

Título presentación

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



25 de noviembre de 2024

1 Hamiltoniano y Péndulo

- El problema y las coordenadas
- El Lagrangeano y el Hamiltoniano

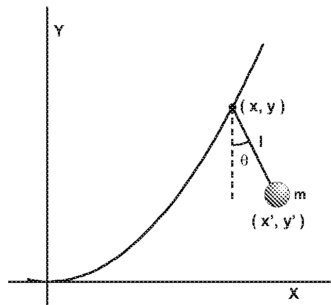
2 $\mathcal{H} = q + te^P$ y la transformación $Q = q + e^P, P = p$

3 $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$

4 $\mathcal{H} = \mathcal{H} (f (q_1, p_1), q_2, q_3, \dots, q_n, p_2, p_3, \dots, p_n)$

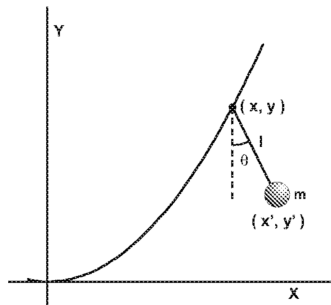
5 $q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t, \quad p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$

El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y' ,

El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y' ,
- Se tiene las siguientes relaciones:

$$x' = x + l \sin \theta, \quad y' = y - l \cos \theta = ax^2 - l \cos \theta$$

$$\dot{x}' = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y}' = \dot{y} + l\dot{\theta} \sin \theta = 2ax\dot{x} + l\dot{\theta} \sin \theta$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \right)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg (ax^2 - l \cos \theta)$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \right)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg (ax^2 - l \cos \theta)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} (1 + 4a^2 x^2) + ml\dot{\theta}(\cos \theta + 2ax \sin \theta)$$
$$p_\theta = ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos \theta + 2ax \sin \theta)$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta \right)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg (ax^2 - l \cos \theta)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} (1 + 4a^2 x^2) + ml\dot{\theta}(\cos \theta + 2ax \sin \theta)$$
$$p_\theta = ml^2 \dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos \theta + 2ax \sin \theta)$$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m} \frac{1}{(\sin \theta - 2ax \cos \theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml} \frac{\cos \theta + 2ax \sin \theta}{(\sin \theta - 2ax \cos \theta)^2}$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \frac{1 + 4a^2 x^2}{(\sin \theta - 2ax \cos \theta)^2} - \frac{p_x}{ml} \frac{\cos \theta + 2ax \sin \theta}{(\sin \theta - 2ax \cos \theta)^2}$$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \Rightarrow$
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)$$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg(ax^2 - l\cos\theta)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4a^2x^2) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$
$$p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\sin\theta)$$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m} \frac{1}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax\sin\theta}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \frac{1 + 4a^2x^2}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax\sin\theta}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$
- Con lo cual $\mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - L$ se puede expresar
$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} \frac{1}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2ml^2} \frac{1 + 4a^2x^2}{(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

$$\mathcal{H} = q + te^p \text{ y } Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$

$$\mathcal{H} = q + te^p \text{ y } Q = q + e^p \quad \& \quad P = p \text{ 1/2}$$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0;$ y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1, \frac{\partial Q}{\partial p} = e^p, \frac{\partial P}{\partial q} = 0,$ y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1,$ obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1.$

$$\mathcal{H} = q + te^p \text{ y } Q = q + e^p \quad \& \quad P = p \text{ 1/2}$$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0;$ y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1, \frac{\partial Q}{\partial p} = e^p, \frac{\partial P}{\partial q} = 0,$ y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1,$ obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1.$
- Por lo tanto, como la transformación cumple con $\{Q, Q\} = 0, \{P, P\} = 0,$ y $\{Q, P\} = 1.$ **Es canónica**

$$\mathcal{H} = q + te^P \text{ y } Q = q + e^P \quad \& \quad P = p \text{ } 2/2$$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

