FRACTURAS EN ESFERAS AUTOGRAVITANTES ANISÓTROPAS MODELADAS POR ECUACIONES DE ESTADO NO BARÓTROPAS EN RELATIVIDAD GENERAL Y FÍSICA NEWTONIANA

PROPUESTA DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

PRESENTADO POR:
DANIEL FELIPE SUÁREZ URANGO

DIRECTOR:
DR. LUIS ALBERTO NÚNEZ DE VILLACENCIO MARTÍNEZ
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

Co-DIRECTOR:
DR. JUSTO OSPINO ZÚÑIGA
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS APLICADAS
SALAMANCA

2017

1. RESUMEN

Se propone extender el enfoque de fracturas desarrollado por González, Navarro y Núñez [1] a esferas autogravitantes anisótropas descritas por ecuaciones de estado no bárotropas para la presión tangencial de la forma $P_\perp = P_\perp(P)$, en el marco relativista y newtoniano, al analizar el cambio de signo de la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada a lo largo de la coordenada radial debido a las fluctuaciones locales en la densidad.

2. INTRODUCCIÓN

Los efectos de las inestabilidades en objetos autogravitantes son clave en la Astrofísica y han sido estudiados por décadas. El contenido material de estos objetos son modelados macroscópicamente a través de ecuaciones de estado que relacionan sus variables físicas e intentan describir los procesos físicos microscópicos más importantes que ocurren en su interior. Así, las patologías sobre el comportamiento de las ecuaciones de estado bajo perturbaciones de sus variables físicas –como la densidad de energía y la presión– son críticas para entender la estabilidad de este tipo de configuraciones materiales (véase [2] y referencias allí citadas).

En Relatividad General las inestabilidades en fluidos han sido ampliamente consideradas bajo dos enfoques complementarios: estudiando la evolución de las perturbaciones dinámicas e identificando inestabilidades convectivas que ocurren dentro de la distribución material. El primero de los enfoques se inició con las obras de S. Chandrasekhar, R.F. Tooper y J.M. Bardeen [3–7] y formalizados una década más tarde por J.L. Friedman y B.F. Schutz [8]. El segundo esquema aplica el principio de flotabilidad que obliga a la presión y a la densidad de energía a disminuir de adentro hacia fuera en cualquier configuración de la materia hidrostática [9–11].

L. Herrera y colaboradores [12–15] propusieron el enfoque de “fracturas” para estudiar las inestabilidades en distribuciones de materiales relativistas, justo después que la configuración se aleja de su equilibrio. Ellos estudiaron la aceleración de marea generada por una perturbación en elementos fluidos contiguos y mostraron que es posible identificar una distribución de la fuerza radial total, que cambia de signo dentro del sistema. Para estudiar las fracturas Herrera y colaboradores suponen perturbaciones constantes y simultáneas de la densidad y de la anisotropía de las presiones y las identifican cada vez que la fuerza total cambia de signo.

Otra contribución al marco conceptual de las fracturas en Relatividad General ha sido hecha por Abreu, Hernández y Núñez [16] y más recientemente por González, Navarro y Núñez [1]. En ambos casos se consideran fluidos anisótropos con ecuaciones de estado barótropas para los perfiles de presiones radiales y tangenciales, $P = P(\rho)$ y $P_\perp = P_\perp(\rho)$. Los primeros autores presentan un criterio para identificar posibles inestabilidades por fractura, asociado al cambio de signo de la diferencia entre la velocidad del sonido tangencial y radial; mientras que los últimos asumen fluctuaciones no constantes en la densidad (las cuales también afectan el gradiente de presión) y las fracturas son identificadas cuando se presenta un cambio de signo en la ecuación de equilibrio perturbada obtenida a través de una expansión en series de Taylor.

