#### Pequeñas oscilaciones

#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



27 de septiembre de 2024

#### Agenda



- Pequeñas oscilaciones 1D
- Oscilaciones con varios grados de libertad
- Sección
- 4 Ejemplo: Osciladores Acoplados



ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  ${\cal L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{
m ef}(q)$ 



- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$



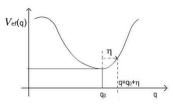
- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- ullet La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{\rm ef}\left(q_0\right)=0\Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0}=0$



- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- ullet La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{\rm ef}\left(q_0\right)=0\Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0}=0$
- Será estable si  $\left. \frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2} \right|_{q_0} > 0$



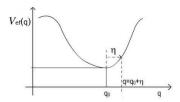
- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- ullet La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{
  m ef}\left(q_0
  ight)=0\Rightarrow \left. rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}\right|_{q_0}=0$
- Será estable si  $\left. \frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2} \right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



3/9



- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{
  m ef}\left(q_0
  ight)=0 \Rightarrow \left. rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q} \right|_{q_0}=0$
- Será estable si  $\left. \frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2} \right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



ullet Desarrollamos por Taylor,  $V_{
m ef}\left(q
ight)$  alrededor de  $q=q_0$ , y tenemos

$$V_{ ext{ef}}(q) = V_{ ext{ef}}\left(q_0 + \eta
ight) = V\left(q_0
ight) + \left. rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q} \right|_{q_0} \eta + \left. rac{1}{2} rac{\partial^2 V_{ ext{ef}}}{\partial q^2} \right|_{q_0} \eta^2 + \cdots,$$



• Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$ 



- Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$
- ullet La ecuación de movimiento será  $c\ddot{\eta}=-rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q}=-\mathcal{K}\left(q-q_{0}
  ight)\equiv-\mathcal{K}\eta$



- Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$
- ullet La ecuación de movimiento será  $c\ddot{\eta}=-rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q}=-K\left(q-q_{0}
  ight)\equiv-K\eta$
- Entonces,  $\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$ , donde  $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial q^2} \Big|_{q_0}$  es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de  $q_0$ .



- Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$
- ullet La ecuación de movimiento será  $c\ddot{\eta}=-rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q}=-K\left(q-q_0
  ight)\equiv -K\eta$
- Entonces,  $\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$ , donde  $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial q^2} \Big|_{q_0}$  es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de  $q_0$ .
- Que tendrá como solución  $\eta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi) \equiv \text{Re}\left[Ae^{i(\omega t + \varphi)}\right] = \text{Re}\left(ae^{i\omega t}\right)$  donde  $a = Ae^{i\varphi}$  es la amplitud compleja

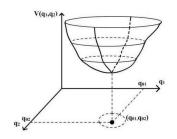
4/9



• Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i : i = 1, ..., s\}$  con energía potencial  $V(q_1, ..., q_s)$ .

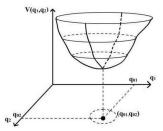


- Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i : i = 1, ..., s\}$  con energía potencial  $V(q_1, ..., q_s)$ .
- La configuración de equilibrio del sistema en  $\{q_{0i}: i=1,\ldots,s\}$ , con  $\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{0i}}=0, \quad i=1,2,\ldots,s$





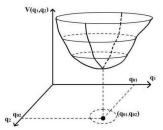
- Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i : i = 1, ..., s\}$  con energía potencial  $V(q_1, ..., q_s)$ .
- La configuración de equilibrio del sistema en  $\{q_{0i}: i=1,\ldots,s\}$ , con  $\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{0i}}=0, \quad i=1,2,\ldots,s$



ullet Perturbando las  $q_i$ , tendremos  $q_i=q_{0i}+\eta_i,$  con  $\eta_i o 0$   $\left(rac{\eta_i}{q_{0i}}\ll 1
ight)$ 



- Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i: i=1,\ldots,s\}$  con energía potencial  $V(q_1,\ldots,q_s)$ .
- La configuración de equilibrio del sistema en  $\{q_{0i}: i=1,\ldots,s\}$ , con  $\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{0i}}=0, \quad i=1,2,\ldots,s$



- ullet Perturbando las  $q_i$ , tendremos  $q_i=q_{0i}+\eta_i,$  con  $\eta_i o 0$   $\left(rac{\eta_i}{q_{0i}}\ll 1
  ight)$
- El valor del potencial  $V(q_1, ..., q_s)$  cerca de la configuración de equilibrio se obtiene de la expansión de Taylor en varias variables de  $V(q_1, ..., q_s)$  alrededor de  $\{q_{0i}\}$ , con  $q_i = q_{0i} + \eta_{ir}$



• Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$ 



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01},...,q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\}=(q_{01},...,q_{0s})$ .



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) = V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}\eta_i\eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{q_{0i}\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \frac{1}{q_{0i}} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{q_{0i}\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es  $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$  donde los coeficientes  $T_{ij} = T_{ji}$  representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \frac{1}{q_{0i}} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{q_{0i}\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es  $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$  donde los coeficientes  $T_{ij}=T_{ji}$  representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos  $T=rac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{q_{0i}\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es  $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$  donde los coeficientes  $T_{ij}=T_{ji}$  representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos  $T=rac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$
- El Lagrangiano del sistema cerca de la configuración de equilibrio es  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j V_{ij} \eta_i \eta_j)$   $i,j = 1,2,\ldots,s$



• La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$ 



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es  $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$  tenemos  $\sum_j \left( -\omega^2 T_{kj} + V_{kj} \right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n \left( V_{mn} \omega^2 T_{mn} \right) a_n = 0$



