

Transformaciones Canónicas

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



6 de noviembre de 2024

- 1 Transformaciones Puntuales
- 2 Transformaciones Canónicas
- 3 Transformación Canónica y Principio de Mínima Acción
- 4 Función Generadora
- 5 Ejemplo de Función Generadora
- 6 Sección

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformación puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i, \quad P_i = q_i$

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformación puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i, \quad P_i = q_i$
- Entonces $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) = - \sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \delta_{ik} = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$
 $\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{Q}_i = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) = - \sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \delta_{ik} = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}$ Claramente no se cumplen

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{array} \right| \rightarrow \text{Transformación canónica} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t) \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} \end{array} \right.$$

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{aligned} \right| \rightarrow \text{Transformación canónica} \rightarrow \left| \begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t) \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} \end{aligned} \right.$$

- Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ no depende explícitamente de alguna coordenada Q_j o momento P_j

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos
$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$$
$$\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$$

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos
$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$$
$$\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total
$$\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos
$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$$
$$\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total
$$\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$
- Con lo cual
$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$$

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos
$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$$
$$\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total
$$\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$$
- Con lo cual
$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$$
- La función \mathcal{F} se llama función generadora de la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$.

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora \mathcal{F} es una propiedad característica de la función \mathcal{F} y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora \mathcal{F} es una propiedad característica de la función \mathcal{F} y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora \mathcal{F} es una propiedad característica de la función \mathcal{F} y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora \mathcal{F} es una propiedad característica de la función \mathcal{F} y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.
- La relación entre el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ y el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ resultante de la transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{Q_i, P_i, t\}$ generada por una \mathcal{F} siempre es $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow$
 $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^2 P_i \dot{Q}_i + (H' - H) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + (H' - H)$

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow$
 $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^2 P_i \dot{Q}_i + (H' - H) \Rightarrow$
 $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + (H' - H)$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} (p_2 q_2) - q_2 \dot{p}_2$;
 $P_1 \dot{Q}_1 = \frac{d}{dt} (P_1 Q_1) - Q_1 \dot{P}_1$; $P_2 \dot{Q}_2 = \frac{d}{dt} (P_2 Q_2) - Q_2 \dot{P}_2$

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^2 P_i \dot{Q}_i + (H' - H) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + (H' - H)$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} (p_2 q_2) - q_2 \dot{p}_2$;
 $P_1 \dot{Q}_1 = \frac{d}{dt} (P_1 Q_1) - Q_1 \dot{P}_1$; $P_2 \dot{Q}_2 = \frac{d}{dt} (P_2 Q_2) - Q_2 \dot{P}_2$
- Con lo cual
$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \frac{d}{dt} (p_2 q_2 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2) + (H' - H)$$

- Es decir

$$\frac{d}{dt}(F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (H' - H)$$

- Es decir

$$\frac{d}{dt} (F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (H' - H)$$

- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $(q_i, p_i, Q_i, P_i), i = 1, 2,$

- Es decir

$$\frac{d}{dt} (F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (H' - H)$$

- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $(q_i, p_i, Q_i, P_i), i = 1, 2$,
- Comparando con $\frac{dG}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$

- Es decir

$$\frac{d}{dt} (F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (H' - H)$$

- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $(q_i, p_i, Q_i, P_i), i = 1, 2$,
- Comparando con $\frac{dG}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $G = F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2; \quad p_1 = P_1 + 2p_2;$
 $Q_1 = q_1; \quad -q_2 = 2q_1 + P_2; \quad Q_2 = p_2$

- Es decir

$$\frac{d}{dt} (F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (H' - H)$$

- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $(q_i, p_i, Q_i, P_i), i = 1, 2$,
- Comparando con $\frac{dG}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $G = F + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2$; $p_1 = P_1 + 2p_2$;
 $Q_1 = q_1$; $-q_2 = 2q_1 + P_2$; $Q_2 = p_2$
- La transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ generada por G es
 $P_1 = p_1 - 2p_2$ $Q_1 = q_1$; $P_2 = -2q_1 - q_2$ $Q_2 = p_2$.