Transformaciones Canónicas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

3 de diciembre de 2024

Agenda

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = -p_i, \quad P_i = q_i$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = -p_i, \quad P_i = q_i$
- Entonces $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i}\right) =$
$-\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$
$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{Q}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right) =$
$-\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}$ Claramente no se cumplen

Transformaciones Canónicas

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$
\left.\begin{array}{r}
\mathcal{H}(q_i, p_i, t) \\
\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}
\end{array}\right|
\begin{array}{c}
\to \quad \text{Transformación canónica} \quad \to \\
P_i = P_i(q_j, p_j, t) \\
Q_i(q_j, p_j, t)
\end{array}
\left|\begin{array}{l}
\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t) \\
\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\
\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}
\end{array}\right.
$$

Transformaciones Canónicas

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$
\left.\begin{array}{r} \mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} \text{Transformación canónica} \\ P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right) \\ Q_i\left(q_j, p_j, t\right) \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right) \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} \end{array}\right.
$$

- Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$ no depende explícitamente de alguna coordenada Q_j o momento P_j

Principio de Mínima Acción 1/2

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.

Principio de Mínima Acción 1/2

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$

Principio de Mínima Acción 1/2

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$

Principio de Mínima Acción 1/2

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ genera las ecuaciones $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n$

Principio de Mínima Acción 1/2

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ genera las ecuaciones $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$
- Por su parte $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$ genera $\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n$

- Como las variaciones $\delta S = 0$ y $\delta \tilde{S} = 0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i, p_i\}$ y $\{Q_i, P_i\}$.

Principio de Mínima Acción 2/2

- Como las variaciones $\delta S = 0$ y $\delta \tilde{S} = 0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i, p_i\}$ y $\{Q_i, P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

Principio de Mínima Acción 2/2

- Como las variaciones $\delta S = 0$ y $\delta \tilde{S} = 0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i, p_i\}$ y $\{Q_i, P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$

Principio de Mínima Acción 2/2

- Como las variaciones $\delta S = 0$ y $\delta \tilde{S} = 0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i, p_i\}$ y $\{Q_i, P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- La función $\mathcal{F}$ se llama función generadora de la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}\left(q_i, p_i, Q_i, P_i, t\right)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i\dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.
- La relación entre el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ y el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ resultante de la transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{Q_i, P_i, t\}$ generada por una $\mathcal{F}$ siempre es $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$

Ejemplo de Función Generadora 1/2

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\,\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\,\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$

Ejemplo de Función Generadora 1/2

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{2} P_i\dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right) \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - P_1\dot{Q}_1 - P_2\dot{Q}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$

Ejemplo de Función Generadora 1/2

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\,\dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\,\dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{2} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right) \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(p_2 q_2) - q_2 \dot{p}_2$; $P_1 \dot{Q}_1 = \frac{d}{dt}(P_1 Q_1) - Q_1 \dot{P}_1$; $\quad P_2 \dot{Q}_2 = \frac{d}{dt}(P_2 Q_2) - Q_2 \dot{P}_2$

Ejemplo de Función Generadora 1/2

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}, i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$
  $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{2} P_i\dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right) \Rightarrow$
  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - P_1\dot{Q}_1 - P_2\dot{Q}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2\dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(p_2 q_2) - q_2\dot{p}_2$;
  $P_1\dot{Q}_1 = \frac{d}{dt}(P_1 Q_1) - Q_1\dot{P}_1; \quad P_2\dot{Q}_2 = \frac{d}{dt}(P_2 Q_2) - Q_2\dot{P}_2$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} =$
  $p_1\dot{q}_1 - q_2\dot{p}_2 + Q_1\dot{P}_1 + Q_2\dot{P}_2 + \frac{d}{dt}(p_2 q_2 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2) + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$

Ejemplo de Función Generadora 2/2

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) =$
  $p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $(q_i, p_i, Q_i, P_i)\,, i = 1, 2,$

Ejemplo de Función Generadora 2/2

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i), $i = 1, 2$,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\,\dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\,\dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$

Ejemplo de Función Generadora 2/2

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $\left(q_i, p_i, Q_i, P_i\right), i = 1, 2,$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \left(P_1 + 2p_2\right)\dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + \left(2q_1 + P_2\right)\dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2; \quad p_1 = P_1 + 2p_2;$ $Q_1 = q_1; \quad -q_2 = 2q_1 + P_2; \quad Q_2 = p_2$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) =$ $p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $\left(q_i, p_i, Q_i, P_i\right), i = 1, 2,$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \left(P_1 + 2p_2\right)\dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + \left(2q_1 + P_2\right)\dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2; \quad p_1 = P_1 + 2p_2;$ $Q_1 = q_1; \quad -q_2 = 2q_1 + P_2; \quad Q_2 = p_2$
- La transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ generada por G es $P_1 = p_1 - 2p_2 \quad Q_1 = q_1; \quad P_2 = -2q_1 - q_2 \quad Q_2 = p_2.$

Tipos de Funciones Generadoras

Funciones Generadoras	Funciones Generadadoras y derivadas	Un ejemplo sencillo
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}; \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_1 = q_i Q_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_2 = q_i P_i, \quad Q_i = q_i, \quad P_i = p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}; \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_3 = p_i Q_i, \quad Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_4 = p_i P_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$

Ejemplo: $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$

Dada una transformación $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$, encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

Dada una transformación $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$, encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P
- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

Ejemplo: $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$

Dada una transformación $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$, encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P
- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$, $F_2(q, P) = qP + \int e^P \, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$

Ejemplo: $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$

Dada una transformación $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p$, encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P
- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$, $F_2(q, P) = qP + \int e^P \, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$
- La función generadora es $F_2(q, P) = qP + e^P$