#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



3 de abril de 2025

1/16

L.A. Núñez (UIS) Dispersión 3 de abril de 2025

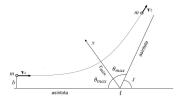
### Agenda



- Dispersión: El concepto
- Parámetro de Impacto
- 3 Dispersión Hiperbólica para  $V(r) = -\frac{k}{r}$
- 4 Dispersión hiperbólica para  $V(r) = \frac{k}{r}$
- Sección eficaz
- Sección eficaz diferencial
- El experimento de Rutherford
- Recapitulando
- Para la discusión

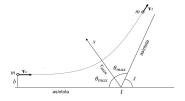


• La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía E>0 debida a la interacción en un potencial V(r)





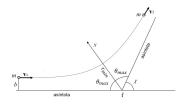
• La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía E>0 debida a la interacción en un potencial V(r)



• Consideremos una partícula de masa M situada en el foco f y una partícula con masa  $m \ll M(\mu \approx m)$  incidente desde  $r \to \infty$ 



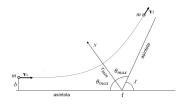
• La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía E>0 debida a la interacción en un potencial V(r)



- Consideremos una partícula de masa M situada en el foco f y una partícula con masa  $m \ll M(\mu \approx m)$  incidente desde  $r \to \infty$
- La partícula describe una trayectoria abierta desde  $r=\infty$  hasta  $r=r_{\min}$  y retorna a  $r=\infty$ , cambiando la dirección de su velocidad.



• La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía E>0 debida a la interacción en un potencial V(r)



- Consideremos una partícula de masa M situada en el foco f y una partícula con masa  $m \ll M(\mu \approx m)$  incidente desde  $r \to \infty$
- La partícula describe una trayectoria abierta desde  $r=\infty$  hasta  $r=r_{\min}$  y retorna a  $r=\infty$ , cambiando la dirección de su velocidad.
- El ángulo entre la dirección del vector velocidad inicial v<sub>0</sub> y la dirección del vector velocidad final v<sub>f</sub> se denomina ángulo de dispersión, que denotaremos por χ

### Parámetro de Impacto

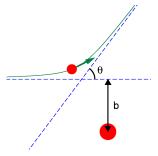


• La energía inicial de la partícula en  $r=\infty$  es  $E={1\over 2}mv_0^2$ 

#### Parámetro de Impacto



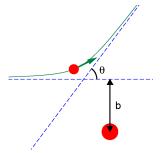
- La energía inicial de la partícula en  $r=\infty$  es  $E=\frac{1}{2}mv_0^2$
- El parámetro de impacto b es la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad inicial  $\mathbf{v}_0$  de la partícula incidente y la recta paralela que pasa por el centro del potencial V(r)



### Parámetro de Impacto



- La energía inicial de la partícula en  $r=\infty$  es  $E={1\over 2}mv_0^2$
- El parámetro de impacto b es la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad inicial  $\mathbf{v}_0$  de la partícula incidente y la recta paralela que pasa por el centro del potencial V(r)



• Los datos claves para la dispersión con campos centrales son b y E.



• La magnitud del momento angular de la partícula será  $L = rp \operatorname{sen} (\pi - \theta) = mv_0 r \operatorname{sen} \theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$ 





- La magnitud del momento angular de la partícula será  $L = rp \operatorname{sen} (\pi \theta) = mv_0 r \operatorname{sen} \theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si  $V(r)=-\frac{k}{r}$ , la órbita con E>0 es una hipérbola,  $\frac{q}{r}=1+e\cos\theta$ , con  $q=\frac{L^2}{mk}=\frac{2Eb^2}{k}$  y  $e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}>1$



- La magnitud del momento angular de la partícula será  $L = rp \operatorname{sen} (\pi \theta) = mv_0 r \operatorname{sen} \theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si  $V(r)=-\frac{k}{r}$ , la órbita con E>0 es una hipérbola,  $\frac{q}{r}=1+e\cos\theta$ , con  $q=\frac{L^2}{mk}=\frac{2Eb^2}{k}$  y  $e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}>1$
- Entonces:  $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$ , para  $\theta = 0$  y  $r_{\text{máx}} \to \infty$  para  $\cos \theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$

