$  y  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo  $q$ , obtenemos  $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$ .
- Comparando vemos que  $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$  y  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$ , tenemos  $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo  $q$ , obtenemos  $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$ .
- Comparando vemos que  $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$  y  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$ , tenemos  $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E = \text{cte}$ , con  $E$  la energía total.



- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo  $q$ , obtenemos  $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$ .
- Comparando vemos que  $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$  y  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$ , tenemos  $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E = \text{cte}$ , con  $E$  la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para  $Q$  y  $P$  son  
 $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$   
 $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo  $q$ , obtenemos  $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$ .
- Comparando vemos que  $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$  y  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$ , tenemos  $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E = \text{cte}$ , con  $E$  la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para  $Q$  y  $P$  son  
 $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$   
 $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$
- Sustituyendo en  $q(P, Q)$  y  $p(P, Q)$  obtenemos  
 $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$  y  $p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \varphi)$

- Para  $\mathcal{F}_1$  tenemos  $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$  y  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$  por lo tanto  $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado  $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow$   
 $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo  $q$ , obtenemos  $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$ .
- Comparando vemos que  $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$  y  $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$ , tenemos  $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos  $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E = \text{cte}$ , con  $E$  la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para  $Q$  y  $P$  son  
 $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$   
 $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$
- Sustituyendo en  $q(P, Q)$  y  $p(P, Q)$  obtenemos  
 $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$  y  $p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \varphi)$
- Donde  $\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}$  es la amplitud y  $\varphi$  es la fase.

## • Transformaciones Canónicas Infinitesimales:

- Forma general:  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$ ,  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
- Función generadora:  $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
- Relaciones:  $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}$ ,  $g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$

## • Transformaciones Canónicas Infinitesimales:

- Forma general:  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$ ,  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
- Función generadora:  $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
- Relaciones:  $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}$ ,  $g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$

## • Invariancia e Invariantes:

- El cambio de una función  $K$  del espacio de fase:  $\delta K = \epsilon \{K, G\}$
- Si  $K$  es invariante bajo la transformación:  $\{K, G\} = 0$

## • Transformaciones Canónicas Infinitesimales:

- Forma general:  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$ ,  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
- Función generadora:  $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
- Relaciones:  $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}$ ,  $g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$

## • Invariancia e Invariantes:

- El cambio de una función  $K$  del espacio de fase:  $\delta K = \epsilon \{K, G\}$
- Si  $K$  es invariante bajo la transformación:  $\{K, G\} = 0$

## • Simetrías y Cantidades Conservadas

- Si  $\mathcal{H}$  es invariante bajo la transformación:  $\{\mathcal{H}, G\} = 0$
- Entonces:  $\frac{dG}{dt} = \{G, \mathcal{H}\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \Rightarrow G$  es constante.
- Esto es análogo al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

### ● Transformaciones Canónicas Infinitesimales:

- Forma general:  $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$ ,  $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
- Función generadora:  $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
- Relaciones:  $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}$ ,  $g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$

### ● Invariancia e Invariantes:

- El cambio de una función  $K$  del espacio de fase:  $\delta K = \epsilon \{K, G\}$
- Si  $K$  es invariante bajo la transformación:  $\{K, G\} = 0$

### ● Simetrías y Cantidades Conservadas

- Si  $\mathcal{H}$  es invariante bajo la transformación:  $\{\mathcal{H}, G\} = 0$
- Entonces:  $\frac{dG}{dt} = \{G, \mathcal{H}\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \Rightarrow G$  es constante.
- Esto es análogo al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

### ● Ejemplo de Hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Constantes del movimiento:  $f_1 = p_1(q_1 + a p_1)$ ,  $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$
- Se cumple:  $\{f_1, \mathcal{H}\} = 0$ ,  $\{f_2, \mathcal{H}\} = 0$
- Por simetría:  $f_3 = p_2(q_2 + b p_2)$  también es conservada.
- Usando ecuaciones de movimiento:  $f_4 = p_1 e^t$ ,  $f_5 = p_2 e^t$

Vuelve el oscilador armónico clásico anisótropo, pero ahora el sistema responde a un Hamiltoniano  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2$

- 1 Determine la trayectoria del sistema en el espacio de fase  $(x, y, p_x, p_y)$ . Suponga que conoce las condiciones iniciales  $x = x(t = 0)$ ,  $y = y(t = 0)$ ,  $p_x = p_x(t = 0)$  y  $p_y = p_y(t = 0)$
- 2 Dada las siguientes cantidades comprobar cuáles corresponde a constantes de movimiento y, en el caso que no lo sean, mostrar cuales condiciones tendrían que cumplir el sistema para que lo fueran.
  - 1 las energías  $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}$  y  $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2 y^2}{2}$ .
  - 2 la componente z de cantidad de movimiento angular  $L_z = yp_x - xp_y$
  - 3 Cantidad conservada de cizalladura  $K = \omega_x x \omega_y y + \frac{p_x p_y}{m^2}$ .

Con  $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$ , donde  $i = x, y$