# Simetrías y Cantidades Conservadas

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

22 de mayo de 2025

# Agenda

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$,
donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma
  $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$,
  donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad

# Transformaciones canónicas infinitesimales



- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma
  $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$,
  donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es
  $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$ y $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$ y $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$ y $g_i\left(q_j, p_j\right) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$ y $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$ y $g_i\left(q_j, p_j\right) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$
- Si existe $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, entonces la transformación infinitesimal es canónica.

- $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i\left(q_j, p_j\right) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$

# Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $\mathcal{G}$.

# Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $\mathcal{G}$.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $\mathcal{G}$.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$, $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $\mathcal{G}$.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo $f_i$ y $g_i$, $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $\mathcal{G}$.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo $f_i$ y $g_i$, $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$
- Si una función $K(q_i, p_i)$ en el espacio de fase es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, entonces $\delta K = 0$ y $\{K, \mathcal{G}\} = 0$.

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$

# Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

# Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

- Si $K=\mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H}=\epsilon\{\mathcal{H},\mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H}=0\Leftrightarrow\{\mathcal{H},\mathcal{G}\}=0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}+\cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}}=0\qquad\Rightarrow\mathcal{G}\left(q_i,P_i\right)=\text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.
- La relación entre invariancia y constantes de movimiento se expresa más simple en la formulación hamiltoniana.

# Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

# Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.

# Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**

# Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$ y al evaluar
  $[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0$, **también es constante**

## Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$ y al evaluar
  $[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0$, **también es constante**
- Para encontrar $f_4$, se pueden usar las ecuaciones de movimiento:
  $\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t}$ con $A$ una constante de integración

# Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

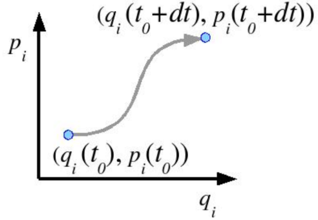
- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
$[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
$[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0$, del mismo modo
$[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$ y al evaluar
$[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
$[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0$, **también es constante**
- Para encontrar $f_4$, se pueden usar las ecuaciones de movimiento:
$\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t}$ con $A$ una constante de integración
- Por lo cual $f_4 = p_1 e^t$ es una cantidad conservada

# Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$ y al evaluar
  $[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0$, **también es constante**
- Para encontrar $f_4$, se pueden usar las ecuaciones de movimiento:
  $\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t}$ con $A$ una constante de integración
- Por lo cual $f_4 = p_1 e^t$ es una cantidad conservada
- También $f_5 = p_2 e^t$ es una cantidad conservada pero $f_2 = f_4 / f_5$

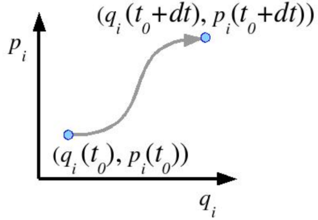
# Transformación como evolución 1/2

- Consideremos la evolución de una condición inicial en el espacio de fase en un intervalo de tiempo infinitesimal $dt$.
  $(q_i(t_0), p_i(t_0)) \rightarrow (q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$



# Transformación como evolución 1/2

- Consideremos la evolución de una condición inicial en el espacio de fase en un intervalo de tiempo infinitesimal $dt$.
  $(q_i(t_0), p_i(t_0)) \rightarrow (q_i(t_0+dt), p_i(t_0+dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$




- Entonces tendremos la transformación
  $P_j \equiv p_j(t_0+dt) = p_j(t_0) + \dot{p}_j dt + \cdots = p_j + \dot{p}_j dt + \cdots$ y
  $Q_j \equiv q_j(t_0+dt) = q_j(t_0) + \dot{q}_j dt + \cdots = q_j + \dot{q}_j dt + \cdots$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[ \delta_{ik}\delta_{jk} + \left( \delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

# Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right) = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}dt\right)\left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k}dt\right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}dt\right)\left(\delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k}dt\right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s}\left[\delta_{ik}\delta_{jk} + \left(\delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k}\right)dt\right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i}\right)dt \equiv \delta_{ij} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j}\right)\delta t = \delta_{ij}$$

- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe

$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\left(q_i(t_0), p_i(t_0)\right)dt + \cdots$$

$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\left(q_i(t_0), p_i(t_0)\right)dt + \cdots$$

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[ \delta_{ik}\delta_{jk} + \left( \delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe

$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$

$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$

- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \to \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$

# Transformación como evolución 1/2

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[ \delta_{ik}\delta_{jk} + \left( \delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$
- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe
$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \to \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$
- La evolución temporal de un sistema en su espacio de fase es una transformación canónica inducida por el Hamiltoniano.

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada $Q_j$ o momento $P_k$ en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada $Q_j$ o momento $P_k$ en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento $P_j$ es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada $Q_j$ o momento $P_k$ en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento $P_j$ es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada $Q_j$ o momento $P_k$ en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento $P_j$ es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p,q\} \to \{P,Q\}$ con $Q$ cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P)$.

