

Sistemas integrables y caóticos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



30 de agosto de 2024

- 1 Integrales del movimiento
- 2 Sistemas Integrables
- 3 Integrabilidad
- 4 Ejemplo

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad ($n > s$) se llama superintegrable.

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad ($n > s$) se llama superintegrable.
- El ejemplo más simple de sistema superintegrable es una partícula libre. Otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional.

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad ($n > s$) se llama superintegrable.
- El ejemplo más simple de sistema superintegrable es una partícula libre. Otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional.
- Si un sistema con s grados de libertad tiene menos de s cantidades conservadas ($n < s$), se denomina no integrable.

• Ejemplos de sistemas integrables

- Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
- Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
- Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = I_z = \text{cte}$, $C_2 = E = \text{cte}$, $n = 2$; es integrable.
- Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
- Péndulo cuyo soporte gira en un círculo en plano vertical con velocidad angular constante: $s = 1$, $n = 0$; no es integrable.
- Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
- Péndulo paramétrico cuya longitud varía en el tiempo: $s = 1$, $n = 0$; no es integrable.
- Partícula libre es superintegrable: $s = 3$; $n = 4$: $C_1 = E = \text{cte}$,
 $C_2 = p_x = \text{cte}$, $C_2 = p_y = \text{cte}$, $C_2 = p_z = \text{cte}$.

- Ejemplos de sistemas integrables

- Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
- Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
- Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = I_z = \text{cte}$, $C_2 = E = \text{cte}$, $n = 2$; es integrable.
- Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
- Péndulo cuyo soporte gira en un círculo en plano vertical con velocidad angular constante: $s = 1$, $n = 0$; no es integrable.
- Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
- Péndulo paramétrico cuya longitud varía en el tiempo: $s = 1$, $n = 0$; no es integrable.
- Partícula libre es superintegrable: $s = 3$; $n = 4$: $C_1 = E = \text{cte}$,
 $C_2 = p_x = \text{cte}$, $C_3 = p_y = \text{cte}$, $C_4 = p_z = \text{cte}$.
- La integrabilidad es un tipo de simetría presente en varios sistemas dinámicos, y que conduce a una evolución regular (periódica o estacionaria) de las variables del sistema en el tiempo

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T(\dot{q}^2) - V_{\text{ef}}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\text{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q ,

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T(\dot{q}^2) - V_{\text{ef}}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\text{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q ,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T(\dot{q}^2) - V_{\text{ef}}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\text{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q ,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T(\dot{q}^2) - V_{\text{ef}}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\text{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q ,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = \text{cte}$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a}(E - V_{\text{ef}}(q))} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(q)}} + \text{cte.}$$

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T(\dot{q}^2) - V_{\text{ef}}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\text{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q ,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = \text{cte}$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,
$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a}(E - V_{\text{ef}}(q))} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(q)}} + \text{cte.}$$
- En principio, se puede invertir $t(q)$ para obtener $q(t)$.

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T(\dot{q}^2) - V_{\text{ef}}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\text{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q ,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = \text{cte}$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,
$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a}(E - V_{\text{ef}}(q))} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(q)}} + \text{cte}.$$
- En principio, se puede invertir $t(q)$ para obtener $q(t)$.
- Para que la solución $q(t)$ sea real, el movimiento puede ocurrir solamente para valores de q tales que $E \geq V_{\text{ef}}(q)$.

- El Lagrangiano de un sistema unidimensional con coordenada q tiene la forma general $L = T(\dot{q}^2) - V_{\text{ef}}(q) = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$, donde a representa masa, longitud, etc., y $V_{\text{ef}}(q)$ es un potencial efectivo que depende de la coordenada q ,
- Como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, la función de energía se conserva
- Hay un grado de libertad y una cantidad conservada; el sistema es integrable.
- Como $E = \text{cte}$, se determina $t(q)$ en términos de una integral explícita,
$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a}(E - V_{\text{ef}}(q))} \Rightarrow t(q) = \int \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(q)}} + \text{cte}.$$
- En principio, se puede invertir $t(q)$ para obtener $q(t)$.
- Para que la solución $q(t)$ sea real, el movimiento puede ocurrir solamente para valores de q tales que $E \geq V_{\text{ef}}(q)$.
- La condición de integrabilidad de sistemas unidimensionales permite calcular el período de movimientos oscilatorios en esos sistemas.