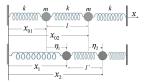
- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es  $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$  tenemos  $\sum_j \left( -\omega^2 T_{kj} + V_{kj} \right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n \left( V_{mn} \omega^2 T_{mn} \right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad s = 1,2 tendremos

$$m = 1 : (V_{11} - \omega^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega^2 T_{12}) a_2 = 0$$
  
 $m = 2 : (V_{21} - \omega^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega^2 T_{22}) a_2 = 0$ 



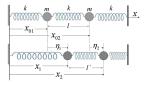
- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es  $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$  tenemos  $\sum_j \left( -\omega^2 T_{kj} + V_{kj} \right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n \left( V_{mn} \omega^2 T_{mn} \right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad s=1,2 tendremos  $m=1: (V_{11}-\omega^2 T_{11}) a_1 + (V_{12}-\omega^2 T_{12}) a_2 = 0$   $m=2: (V_{21}-\omega^2 T_{21}) a_1 + (V_{22}-\omega^2 T_{22}) a_2 = 0$
- En general, existe solución no trivial  $\eta_j(t) \neq 0$  si  $a_j \neq 0, \forall j$ , cuando det  $|V_{ij} \omega^2 T_{ij}| = 0$ . Las frecuencias características  $\omega$  deben ser reales para que las soluciones tengan sentido físico.





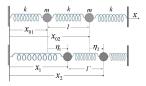


 Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo I.



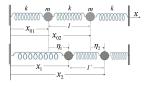
• El sistema tiene dos grados de libertad (s=2). Para pequeños desplazamientos  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , con  $x_i=x_{0i}+\eta_i$ ,





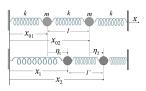
- El sistema tiene dos grados de libertad (s=2). Para pequeños desplazamientos  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , con  $x_i=x_{0i}+\eta_i$ ,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es  $T=\frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$ , con  $T_{11}=m,\quad T_{22}=m,\quad T_{12}=T_{21}=0$





- El sistema tiene dos grados de libertad (s=2). Para pequeños desplazamientos  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , con  $x_i=x_{0i}+\eta_i$ ,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es  $T=\frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$ , con  $T_{11}=m,\quad T_{22}=m,\quad T_{12}=T_{21}=0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es  $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l'-l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + (\eta_2 \eta_1)^2 + \eta_2^2\right]$





- El sistema tiene dos grados de libertad (s=2). Para pequeños desplazamientos  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , con  $x_i=x_{0i}+\eta_i$ ,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es  $T=\frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$ , con  $T_{11}=m,\quad T_{22}=m,\quad T_{12}=T_{21}=0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es  $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l'-l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + (\eta_2 \eta_1)^2 + \eta_2^2\right]$
- Donde  $I' I = (x_2 x_1) (x_{02} x_{01}) = \eta_2 \eta_1$



• Entonces  $V = \frac{1}{2} \left[ 2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$  con  $V_{11} = 2k$ ,  $V_{22} = 2k$ ,  $V_{12} = V_{21} = -k$ .



- Entonces  $V = \frac{1}{2} \left[ 2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 2k\eta_1\eta_2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$  con  $V_{11} = 2k$ ,  $V_{22} = 2k$ ,  $V_{12} = V_{21} = -k$ .
- $\bullet \ \, \text{Por lo tanto} \, \left| \begin{array}{cc} V_{11} \omega^2 \, T_{11} & V_{12} \omega^2 \, T_{12} \\ V_{21} \omega^2 \, T_{21} & V_{22} \omega^2 \, T_{22} \end{array} \right| = 0$



- Entonces  $V = \frac{1}{2} \left[ 2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 2k\eta_1\eta_2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$  con  $V_{11} = 2k$ ,  $V_{22} = 2k$ ,  $V_{12} = V_{21} = -k$ .
- Por lo tanto  $\left| \begin{array}{cc} V_{11} \omega^2 T_{11} & V_{12} \omega^2 T_{12} \\ V_{21} \omega^2 T_{21} & V_{22} \omega^2 T_{22} \end{array} \right| = 0$
- Es decir  $\begin{vmatrix} 2k \omega^2 m & -k \\ -k & 2k \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$



- Entonces  $V = \frac{1}{2} \left[ 2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 2k\eta_1\eta_2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$  con  $V_{11} = 2k$ ,  $V_{22} = 2k$ ,  $V_{12} = V_{21} = -k$ .
- $\bullet \ \, \text{Por lo tanto} \, \left| \begin{array}{cc} V_{11} \omega^2 T_{11} & V_{12} \omega^2 T_{12} \\ V_{21} \omega^2 T_{21} & V_{22} \omega^2 T_{22} \end{array} \right| = 0$
- Es decir  $\begin{vmatrix} 2k \omega^2 m & -k \\ -k & 2k \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es  $\left(2k \omega^2 m\right)^2 k^2 = 0 \Rightarrow 2k \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$



- Entonces  $V = \frac{1}{2} \left[ 2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 2k\eta_1\eta_2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$  con  $V_{11} = 2k$ ,  $V_{22} = 2k$ ,  $V_{12} = V_{21} = -k$ .
- $\bullet \ \, \text{Por lo tanto} \, \left| \begin{array}{cc} V_{11} \omega^2 T_{11} & V_{12} \omega^2 T_{12} \\ V_{21} \omega^2 T_{21} & V_{22} \omega^2 T_{22} \end{array} \right| = 0$
- Es decir  $\begin{vmatrix} 2k \omega^2 m & -k \\ -k & 2k \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es  $(2k \omega^2 m)^2 k^2 = 0 \Rightarrow 2k \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- Finalmente  $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$