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada $Q_j$ o momento $P_k$ en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento $P_j$ es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j = \text{cte}$. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p, q\} \to \{P, Q\}$ con $Q$ cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$.
- Sea una transformación canónica $p = f(P)\cos Q$ y $q = \frac{f(P)}{m\omega}\operatorname{sen} Q$, entonces debemos determinar $f(P)$

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada $Q_j$ o momento $P_k$ en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento $P_j$ es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p, q\} \to \{P, Q\}$ con $Q$ cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$.
- Sea una transformación canónica $p = f(P)\cos Q$ y $q = \frac{f(P)}{m\omega}\,\mathrm{sen}\, Q$, entonces debemos determinar $f(P)$
- $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \frac{1}{2m}\left[(p(Q,P))^2 + m^2\omega^2 (q(Q,P))^2\right] = \frac{1}{2m}[f(P)]^2$

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace cíclica alguna coordenada $Q_j$ o momento $P_k$ en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento $P_j$ es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j = \text{cte}$. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p, q\} \to \{P, Q\}$ con $Q$ cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$.
- Sea una transformación canónica $p = f(P)\cos Q$ y $q = \frac{f(P)}{m\omega}\operatorname{sen} Q$, entonces debemos determinar $f(P)$
- $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \frac{1}{2m}\left[(p(Q,P))^2 + m^2\omega^2(q(Q,P))^2\right] = \frac{1}{2m}[f(P)]^2$
- La transformación se reescribe como $p = m\omega q \cot Q \quad \Rightarrow p = p(q,Q) \Rightarrow \mathcal{F}_1(q,Q)$

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q) \quad$ y $\quad P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo $q$, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo $q$, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo $q$, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo $q$, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con $E$ la energía total.

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q,Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q,Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q,Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q,P)$
- Sustituyendo $q$, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q,P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q,p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q,P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con $E$ la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para $Q$ y $P$ son

  $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \mathrm{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$

  $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$

# Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo $q$, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con $E$ la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para $Q$ y $P$ son

  $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \mathrm{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$

  $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$
- Sustituyendo en $q(P, Q)$ y $p(P, Q)$ obtenemos

  $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$ y $p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \varphi)$

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q,Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q,Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q,Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q,P)$
- Sustituyendo $q$, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q,P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q,p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q,P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con $E$ la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para $Q$ y $P$ son
  $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \mathrm{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$
  $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$
- Sustituyendo en $q(P,Q)$ y $p(P,Q)$ obtenemos
  $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$ y $p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \varphi)$
- Donde $\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}$ es la amplitud y $\varphi$ es la fase.

# Recapitulando

- **Transformaciones Canónicas Infinitesimales**:
  - Forma general: $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$, $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
  - Función generadora: $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
  - Relaciones: $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$

# Recapitulando

- **Transformaciones Canónicas Infinitesimales**:
  - Forma general: $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$, $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
  - Función generadora: $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
  - Relaciones: $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$
- **Invariancia e Invariantes**:
  - El cambio de una función $K$ del espacio de fase: $\delta K = \epsilon\{K, G\}$
  - Si $K$ es invariante bajo la transformación: $\{K, G\} = 0$

# Recapitulando

- **Transformaciones Canónicas Infinitesimales**:
  - Forma general: $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$, $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
  - Función generadora: $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
  - Relaciones: $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$
- **Invariancia e Invariantes**:
  - El cambio de una función $K$ del espacio de fase: $\delta K = \epsilon\{K, G\}$
  - Si $K$ es invariante bajo la transformación: $\{K, G\} = 0$
- **Simetrías y Cantidades Conservadas**
  - Si $\mathcal{H}$ es invariante bajo la transformación: $\{\mathcal{H}, G\} = 0$
  - Entonces: $\frac{dG}{dt} = \{G, \mathcal{H}\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \Rightarrow G$ es constante.
  - Esto es análogo al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

# Recapitulando

- **Transformaciones Canónicas Infinitesimales**:
  - Forma general: $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$, $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$
  - Función generadora: $F_2(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i)$
  - Relaciones: $f_i = \frac{\partial G}{\partial P_i}, \quad g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$
- **Invariancia e Invariantes**:
  - El cambio de una función $K$ del espacio de fase: $\delta K = \epsilon\{K, G\}$
  - Si $K$ es invariante bajo la transformación: $\{K, G\} = 0$
- **Simetrías y Cantidades Conservadas**
  - Si $\mathcal{H}$ es invariante bajo la transformación: $\{\mathcal{H}, G\} = 0$
  - Entonces: $\frac{dG}{dt} = \{G, \mathcal{H}\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \Rightarrow G$ es constante.
  - Esto es análogo al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.
- **Ejemplo de Hamiltoniano** $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
  - Constantes del movimiento: $f_1 = p_1(q_1 + a p_1)$, $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$
  - Se cumple: $\{f_1, \mathcal{H}\} = 0$, $\{f_2, \mathcal{H}\} = 0$
  - Por simetría: $f_3 = p_2(q_2 + b p_2)$ también es conservada.
  - Usando ecuaciones de movimiento: $f_4 = p_1 e^t$, $f_5 = p_2 e^t$

Vuelve el oscilador harmónico clásico anisótropo, pero ahora el sistema responde a un Hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2$

1. Determine la trayectoria del sistema en el espacio de fase $(x, y, p_x, p_y)$. Suponga que conoce las condiciones iniciales $x = x(t=0)$, $y = y(t=0)$, $p_x = p_x(t=0)$ y $p_y = p_y(t=0)$
2. Dada las siguientes cantidades comprobar cuáles corresponde a constantes de movimiento y, en el caso que no lo sean, mostrar cuales condiciones tendrían que cumplir el sistema para que lo fueran.
   1. las energías $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}$ y $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2 y^2}{2}$.
   2. la componente $z$ de cantidad de movimiento angular $L_z = yp_x - xp_y$
   3. Cantidad conservada de cizalladura $K = \omega_x x\, \omega_y y + \frac{p_x p_y}{m^2}$. Con $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$, donde $i = x, y$