Series de Fourier

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

27 de abril de 2021

Agenda Series de Fourier

- Esto es el conjunto de funciones $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots, |u_n\rangle \cdots\}$ representadas por

$$|u_0\rangle = 1, \ |u_{2n}\rangle = \cos(nx) \text{ y } |u_{2n-1}\rangle = \text{sen}(nx), \text{ con } n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\langle u_n \, | u_m\rangle = \delta_{nm} \| \, |u_n\rangle \, \|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si} \quad n \neq m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \cos(nx)\,\text{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \cos(nx)\cos(mx) = 0 \end{cases} \\ \| |u_n\rangle \|^2 \text{ si} \quad n = m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \cos^2(nx) = \pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \text{sen}^2(nx) = \pi \end{cases} \end{cases}$$

Universidad Industrial de Santander CONSTRUIMOS FUTURO

- Esto es el conjunto de funciones $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots, |u_n\rangle \cdots\}$ representadas por

$$|u_0\rangle = 1, \; |u_{2n}\rangle = \cos(nx) \text{ y } |u_{2n-1}\rangle = \mathrm{sen}(nx), \; \text{con } n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\langle u_n | u_m \rangle = \delta_{nm} \| |u_n\rangle \|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si} \quad n \neq m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \; \mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \; \cos(nx)\,\mathrm{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \; \cos(nx)\cos(mx) = 0 \end{cases} \\ \| |u_n\rangle \|^2 \text{ si} \quad n = m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \; \cos^2(nx) = \pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \; \mathrm{sen}^2(nx) = \pi \end{cases} \end{cases}$$

- Podremos construir una base ortonormal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \cdots, |e_n\rangle, \cdots\}$ de la forma

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; |e_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \text{ y } |e_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{sen}(nx)$$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Cualquier función en $[0, 2\pi]$ puede expresarse en como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ |e_i\rangle \ \Rightarrow c_i = \langle e_i \ |f\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si} \quad i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \mathrm{sen}(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si} \quad i = 2n-1 \end{cases}$$

donde los c_i son los coeficientes de Fourier,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)\right] \ ,$$

Series de Fourier $2/4$

- Cualquier función en $[0, 2\pi]$ puede expresarse en como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ |e_i\rangle \ \Rightarrow c_i = \langle e_i \ | f\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si} \quad i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \mathrm{sen}(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si} \quad i = 2n-1 \end{cases}$$

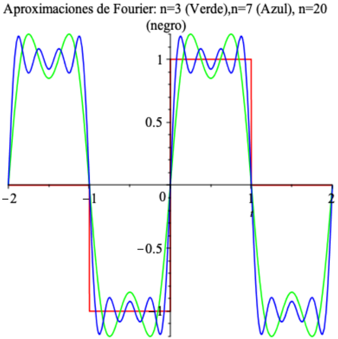
donde los c_i son los coeficientes de Fourier,

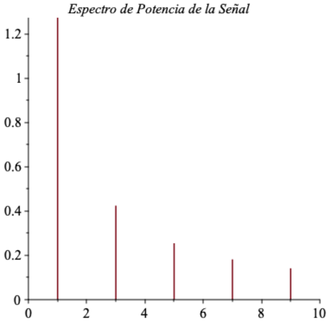
$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)] \ ,$$

- Si el período es T y para un t_0 genérico

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \ \text{con} \ \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \ f(t) \\ \text{doble del promedio de la función} \\ \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x \ f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ \text{amplitud de la función par, } f(-x) = f(x) \\ \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \ f(t) \ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ \text{amplitud de la función impar, } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Series de Fourier 3/4

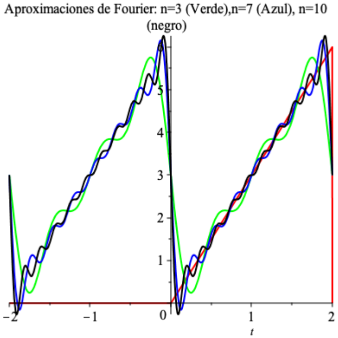


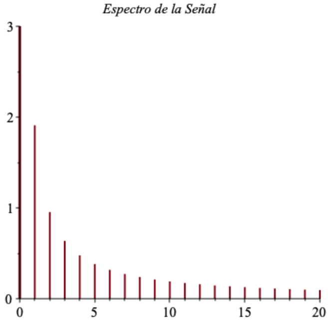


con $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \mathrm{sen}(\omega_n t)\right]$ con $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ y el espectro de potencia es la norma de la señal

$$\langle f|f\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \; f(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 + b_n^2\right]$$