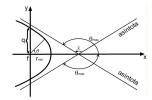
5 / 16



- La magnitud del momento angular de la partícula será  $L = rp \operatorname{sen}(\pi \theta) = mv_0 r \operatorname{sen} \theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si  $V(r)=-\frac{k}{r}$ , la órbita con E>0 es una hipérbola,  $\frac{q}{r}=1+e\cos\theta$ , con  $q=\frac{L^2}{mk}=\frac{2Eb^2}{k}$  y  $e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}>1$
- Entonces:  $r_{\min} = \frac{q}{1+e}$ , para  $\theta = 0$  y  $r_{\max} \to \infty$  para  $\cos \theta_{\max} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\max} < \pi$
- El ángulo de dispersión  $\chi$  entre las asíntotas es  $\chi = 2\theta_{\text{máx}} \pi$ .

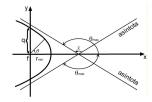


- La magnitud del momento angular de la partícula será  $L = rp \operatorname{sen}(\pi \theta) = mv_0 r \operatorname{sen} \theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si  $V(r)=-\frac{k}{r}$ , la órbita con E>0 es una hipérbola,  $\frac{q}{r}=1+e\cos\theta$ , con  $q=\frac{L^2}{mk}=\frac{2Eb^2}{k}$  y  $e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}>1$
- Entonces:  $r_{\min} = \frac{q}{1+e}$ , para  $\theta = 0$  y  $r_{\max} \to \infty$  para  $\cos \theta_{\max} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\max} < \pi$
- El ángulo de dispersión  $\chi$  entre las asíntotas es  $\chi = 2\theta_{\rm m\acute{a}x} \pi.$
- Esto es  $\cos\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$





- La magnitud del momento angular de la partícula será  $L = rp \operatorname{sen} (\pi \theta) = mv_0 r \operatorname{sen} \theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si  $V(r)=-\frac{k}{r}$ , la órbita con E>0 es una hipérbola,  $\frac{q}{r}=1+e\cos\theta$ , con  $q=\frac{L^2}{mk}=\frac{2Eb^2}{k}$  y  $e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{2Eb}{k}\right)^2}>1$
- Entonces:  $r_{\min} = \frac{q}{1+e}$ , para  $\theta = 0$  y  $r_{\max} \to \infty$  para  $\cos \theta_{\max} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\max} < \pi$
- El ángulo de dispersión  $\chi$  entre las asíntotas es  $\chi = 2\theta_{\rm m\acute{a}x} \pi.$
- Esto es  $\cos\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$



Oumuamua y Borisov



• La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo  $V(r) = \frac{k}{r}$  es  $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{l^2}$ , con u = 1/r

L.A. Núñez (UIS) Dispersión 3 de abril de 2025 6/16

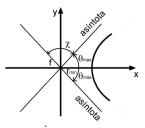


- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo  $V(r) = \frac{k}{r}$  es  $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$ , con u = 1/r
- Su solución es  $u=u_h+u_p$  con  $u_h=A\cos(\theta-\theta_0)$  y  $u_p=-\frac{mk}{L^2}$

L.A. Núñez (UIS) Dispersión 3 de abril de 2025 6 / 16

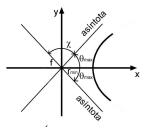


- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo  $V(r) = \frac{k}{r}$  es  $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$ , con u = 1/r
- Su solución es  $u=u_h+u_p$  con  $u_h=A\cos(\theta-\theta_0)$  y  $u_p=-\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será  $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} (e \cos \theta 1)$





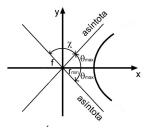
- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo  $V(r) = \frac{k}{r}$  es  $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$ , con u = 1/r
- Su solución es  $u=u_h+u_p$  con  $u_h=A\cos(\theta-\theta_0)$  y  $u_p=-\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será  $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} (e \cos \theta 1)$



