

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



4 de septiembre de 2024

- 1 Motivación, origen y conceptos básicos
- 2 Orden y linealidad
- 3 Soluciones: explícitas, implícitas, generales y particulares
- 4 Valores iniciales y valores de contorno

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F} [x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$, donde:
$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \dots, y^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}.$$

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F} [x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$, donde:
$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \dots, y^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}.$$
- Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:
$$ax + yy' = 0, \quad x^2 y''' - (y')^2 = e^x, \quad y'' \cos(x) + \cos(y) = 2.$$

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F} [x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$, donde:
$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \dots, y^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}.$$
- Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:
$$ax + yy' = 0, \quad x^2 y''' - (y')^2 = e^x, \quad y'' \cos(x) + \cos(y) = 2.$$
- Si la función es $f = f(x, y, z)$ una ecuación diferencial en derivadas parciales es una de la forma:
$$\mathcal{F} [x, y, z, f, \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f, \partial_x^2 f, \partial_y^2 f, \partial_z^2 f, \partial_{xy} f, \partial_{xz} f, \dots] = 0,$$

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F} [x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$, donde:

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \dots, y^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}.$$

- Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$ax + yy' = 0, \quad x^2y''' - (y')^2 = e^x, \quad y'' \cos(x) + \cos(y) = 2.$$

- Si la función es $f = f(x, y, z)$ una ecuación diferencial en derivadas parciales es una de la forma:

$$\mathcal{F} [x, y, z, f, \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f, \partial_x^2 f, \partial_y^2 f, \partial_z^2 f, \partial_{xy} f, \partial_{xz} f, \dots] = 0,$$

- Ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - f(x, y) = p(y).$$

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n , es:
$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0,$$

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n , es:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0,$$

- Entonces lineal o no lineal

$$y'y'' + yy' - ay^2 = k(x) \quad \text{es no lineal}$$

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = k(x) \quad \text{es lineal}$$

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n , es:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0,$$

- Entonces lineal o no lineal

$$y'y'' + yy' - ay^2 = k(x) \quad \text{es no lineal}$$

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = k(x) \quad \text{es lineal}$$

- El orden de la ecuación diferencial

$$y'' + (3y')^3 + 2x = 7, \quad \text{EDO no lineal de orden 2}$$

$$y' + y = x, \quad \text{EDO lineal de orden 1.}$$

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n , es:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0,$$

- Entonces lineal o no lineal

$$y'y'' + yy' - ay^2 = k(x) \quad \text{es no lineal}$$

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = k(x) \quad \text{es lineal}$$

- El orden de la ecuación diferencial

$$y'' + (3y')^3 + 2x = 7, \quad \text{EDO no lineal de orden 2}$$

$$y' + y = x, \quad \text{EDO lineal de orden 1.}$$

- Homogénea o Inhomogénea

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + g(x)\frac{dy(x)}{dx} - ay(x) = k(x) \quad \text{lineal inhomogénea}$$

$$y''(x) + g(x)y'(x) - ay(x) = 0 \quad \text{lineal homogénea.}$$

- Las soluciones serán explícitas

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = y(t) + 4 e^t \Rightarrow y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2 t e^t$$

- Las soluciones serán explícitas

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = y(t) + 4 e^t \Rightarrow y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2 t e^t$$

- e implícitas y $y' + x = 0 \Rightarrow f(x, y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} \quad \text{con } -5 < x < 5$$

- Las soluciones serán explícitas

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = y(t) + 4 e^t \Rightarrow y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2 t e^t$$

- e implícitas y $y' + x = 0 \Rightarrow f(x, y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} \quad \text{con } -5 < x < 5$$

- Las soluciones generales representan familias de soluciones parametrizadas por constantes de integración

$$y' = e^x \quad \leftarrow \quad y(x) = e^x + C_1$$

$$y'' = e^x \quad \leftarrow \quad y(x) = e^x + C_2 x + C_1$$

$$y''' = e^x \quad \leftarrow \quad y(x) = e^x + C_3 x^2 + C_2 x + C_1$$

- Las soluciones serán explícitas

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = y(t) + 4 e^t \Rightarrow y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2 t e^t$$

- e implícitas y $y' + x = 0 \Rightarrow f(x, y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} \quad \text{con } -5 < x < 5$$

- Las soluciones generales representan familias de soluciones parametrizadas por constantes de integración

$$y' = e^x \leftarrow y(x) = e^x + C_1$$

$$y'' = e^x \leftarrow y(x) = e^x + C_2 x + C_1$$

$$y''' = e^x \leftarrow y(x) = e^x + C_3 x^2 + C_2 x + C_1$$

- Si $y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ es solución de una ecuación diferencial $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$, para n constantes $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$ arbitrarias, entonces $y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ es una familia n -paramétrica de soluciones.

- Un problema de valores iniciales es

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \text{ donde}$$

$$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$

- Un problema de valores iniciales es
$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$$
$$\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \text{ donde}$$
$$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$
- Determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un único punto, :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x).$$

- Un problema de valores iniciales es
$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$$
$$\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \text{ donde}$$
$$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$
- Determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un único punto, :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x).$$

- Si disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, tendremos un problema de valores de contorno.

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \sin(n\pi\omega x).$$

- Un problema de valores iniciales es

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \text{ donde}$$

$$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$

- Determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un único punto, :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x).$$

- Si disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, tendremos un problema de valores de contorno.

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \sin(n\pi\omega x).$$

- Nótese que también pudimos haber tenido información del tipo $y(0) = y_0, y'(1) = y_1; y'(0) = y_0, y'(1) = y_1; y'(0) = y_0, y(1) = y_1$, y para cada uno de estos caso tendremos una solución distinta.