

Principio de Mínima Acción

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



15 de agosto de 2024

- 1 Principio de Mínima Acción
- 2 Principios de Mínima Acción y Extremos Variacionales
- 3 Ecuaciones de Lagrange
- 4 ¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange?
- 5 Propiedades de las Ecuaciones de Lagrange
 - Lagrangeanos equivalentes
 - Invariancia respecto a transformaciones de coordenadas generalizadas

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \dots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \dots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.
- El estado del sistema está descrito por $t_1 : \{q_j(t_1)\}, \{\dot{q}_j(t_1)\}$ y $t_2 : \{q_j(t_2)\}, \{\dot{q}_j(t_2)\}$

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \dots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.
- El estado del sistema está descrito por $t_1 : \{q_j(t_1)\}, \{\dot{q}_j(t_1)\}$ y $t_2 : \{q_j(t_2)\}, \{\dot{q}_j(t_2)\}$
- El Principio de mínima acción, implica que la evolución del sistema entre el estado en t_1 al t_2 es tal que el valor de la integral definida $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt$, denominada la acción del sistema, sea mínima; es decir, $\delta S = 0$ (S es un extremo).

Se pueden establecer una analogía entre el Principio de mínima acción y un principio variacional para funciones de varias variables:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \leftrightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_i, y'_i, x) dx$$

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \leftrightarrow f(y_i, y'_i, x)$$

$$t \leftrightarrow x$$

$$q_j \leftrightarrow y_i$$

$$\dot{q}_j \leftrightarrow y'_i$$

$$\delta q_j(t) \leftrightarrow \eta_i(x)$$

$$\delta \dot{q}_j(t) \leftrightarrow \eta'_i(x)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0.$$

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.
- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y \dot{q}_j es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt$$

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.

- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y \dot{q}_j es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt$$

- Podemos expresar el segundo término como

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.

- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y \dot{q}_j es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt$$

- Podemos expresar el segundo término como

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

- Finalmente $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0$

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2$

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2$
- La energía potencial es $V = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2$
- La energía potencial es $V = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$
- El Lagrangiano está dado por
$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2 - \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$

- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha) \dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\alpha}$ es $\frac{dp_{j\alpha}}{dt} = F_{j\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α .

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\alpha}$ es $\frac{dp_{j\alpha}}{dt} = F_{j\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α .
- Las ecuaciones de Lagrange no constituyen una nueva teoría del movimiento

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial L}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\alpha}$ es $\frac{dp_{j\alpha}}{dt} = F_{j\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α .
- Las ecuaciones de Lagrange no constituyen una nueva teoría del movimiento
- Los resultados de la formulación Lagrangiana o de la formulación Newtoniana del movimiento de un sistema dado son los mismos, pero Las ecuaciones de Lagrange son más generales que la segunda Ley de Newton y son aplicables a cualquier conjunto de coordenadas generalizadas de un sistema.

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**
- La formulación Newtoniana, requiere que las ligaduras sean descritas como “fuerzas” actuando sobre las partículas. La formulación Lagrangiana incluye las ligaduras dentro de las coordenadas generalizadas.

¿Qué traen las Ecuaciones de Lagrange? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**
- La formulación Newtoniana, requiere que las ligaduras sean descritas como “fuerzas” actuando sobre las partículas. La formulación Lagrangiana incluye las ligaduras dentro de las coordenadas generalizadas.
- La formulación Lagrangiana permite descubrir simetrías fundamentales de los sistemas físicos

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{df(q_j, t)}{dt}$

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{df(q_j, t)}{dt}$
- La nueva acción es $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$
$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt + f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1)$$

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{df(q_j, t)}{dt}$
- La nueva acción es $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$
 $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt + f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1)$
- Luego, $\delta S' = \delta S + \underbrace{\delta f(q_j(t_2), t_2)}_{=0} - \underbrace{\delta f(q_j(t_1), t_1)}_{=0} \Rightarrow \delta S' = \delta S$
- Por lo tanto $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_{j\alpha}} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las $q_i, s \quad i = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $s \quad i = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $s = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas
 $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, t)$,
 $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, también satisface $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $s = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas
 $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, t),$
 $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, también satisface $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$
- Entonces calculamos $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $i = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas
 $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, t)$,
 $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, también satisface $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$
- Entonces calculamos $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}$
- El “nuevo” Lagrangiano será
 $\mathcal{L}(Q_1, \dots, \dot{Q}_1, \dots, t) = \mathcal{L} \left[q_i(Q_1, \dots, t), \dot{q}_i(Q_1, \dots, \dot{Q}_1, \dots, t), t \right]$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

- Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)}_{=0} \right] \end{aligned}$$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

- Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)}_{=0} \right] \end{aligned}$$

- Por lo tanto $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$