

# Dos monedas

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



4 de noviembre de 2024

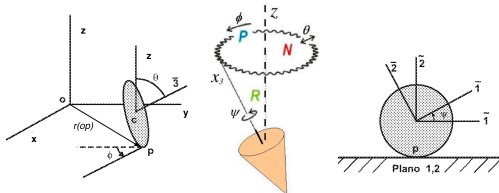
- 1 Moneda que rueda sin deslizar
  - Ligaduras
  - El Lagrangeano
  - Energías cinética y potencial
  - Simetrías y Constantes de movimiento
  
- 2 Moneda en un plano inclinado
  - Planteamiento del problema
  - Coordenadas y ligaduras
  - Integración de ligaduras
  - Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

# Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio  $a$  y masa  $M$  rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



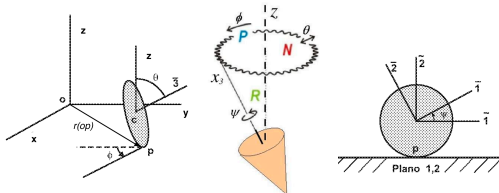
- En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.

# Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio  $a$  y masa  $M$  rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



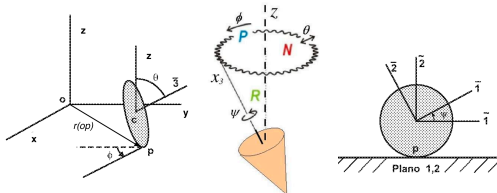
- En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.

# Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio  $a$  y masa  $M$  rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



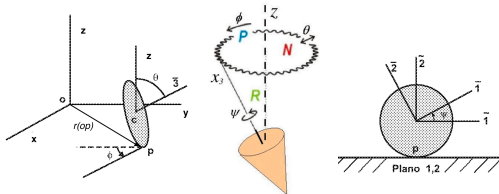
- En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto  $p$ , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

# Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio  $a$  y masa  $M$  rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



- En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto  $p$ , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es:  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$ .

- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .

- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$ ;  
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$



- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$ ;  
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte,  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$

- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$ ;  
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte,  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  
 $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$ ;  
 $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$ ;     $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$ .

- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$ ;  $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte,  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$ ;  $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$ ;  $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$ .
- Es decir  $\dot{x} + a\dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - a\dot{\theta} \sin \phi \sin \theta + a\dot{\psi} \cos \phi = 0$ ;  $\dot{y} + a\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + a\dot{\theta} \cos \phi \sin \theta + a\dot{\psi} \sin \phi = 0$ ;  $\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$

- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \sin \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \sin \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \sin \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \sin \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- y  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .

- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \sin \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- y  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .

- Tendremos  $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$+ \frac{1}{8}Ma^2 \left[ \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2 \left( \dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi} \right)^2 \right]$$



- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \sin \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- y  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .

- Tendremos  $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$+ \frac{1}{8}Ma^2 \left[ \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right]$$

- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras

$$T = \frac{1}{32}a^2M \left( \dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi}) \cos 2\theta + 8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2 \right)$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \sin \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad y \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- y  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .

- Tendremos  $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$+ \frac{1}{8}Ma^2 \left[ \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right]$$

- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras

$$T = \frac{1}{32}a^2M \left( \dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi}) \cos 2\theta + 8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2 \right)$$

- Por su parte, la energía potencial  $V = mgz = mga \sin \theta$

- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$

- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$   
$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$

- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$   
$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$   
$$\frac{1}{16}a^2M \left( \dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$$

- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$   
$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$   
$$\frac{1}{16}a^2M \left( \dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}a^2M \left( \dot{\phi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi} \right) = C_2$

- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$   

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$   

$$\frac{1}{16}a^2M \left( \dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}a^2M \left( \dot{\phi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi} \right) = C_2$
- Por lo tanto  $\dot{\phi} \rightarrow \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(-6C_1+4C_2 \cos \theta+C_2 \cos 2\theta+C_2)}{a^2M(-2 \cos 2\theta+\cos 3\theta-5)}$   

$$\dot{\psi} \rightarrow \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(4(2C_1-5C_2) \cos 2\theta+32C_1 \cos \theta+8C_1-2C_2 \cos 4\theta-26C_2)}{8a^2M(-2 \cos 2\theta+\cos 3\theta-5)}$$

- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$   

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$   

$$\frac{1}{16}a^2M \left( \dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}a^2M \left( \dot{\phi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi} \right) = C_2$
- Por lo tanto  $\dot{\phi} \rightarrow \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(-6C_1+4C_2 \cos \theta+C_2 \cos 2\theta+C_2)}{a^2M(-2 \cos 2\theta+\cos 3\theta-5)}$   

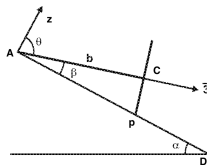
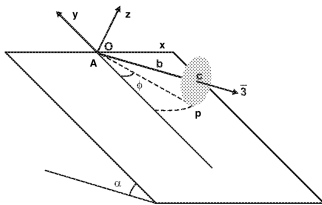
$$\dot{\psi} \rightarrow \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(4(2C_1-5C_2) \cos 2\theta+32C_1 \cos \theta+8C_1-2C_2 \cos 4\theta-26C_2)}{8a^2M(-2 \cos 2\theta+\cos 3\theta-5)}$$
- La ecuación de movimiento para  $\theta$  es  

$$10\ddot{\theta} + 4\dot{\phi}\dot{\psi} \sin^3 \theta \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dot{\phi}^2(5 \sin 2\theta + \sin 4\theta) + \frac{8g}{a} \cos \theta = 0$$



## Planteamiento del problema

Un disco delgado, uniforme, de masa  $M$  y radio  $a$  está enganchado a una varilla  $AC$  sin masa de longitud  $b$ . El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. El punto  $A$  de la varilla se mantiene fijo en un punto  $O$  del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema  $S$  uno con origen en  $O$ , eje  $z$  perpendicular al plano inclinado y el eje  $y$  hacia arriba del plano y para el sistema  $\tilde{S}$  origen también en  $O$  y eje  $\tilde{3}$  en la dirección  $AC$ . Encontrar las ecuaciones de movimiento para



- En principio tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$  implica  $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \beta = \frac{a}{b}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$

- En principio tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$  implica  $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \beta = \frac{a}{b}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$ ,

- En principio tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$  implica  $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \beta = \frac{a}{b}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$ ,
- Entonces  $x = b \sin \phi \sin \theta$ ;  $y = -b \cos \phi \sin \theta$  y  $z = b \cos \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

- En principio tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$  implica  $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \beta = \frac{a}{b}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$ ,
- Entonces  $x = b \sin \phi \sin \theta$ ;  $y = -b \cos \phi \sin \theta$  y  $z = b \cos \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con  $\theta = \text{const.}$ , se obtiene:  
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$ ,  $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$ ,  $\dot{z} = 0$

- En principio tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$  implica  $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \beta = \frac{a}{b}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$ ,
- Entonces  $x = b \sin \phi \sin \theta$ ;  $y = -b \cos \phi \sin \theta$  y  $z = b \cos \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con  $\theta = \text{const.}$ , se obtiene:  
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$ ,  $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$ ,  $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto  $p$  es cero :  
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}.$

- En principio tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$  implica  $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \beta = \frac{a}{b}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$ ,
- Entonces  $x = b \sin \phi \sin \theta$ ;  $y = -b \cos \phi \sin \theta$  y  $z = b \cos \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con  $\theta = \text{const.}$ , se obtiene:  
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$ ,  $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$ ,  $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto  $p$  es cero :  
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$ .
- Respecto al sistema centro de masa,  $\tilde{S}$  tenemos  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ ,

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3) \text{ con cual respecto al}$$

$$\text{centro de masa } b\dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3) = 0$$



- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{\mathbf{x}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{\mathbf{y}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{\mathbf{z}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en  $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$ 
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en  $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$ 
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura  $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0$ , obtenemos
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[ \frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en  $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$ 
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
$$\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0, \text{ obtenemos}$$
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[ \frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$
- Donde hemos sustituido el valor de  $\theta$  que implica  $\sin \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ .

- Como siempre la energía cinética se construye como

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2} \dot{\phi}^2$ .



- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2} \dot{\phi}^2$ .
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional  $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$ .
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional  $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será
$$V = Mgy \sin \alpha + Mgz \cos \alpha \equiv Mgb(-\cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$ .
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional  $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será
$$V = Mg(y \sin \alpha + z \cos \alpha) \equiv Mgb(-\cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$$
- La ecuación de movimiento será  $\ddot{\phi} = -g \sin \alpha \frac{4(a^2 + b^2)^{3/2}}{a^2 + 6b^2} \sin \phi$