Series de Fourier 4/4





con $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\right]$ con $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ y el espectro de potencia es la norma de la señal

$$\langle f | f \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \; f(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 + b_n^2\right]$$

- Hemos visto que la norma de la función nos representa el espectro de potencia $\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \; f(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 + b_n^2\right]$

Potencia y Fase

- Hemos visto que la norma de la función nos representa el espectro de potencia $\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \; f(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 + b_n^2\right]$
- También podemos encontar la una fase ϕ_n para cada uno de los armónico de la forma
  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \mathrm{sen}(\omega_n t)\right] \quad \text{con } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$
  entonces, podemos redefinir $a_n \equiv \cos(\phi_n)$ y, $b_n \equiv \mathrm{sen}(\phi_n)$, de tal forma que $\cos(\phi_n)\cos(\omega_n t) + \mathrm{sen}(\phi_n)\mathrm{sen}(\omega_n t) = \cos(\omega_n t - \phi_n)$, con lo cual $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad \text{donde } \phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

- Hemos visto que la norma de la función nos representa el espectro de potencia $\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 + b_n^2\right]$
- También podemos encontar la una fase ϕ_n para cada uno de los armónico de la forma
  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \mathrm{sen}(\omega_n t)\right] \quad$ con $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$
  entonces, podemos redefinir $a_n \equiv \cos(\phi_n)$ y, $b_n \equiv \mathrm{sen}(\phi_n)$, de tal forma que $\cos(\phi_n)\cos(\omega_n t) + \mathrm{sen}(\phi_n)\mathrm{sen}(\omega_n t) = \cos(\omega_n t - \phi_n)$, con lo cual $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad \text{donde } \phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$
- También podemos expresar una serie de Fourier compleja
  $|f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k \left|\tilde{\phi}_k\right\rangle \Rightarrow f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikt} \Leftrightarrow$
  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\omega_n t}$, donde
  $\tilde{C}_k = \frac{\left\langle \tilde{\phi}_k | f \right\rangle}{\left\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_k \right\rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ e^{-ikt} f(t)$.

Condiciones de Dirichlet

Son las condiciones que una función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier:

- $f(x)$ periódica

Son las condiciones que una función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier:

- $f(x)$ periódica
- $f(x)$ univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos

Condiciones de Dirichlet

Son las condiciones que una función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier:

- $f(x)$ periódica
- $f(x)$ univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos
- la integral $\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}x |f(x)|$ debe ser convergente. Donde $[-T/2, T/2]$ indica el intervalo de definición de una función con período T.

Sea $f(x)$ una función en $-\pi \leq x \leq \pi$ tal que cumpla con $f(x+2\pi) = f(x)$. Es decir $f(x)$ es $2\pi-$periódica. Supongamos además que existe la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\,, \quad \text{y que} \quad C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, e^{-ikx} f(x) \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

y si $|f(x)|$ está acotada para un intervalo $[a,b]$ con $-\pi < a \leq x \leq b < \pi$, entonces

$$f_{\approx}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-ikx} \quad \text{es convergente al valor}$$

$$f_{\approx}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\epsilon \to 0_+} f(x+\epsilon) + \lim_{\epsilon \to 0_-} f(x-\epsilon) \right)$$

y si $f(x)$ es continua en $x = x_0$ entonces $f_{\approx}(x_0) \to f(x_0)$.

Recapitulando

¿ Qué presentamos ?

- Series de Fourier

Recapitulando

¿ Qué presentamos ?

- Series de Fourier
- Significado de los coeficientes a_0, a_n y b_n

Recapitulando

¿ Qué presentamos ?

- Series de Fourier
- Significado de los coeficientes a_0, a_n y b_n
- El espectro de potencias y fases de una señal

Recapitulando

¿ Qué presentamos ?

- Series de Fourier
- Significado de los coeficientes a_0, a_n y b_n
- El espectro de potencias y fases de una señal
- Expansiones de varias funciones

Recapitulando

¿ Qué presentamos ?

- Series de Fourier
- Significado de los coeficientes a_0, a_n y b_n
- El espectro de potencias y fases de una señal
- Expansiones de varias funciones
- Las Condiciones de Dirichlet

Recapitulando

¿ Qué presentamos ?

- Series de Fourier
- Significado de los coeficientes a_0, a_n y b_n
- El espectro de potencias y fases de una señal
- Expansiones de varias funciones
- Las Condiciones de Dirichlet
- Teorema de Fourier