En este trabajo se propone estudiar la estabilidad de esferas autogravitantes anisótropas bajo perturbaciones locales de la densidad utilizando el concepto de fracturas [1] en el marco relativista y newtoniano, en sistemas descritos por ecuaciones de estado donde la presión tangecial depende de la presión radial (no barótropa) con el fin de analizar configuraciones de materia más complejas [17,18]; esperando que dichas configuraciones, al tener una estructura más compleja, pueda brindar mayor estabilidad que los sistemas descritos por ecuaciones de estado barótropas.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Cuando se modelan objetos autogravitantes esféricos, el caso más simple es considerar una configuración material isótropa en donde la presión tangencial y radial dentro del fluido sean iguales; este tipo de sistemas es descrito por ecuaciones de estado barótropas en las que la presión depende únicamente de la densidad. Al extender estas ecuaciones de estado (barótropas) a configuraciones de materia anisótropas se encuentra que estas son demasiado restrictivas al momento de permitir familias de soluciones con densidades de energía central diferentes [19], veamos: asumamos primero que existe una solución para una configuración estática simétricamente esférica regidas por ecuaciones de estado barótropas de la forma $P = P(\rho)$ y $P_{\perp} = P_{\perp}(\rho)$, con densidad de energía ρ_0 en $r = 0$ (el centro de simetría) y presión anisótropa ($\Delta = P_{\perp} - P$) diferente de cero en algún $r = r_1 > 0$; ya que en $r = 0$ la presión anisótropa debe ser cero, entonces tenemos que $P(\rho_0) = P_{\perp}(\rho_0)$; de otra parte, por lo supuesto anteriormente, en $r = r_1$ tenemos que la presión anisótropa es diferente de cero y por tanto $P(\rho_1) \neq P_{\perp}(\rho_1)$, lo que nos lleva a $\rho_0 \neq \rho_1$. Si ahora consideramos la posibilidad de construir la solución con densidad de energía cental igual a ρ_1 encontramos que la condición de la presión anisotrópa en $r = 0$ no se cumple; por esto, se hace necesario una ecuación de estado más completa (no barótropa) con el fin de cumplir esta condición de aceptabilidad física. Así, las ecuaciones de estado más complejas dependerán de otras variables de estado además de la densidad, e incluso, pueden no depender de esta última de forma explícita. Este tipo de relaciones, por ejemplo, son utilizadas en [17] para encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell para distribuciónes de materia anisótropa en presencia de campos electromagnéticos; y en [18] para estudiar el efecto de la presión anisótropa (la cual representa un tipo de fuerza generada por la anisotropía) en algunas propiedades de las estrellas de neutrones compuesta por hiperones en su núcleo.

Lo anterior motiva a extender el esquema de fracturas presentado en [1] utilizando una ecuación de estado no barótropa para la presión tangencial con el fin de analizar configuraciones materiales anisótropas bajo perturbaciones locales de la densidad en Relatividad General y Física Newtoniana.

4. OBJETIVOS

4.1. Objetivo general

Extender el formalismo de fracturas en esferas autogravitantes anisótropas proponiendo ecuaciones de estado no barótropas, desarrollado en el marco de la relatividad general y la física newtoniana.

4.2. Objetivos específicos

- Utilizar ecuaciones de estado no barótropas y analizar los efectos de la perturbación en las variables de estado
- Plantear la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada para los casos newtoniano y relativista, y compararla con el trabajo previo
- Analizar la estabilidad de configuraciones anisótropas de materia en el marco de la Relatividad General y la Física Newtoniana en sistemas descritos por ecuaciones de estado no barótropas desde el concepto de fracturas

5. ESTADO DEL ARTE

5.1. Fracturas

El concepto de fracturas fue introducido por Herrera y colaboradores [12–15] para describir el comportamiento de configuraciones materiales autogravitantes anisótropas, justo después de partir del equilibrio, cuando la fuerza radial cambia su signo en algún valor de la coordenada radial dentro de la configuración. Para esto se consideró una métrica con simetría esférica,

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\nu(r)}\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\lambda(r)}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\,, \tag{1}$$

y un fluido anisotrópo,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_\perp)u_\mu u_\nu + P_\perp g_{\mu\nu} + (P - P_\perp)v_\mu v_\nu\,, \tag{2}$$

donde $u_\mu = (\mathrm{e}^\nu, 0, 0, 0)\,, v_\mu = (0, \mathrm{e}^\lambda, 0, 0)$, ρ describe la densidad de energía, P la presión radial, y $P_\perp$ la presión tangencial del fluido.

