Empezando con los complejos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

5 de agosto de 2021

Agenda: empezando con los complejos

1. Números Complejos
2. Algebra de complejos
3. Representaciones complejas
4. Funciones de variable compleja
5. Condiciones de Cauchy-Riemann
6. Recapitulando

Números Complejos

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios $x^2+4=0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} x=2i \\ x=-2i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; (x+2i)\,(x-2i)=0\,,$ y nos lleva a definir un número $i^2 \equiv -1$

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios
$$x^2+4=0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} x=2i \\ x=-2i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; (x+2i)\,(x-2i)=0\,,$$
y nos lleva a definir un número $i^2 \equiv -1$
- Un número complejo, z, es la generalización de los números imaginarios (puros), ib. Esto es:
$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios $x^2+4=0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} x=2i \\ x=-2i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; (x+2i)\,(x-2i)=0\,,\, y$ nos lleva a definir un número $i^2 \equiv -1$
- Un número complejo, z, es la generalización de los números imaginarios (puros), ib. Esto es:
  $z=a+ib \qquad \text{con } a,b\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} a\rightarrow & \text{parte real} \\ b\rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$
- Cada número complejo, z tendrá asociado un número complejo conjugado, z^* tal que:

$$
\begin{array}{c}
z=a+ib \quad \rightleftharpoons \quad z^*=a-ib\,, \\
\Downarrow \\
(z^*)^*=z \quad \wedge \quad z\cdot z^*=a^2+b^2\,,
\end{array}
$$

claramente: $z\cdot z^*\geq 0 \;\Rightarrow\; |z|^2=|z^*|^2=z\cdot z^*=a^2+b^2\,.$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
$$z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 \,.$$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2\,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) =$
  $(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3\,,$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
$z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2\,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3\,,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 + ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*\,.$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2\,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3\,,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 + ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*\,.$
- Se multiplican números complejos entre si,
  $z_3 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,,$
  también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2\,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3\,,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 + ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*\,.$
- Se multiplican números complejos entre si,
  $z_3 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,,$
  también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.
- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales:
  $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \;\Rightarrow\; \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}\frac{(a_2-ib_2)}{(a_2-ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)} + i\,\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)}\,,$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\ , \quad \text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z =$

$$r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\ , \quad \text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

- Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = Re\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = Im\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\,, \quad \text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

- Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = Re\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = Im\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\,, \quad$ con: $\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$
- Con esta interpretación tendremos:

$$
\begin{array}{lcl}
x = Re\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\
y = Im\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\
r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\
\theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z
\end{array}
$$

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$
- Entonces, tenemos tres formas de representar un número complejo: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right) \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|e^{i\theta}\,.$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Entonces $f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$,
  con $u(x,y)$ la parte real y $v(x,y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región $\mathcal{S}$ será diferenciable en esa región si la derivada

$$
\begin{aligned}
f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y} \,,
\end{aligned}
$$

existe y es única.

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Entonces $f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$,
con $u(x,y)$ la parte real y $v(x,y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región $\mathcal{S}$ será diferenciable en esa región si la derivada

$$
\begin{aligned}
f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y} \,,
\end{aligned}
$$

existe y es única.
- Existe sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, si
$\Delta z \to 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \to 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \,, \\
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \,.
\end{aligned}
$$

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x} \right] ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y\to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \left[-i\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y} \right] ,
\end{aligned}
$$

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x} \right] ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \left[-i \frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y} \right] ,
\end{aligned}
$$

- y tienen que ser iguales

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} .$$

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x} \right] ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \left[-i \frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y} \right] ,
\end{aligned}
$$

- y tienen que ser iguales
$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$.
- Con lo cual $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i\lim_{\Delta y\to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\left[-i\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y}\right],
\end{aligned}
$$

- y tienen que ser iguales
$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$.
- Con lo cual $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann
- Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, si $f(z)$ es analítica, $u(x,y)$ y $v(x,y)$ serán funciones armónicas conjugadas: $\nabla^2 u(x,y) = \nabla^2 v(x,y) = 0$.

Recapitulando

En presentación consideramos

1.