• Donde  $r_{\min} = \frac{q}{e-1}$  para  $\theta = 0$  y  $r_{\max} \to \infty$ , para  $\cos \theta_{\max} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \theta_{\max} < \frac{\pi}{2}$ 



- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo  $V(r) = \frac{k}{r}$  es  $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$ , con u = 1/r
- Su solución es  $u=u_h+u_p$  con  $u_h=A\cos(\theta-\theta_0)$  y  $u_p=-\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será  $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} (e \cos \theta 1)$



- Donde  $r_{\min} = \frac{q}{e-1}$  para  $\theta = 0$  y  $r_{\max} \to \infty$ , para  $\cos \theta_{\max} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \theta_{\max} < \frac{\pi}{2}$
- La órbita hiperbólica no encierra al foco y el ángulo de dispersión es  $\chi = \pi 2\theta_{\text{máx}}$ , i.e.  $\operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{4}$



ullet El ángulo de dispersión  $\chi$  se determina geométricamente con  $heta_{ extsf{máx}}$ 

L.A. Núñez (UIS) Dispersión 3 de abril de 2025 7 / 16



- ullet El ángulo de dispersión  $\chi$  se determina geométricamente con  $heta_{ ext{máx}}$
- Este ángulo es

$$\theta_{
m m\acute{a}x} = rac{1}{\sqrt{2m}} \int_{r_{
m m\'{i}n}}^{r_{
m m\'{a}x}} rac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - rac{l^2}{2mr^2}}} = b \int_{r_{
m m\'{i}n}}^{\infty} rac{dr}{r^2 \sqrt{1 - rac{V(r)}{E} - rac{b^2}{r^2}}}$$

7 / 16



- ullet El ángulo de dispersión  $\chi$  se determina geométricamente con  $heta_{ extsf{máx}}$
- Este ángulo es

$$\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}} = b \int_{r_{\text{min}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

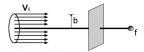
• Es decir  $\theta_{
m máx}=b\int_0^{u_m}rac{du}{\sqrt{1-rac{V(u)}{E}-b^2u^2}}$  donde u=1/r, con  $u=0 (r o\infty)$  y  $u_m=1/r_{
m mín}$ 



• Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos  $\chi$ .

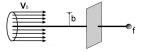


- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos  $\chi$ .
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo  $I = \frac{\# \text{ part.}}{\text{área} \times t}$





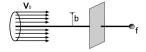
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos  $\chi$ .
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo I = # part. área x t



• Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo  $\chi$ ,



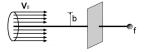
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos  $\chi$ .
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo I = # part. área x t



- Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo  $\chi$ ,
- ullet El cono encierra un ángulo sólido  $\Omega$ .



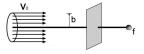
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos  $\chi$ .
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo I = # part. área x t



- Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo  $\chi$ ,
- ullet El cono encierra un ángulo sólido  $\Omega$ .
- El ángulo sólido diferencial  $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(2\pi r \sin\chi)(rd\chi)}{r^2} = 2\pi \sin\chi d\chi$



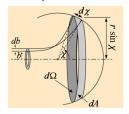
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos  $\chi$ .
- La intensidad del flujo I es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo  $I = \frac{\# part.}{400 \text{ yr}}$



- Las partículas con el mismo valor b son dispersadas en un cono con vértice en f y ángulo  $\chi$ ,
- El cono encierra un ángulo sólido  $\Omega$ .
- El ángulo sólido diferencial  $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(2\pi r \sin \chi)(r d\chi)}{r^2} = 2\pi \sin \chi d\chi$
- La sección eficaz de dispersión  $\sigma(\Omega)$  es la fracción de partículas incidentes que son desviadas dentro del ángulo sólido  $\Omega$ ,

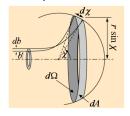


• Entonces  $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$ , corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en  $d\Omega$ .





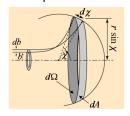
• Entonces  $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$ , corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en  $d\Omega$ .



ullet Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido  $d\Omega.$ 



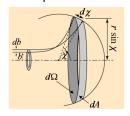
• Entonces  $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{l}d\Omega$ , corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en  $d\Omega$ .



- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$ .
- Las partículas incidentes en el anillo de radio b y ancho db por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo  $d\Omega$  por unidad de tiempo,  $n(\Omega)d\Omega$ .



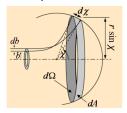
• Entonces  $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{l}d\Omega$ , corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en  $d\Omega$ .



- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$ .
- Las partículas incidentes en el anillo de radio b y ancho db por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo  $d\Omega$  por unidad de tiempo,  $n(\Omega)d\Omega$ .
- Esto es  $I2\pi bdb = I\sigma(\Omega)d\Omega \Leftrightarrow 2\pi bdb = \sigma(\Omega)2\pi \text{sen } \chi d\chi$



• Entonces  $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$ , corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en  $d\Omega$ .



- ullet Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido  $d\Omega$ .
- Las partículas incidentes en el anillo de radio b y ancho db por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo  $d\Omega$  por unidad de tiempo,  $n(\Omega)d\Omega$ .
- Esto es  $I2\pi bdb = I\sigma(\Omega)d\Omega \Leftrightarrow 2\pi bdb = \sigma(\Omega)2\pi \operatorname{sen} \chi d\chi$
- La sección eficaz en función del ángulo de dispersión es  $\sigma(\chi) = \frac{b}{\text{sen }\chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|$ .

### El experimento de Rutherford 1/4



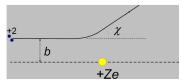
• Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo V(r) = qq'/r, el núcleo actúa como centro dispersor de carga q = +Ze.

L.A. Núñez (UIS) Dispersión 3 de abril de 2025 10 / 16

### El experimento de Rutherford 1/4

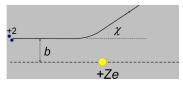


- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo V(r) = qq'/r, el núcleo actúa como centro dispersor de carga q = +Ze.
- Las partículas incidentes son partículas  $\alpha$  con carga q'=+2e.





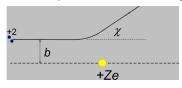
- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo V(r) = qq'/r, el núcleo actúa como centro dispersor de carga q = +Ze.
- Las partículas incidentes son partículas  $\alpha$  con carga q'=+2e.



• Calculemos el ángulo de dispersión  $\chi$  para una partícula incidente con energía E>0 y parámetro de impacto b en un potencial central repulsivo V(r)=k/r, con  $k=qq'=2Ze^2$ .



- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo V(r) = qq'/r, el núcleo actúa como centro dispersor de carga q = +Ze.
- Las partículas incidentes son partículas  $\alpha$  con carga q'=+2e.



- Calculemos el ángulo de dispersión  $\chi$  para una partícula incidente con energía E>0 y parámetro de impacto b en un potencial central repulsivo V(r)=k/r, con  $k=qq'=2Ze^2$ .
- La integral para  $\theta_{\max}$  con este potencial es  $\theta_{\max} = b \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{k}{E}u-b^2u^2}}$
- $\bullet \text{ Entonces } \theta_{\text{máx}} = \cos^{-1} \left[ \frac{\left(1 + \frac{2b^2E}{k}u\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{2bE}{k}\right)^2}} \right] \bigg|_0^{u_m} = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{\mathrm{e}} \left(1 + \frac{2b^2E}{k}u\right) \right] \bigg|_0^{u_m}$



• De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos  $r_{\min} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e - 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$ 



- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos  $r_{\min} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego  $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(1)^{-0} \cos^{-1}(\frac{1}{e}) \Rightarrow \cos \theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$



- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos  $r_{\min} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego  $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(1)^{-0} \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica,  $e=\sqrt{1+\left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$ , de un potencial de Kepler repulsivo



- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos  $r_{\min} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego  $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(1)^{-0} \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica,  $e=\sqrt{1+\left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$ , de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es  $\chi = \pi 2\theta_{\text{máx}}$



- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos  $r_{\min} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego  $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(1)^{-0} \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica,  $e=\sqrt{1+\left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$ , de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es  $\chi = \pi 2\theta_{\text{máx}}$
- Luego,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\chi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$



- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos  $r_{\min} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego  $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(1)^{-0} \cos^{-1}(\frac{1}{e}) \Rightarrow \cos \theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica,  $e=\sqrt{1+\left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$ , de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es  $\chi = \pi 2\theta_{\text{máx}}$
- Luego,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\chi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$
- Y obtenemos  $\left(\frac{2bE}{k}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} 1 = \cot^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{2bE}{k}$



- De la ecuación de una hipérbola en un potencial de Kepler repulsivo tenemos  $r_{\min} = \frac{q}{e-1} \Rightarrow \frac{l^2}{mk} u_m = e 1 \Rightarrow 1 + \frac{2Eb^2}{k} u_m = e$
- Luego  $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}(1)^{-0} \cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow \cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e}$
- Es la misma órbita hiperbólica,  $e=\sqrt{1+\left(\frac{2bE}{k}\right)^2}$ , de un potencial de Kepler repulsivo
- El ángulo de dispersión para un potencial de Kepler repulsivo es  $\chi = \pi 2\theta_{\text{máx}}$
- Luego,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\chi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$
- Y obtenemos  $\left(\frac{2bE}{k}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} 1 = \cot^2\left(\frac{\chi}{2}\right) \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{2bE}{k}$
- El ángulo de dispersión en función de datos iniciales b, E, y de la constante k del potencial V(r) = k/r

◆ロト ◆個ト ◆差ト ◆差ト 差 めなべ

11/16



• Los casos límites para el experimento de Rutherford son



- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente  $b=0\Rightarrow\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)=0\Rightarrow\chi=\pi$



- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente  $b=0\Rightarrow\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)=0\Rightarrow\chi=\pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0$ .



- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente  $b=0\Rightarrow\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)=0\Rightarrow\chi=\pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0.$
- Como  $b = \frac{k}{2E} \cot\left(\frac{\chi}{2}\right)$ , entonces  $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E} \csc^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$



- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente  $b=0\Rightarrow\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)=0\Rightarrow\chi=\pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0.$
- Como  $b = \frac{k}{2E} \cot \left(\frac{\chi}{2}\right)$ , entonces  $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E} \csc^2 \left(\frac{\chi}{2}\right)$
- La sección eficaz será  $\sigma(\chi) = \frac{1}{\text{sen }\chi} \frac{k}{2E} \cot(\chi/2) \frac{k}{4E} \csc^2(\chi/2) = \frac{k^2}{8E^2} \frac{\cot(\chi/2)\csc^2(\chi/2)}{2 \sec(\chi/2)\cos(\chi/2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \csc^4\left(\frac{\chi}{2}\right)$

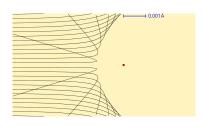


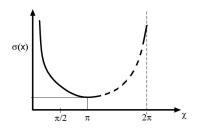
- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente  $b=0\Rightarrow\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)=0\Rightarrow\chi=\pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0$ .
- Como  $b = \frac{k}{2E} \cot \left(\frac{\chi}{2}\right)$ , entonces  $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E} \csc^2 \left(\frac{\chi}{2}\right)$
- La sección eficaz será  $\sigma(\chi) = \frac{1}{\text{sen }\chi} \frac{k}{2E} \cot(\chi/2) \frac{k}{4E} \csc^2(\chi/2) = \frac{k^2}{8E^2} \frac{\cot(\chi/2)\csc^2(\chi/2)}{2 \sec(\chi/2)\cos(\chi/2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \csc^4\left(\frac{\chi}{2}\right)$
- El valor de  $\sigma(\chi)$  es grande para  $\chi \to 0$ , la mayoría de las partículas  $\alpha$  pasan sin desviarse mucho.



