

Polos, cortes y transformaciones conformes

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

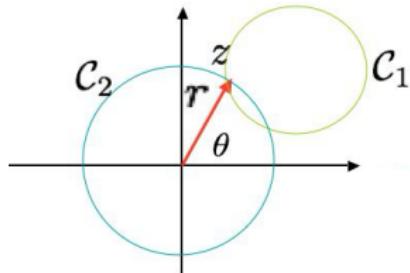


13 de noviembre de 2025

- 1 Funciones univaluadas y multivaluadas
- 2 Puntos de ramificación y corte
- 3 Singularidades y ceros
- 4 Transformaciones conformes
- 5 Recapitulando
- 6 Para la discusión

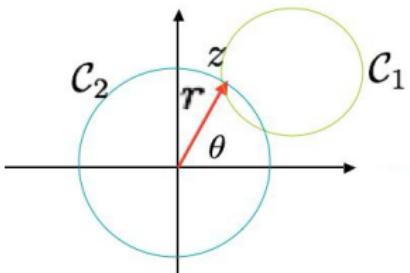
Funciones univaluadas y multivaluadas

- Consideremos la función $w = f(z) = z = r \exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



Funciones univaluadas y multivaluadas

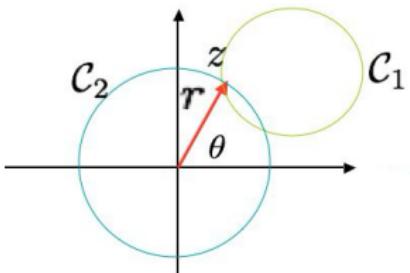
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r \exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_1 , con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.

Funciones univaluadas y multivaluadas

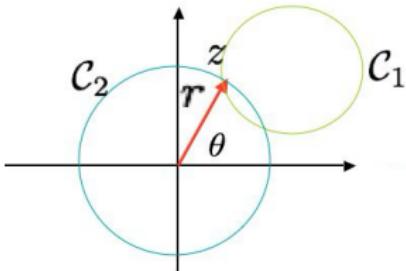
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r \exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_1 , con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_2 , tendremos $w = z = r \exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n

Funciones univaluadas y multivaluadas

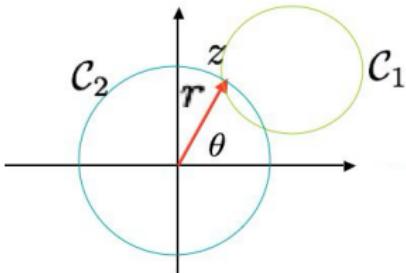
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r \exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_1 , con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_2 , tendremos $w = z = r \exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$

Funciones univaluadas y multivaluadas

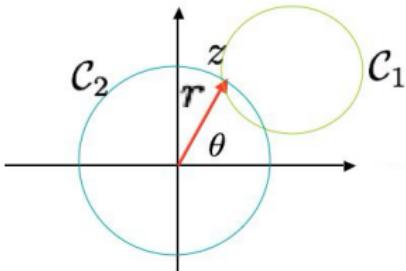
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r \exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_1 , con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_2 , tendremos $w = z = r \exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$
- Para $n = 1$ tendremos $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$.

Funciones univaluadas y multivaluadas

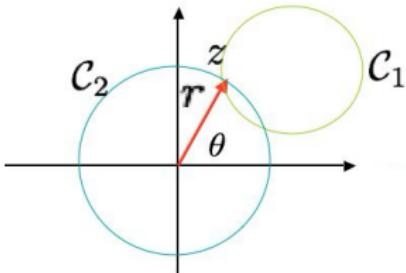
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r \exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_1 , con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_2 , tendremos $w = z = r \exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$
- Para $n = 1$ tendremos $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$.
- Para $n = 2$ recuperamos $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + 2\pi)) = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$

Funciones univaluadas y multivaluadas

- Consideremos la función $w = f(z) = z = r \exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_1 , con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es \mathcal{C}_2 , tendremos $w = z = r \exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$
- Para $n = 1$ tendremos $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$.
- Para $n = 2$ recuperamos $w = \sqrt{r} \exp(i(\frac{\theta}{2} + 2\pi)) = \sqrt{r} \exp(i\frac{\theta}{2})$
- El eje $x > 0$ separa las “ramas” $n = 0 \Rightarrow w > 0$ y $n = 1 \Rightarrow w < 0$

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* = *punto de ramificación*.

