Ecuación de Onda:
Un mundo oscilatorio

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

30 de septiembre de 2021

Agenda de Ecuación de Onda

1. Ecuación de onda 1D
   - Separación de Variables
   - Condiciones de frontera
   - Componentes de Fourier
2. Ecuación de onda 2D
   - Ecuación de onda 2D: cartesianas
     - Separación de variables
     - Condiciones de frontera e iniciales
   - Ecuación de onda 2D: Polares
     - Variantes de la ecuación
     - Caso axialmente simétrico
     - Las funciones de Bessel primera y segunda especie
     - La solución
     - Caso General

Supongamos una cuerda vibrante con los extremos fijos. La ecuación de onda en 1D se escribe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Leftrightarrow u_{xx} = \frac{1}{v^2} u_{tt} \quad \text{proponemos } u = X(x)T(t)$$

donde $u(x,t)$ es la amplitud de la onda.

Entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -k^2 = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T}$$

donde $u(0,t) = X(0)T(t) = u(L,t) = X(L)T(t) = 0$ y, alguna condición inicial para $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$.

La solución más general, será

$$u(x,t) = \left(A_1 \exp(ik\,x) + A_2 \exp(-ik\,x)\right)\left(D_1 \exp(i\omega\,t) + D_2 \exp(-i\omega\,t)\right)$$

o equivalentemente

$$u(x,t) = \left(\tilde{A}_1 \cos(k\,x) + \tilde{A}_2 \mathrm{sen}(k\,x)\right)\left(\tilde{D}_1 \cos(\omega\,t) + \tilde{D}_2 \mathrm{sen}(\omega\,t)\right)$$

Condiciones de frontera

Como los extremos están fijos

$$X'' + k^2 X = 0\,, \ \text{con}\, X(0) = X(L) = 0 \Rightarrow X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\ddot{T} + \omega_n^2 T = 0 \Rightarrow T_n(t) = \left(\tilde{D}_1 \cos(\omega_n t) + \tilde{D}_2 \operatorname{sen}(\omega_n t)\right)$$

con $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}x\right) v$ y la solución general será

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tilde{D}_{1n}\cos(\omega_n t) + \tilde{D}_{2n}\operatorname{sen}(\omega_n t)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Las constantes $\tilde{D}_1$ y $\tilde{D}_2$ se determinarán de las condiciones iniciales. Supongamos que para $t = 0$ la cuerda parte del reposo, lo que implica que

$$\dot{T}(0) = 0 \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n \cos(\omega_n t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Componentes de Fourier

Parte del reposo con una forma $f(x)$, entonces

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Rightarrow \mathcal{A}_m = \int_0^L \mathrm{d}x\, f(x) \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

Con lo cual tendremos completamente determinada la solución general de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \cos(\omega_n t) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Ecuación de onda 2D: cartesianas

Supongamos una membrana, cuadrada con los extremos fijos

$$\nabla^2_{xy} u(\vec{r}) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(\vec{r})}{\partial t^2} \Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{v^2} u_{tt} \quad \text{con } u = X(x)Y(y)T(t)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k^2 = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} \text{ y, además } \frac{X''}{X} = -k_x^2; \ \frac{Y''}{Y} = -k_y^2;$$

con lo cual $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ y la solución general será

$$u(x,y,t) = \left(\tilde{A}_1 \cos(k_x x) + \tilde{A}_2 \mathrm{sen}(k_x x)\right)\left(\tilde{B}_1 \cos(k_y y) + \tilde{B}_2 \mathrm{sen}(k_y y)\right) \left(\tilde{D}_1 \cos(\omega\, t) + \tilde{D}_2 \mathrm{sen}(\omega\, t)\right)$$

Como los extremos están fijos se debe cumplir

$$u(0,y,t) = u(L,y,t) = u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0$$

$$u_t(0,y,0) = u_t(x,0,0) = 0$$

Las condiciones de frontera imponen

$$u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0 \Rightarrow X_m(x) = A_l \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0 \Rightarrow Y_n(y) = B_m \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

$$u_t(0,y,0) = u_t(x,0,0) = 0 \Rightarrow T_j(t) = D_n \cos(\omega_j t)$$

con lo cual

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}_{mn} \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \cos(\omega_{mn} t)$$

donde $\omega_{mn} = kv = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{v\pi}{L}\sqrt{m^2+n^2}$ y para u(x,y,0)=g(x,y) los coeficientes se pueden calcular como

$$\mathcal{A}_{mn} = \int_0^L \mathrm{d}x \int_0^L \mathrm{d}y\, g(x,y) \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

Variantes de la ecuación

Para el caso de una membrana circular con los extremos fijos

$$\nabla^2_{xy} u(\vec{r}) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(\vec{r})}{\partial t^2} \Leftrightarrow u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{v^2} u_{tt}$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{gathered} u(x, y, t) = 0 \text{ para } x^2 + y^2 = \rho_b^2 \text{ con } t > 0 \\ u_t(x, y, t) = 0 \text{ para } x^2 + y^2 = \rho_b^2 \text{ con } t > 0 \\ \text{y } u(x, y, 0) = g(x, y) \end{gathered}$$

Obviamente, es mucho más razonable plantearla en polares

$$\nabla^2_{\rho\theta t} u(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(\vec{r, t})}{\partial t^2} \Leftrightarrow u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = \frac{1}{v^2} u_{tt}$$

y las condiciones de frontera/iniciales

$$u(\rho_b, \theta, t) = u_t(\rho_b, \theta, t) = 0 \text{ y } u(\rho, \theta, 0) = h(\rho, \theta)$$