Movimiento de una partícula en un potencial $V(x)$

- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \text{ con la ecuación de movimiento}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

Movimiento de una partícula en un potencial $V(x)$

- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \text{ con la ecuación de movimiento}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

- La energía total constante es $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ y podemos integrar

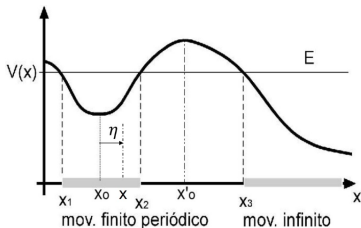
$$t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Movimiento de una partícula en un potencial $V(x)$

- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano
 $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, con la ecuación de movimiento
 $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- La energía total constante es $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ y podemos integrar
 $t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - V(x)}}$
- Como $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$, el movimiento sólo puede ocurrir para
 $E \geq V(x)$.

Movimiento de una partícula en un potencial $V(x)$

- Consideremos un sistema descrito por el Lagrangiano $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, con la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$
- La energía total constante es $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$ y podemos integrar $t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - V(x)}}$
- Como $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$, el movimiento sólo puede ocurrir para $E \geq V(x)$.
- Los puntos de retorno son aquellos para $V(x) = E$. Es decir, x_1, x_2 y x_3 son puntos de retorno $V(x_1) = E, V(x_2) = E, V(x_3) = E$



Movimiento de partícula en un potencial $V(x)$

- Los puntos de equilibrio $x = x_o$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_o) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_o} = 0$

Movimiento de partícula en un potencial $V(x)$

- Los puntos de equilibrio $x = x_o$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_o) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_o} = 0$
- Un punto estático velocidad y aceleración se anulan: $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.

- Los puntos de equilibrio $x = x_o$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_o) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_o} = 0$
- Un punto estático velocidad y aceleración se anulan: $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.
- Un punto de equilibrio x_o es estable si $x = x_o + \eta$, donde η es un pequeño desplazamiento, tiende a $x = x_o$ al aumentar el tiempo y corresponde a un mínimo del potencial $V(x)$. Es decir
$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_o} > 0, \quad x_o \text{ es un punto de equilibrio estable}$$

- Los puntos de equilibrio $x = x_o$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_o) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_o} = 0$
- Un punto estático velocidad y aceleración se anulan: $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.
- Un punto de equilibrio x_o es estable si $x = x_o + \eta$, donde η es un pequeño desplazamiento, tiende a $x = x_o$ al aumentar el tiempo y corresponde a un mínimo del potencial $V(x)$. Es decir $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_o} > 0$, x_o es un punto de equilibrio estable
- Un punto de equilibrio es inestable si el potencial $V(x)$ presenta un máximo en ese punto. Entonces $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_o} < 0$, x_o es un punto de equilibrio inestable.

- Los puntos de equilibrio $x = x_o$ son aquellos donde la fuerza instantánea se anula: $f(x_o) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_o} = 0$
- Un punto estático velocidad y aceleración se anulan: $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$.
- Un punto de equilibrio x_o es estable si $x = x_o + \eta$, donde η es un pequeño desplazamiento, tiende a $x = x_o$ al aumentar el tiempo y corresponde a un mínimo del potencial $V(x)$. Es decir $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_o} > 0$, x_o es un punto de equilibrio estable
- Un punto de equilibrio es inestable si el potencial $V(x)$ presenta un máximo en ese punto. Entonces $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_o} < 0$, x_o es un punto de equilibrio inestable.
- El período de oscilación entre los puntos de retorno x_1 y x_2 es dos veces el intervalo de tiempo del movimiento entre esos puntos,
$$\tau_p(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

- Para un valor de x cerca de un punto de equilibrio estable x_0 , el potencial $V(x)$ puede expresarse mediante una expansión de Taylor alrededor de $x = x_0$. Esto es

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx}\bigg|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}\bigg|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots, \text{ donde}$$

$V(x_0)$ es un valor constante y el segundo término se anula debido a la condición de equilibrio.