Puntos de ramificación y corte 1/2

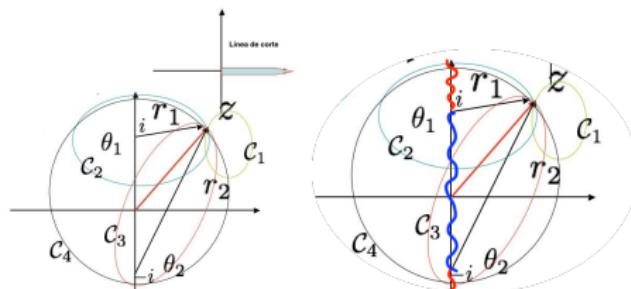
- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* = *punto de ramificación*.
- Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre \mathcal{C} alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* = *punto de ramificación*.
- Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$
- Si esos valores “siguen” una curva cerrada e incluyen un *punto de ramificación*, esa función no será analítica.

Puntos de ramificación y corte 2/2

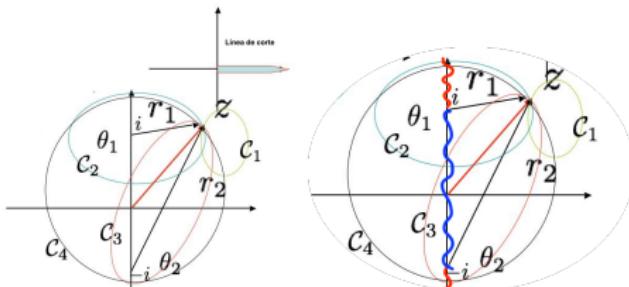
$$\text{Sea } f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z - i)(z + i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$$



- El contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.

Puntos de ramificación y corte 2/2

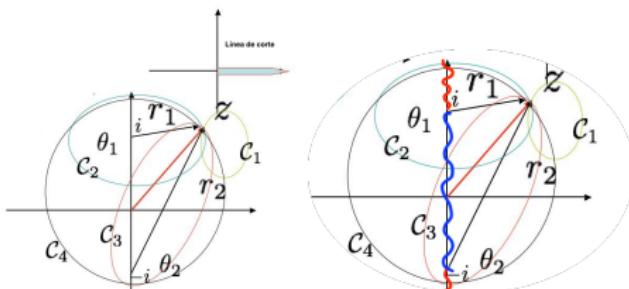
Sea $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z - i)(z + i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$



- El contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces:
 $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno \mathcal{C}_2 incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces:
 $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.

Puntos de ramificación y corte 2/2

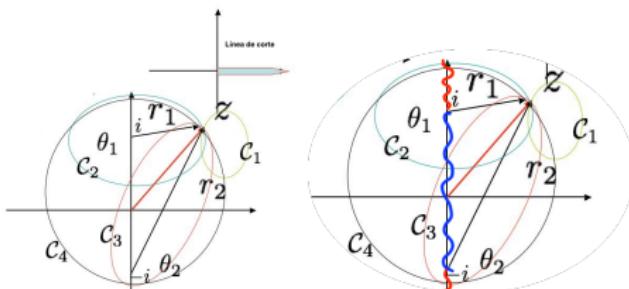
Sea $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z - i)(z + i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$



- El contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno \mathcal{C}_2 incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_3 incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.