Entonces, la ecuación de equilibrio hidrostático que describe esta configuración material anisótropa está dada por

$$\mathcal{R} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} + (\rho + P)\frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r-2m)} - \frac{2(P_\perp - P)}{r} = 0, \tag{3}$$

donde el término $P_\perp - P$ surge de la anisotropía en la configuración. La ecaución (3) también representa la distribución de fuerzas dentro del sistema.

El enfoque de fracturas desarrollado por González, Navarro y Núñez [1] propone un nuevo esquema para analizar la estabilidad de esferas autogravitantes al examinar las influencias de las fluctuaciones locales de la densidad en la estabilidad de configuraciones de materia. Este tipo de perturbación es representada por cualquier función de soporte compacto definida en un intervalo cerrado, y afecta a todas las variables físicas incluyendo el gradiente de presión y la función masa.

Una perturbación en la densidad, $\rho \to \rho + \delta\rho$, induce una perturbación de su gradiente,

$$\rho'(\rho + \delta\rho) \approx \rho'(\rho) + \delta\rho' = \rho'(\rho) + \frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho, \tag{4}$$

donde las variables primadas expresan derivadas respecto a la coordenada radial, y esta debe ser consistente con la expresión

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\rho + \delta\rho] = \rho'(\rho) + \delta\rho' = \rho'(r) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\delta\rho, \tag{5}$$

de tal manera que se pueda intercambiar la prima y la δ así

$$\delta\rho' = \frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\delta\rho. \tag{6}$$

Para tener un esquema de perturbación consistente, se debe considerar perturbaciones locales de la densidad, las cuales pueden ser descritras apropiadamente por cualquier función de soporte compacto, $\delta\rho = \delta\rho(r)$, definida en un intervalo cerrado $\Delta\tilde{r} \ll R$, siendo R el radio total de la configuración.

Estas perturbaciones locales generan fluctuaciones en la masa, la presión radial, la presión tangencial y el gradiente de presión, las cuales pueden ser representadas por términos lineales en la fluctuación de la densidad como

$$P(\rho + \delta\rho) \approx P(\rho) + \delta P \approx P(\rho) + \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho \tag{7}$$

$$P_\perp(\rho + \delta\rho) \approx P_\perp(\rho) + \delta P_\perp \approx P_\perp(\rho) + \frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho \tag{8}$$

$$P'(\rho + \delta\rho) \approx P'(\rho) + \delta P' \approx P'(\rho) + \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho \tag{9}$$

$$m(\rho + \delta\rho) \approx m(\rho) + \delta m \approx m(\rho) + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho \tag{10}$$

donde la última parte en cada ecuación representa la variable perturbada calculada por medio de una expansión en series de Taylor. Se tiene entonces que

$$\delta P = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = v^2\delta\rho \tag{11}$$

$$\delta P_\perp = \frac{\mathrm{d}P_\perp}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = v_\perp^2\delta\rho \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \delta P' = \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right]\delta\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right]\delta\rho\ , \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[v^2\rho'\right]\delta\rho &= \frac{1}{\rho'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[v^2\rho'\right]\delta\rho = \left[\left(v^2\right)' + v^2\frac{\rho''}{\rho'}\right]\delta\rho \end{aligned} \tag{13}$$

$$\delta m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho}\right)\delta\rho = \frac{m'}{\rho'}\delta\rho = \frac{4\pi r^2\rho}{\rho'}\delta\rho \tag{14}$$

Para establecer el efecto de las perturbaciones en la fuerza total, expandimos (3) como