$$\mathcal{H} = q + te^P \text{ y } Q = q + e^P \quad \& \quad P = p \text{ } 2/2$$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$,
 $F_2(q, P) = qP + \int e^P dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento
 $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m} \cos \gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A \cos \gamma t$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento
 $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m} \cos \gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A \cos \gamma t$
- Entonces

$$\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 + A \dot{q} \cos \gamma t + \frac{A^2}{2m} \cos^2 \gamma t - A \gamma q \sin \gamma t$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m} \cos \gamma t$, $\Rightarrow p = m\dot{q} + A \cos \gamma t$
- Entonces
$$\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 + A \dot{q} \cos \gamma t + \frac{A^2}{2m} \cos^2 \gamma t - A \gamma q \sin \gamma t$$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m} \cos \gamma t$, $\Rightarrow p = m\dot{q} + A \cos \gamma t$
- Entonces
$$\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 + A \dot{q} \cos \gamma t + \frac{A^2}{2m} \cos^2 \gamma t - A \gamma q \sin \gamma t$$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt} \left[A q \cos \gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m} (\gamma t + \sin \gamma t \cos \gamma t) \right]$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m} \cos \gamma t$, $\Rightarrow p = m\dot{q} + A \cos \gamma t$
- Entonces
$$\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 + A \dot{q} \cos \gamma t + \frac{A^2}{2m} \cos^2 \gamma t - A \gamma q \sin \gamma t$$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt} \left[A q \cos \gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m} (\gamma t + \sin \gamma t \cos \gamma t) \right]$$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$, $\Rightarrow \dot{q} = \frac{p'}{m}$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m} \cos \gamma t$, $\Rightarrow p = m\dot{q} + A \cos \gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 + A \dot{q} \cos \gamma t + \frac{A^2}{2m} \cos^2 \gamma t - A \gamma q \sin \gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt} \left[A q \cos \gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m} (\gamma t + \sin \gamma t \cos \gamma t) \right]$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$, $\Rightarrow \dot{q} = \frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}' = p' \dot{q} - \mathcal{L}' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A \left(\frac{p}{m} \cos \gamma t + \gamma q \sin \gamma t \right) + \frac{1}{2} k q^2$$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m} \cos \gamma t$, $\Rightarrow p = m\dot{q} + A \cos \gamma t$
- Entonces
$$\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 + A \dot{q} \cos \gamma t + \frac{A^2}{2m} \cos^2 \gamma t - A \gamma q \sin \gamma t$$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt} \left[A q \cos \gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m} (\gamma t + \sin \gamma t \cos \gamma t) \right]$$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$, $\Rightarrow \dot{q} = \frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}' = p' \dot{q} - \mathcal{L}' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$
- Como $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = p' + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}$


 Universidad Industrial de Santander
 CONSTRUIAMOS FUTURO

- $$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = p'\dot{q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} - \mathcal{L}' - \frac{d\Lambda}{dt} = \mathcal{H}' + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \mathcal{H}' - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, q_3, \dots, q_n, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n)$

- $f(q_1, p_1)$ es una constante del movimiento

$$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, q_3, \dots, q_n, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n)$

- $f(q_1, p_1)$ es una constante del movimiento

$$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z \hat{z}$ construimos el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{a_z r \cos \theta}{r^3}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, q_3, \dots, q_n, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n)$

- $f(q_1, p_1)$ es una constante del movimiento

$$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

- Con el potencial $V = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z \hat{z}$ construimos el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{a_z r \cos \theta}{r^3}$$

- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, q_3, \dots, q_n, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n)$

- $f(q_1, p_1)$ es una constante del movimiento

$$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

- Con el potencial $V = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z \hat{z}$ construimos el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{a_z r \cos \theta}{r^3}$$

- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.
- Por lo tanto podemos escribir

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} + 2ma \cos \theta \right)}_{f(\theta, p_\theta)}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, q_3, \dots, q_n, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n)$

- $f(q_1, p_1)$ es una constante del movimiento

$$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$

- Con el potencial $V = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z \hat{z}$ construimos el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + \frac{a_z r \cos \theta}{r^3}$$

- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.
- Por lo tanto podemos escribir

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} + 2ma \cos \theta \right)}_{f(\theta, p_\theta)}$$

- Es decir $f(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2mr^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} + 2ma \cos \theta \right) = \text{cte}$

$$q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t, \quad p = -m\omega Q \sin \gamma t + \frac{P}{\omega} \cos \gamma t$$

Mostrar que la transformación: $q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t$,
 $p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$ es canónica. Determinar la función
 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2 \gamma t + \sin^2 \gamma t = 1 \checkmark$

$$q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t, \quad p = -m\omega Q \sin \gamma t + \frac{P}{\omega} \cos \gamma t$$

Mostrar que la transformación: $q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t$,
 $p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$ es canónica. Determinar la función
 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces
 $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2 \gamma t + \sin^2 \gamma t = 1 \checkmark$
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$, y $p = \frac{P}{\cos \gamma t} - q m \omega \tan \gamma t$

$$q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t, \quad p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$$

Mostrar que la transformación: $q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t$,
 $p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$ es canónica. Determinar la función
 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces
 $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2 \gamma t + \sin^2 \gamma t = 1 \checkmark$
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$, y $p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$,
 integramos las ecuaciones $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$, y
 $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$

$$q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t, \quad p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$$

Mostrar que la transformación: $q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t$,
 $p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$ es canónica. Determinar la función
 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces
 $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2 \gamma t + \sin^2 \gamma t = 1 \checkmark$
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$, y $p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$,
 integramos las ecuaciones $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$, y
 $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$
- La solución es $\mathcal{F}_2(q, P, t) = \frac{qP}{\cos \gamma t} - \frac{1}{2}q^2m\omega \tan \gamma t - \frac{1}{2}\frac{P^2}{m\omega} \tan \gamma t$

$$q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t, \quad p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$$

Mostrar que la transformación: $q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t$,
 $p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$ es canónica. Determinar la función
 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces
 $\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2 \gamma t + \sin^2 \gamma t = 1 \checkmark$
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$, y $p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$,
 integramos las ecuaciones $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$, y
 $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$
- La solución es $\mathcal{F}_2(q, P, t) = \frac{qP}{\cos \gamma t} - \frac{1}{2}q^2m\omega \tan \gamma t - \frac{1}{2}\frac{P^2}{m\omega} \tan \gamma t$
- Podemos construir $\mathcal{F}(q, p(q, P, t), t) = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q(q, P, t)P$

$$q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t, \quad p = -m\omega Q \sin \gamma t + \frac{P}{\omega} \cos \gamma t$$

Mostrar que la transformación: $q = Q \cos \gamma t + \frac{P}{m\omega} \sin \gamma t$,
 $p = -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t$ es canónica. Determinar la función
 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$. Aplicar esta transformación al oscilador armónico.

- Si $q = q(Q, P, t)$ y $p = p(Q, P, t)$ es canónica entonces

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2 \gamma t + \sin^2 \gamma t = 1 \quad \checkmark$$
- Claramente $Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$, y $p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$
- Por lo tanto, ara encontrar la función generadora $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$, integramos las ecuaciones $\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q} = p = \frac{P}{\cos \gamma t} - qm\omega \tan \gamma t$, y

$$\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P} = Q = \frac{q}{\cos \gamma t} - \frac{P}{m\omega} \tan \gamma t$$
- La solución es $\mathcal{F}_2(q, P, t) = \frac{qP}{\cos \gamma t} - \frac{1}{2}q^2m\omega \tan \gamma t - \frac{1}{2}\frac{P^2}{m\omega} \tan \gamma t$
- Podemos construir $\mathcal{F}(q, p(q, P, t), t) = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q(q, P, t)P$
- Finalmente si $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$, tendremos

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H} - \frac{P^2}{2m\omega} \gamma - \frac{1}{2}m\omega Q^2 \gamma = \left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 \right) \left(1 - \frac{\gamma}{\omega} \right)$$