Puntos de ramificación y corte 2/2

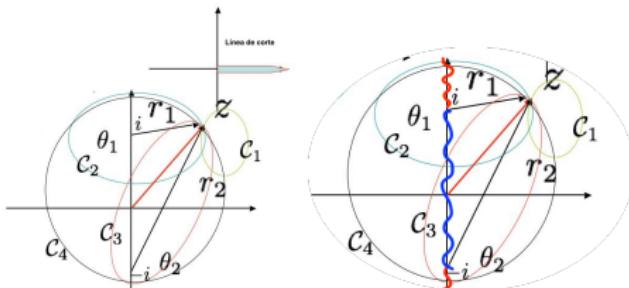
Sea $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z - i)(z + i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$



- El contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno \mathcal{C}_2 incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_3 incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_4 incluye ambos puntos de ramificación, $z = i$ y $z = -i$, $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, entonces $f(z) \rightarrow f(z)$ retoma su valor.

Puntos de ramificación y corte 2/2

Sea $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z - i)(z + i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$



- El contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno \mathcal{C}_2 incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_3 incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.
- Contorno \mathcal{C}_4 incluye ambos puntos de ramificación, $z = i$ y $z = -i$, $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, entonces $f(z) \rightarrow f(z)$ retoma su valor.
- Los cortes son $z_{corte} > i$ y $z_{corte} < -i$ o $-i < z_{corte} \leq i$

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0 , excepto en z_0 , entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0 , excepto en z_0 , entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0 , excepto en z_0 , entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- **Un punto singular aislado z_0 de una función f se denomina removable o evitable si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad \exists$.**

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0 , excepto en z_0 , entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removable o evitable** si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad \exists$.
- Un **polo de orden n** es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0 , excepto en z_0 , entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removable o evitable** si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \not\exists$, para ningún n .

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0 , excepto en z_0 , entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removable o evitable** si: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \not\exists$, para ningún n .
- Los **ceros de una función compleja**, $f(z_0) = 0$, se clasifican igual que los polos $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con n entero positivo y $g(z) \neq 0 \quad \forall z$.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0 .

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0 .
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0 .
- Si z_0 es una **singularidad removable** cuando $f(z) \rightarrow 0/0$ cuando $z \rightarrow z_0$, por ejemplo: $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots \right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots \right) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = (n + \frac{1}{2}) i\pi$

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = (n + \frac{1}{2}) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , ya que
 $\lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} (z - (n + \frac{1}{2})i\pi) \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital
 $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \cosh(z) + \sinh(z)}{\sinh(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = (n + \frac{1}{2}) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , ya que
 $\lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} (z - (n + \frac{1}{2})i\pi) \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital
 $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \cosh(z) + \sinh(z)}{\sinh(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.
- Dada la función $f(z) = \frac{z^2 + 16}{z - 4i}$, tiene un polo (aparente) en $z = 4i$.

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = (n + \frac{1}{2}) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , ya que
 $\lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} (z - (n + \frac{1}{2})i\pi) \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital
 $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \cosh(z) + \operatorname{senh}(z)}{\operatorname{senh}(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.
- Dada la función $f(z) = \frac{z^2 + 16}{z - 4i}$, tiene un polo (aparente) en $z = 4i$.
- Es aparente porque $f(z) = \frac{(z+4i)(z-4i)}{z-4i} = z + 4i$ y $\lim_{z \rightarrow 4i} z + 4i = 8i$

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = (n + \frac{1}{2}) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 , ya que
 $\lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} (z - (n + \frac{1}{2})i\pi) \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital
 $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \cosh(z) + \sinh(z)}{\sinh(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.
- Dada la función $f(z) = \frac{z^2 + 16}{z - 4i}$, tiene un polo (aparente) en $z = 4i$.
- Es aparente porque $f(z) = \frac{(z+4i)(z-4i)}{z-4i} = z + 4i$ y $\lim_{z \rightarrow 4i} z + 4i = 8i$
- Entonces $g(z) = \begin{cases} z + 4i & \text{si } z \neq 4i \\ 8i & \text{si } z = 4i \end{cases}$

