

Vector Laplace-Runge-Lenz

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



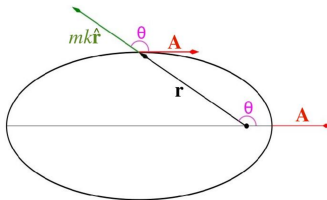
16 de septiembre de 2024

- 1 El problema de Kepler y el vector **A**, Laplace-Runge-Lenz
- 2 El vector **A** como cantidad conservada
- 3 Problema Kepler superintegrable

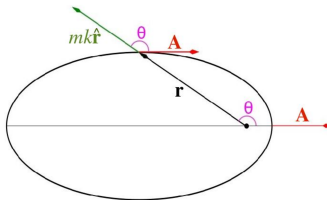
- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA \cos \theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \text{cte.}$

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA \cos \theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \text{cte.}$
- \mathbf{A} es un vector de magnitud es constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x , $\mathbf{A} = \mu k e \hat{\mathbf{i}}$.

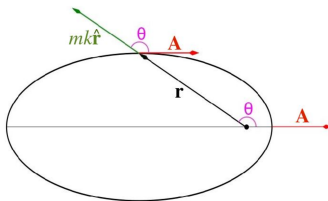


- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA \cos \theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \text{cte.}$
- \mathbf{A} es un vector de magnitud constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x , $\mathbf{A} = \mu k e \hat{\mathbf{i}}$.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \hat{\mathbf{r}}]$

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA \cos \theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \text{cte.}$
- \mathbf{A} es un vector de magnitud constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x , $\mathbf{A} = \mu k e \hat{\mathbf{i}}$.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \hat{\mathbf{r}}]$
- Donde $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$ y también $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{dr}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{dr}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{dr}{dt}$

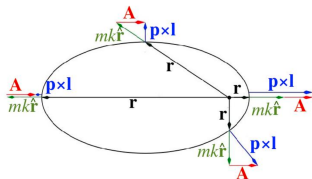
- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{dr}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$
- y finalmente $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}} = \text{cte}$

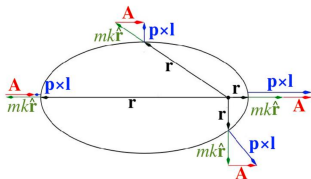
A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$
- y finalmente $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}} = \text{cte}$
- La magnitud del vector \mathbf{A} para la fuerza gravitacional se expresa en términos de L y E como $A^2 = (\mu k e)^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E L^2 = \text{cte}$

- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.

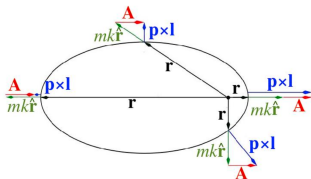


- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



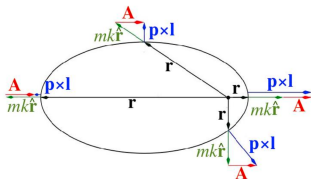
- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.

- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.
- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable.

- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.
- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable.
- Existen seis grados de libertad (tres para cada partícula) y siete cantidades conservadas: las tres componentes de la velocidad del centro de masa \mathbf{v}_{cm} , la dirección del momento angular \mathbf{L} , su magnitud L , la energía E y la dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz $\hat{\mathbf{A}}$