- Los casos límites para el experimento de Rutherford son
- Choque frontal, la partícula retrocede completamente  $b=0\Rightarrow\cot\left(\frac{\chi}{2}\right)=0\Rightarrow\chi=\pi$
- La partícula pasa muy lejos del centro repulsivo y no hay dispersión:  $b \to \infty \Rightarrow \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \chi = 0$ .
- Como  $b = \frac{k}{2E} \cot \left(\frac{\chi}{2}\right)$ , entonces  $\left|\frac{db}{d\chi}\right| = \frac{k}{4E} \csc^2 \left(\frac{\chi}{2}\right)$
- La sección eficaz será  $\sigma(\chi) = \frac{1}{\operatorname{sen} \chi} \frac{k}{2E} \cot(\chi/2) \frac{k}{4E} \csc^2(\chi/2) = \frac{k^2}{8E^2} \frac{\cot(\chi/2)\csc^2(\chi/2)}{2\operatorname{sen}(\chi/2)\cos(\chi/2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \csc^4\left(\frac{\chi}{2}\right)$
- El valor de  $\sigma(\chi)$  es grande para  $\chi \to 0$ , la mayoría de las partículas  $\alpha$  pasan sin desviarse mucho.
- Para  $\chi=\pi,\sigma(\pi)$  alcanza su valor mínimo no nulo con una probabilidad pequeña de observar partículas  $\alpha$  dispersadas completamente hacia atrás, como en un choque frontal contra otra carga puntual positiva.







13 / 16



• Estudiamos las trayectorias abiertas para energías E > 0 en potenciales centrales V(r).

14 / 16



- Estudiamos las trayectorias abiertas para energías E > 0 en potenciales centrales V(r).
- Definimos el ángulo de dispersión,  $\chi$ , como diferencia angular entre las direcciones de entrada y salida de la partícula.



- Estudiamos las trayectorias abiertas para energías E > 0 en potenciales centrales V(r).
- Definimos el ángulo de dispersión,  $\chi$ , como diferencia angular entre las direcciones de entrada y salida de la partícula.
- El parámetro de impacto b (distancia perpendicular desde la línea de movimiento inicial al centro del potencial) y la energía  $\mathcal{E}$ , definen completamente la trayectoria en la dispersión en mecánica clásica.

14 / 16



- Estudiamos las trayectorias abiertas para energías E > 0 en potenciales centrales V(r).
- Definimos el ángulo de dispersión,  $\chi$ , como diferencia angular entre las direcciones de entrada y salida de la partícula.
- El parámetro de impacto b (distancia perpendicular desde la línea de movimiento inicial al centro del potencial) y la energía  $\mathcal{E}$ , definen completamente la trayectoria en la dispersión en mecánica clásica.
- Consideramos la dispersión hiperbólica en potenciales atractivos y repulsivos.
  - Para  $V(r)=-\frac{k}{r}$ , la trayectoria con E>0 es una hipérbola:  $r(\theta)=\frac{q}{1+e\cos\theta}$ , con e>1. El ángulo de dispersión está dado por: sen  $\left(\frac{\chi}{2}\right)=\frac{1}{e}$ . Recordamos los asterioides: Oumuamua y Borisov.
  - Para  $V(r)=+rac{k}{r}$  (repulsivo), se cumple  $\chi=\pi-2\theta_{\max}$ , y también sen  $\left(\frac{\chi}{2}\right)=rac{1}{e}$ .



- Estudiamos las trayectorias abiertas para energías E > 0 en potenciales centrales V(r).
- Definimos el ángulo de dispersión,  $\chi$ , como diferencia angular entre las direcciones de entrada y salida de la partícula.
- El parámetro de impacto b (distancia perpendicular desde la línea de movimiento inicial al centro del potencial) y la energía  $\mathcal{E}$ , definen completamente la trayectoria en la dispersión en mecánica clásica.
- Consideramos la dispersión hiperbólica en potenciales atractivos y repulsivos.
  - Para  $V(r)=-\frac{k}{r}$ , la trayectoria con E>0 es una hipérbola:  $r(\theta)=\frac{q}{1+e\cos\theta}$ , con e>1. El ángulo de dispersión está dado por: sen  $\left(\frac{\chi}{2}\right)=\frac{1}{e}$ . Recordamos los asterioides: Oumuamua y Borisov.
  - Para  $V(r)=+\frac{k}{r}$  (repulsivo), se cumple  $\chi=\pi-2\theta_{\rm max}$ , y también sen  $\left(\frac{\chi}{2}\right)=\frac{1}{e}$ .
- Determinamos  $\chi$  por el método geométrico. A partir del integral sobre el movimiento radial:  $\theta_{\max} = b \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{V(u)}{E}-b^2u^2}}, \quad u=1/r.$



• Definimos la sección eficaz de dispersión,  $\sigma(\chi)d\Omega$ , como fracción de partículas dispersadas dentro de un ángulo sólido diferencial.

