Hamilton Jacobi

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

27 de mayo de 2025

Agenda

1. Las transformaciones canónicas $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$
2. El Principio de Mínima Acción
3. La ecuación de Hamilton-Jacobi
4. Sección
5. Sección
6. Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas

Las transformaciones canónicas

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \rightarrow \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q\left(q_j(0), p_j(0)\right), P_i = p\left(q_j(0), p_j(0)\right)$.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q\left(q_j(0), p_j(0)\right), P_i = p\left(q_j(0), p_j(0)\right)$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q\left(q_j(0), p_j(0), t\right), \quad p_i = p\left(q_j(0), p_j(0), t\right)$.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t), P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0)), P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t), \quad p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, tal que $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$, entonces existe una función generadora $\mathcal{F}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$

El Principio de Mínima Acción

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$

El Principio de Mínima Acción

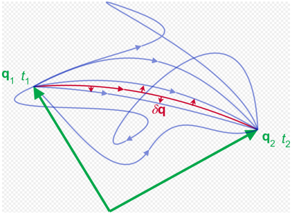
- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$

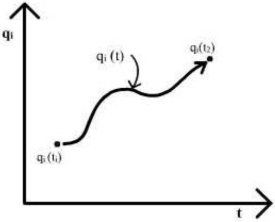
El Principio de Mínima Acción

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.
- La acción dependerá de las trayectorias y del tiempo, $S = S\left(q_i, t\right)$.





La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora tipo $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$, tal que $P_i = \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i = \beta_i = \text{cte}$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora tipo $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$, tal que $P_i = \alpha_i =$ cte, $Q_i = \beta_i =$ cte.
- La derivada total $\frac{d\mathcal{F}_2}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}\dot{P}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t}$
  $\Rightarrow \frac{d\mathcal{F}_2}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$
- Donde hemos usado: $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}$ y $\dot{P}_i = 0$.

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$
\begin{array}{l|l}
p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}
$$

donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.

Título transparencia

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos
$$\left.\begin{array}{l} p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) \\ Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' \end{array}\right| \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{array}$$
donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.
- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$
\left.\begin{array}{l}
p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}'
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}
$$

  donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.

- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$

- La solución $S(q_i, P_i, t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación $\{p_i, q_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$.

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos
$$\begin{array}{l|l} p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{array}$$
donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.
- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución $S(q_i, P_i, t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación $\{p_i, q_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$.
- Las constantes $P_i, Q_i \leftrightarrow \alpha_i, \beta_i$ se expresan en términos de las $2s$ condiciones iniciales $(q_i(0), p_i(0))$.

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos
$$
\begin{array}{l|l}
p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}
$$
donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.
- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución $S(q_i, P_i, t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación $\{p_i, q_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$.
- Las constantes $P_i, Q_i \leftrightarrow \alpha_i, \beta_i$ se expresan en términos de las $2s$ condiciones iniciales $(q_i(0), p_i(0))$.
- La solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema provee la trayectoria $q_i(t) = q_i(q_i(0), p_i(0), t)$ y $p_i(t) = p_i(q_i(0), p_i(0), t)$.

Título transparencia

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$

Título transparencia

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.

Título transparencia

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S(q_i, t)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \ldots, q_s, t) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.

Título transparencia

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.

Título transparencia

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)$, tomamos las s constantes $P_i = \alpha_i$.

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S(q_i, t)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \ldots, q_s, t) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S(q_i, P_i, t)$, tomamos las s constantes $P_i = \alpha_i$.
- La solución $S = S(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$.

Título transparencia

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i,t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1,\ldots,q_s,t\right)+H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2}\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_s},t\right)=0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S}=S+C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i,P_i,t\right)$, tomamos las s constantes $P_i=\alpha_i$.
- La solución $S=S\left(q_1,\ldots,q_s,P_1,\ldots,P_s,t\right)=S\left(q_i,\alpha_i,t\right)$.
- Si el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H}\left(q_i,p_i\right)=cte=\mathcal{E}$.