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = u + iv \Rightarrow$$

$$w = g(z) = u(x, y) + iv(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = u + iv \Rightarrow$$

$$w = g(z) = u(x, y) + iv(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$

- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = u + iv \Rightarrow$$

$$w = g(z) = u(x, y) + iv(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$

- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,

- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
$$z = x + iy \leftrightarrow w = u + iv \Rightarrow$$

$$w = g(z) = u(x, y) + iv(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.
- Las **transformaciones conformes** implican que:
- Curvas continuas en z van a curvas continuas en w .

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = u + iv \Rightarrow$$

$$w = g(z) = u(x, y) + iv(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$

- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.
- Las **transformaciones conformes** implican que:
 - Curvas continuas en z van a curvas continuas en w .
 - Funciones analíticas $z = x + iy$ van a funciones analíticas $w = u + iv$.

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = u + iv \Rightarrow$$

$$w = g(z) = u(x, y) + iv(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(u, v) + iy(u, v)$$

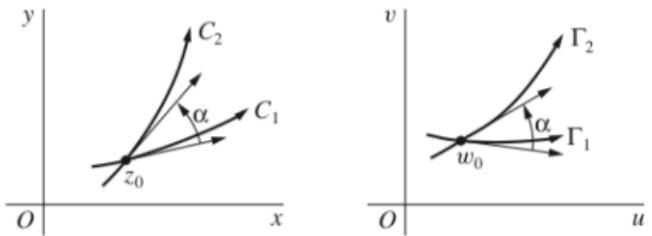
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.
- Las **transformaciones conformes** implican que:
 - Curvas continuas en z van a curvas continuas en w .
 - Funciones analíticas $z = x + iy$ van a funciones analíticas $w = u + iv$.
 - Si una transformación conforme de coordenadas tiene inversa y ambas son analíticas, entonces curvas continuas $\mathcal{C}(z)$ serán transformadas a curvas continuas $\Gamma(w)$. ✓

Transformaciones conformes

- Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.

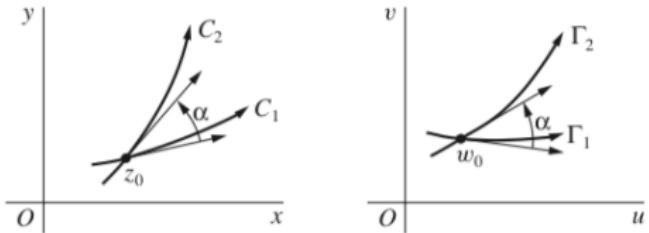
Transformaciones conformes

- Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.
- Las transformaciones *isogonales* preservan los ángulos entre las tangentes de las curvas que se interceptan.



Transformaciones conformes

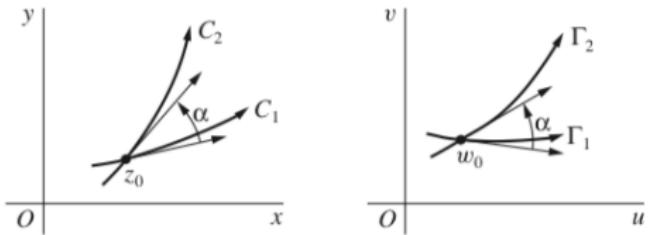
- Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.
- Las transformaciones *isogonales* preservan los ángulos entre las tangentes de las curvas que se interceptan.



- Dos curvas, $\mathcal{C}_1(z)$ y $\mathcal{C}_2(z)$ se interceptan en un punto $z = z_0$.