Donde 
$$d\Omega = 2\pi \operatorname{sen} \chi d\chi$$
 y  $\sigma(\chi) = \frac{b}{\operatorname{sen} \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|$ 



• Definimos la sección eficaz de dispersión,  $\sigma(\chi)d\Omega$ , como fracción de partículas dispersadas dentro de un ángulo sólido diferencial.

Donde 
$$d\Omega = 2\pi \operatorname{sen} \chi d\chi$$
 y  $\sigma(\chi) = \frac{b}{\operatorname{sen} \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|$ 

- Recordamos el experimento de Rutherford
  - Dispersión de partículas  $\alpha$  en potencial repulsivo  $V(r) = \frac{2Ze^2}{r}$ .

  - Encontrmos  $\cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{2bE}{k}$  y además:  $\sigma(\chi) = \left(\frac{k}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^{-4}(\chi/2)}$



• Definimos la sección eficaz de dispersión,  $\sigma(\chi)d\Omega$ , como fracción de partículas dispersadas dentro de un ángulo sólido diferencial.

Donde 
$$d\Omega = 2\pi \operatorname{sen} \chi d\chi$$
 y  $\sigma(\chi) = \frac{b}{\operatorname{sen} \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|$ 

- Recordamos el experimento de Rutherford
  - Dispersión de partículas  $\alpha$  en potencial repulsivo  $V(r) = \frac{2Ze^2}{r}$ .
  - Encontrmos cot  $\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{2bE}{k}$
  - y además:  $\sigma(\chi) = \left(\frac{k}{4E}\right)^2 \frac{1}{\text{sen }^4(\chi/2)}$
- En general los procesos de dispersión
  - Revelan información sobre la naturaleza del potencial.
  - Su tratamiento geométrico permite conectar la trayectoria con magnitudes medibles como  $\chi$  y  $\sigma(\chi)$ .
  - Su formulación se generaliza a colisiones relativistas y cuánticas

#### Para la discusión



Consideremos la dispersión bajo el potencial de Coulomb apantallado (también conocido como el potencial de Yukawa)  $V(r) = \frac{k}{r} e^{-\alpha r}$ 

• Deduzca las ecuaciones clásicas de trayectoria para ambos potenciales  $V_c(r) = \frac{k}{r}$  y  $V(r) = \frac{k}{r} \mathrm{e}^{-\alpha r}$ .

#### Para la discusión



Consideremos la dispersión bajo el potencial de Coulomb apantallado (también conocido como el potencial de Yukawa)  $V(r) = \frac{k}{r} e^{-\alpha r}$ 

- Deduzca las ecuaciones clásicas de trayectoria para ambos potenciales  $V_c(r) = \frac{k}{r}$  y  $V(r) = \frac{k}{r} \mathrm{e}^{-\alpha r}$ .
- Calcule ambas secciones eficaces transversales diferenciales para el potencial apantallado para diferentes valores de  $\alpha$  y comente los resultados.

#### Para la discusión



Consideremos la dispersión bajo el potencial de Coulomb apantallado (también conocido como el potencial de Yukawa)  $V(r) = \frac{k}{r} e^{-\alpha r}$ 

- Deduzca las ecuaciones clásicas de trayectoria para ambos potenciales  $V_c(r) = \frac{k}{r}$  y  $V(r) = \frac{k}{r} \mathrm{e}^{-\alpha r}$ .
- Calcule ambas secciones eficaces transversales diferenciales para el potencial apantallado para diferentes valores de  $\alpha$  y comente los resultados.
- Analice cómo cambia el ángulo de dispersión para distintos valores de la energía, parámetros de impacto y de apantallamiento.