Tres enfoques para un problema
Partícula Cargada en un Campo Magnético

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

29 de mayo de 2025

Agenda

El problema y el enfoque Lagrangeano

- **Sistema físico**
  - Masa m, carga q, movimiento en plano xy
  - Campo magnético uniforme: $\mathbf{B} = B\hat{z}$, sin campo eléctrico: $\mathbf{E} = 0$
  - Potencial vectorial $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ en el calibre de Landau tenemos $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ y además $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = Bx\dot{y}$

El problema y el enfoque Lagrangeano

- **Sistema físico**
  - Masa m, carga q, movimiento en plano xy
  - Campo magnético uniforme: $\mathbf{B} = B\hat{z}$, sin campo eléctrico: $\mathbf{E} = 0$
  - Potencial vectorial $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ en el calibre de Landau tenemos $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ y además $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = Bx\dot{y}$
- **El lagrangiano del sistema**
  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$

El problema y el enfoque Lagrangeano

- **Sistema físico**
  - Masa m, carga q, movimiento en plano xy
  - Campo magnético uniforme: $\mathbf{B} = B\hat{z}$, sin campo eléctrico: $\mathbf{E} = 0$
  - Potencial vectorial $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ en el calibre de Landau tenemos $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ y además $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = Bx\dot{y}$
- **El lagrangiano del sistema**
  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$
- **Ecuaciones de Euler-Lagrange**
  - Para x: $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - qB\dot{y} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = qB\dot{y}$
  - Para y: $\frac{d}{dt}(m\dot{y} + qBx) = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = -qB\dot{x}$
  - Sistema resultante: $\ddot{x} = \omega_c\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_c\dot{x}$ Dos ecuaciones acopladas, donde $\omega_c = \frac{qB}{m}$ es frecuencia de ciclotrón
  - Derivando: $\dddot{x} = \omega_c\ddot{y} = -\omega_c^2\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$, también $\ddot{y} + \omega_c^2 y = 0$
  - Ecuaciones de oscilador armónico para $x(t)$ y $y(t)$ con solución
  - $x(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$ y $y(t) = C\cos(\omega_c t) + D\sin(\omega_c t)$
  - La partícula describe una órbita circular con $|\mathbf{v}| = \text{cte}$ y $R = \frac{v_0}{\omega_c}$

Formalismo Hamiltoniano

- El hamiltoniano se define por: $\mathcal{H} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L}$

Formalismo Hamiltoniano

- El hamiltoniano se define por: $\mathcal{H} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L}$
- Como $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$ tenemos $p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}$ y $p_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} + qBx$

Formalismo Hamiltoniano

- El hamiltoniano se define por: $\mathcal{H} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L}$
- Como $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$ tenemos $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ y $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$
- Entonces $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qBx)^2$

- El hamiltoniano se define por: $\mathcal{H} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L}$
- Como $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$ tenemos $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ y $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$
- Entonces $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qBx)^2$
- Las Ecuaciones de Hamilton $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m}$
  $\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx); \quad \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx)$
  $\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y - qBx}{m} \quad \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\dot{p}_y - qB\dot{x}}{m} \quad \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m};$
  finalmente $\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y = \text{cte} \quad \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m}$

- El hamiltoniano se define por: $\mathcal{H} = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \mathcal{L}$
- Como $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$ tenemos $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ y $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$
- Entonces $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qBx)^2$
- Las Ecuaciones de Hamilton $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m}$
  $\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx); \quad \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx)$
  $\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y - qBx}{m} \quad \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\dot{p}_y - qB\dot{x}}{m} \quad \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m};$
  finalmente $\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y = \text{cte} \quad \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m}$
- Como p_y es constante: $X = x - \frac{p_y}{qB} \Rightarrow \ddot{X} = -\omega_c^2 X$, con $\omega_c = \frac{qB}{m}$, y otra vez se obtienen las mismas ecuaciones movimiento

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x, y, t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x, y, t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x,y,t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como: $S(x,y,t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x, y, t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como: $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces: $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x, y, t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como: $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces: $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual: $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2\right] = \mathcal{E}$. Entonces

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x, y, t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como: $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E}t$
- Entonces: $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual: $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2\right] = \mathcal{E}$. Entonces
- $\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2}\, dx$

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x,y,t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como: $S(x,y,t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces: $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual: $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2\right] = \mathcal{E}$. Entonces
- $\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2}\, dx$
- Las ecuaciones $p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{dW}{dx}, \quad p_y = \text{cte}, \quad Q_y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = y + \frac{\partial W}{\partial p_y}$

- La función de acción $S(x, y, t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como: $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces: $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual: $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2\right] = \mathcal{E}$. Entonces
- $\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2}\, dx$
- Las ecuaciones $p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{dW}{dx}, \quad p_y = \text{cte}, \quad Q_y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = y + \frac{\partial W}{\partial p_y}$
- La dependencia de $x(t)$ se obtiene: $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$

Formalismo de Hamilton-Jacobi

- La función de acción $S(x, y, t)$ será tal que $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como: $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces: $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual: $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2\right] = \mathcal{E}$. Entonces
- $\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2}\, dx$
- Las ecuaciones $p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{dW}{dx}, \quad p_y = \text{cte}, \quad Q_y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = y + \frac{\partial W}{\partial p_y}$
- La dependencia de $x(t)$ se obtiene: $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$
- Pero como $p_x = \frac{dW}{dx}$, tenemos: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\sqrt{2mE - (p_y - qBx)^2}$

Recapitulando

En presentación consideramos

1.