Transformaciones conformes

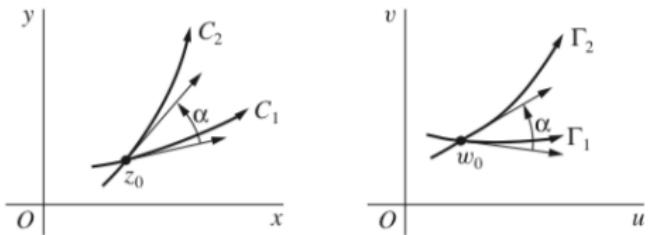
- Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.
- Las transformaciones *isogonales* preservan los ángulos entre las tangentes de las curvas que se interceptan.



- Dos curvas, $\mathcal{C}_1(z)$ y $\mathcal{C}_2(z)$ se interceptan en un punto $z = z_0$.
- Sobre las tangentes en z_0 de las curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , tendremos dos puntos z_1 y z_2 separados por una misma distancia ρ .

Transformaciones conformes

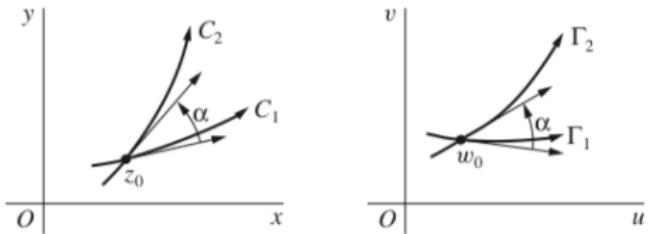
- Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.
- Las transformaciones *isogonales* preservan los ángulos entre las tangentes de las curvas que se interceptan.



- Dos curvas, $\mathcal{C}_1(z)$ y $\mathcal{C}_2(z)$ se interceptan en un punto $z = z_0$.
- Sobre las tangentes en z_0 de las curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , tendremos dos puntos z_1 y z_2 separados por una misma distancia ρ .
- Entonces:
$$\begin{cases} z_1 - z_0 = \rho e^{i\theta_1} \\ z_2 - z_0 = \rho e^{i\theta_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \\ w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2} \end{cases}$$

Transformaciones conformes

- Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.
- Las transformaciones *isogonales* preservan los ángulos entre las tangentes de las curvas que se interceptan.



- Dos curvas, $\mathcal{C}_1(z)$ y $\mathcal{C}_2(z)$ se interceptan en un punto $z = z_0$.
- Sobre las tangentes en z_0 de las curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , tendremos dos puntos z_1 y z_2 separados por una misma distancia ρ .
- Entonces:
$$\left. \begin{array}{l} z_1 - z_0 = \rho e^{i\theta_1} \\ z_2 - z_0 = \rho e^{i\theta_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \\ w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2} \end{array} \right.$$
- Hemos supuesto que las distancias (ρ_1 y ρ_2) entre w_0 con w_1 y w_2 son distintas .

Transformaciones conformes

- Como $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

La derivada en z_0 tiene que ser la misma al aproximarme por z_1 o z_2 .

Transformaciones conformes

- Como $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

La derivada en z_0 tiene que ser la misma al aproximarme por z_1 o z_2 .

- Entonces, $g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$

Transformaciones conformes

- Como $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

La derivada en z_0 tiene que ser la misma al aproximarme por z_1 o z_2 .

- Entonces, $g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$
- Claramente se preservan las distancias $\rho_1 = \rho_2$

Transformaciones conformes

- Como $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

La derivada en z_0 tiene que ser la misma al aproximarme por z_1 o z_2 .

- Entonces, $g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$
- Claramente se preservan las distancias $\rho_1 = \rho_2$
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.

Transformaciones conformes

- Como $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

La derivada en z_0 tiene que ser la misma al aproximarme por z_1 o z_2 .

- Entonces, $g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$
- Claramente se preservan las distancias $\rho_1 = \rho_2$
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Se preservan los ángulos $(\phi_2 - \phi_1) = \alpha = (\theta_2 - \theta_1)$

Transformaciones conformes

- Como $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

La derivada en z_0 tiene que ser la misma al aproximarme por z_1 o z_2 .

