Transferencia Hohmann
y
la asitencia gravitacional

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

25 de marzo de 2025

Agenda

1. Transferencia Hohmann
   - ¿Qué es?
   - ¿Cómo ocurre?
   - Los cálculos
   - Eficiente en energía, no en tiempo
2. El viaje a Júpiter
3. Asistencia gravitacional
   - Marte: ida y vuelta con el "empujón" de Venus
   - Dispersión elástica con el planeta

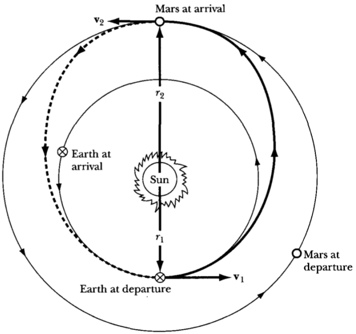
Transferencia Hohmann ¿Qué es?

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La transferencia Hohmann es una maniobra orbital que emplea dos encendidos de motor para trasladar una nave espacial entre dos órbitas circulares mediante una trayectoria elíptica.

Transferencia Hohmann ¿Qué es?

- La transferencia Hohmann es una maniobra orbital que emplea dos encendidos de motor para trasladar una nave espacial entre dos órbitas circulares mediante una trayectoria elíptica.
- Este método minimiza el consumo de combustible y es comúnmente utilizado en misiones satelitales e interplanetarias debido a su bajo requerimiento energético.



Transferencia Hohmann ¿Cómo ocurre?

- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste

Transferencia Hohmann ¿Cómo ocurre?

- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste

Transferencia Hohmann ¿Cómo ocurre?

- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.

Transferencia Hohmann ¿Cómo ocurre?

- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.
- Es la transferencia entre la órbita circular y una órbita elíptica, con el incremento de velocidad Δv_1

Transferencia Hohmann ¿Cómo ocurre?

- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.
- Es la transferencia entre la órbita circular y una órbita elíptica, con el incremento de velocidad Δv_1
- La nave espacial se deja llevar por la trayectoria elíptica hasta alcanzar el cuerpo objetivo.

Transferencia Hohmann ¿Cómo ocurre?

- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.
- Es la transferencia entre la órbita circular y una órbita elíptica, con el incremento de velocidad Δv_1
- La nave espacial se deja llevar por la trayectoria elíptica hasta alcanzar el cuerpo objetivo.
- La nave espacial vuelve a encender sus motores para lograr la velocidad necesaria para permanecer en una órbita circular alrededor del cuerpo objetivo

Transferencia Hohmann: Los cálculos

- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol.

Transferencia Hohmann: Los cálculos

- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol.
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.

Transferencia Hohmann: Los cálculos

- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol.
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica, con el Sol en uno de sus focos, los valores $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con $E < 0$, y corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\text{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \Rightarrow \quad Er^2 + kr - \frac{L^2}{2\mu} = 0$

Transferencia Hohmann: Los cálculos

- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol.
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica, con el Sol en uno de sus focos, los valores $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con $E < 0$, y corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\text{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \Rightarrow \quad Er^2 + kr - \frac{L^2}{2\mu} = 0$
- Con lo cual $r_{\text{mín}} = -\frac{k}{2E}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\right) = \frac{k}{2|E|}(1 - e)$
  $r_{\text{máx}} = -\frac{k}{2E}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\right) = \frac{k}{2|E|}(1 + e)$

Transferencia Hohmann: Los cálculos

- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol.
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica, con el Sol en uno de sus focos, los valores $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con $E < 0$, y corresponden a las raíces de la ecuación
  $E = V_{\mathrm{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \Rightarrow \quad Er^2 + kr - \frac{L^2}{2\mu} = 0$
- Con lo cual $r_{\text{mín}} = -\frac{k}{2E}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\right) = \frac{k}{2|E|}(1-e)$
  $r_{\text{máx}} = -\frac{k}{2E}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\right) = \frac{k}{2|E|}(1+e)$
- El semieje mayor de la elipse es $r_{\text{mín}} + r_{\text{máx}} = 2a$, luego, $a = \frac{k}{2|E|}$

Transferencia Hohmann: Los cálculos

- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol.
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica, con el Sol en uno de sus focos, los valores $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con $E < 0$, y corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\text{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \Rightarrow \quad Er^2 + kr - \frac{L^2}{2\mu} = 0$
- Con lo cual $r_{\text{mín}} = -\frac{k}{2E}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\right) = \frac{k}{2|E|}(1 - e)$
  $r_{\text{máx}} = -\frac{k}{2E}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\right) = \frac{k}{2|E|}(1 + e)$
- El semieje mayor de la elipse es $r_{\text{mín}} + r_{\text{máx}} = 2a$, luego, $a = \frac{k}{2|E|}$
- Para la trayectoria circular alrededor del Sol tenemos $E = -\frac{k}{2r_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{k}{r_1} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}}$

Transferencia Hohmann ineficiente en tiempo

- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_{t1}^2 - \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.

Transferencia Hohmann ineficiente en tiempo

- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_{t1}^2 - \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es
$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right) > 0$

Transferencia Hohmann ineficiente en tiempo

- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_{t1}^2 - \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es
  $\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right) > 0$
- Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2, tenemos $\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right) > 0$

Transferencia Hohmann ineficiente en tiempo

- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_{t1}^2 - \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es $\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right) > 0$
- Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2, tenemos $\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right) > 0$
- El tiempo para realizar la transferencia T_t es un semiperiodo de la órbita de transferencia $T_t = \frac{\tau_t}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}a_t^{3/2}$

Transferencia Hohmann ineficiente en tiempo

- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_{t1}^2 - \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es $\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right) > 0$
- Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2, tenemos $\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right) > 0$
- El tiempo para realizar la transferencia T_t es un semiperiodo de la órbita de transferencia $T_t = \frac{\tau_t}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}a_t^{3/2}$
- La trayectoria de transferencia de Hohmann representa el menor gasto energético, no representa el menor tiempo.