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}_0\left(\rho, P, P_\perp, P', m\right) + \delta\mathcal{R}, \tag{15}$$

y lo comparamos con la correspondiente expansión de Taylor, quedando

$$\delta \mathcal{R} = \delta\rho \left\{ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P} v^2 + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P_\perp} v_\perp^2 + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial m} \left[\frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \right] + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial P'} \left[\left(v^2\right)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right] \right\}, \tag{16}$$

donde

$$\mathcal{R}_0(\rho, P, P_\perp, P', m) = 0 \tag{17}$$

porque inicialmente la configuración está en equilibrio.

Las fracturas serán identificadas cuando se presente un cambio de signo en la ecuación de equilibrio perturbada (16).

5.2. Ecuación de Estado

La temperatura (T), presión (P), y los potenciales electroquímicos (μ_j) son derivadas parciales de una función de la entropía (S), el volumen (V), y el número de moles ($N_1\ .\ .\ .\ N_r$); y consecuentemente son también función de S, V, $N_1\ .\ .\ .\ N_r$. Se tiene entonces un conjunto de relaciones funcionales,

$$T = T(S, V, N_1 ... N_r), \tag{18}$$

$$P = P(S, V, N_1 ... N_r), \tag{19}$$

$$\mu_j = \mu_j(S, V, N_1 ... N_r) \tag{20}$$

Tales relaciones, que expresan parámetros intensivos en términos de los parámetros extensivos independientes, son llamadas ecuaciones de estado [20]. El conocimiento de todas las ecuaciones de estado de un sistema es equivalente al conocimiento de la ecuación fundamental y consecuentemente el sistema está termodinámicamente completo. Así, las ecuaciones de estado son útiles para describir el estado de la materia bajo un conjunto de condiciones físicas dadas.

5.2.1. Ecuación de Estado barótropa

Una ecuación de estado barótropa es aquella en donde la densidad depende únicamente de la presión, esto es, $P = P(\rho)$. En Astrofísica, los fluidos barótropos son utilizados en el estudio interno de las estrellas, comunmente modeladas por ecuaciones de estado polítropas de la forma $P \approx \rho^\Gamma$.

6. HIPÓTESIS

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por González, Navarro y Núñez [1], al tener presente que las perturbaciones locales en la densidad modifican el gradiente de presión, esperamos que este enfoque de fracturas pueda extenderse a sistemas descritos por ecuaciones de estado no barótropas con el fin de estudiar configuraciones de materia más complejas [17, 18].

7. METODOLOGÍA

La metodología que se seguirá para abordar el problema planteado y para cumplir con los objetivos propuestos viene dada por los siguientes pasos:

1. En esta primera parte se utilizará una ecuación de estado no barótropa para la presión tangencial, la cual dependerá explícitamente de la presión radial; esto es, $P = P(\rho)$ y $P_\perp = P_\perp(P)$. Luego se hallará la expresión correspondiente a cada una de las variables de estado perturbadas por medio de una expansión en series de Taylor. Todo esto en el marco de la Relatividad General y la Física Newtoniana.

2. A continuación, se hallará una expresión para la ecuación de equilibrio hidrostático perturbada a partir de la expansión en series de Taylor y se reemplazará en esta las expresiones para las variables de estado perturbadas. La ecuación de equilibrio hidrostático se comparará con la obtenida en [1] para intuir o predecir los efectos de la no barotropía de la presión tangencial en la configuración material anisótropa.

3. Una vez obtenida la expresión para la ecuación de equilibrio perturbada, se procederá a integrar numéricamente el sistema de ecuaciones conformado por esta y las ecuaciones de estado junto con la función masa. Para mejor lectura del resultado, este será representado en una gráfica de $\delta\mathcal{R}$ contra r (coordenada radial).

4. Por último, se compararán los resultados obtenidos por el enfoque de fracturas con otros ya realizados.

5. Con el fin de completar el esquema de fracturas, este también se desarrollará para el caso Newtoniano isótropo y anisótropo con ecuaciones de estado barótropas.

8. CRONOGRAMA

Actividad	**Tiempo (meses)**				
	1	2	3	4	5
Revisión bibliográfica	X	X	X	X	X
Utilizar ecuación de estado no barótropa y hallar la expresión para la ecuación de equilibrio perturbada	X				
Integrar el sistema de ecuaciones y representar la solución gráficamente		X	X		
Comparación con otros modelos y análisis de los resultados			X	X	
Escritura y sustentación del informe final			X	X	X

Referencias

[1] G. A. González, A. Navarro, and L. A. Núñez, "Cracking of anisotropic spheres in general relativity revisited," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 600, p. 012014, IOP Publishing, 2015.

[2] J. L. Friedman and N. Stergioulas, "Instabilities of relativistic stars," in *General Relativity, Cosmology and Astrophysics*, pp. 427–458, Springer, 2014.

[3] S. Chandrasekhar, "Dynamical instability of gaseous masses approaching the schwarzschild limit in general relativity," *Physical Review Letters*, vol. 12, no. 4, p. 114, 1964.

[4] S. Chandrasekhar, "A general variational principle governing the radial and the non-radial oscillations of gaseous masses.," *The Astrophysical Journal*, vol. 139, p. 664, 1964.

[5] R. F. Tooper, "General relativistic polytropic fluid spheres.," *The Astrophysical Journal*, vol. 140, p. 434, 1964.

[6] R. F. Tooper, "Adiabatic fluid spheres in general relativity.," *The Astrophysical Journal*, vol. 142, p. 1541, 1965.

[7] J. M. Bardeen, *Stability and dynamics of spherically symmetric masses in general relativity.* PhD thesis, California Institute of Technology, 1965.

[8] J. Friedman and B. Schutz, "On the stability of relativistic systems," *The Astrophysical Journal*, vol. 200, pp. 204–220, 1975.

[9] H. Bondi, "Massive spheres in general elativity," in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 282, pp. 303–317, The Royal Society, 1964.

[10] K. S. Thorne, "Validity in general relativity of the schwarzschild criterion for convection," *The Astrophysical Journal*, vol. 144, p. 201, 1966.

[11] A. Kovetz, "Schwarzschild's criterion for convective instability in general relativity," *Zeitschrift fur Astrophysik*, vol. 66, p. 446, 1967.

[12] L. Herrera, "Cracking of self-gravitating compact objects," *Physics Letters A*, vol. 165, no. 3, pp. 206–210, 1992.

[13] A. Di Prisco, E. Fuenmayor, L. Herrera, and V. Varela, "Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects," *Physics Letters A*, vol. 195, no. 1, pp. 23–26, 1994.

[14] A. Di Prisco, L. Herrera, and V. Varela, "Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy," *General Relativity and Gravitation*, vol. 29, no. 10, pp. 1239–1256, 1997.

[15] L. Herrera, E. Fuenmayor, and P. Leon, "Cracking of general relativistic anisotropic polytropes," *Physical Review D*, vol. 93, no. 2, p. 024047, 2016.

[16] H. Abreu, H. Hernandez, and L. Núñez, "Sound speeds, cracking and the stability of self-gravitating anisotropic compact objects," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 24, no. 18, p. 4631, 2007.

[17] S. Thirukkanesh and S. Maharaj, "Charged anisotropic matter with a linear equation of state," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 25, no. 23, p. 235001, 2008.

[18] A. Sulaksono, "Anisotropic pressure and hyperons in neutron stars," *International Journal of Modern Physics E*, vol. 24, no. 01, p. 1550007, 2015.

[19] D. Horvat, S. Ilijić, and A. Marunović, "Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state," *Classical and quantum gravity*, vol. 28, no. 2, p. 025009, 2010.

[20] H. Callen, "Thermodynamics john wiley & sons inc.," *New York*, 1960.