- Entonces, $g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$
- Claramente se preservan las distancias $\rho_1 = \rho_2$
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Se preservan los ángulos $(\phi_2 - \phi_1) = \alpha = (\theta_2 - \theta_1)$
- Si se conservan los ángulos y las escalas en todas direcciones, las figuras transformadas son ampliadas o rotadas, pero no deformadas.

- Como $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left. \frac{dg(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0}$$

La derivada en z_0 tiene que ser la misma al aproximarme por z_1 o z_2 .

- Entonces, $g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$
- Claramente se preservan las distancias $\rho_1 = \rho_2$
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Se preservan los ángulos $(\phi_2 - \phi_1) = \alpha = (\theta_2 - \theta_1)$
- Si se conservan los ángulos y las escalas en todas direcciones, las figuras transformadas son ampliadas o rotadas, pero no deformadas.
- Se dice que las figuras son conformes entre ellas.

Transformaciones conformes

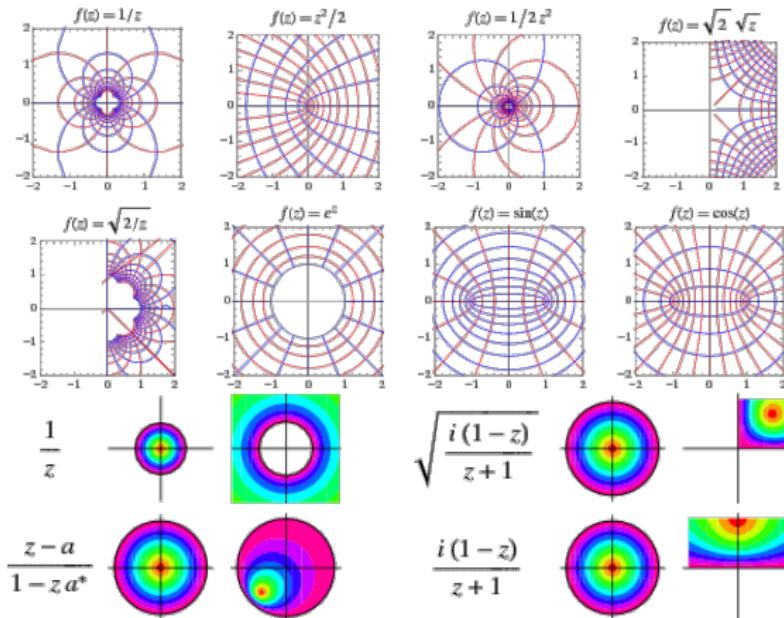


Figura: Transformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping.** *MathWorld—A Wolfram Web Resource.*

<http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>

Transformaciones conformes

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo θ** $w = ze^{i\theta}$;
expansiones de escala a : $w = az$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** θ $w = ze^{i\theta}$;
expansiones de escala a : $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** θ $w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a : $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano. Para convencernos de ello notamos que
 $|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|.$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** θ $w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a : $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano. Para convencernos de ello notamos que
 $|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior ($y \geq 0$), entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.

Transformaciones conformes

- **Traslaciones:** $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** θ $w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a : $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera:
 $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces:
 $0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano. Para convencernos de ello notamos que
 $|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior ($y \geq 0$), entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.
- La igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$.

Recapitulando

En presentación consideramos

1

- ① Determine el tipo de singularidades (en caso de tenerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$

① $f(z) = \frac{1}{z-2}$

② $f(z) = \frac{1+z^3}{z^2}$

③ $f(z) = \operatorname{senh} \left(\frac{1}{z} \right)$

Para la discusión

- ① Determine el tipo de singularidades (en caso de tenerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$

① $f(z) = \frac{1}{z-2}$

② $f(z) = \frac{1+z^3}{z^2}$

③ $f(z) = \operatorname{senh}(\frac{1}{z})$

- ② Identifique los ceros, polos y las singularidades esenciales de las siguientes funciones:

① $f(z) = \frac{z-2}{z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$

② $f(z) = e^{1/z}$

③ $f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right)$