Transferencia Hohmann ineficiente en tiempo

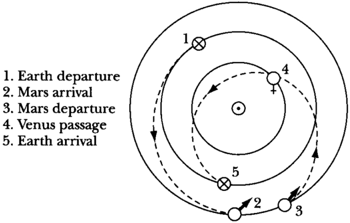
- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1+r_2} = \frac{1}{2}mv_{t1}^2 - \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es $\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right) > 0$
- Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2, tenemos $\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right) > 0$
- El tiempo para realizar la transferencia T_t es un semiperiodo de la órbita de transferencia $T_t = \frac{\tau_t}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}a_t^{3/2}$
- La trayectoria de transferencia de Hohmann representa el menor gasto energético, no representa el menor tiempo.
- Para un viaje de ida y vuelta de la Tierra a Marte, la nave espacial tendría que permanecer en Marte durante 460 días hasta que la Tierra y Marte estuvieran posicionados para el viaje de vuelta. El viaje total (259+460+259=978 días =2,7 años)

El viaje a Júpiter

Una nave espacial se encuentra inicialmente en órbita terrestre baja (LEO) a una altitud de 500 km y realiza una transferencia Hohmann para alcanzar Júpiter. Supongamos que las órbitas de la Tierra y Júpiter alrededor del Sol son circulares y coplanares.

- El semieje mayor de la órbita de transferencia Hohmann.
- La velocidad de la nave en la órbita terrestre antes de la partida.
- La velocidad de la nave después del primer impulso
- El primer impulso necesario para entrar en la órbita de transferencia
- La velocidad en la órbita de Júpiter en la órbita de transferencia antes del segundo impulso
- La velocidad de la nave necesaria para circular en Júpiter.
- El segundo impulso

- Una misión de ida y vuelta a Marte podría realizarse en menos de 2 años, con sólo unas pocas semanas cerca (o sobre) Marte con el "empujón" de Venus

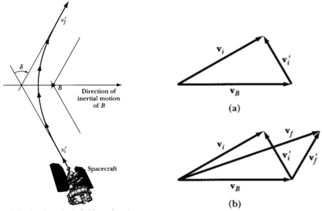


Dispersión elástica con el planeta

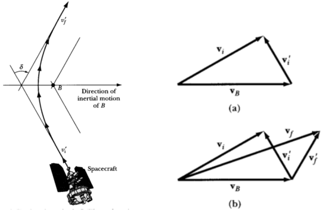
- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, B, con el cual interactúa con B y retrocede. La trayectoria es una hipérbola

- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, B, con el cual interactúa con B y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v_i' y v_f'.

- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, B, con el cual interactúa con B y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v_i' y v_f'.
- El módulo de esas velocidades es el mismo y el efecto neto sobre la nave espacial es un ángulo de desviación de δ con respecto a B.



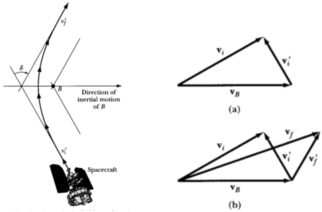
- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, B, con el cual interactúa con B y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v_i' y v_f'.
- El módulo de esas velocidades es el mismo y el efecto neto sobre la nave espacial es un ángulo de desviación de δ con respecto a B.



- Respecto al Sol la nave ha aumentado su velocidad y ha cambiado su dirección. Un aumento en la velocidad ocurre cuando la nave espacial pasa por detrás de la dirección de movimiento de B.

Dispersión elástica con el planeta

- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, B, con el cual interactúa con B y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v_i' y v_f'.
- El módulo de esas velocidades es el mismo y el efecto neto sobre la nave espacial es un ángulo de desviación de δ con respecto a B.



- Respecto al Sol la nave ha aumentado su velocidad y ha cambiado su dirección. Un aumento en la velocidad ocurre cuando la nave espacial pasa por detrás de la dirección de movimiento de B.
- Del mismo modo, una disminución de la velocidad se produce cuando la nave espacial pasa por delante de B.

Solución dispersión elástica planetaria

- Este problema la asistencia gravitatoria, en la que una nave espacial se aproxima a un cuerpo B desde el infinito, sigue una trayectoria hiperbólica debido a la interacción gravitatoria, y luego retrocede, desviándose su velocidad un ángulo δ respecto a B.
- **Cantidades conservadas**:
  - Energía: Puesto que se supone que el cuerpo B está aislado y no hay fuerzas externas actuando, la energía cinética de la nave espacial con respecto a B permanece constante. Es decir $|v_i'| = |v_f'|$
  - Momento angular: El movimiento se produce en un plano, y el momento angular respecto a B se conserva.
- **Ecuaciones de la trayectoria hiperbólica**:
  - La nave espacial sigue una órbita hiperbólica, descrita por: $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ donde $e > 1$ es la excentricidad y p es el latus de la hipérbola.
  - El ángulo ángulo de desviación δ está relacionado con la excentricidad por: $\delta = 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\right)$
  - El parámetro de impacto b y el eje semimayor a de la hipérbola satisfacen: $b = a\sqrt{e^2-1}$