

Título presentación

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



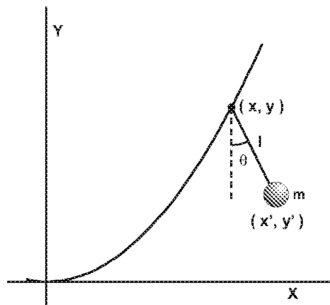
11 de noviembre de 2024

1 Hamiltoniano y Péndulo

- El problema y las coordenadas
- El Lagrangeano y el Hamiltoniano

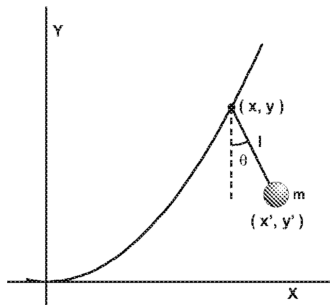
2 $\mathcal{H} = q + te^P$ y la transformación $Q = q + e^P, P = p$

El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y' ,

El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y' ,
- Se tiene las siguientes relaciones:

$$x' = x + l \sin \theta, \quad y' = y - l \cos \theta = ax^2 - l \cos \theta$$

$$\dot{x}' = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}' = \dot{y} + l\dot{\theta} \sin \theta = 2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \right)$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \right)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg (ax^2 - l \cos \theta)$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg(ax^2 - l\cos\theta)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4a^2x^2) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$
$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg(ax^2 - l\cos\theta)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4a^2x^2) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$
$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m} \frac{1}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax\sin\theta}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \frac{1 + 4a^2x^2}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax\sin\theta}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg(ax^2 - l\cos\theta)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4a^2x^2) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$
$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m} \frac{1}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax\sin\theta}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \frac{1 + 4a^2x^2}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax\sin\theta}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$
- Con lo cual $\mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - \mathcal{L}$ se puede expresar
$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} \frac{1}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2ml^2} \frac{1 + 4a^2x^2}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

$$\mathcal{H} = q + te^p \text{ y } Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$

$$\mathcal{H} = q + te^p \text{ y } Q = q + e^p \quad \& \quad P = p \quad 1/2$$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0;$ y finalmente


 Universidad Industrial de Santander
 CONSTRUIR FUTURO

•

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0;$ y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}.$ Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1, \frac{\partial Q}{\partial p} = e^p,$
 $\frac{\partial P}{\partial q} = 0,$ y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1,$ obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1.$


 Universidad Industrial de Santander
 CONSTRUIR FUTURO

•

$$\mathcal{H} = q + te^P \text{ y } Q = q + e^P \quad \& \quad P = p \text{ } 2/2$$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

$$\mathcal{H} = q + te^P \text{ y } Q = q + e^P \quad \& \quad P = p \text{ } 2/2$$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$,
 $F_2(q, P) = qP + \int e^P dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$

$$\mathcal{H} = q + te^P \text{ y } Q = q + e^P \quad \& \quad P = p \text{ 2/2}$$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$,
 $F_2(q, P) = qP + \int e^P dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$
- La función generadora es $F_2(q, P) = qP + e^P$