Caso axialmente simétrico

Si por simplicidad suponemos el caso $u = u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$ tendremos

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho = \frac{1}{v^2}u_{tt} \Leftrightarrow \frac{1}{v^2}\frac{T_{tt}}{T} = -k^2 = \frac{R_{\rho\rho}}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R_\rho}{R}$$

Con lo cual

$$T_{tt} + \omega T = 0 \Rightarrow T(t) = C_1 \cos(\omega\, t) + C_2 \mathrm{sen}(\omega\, t); \text{ con } \omega = kv \text{ y}$$

$$\rho^2 R_{\rho\rho} + \rho R_\rho + k^2\rho^2 R = 0 \Rightarrow R(\rho) = B_1 J_0(k\rho) + B_2 Y_0(k\rho)$$

y como la solución está definida en $\rho = 0 \Rightarrow R(\rho) = B_1 J_0(k\rho)$

$$u(\rho, t) = C \cos(\omega\, t) J_0(k\rho)$$

para cumplir con las condiciones de frontera $u_t(\rho_b, \theta, 0) = 0$

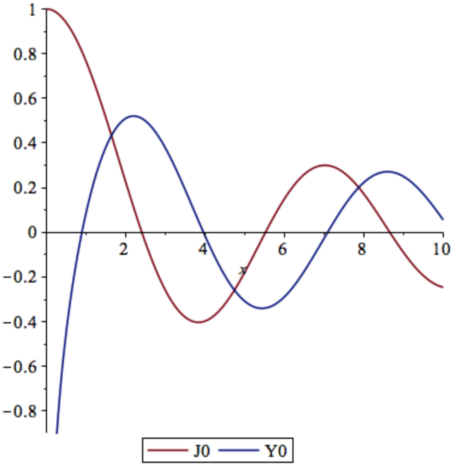

Figura: Las funciones de Bessel (primera y segunda especie) de orden cero. Nótese que $Y_0(\rho)$ diverge en $\rho \to 0$ y que $J_0(k\rho) = 0$ puede resolverse a partir de las raíces de las funciones de Bessel

Raíces de Bessel y la solución

La condicioón de frontera

$$u(\rho_b, \theta, t) = 0 \Rightarrow J_0(k\rho_b) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{r_n}{\rho_b}$$

y como se puede apreciar de la gráfica 1 corresponden a las raíces $r_n = k_n \rho_b$ de J_0. Con lo cual la solución general puede expresarse como

$$u(\rho, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \cos(\omega_n t) J_0(k_n \rho)$$

Si suponemos una forma inicial de la onda

$$u(\rho, 0) = f(\rho) \Rightarrow \mathcal{A}_n = \frac{\int_0^{\rho_b} \mathrm{d}\rho\, f(\rho) J_0(k_n\rho)\rho}{\int_0^{\rho_b} \mathrm{d}\rho\, J_0(k_n\rho) J_0(k_n\rho)\rho}$$

¿ Y si no es axialmente simétrico?

La separación de variables será $u = u(\rho, t) = R(\rho)\Theta(\theta)T(t)$ y la ecuación de onda

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = \frac{1}{v^2}u_{tt}$$

se separa y se resuelve en

$$\Theta_{\theta\theta} + k_\theta^2\Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_1\cos(k_\theta\theta) + A_2\mathrm{sen}(k_\theta\theta);$$

$$T_{tt} + \omega T = 0 \Rightarrow T(t) = C_1\cos(\omega\, t) + C_2\mathrm{sen}(\omega\, t);\ \text{con } \omega = k_t v \text{ y}$$

$$\rho^2 R_{\rho\rho} + \rho R_\rho + \left(\frac{k_t^2\rho^2}{v^2} - k_\theta^2\right)R = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(\rho) = B_1 J_{k_\theta}\left(\frac{k_t\rho}{v}\right) + B_2 Y_{k_\theta}\left(\frac{k_t\rho}{v}\right)$$

Condiciones de frontera

Otra vez, como la solución está definida en $\rho = 0 \Rightarrow R(\rho) =\propto J_{k_\theta}\left(\frac{k_t \rho}{v}\right)$

$$u(\rho, t) \propto J_{k_\theta}\left(\frac{k_t \rho}{v}\right) \cos(k_t v\, t) \cos(k_\theta \theta)$$

La garantía de que no se mueva en borde se obliga con los ceros de la función de Bessel $J_{k_\theta}\left(\frac{k_t \rho}{v}\right) = 0$, que depende del orden y del argumento de la función

Modos de Oscilación

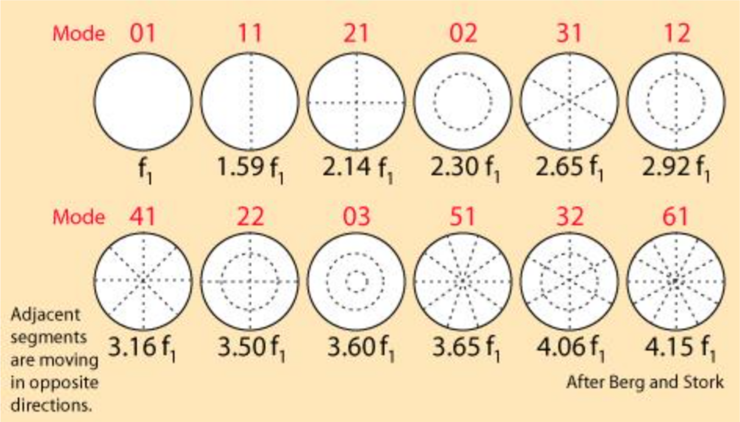

Figura: