Polos, cortes y transformaciones conformes

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

16 de abril de 2021

Agenda polos, cortes y transformaciones conformes

Funciones univaluadas

- Si $w = f(z)$ donde $z = r\exp(i\theta) = r\exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces $w = \mathrm{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$ $w = \mathrm{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.

Funciones univaluadas

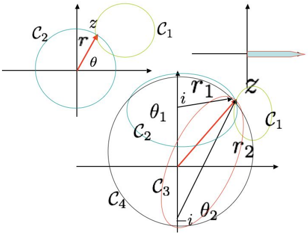
- Si $w = f(z)$ donde $z = r\exp(i\theta) = r\exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces $w = \mathrm{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$ $w = \mathrm{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.
- $w = \sqrt{z} \Rightarrow w = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$ será función para $n = 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ Para $n = 1$ entonces $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$

Funciones univaluadas

- Si $w = f(z)$ donde $z = r\exp(i\theta) = r\exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces
  $w = \mathrm{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$
  $w = \mathrm{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.
- $w = \sqrt{z} \Rightarrow w = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces
  $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$ será función para $n = 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  Para $n = 1$ entonces $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$
- $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \;\Rightarrow\; f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})\,(r_2 e^{i\theta_2})}$
  $f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

Funciones univaluadas

- Si $w = f(z)$ donde $z = r\exp(i\theta) = r\exp(i(\theta + 2n\pi))$ entonces $w = \mathrm{Ln}(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$ y $w = \ln(z) \Rightarrow w = \ln(r) + i\theta$
  $w = \mathrm{Ln}(z)$ es multivaluada, **no es función** y $w = \ln(z)$ es función.
- $w = \sqrt{z} \Rightarrow w = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces
  $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$ será función para $n = 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  Para $n = 1$ entonces $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$
- $f(z) = \sqrt{z^2+1} \;\Rightarrow\; f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})\,(r_2 e^{i\theta_2})}$
  $f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$
- Entonces



Ramificación de corte 1/2

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.

Ramificación de corte 1/2

- Ramificación de corte $=$ líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$

Ramificación de corte 1/2

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,

Ramificación de corte 1/2

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* se conoce como *punto de ramificación*. Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$

Ramificación de corte 1/2

- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* se conoce como *punto de ramificación*. Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$
- El dominio de una función $f(z) = \sqrt{z}$ son el conjunto de valores que puede tomar z

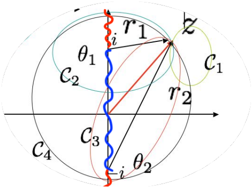
Ramificación de corte 1/2

- Ramificación de corte $=$ líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* se conoce como *punto de ramificación*. Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$
- El dominio de una función $f(z) = \sqrt{z}$ son el conjunto de valores que puede tomar z
- Si esos valores “siguen” una curva cerrada e incluyen un *punto de ramificación*, esa función no será analítica.

Ramificación de corte 2/2

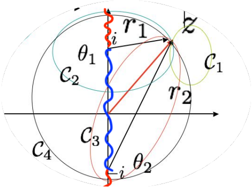
Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{r_1 r_2}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

- Contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el $\mathcal{C}_1$.



Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

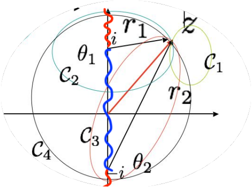
- Contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el $\mathcal{C}_1$.
- Contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.



Ramificación de corte 2/2

Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{r_1 r_2}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

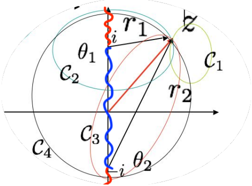
- Contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el $\mathcal{C}_1$.
- Contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_3$ incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.



Ramificación de corte 2/2

Consideremos la función $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$

- Contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ es analítica y retoma su valor inicial luego de recorrer el $\mathcal{C}_1$.
- Contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_3$ incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_4$ incluye ambos como punto de ramificación, $z = i$ y $z = -i$, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to f(z)$ retoma su valor.



Singularidades y ceros de funciones complejas 1/2

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$y este punto es entonces una singularidad aislada.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \exists$.

Singularidades y ceros de funciones complejas 1/2

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.

Singularidades y ceros de funciones complejas 1/2

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \quad \nexists$, para ningún n.

- Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces z_0 es una singularidad no aislada.
- z_0 es una singularidad no aislada para $f(z) = \sqrt{z}$
- Si $f(z)$ tiene un punto singular en $z = z_0$ pero es analítica alrededor de z_0 y sin otras singularidades, entonces $z = z_0$ es **una singularidad aislada**. Los puntos de ramificación no son singularidades aisladas.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$y este punto es entonces una singularidad aislada.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \quad \nexists$, para ningún n.
- Los **ceros de una función compleja**, $f(z_0) = 0$, se clasifican igual que los polos $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con n entero positivo y $g(z) \neq 0 \quad \forall\ z$.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z \to z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z\rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z\rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z\to z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z\to z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0.
- Si z_0 es una **singularidad removible** entonces encontramos que $f(z) \to 0/0$ cuando $z \to z_0$, por ejemplo: $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \Rightarrow$ $f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\cdots\right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\cdots\right) \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = 1$

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
$z = x + iy \;\leftrightarrow\; w = r + is \;\Rightarrow\; w = g(z) = r(x,y) + is(x,y) \;\leftrightarrow$
$z = h(w) = x(r,s) + iy(r,s)$

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
  $z = x + iy \ \leftrightarrow \ w = r + is \ \Rightarrow \ w = g(z) = r(x,y) + is(x,y) \ \leftrightarrow$
  $z = h(w) = x(r,s) + iy(r,s)$
- Transformaciones $(x,y) \leftrightarrow (r,s)$ entre diagramas de Argand,

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son: $z = x + iy \;\leftrightarrow\; w = r + is \;\Rightarrow\; w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \;\leftrightarrow\; z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
  $z = x + iy \;\leftrightarrow\; w = r + is \;\Rightarrow\; w = g(z) = r(x,y) + is(x,y) \;\leftrightarrow$
  $z = h(w) = x(r,s) + iy(r,s)$
- Transformaciones $(x,y) \leftrightarrow (r,s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.
- Para todo punto z y w (excepto en aquellos en los cuales $g'(z)$ y por lo tanto $h'(w)$ son cero o infinita) **transformaciones conformes** cumplen con:
  - Curvas continuas en z transforman en curvas continuas en w.
  - Cualquier función analítica en $z = x + iy$ transforma en otra función $w = r + is$ también analítica.
  - Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre las curvas que se interceptan.
  - El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.

Transformaciones conformes

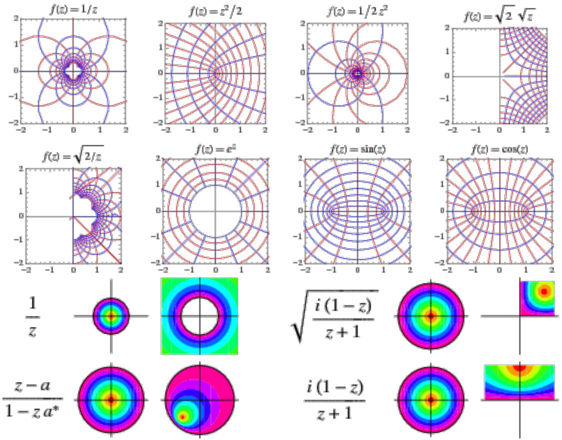


Figura: Tranformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping**. *MathWorld–A Wolfram Web Resource.* http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** $\theta \quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** $\theta \quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** θ $\quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z| \exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano. Para convencernos de ello notamos que $|w| = \left| e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|.$

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** $\theta \quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z| \exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano. Para convencernos de ello notamos que $|w| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior $(y \geq 0)$, entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** $\theta \quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano. Para convencernos de ello notamos que $|w| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior $(y \geq 0)$, entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.
- La igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$.

Recapitulando

En presentación consideramos

1.