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i,t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1,\ldots,q_s,t\right)+H\left(q_1,\ldots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2}\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_s},t\right)=0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S}=S+C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i,P_i,t\right)$, tomamos las s constantes $P_i=\alpha_i$.
- La solución $S=S\left(q_1,\ldots,q_s,P_1,\ldots,P_s,t\right)=S\left(q_i,\alpha_i,t\right)$.
- Si el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H}\left(q_i,p_i\right)=cte=\mathcal{E}$.
- Suponemos que la solución S tiene la forma $S\left(q_i,P_i,t\right)=S\left(q_i,\alpha_i,t\right)=\mathcal{W}\left(q_i,P_i\right)-\mathcal{E}t=\mathcal{W}\left(q_i,\alpha_i\right)-\mathcal{E}t$. Una de las s constantes α_i es $\mathcal{E}$

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right)+H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right)=0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S}=S+C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)$, tomamos las s constantes $P_i=\alpha_i$.
- La solución $S=S\left(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s, t\right)=S\left(q_i, \alpha_i, t\right)$.
- Si el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right)=cte=\mathcal{E}$.
- Suponemos que la solución S tiene la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)=S\left(q_i, \alpha_i, t\right)=\mathcal{W}\left(q_i, P_i\right)-\mathcal{E} t=\mathcal{W}\left(q_i, \alpha_i\right)-\mathcal{E} t$. Una de las s constantes α_i es $\mathcal{E}$
- La función $\mathcal{W}\left(q_i, P_i\right)=\mathcal{W}\left(q_i, \alpha_i\right)$ se llama función característica o principal de Hamilton.

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$. Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$.
  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0.$ Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = \mathcal{E}$

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$.
  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = \mathcal{E}$
- Buscamos una solución por separación de variables,
  $S(q,\mathcal{E},t) = W(q,\mathcal{E}) - \mathcal{E}Et$, con $P = E = \alpha$ constante de integración

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$. Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = \mathcal{E}$
- Buscamos una solución por separación de variables, $S(q,\mathcal{E},t) = W(q,\mathcal{E}) - \mathcal{E}Et$, con $P = E = \alpha$ constante de integración
- Entonces, $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = E \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \left(2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2\right)^{1/2} \Rightarrow,$
  $\mathcal{W}(q,E) = \int \left(2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2\right)^{1/2} dq \equiv S(q,\mathcal{E},t) + Et$

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}} \right)$

Una vez mas el Oscilador Armónico, continuación

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}} \right)$
- Con cual, $q(Q, E, t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta')$, con $\beta' = Q\omega =$ cte.

- La función $S(q,E,t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q,E,t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \beta'\right)$, con $\beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2mE} \cos\left(\omega t + \beta'\right)$

Una vez mas el Oscilador Armónico, continuación

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q, E, t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \beta'\right)$, con $\beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2mE} \cos\left(\omega t + \beta'\right)$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2mE} \cos(\omega Q)$

- La función $S(q,E,t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta = \text{cte.}$
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q,E,t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta')$, con $\beta' = Q\omega = \text{cte.}$
- Entonces $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2mE} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(m\omega \frac{q_0}{p_0}\right)$.

- La función $S(q, E, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q, E, t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \beta'\right)$, con $\beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2mE} \cos\left(\omega t + \beta'\right)$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2mE} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(m\omega \frac{q_0}{p_0}\right)$.
- Mientras que $E = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2\right) = P$

- La función $S(q,E,t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2E}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q,E,t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta')$, con $\quad \beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2mE} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(m\omega \frac{q_0}{p_0}\right)$.
- Mientras que $E = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2\right) = P$
- Las ecuaciones $p = p(q_0, p_0, t)$ y $q = q(q_0, p_0, t)$ expresan la solución de las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico en términos de las condiciones iniciales.