1. Ecuación de Bernoulli

Uno puede reducir un tipo de ecuación diferencial no lineal a una ecuación diferencial lineal y proceder como hemos resuelto los sistemas anteriores. Considere la ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

1. Muestre que el siguiente cambio de variable $v = y^{1-n}$, la convierte en en una ecuación lineal.
2. Considere el caso particular de la ecuación de Verhulst o también conocida como ecuación logística (el caso $n = 2$ con $p(x) = \alpha = const$) con la condición inicial $y(0) = y_0 > 0$.
   a) Suponga que $\lim_{x\to\infty} \exp(\alpha x) \int_0^x \mathrm{d}x\, q(x) \exp(-\alpha x) = L$ existe y encuentre la solución $\lim_{x\to\infty} y(x)$
   b) Suponga ahora, que $q(x)$ es una función discontínua, vale decir
   $$q(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ & \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$
   y considere otra vez la condición inicial $y(0) = y_0 > 0$ y encuentre la solución para $0 \leq x \leq 2$
   c) Considere la evolución demográfica de Colombia[1], ajuste los parámetros para las descripciones maltusiana o verhulstiana y recuerde la historia para ver como puede justificar el ajuste.
   d) Suponga ahora, que $q(x) = \epsilon << 1$, y considere que la ecuación la ecuación de Verhulst se puede expresar como $y' = \tilde{p}(x)y + \epsilon y^2$ con lo cual el término cuadrático puede representar una perturbación a la solución de la ecuación lineal. Haga un mapa de la solución gráfica de la ecuación y muestre en el rango $0 \leq x \leq 2$ el comportamiento de la solución para $\epsilon = 0{,}1$ $\epsilon = 0{,}01$ $\epsilon = 0{,}001$

2. Sistemas autónomos

Una de las clases de ecuaciones diferenciales más comunes o utilizadas la constituyen los sistemas autónomos del tipo $y' = f(y)$. Claramente las ecuaciones de Malthus y Verhulst (o logística) constituyen casos particulares de este tipo de sistemas para $f_M(y) = ky$ y $f_V(y) = ky(1 - \frac{y}{K})$, respectivamente (con k la constante malthusiana de crecimiento intrínseco) que son fundamentales en dinámica de poblaciones[2].

1. Considere la ecuación logística $y' = ky(1 - \frac{y}{K})$
   a) Encuentre la solución gráfica para la familia de soluciones de la ecuación con $k = 1/3$ y $K = 6$.
   b) Suponga una solución particular para la ecuación con $y(0) = 2$ y encuentre el valor de x para el cual la población inicial se duplicó
   c) Suponga que $y(0)/K = \alpha$ y encuentre el valor de X, tal que $y(X)/K = \beta$, para $\alpha > 0$ y $\beta < 1$. Note que $X \to \infty$ cuando $\alpha \to 0$ o $\beta \to 1$ Encuentre el valor de X para $k = 0{,}025$, $\alpha = 0{,}1$ y $\beta = 0{,}9$
2. Los sistemas autónomos $y' = f(y)$ admiten un estudio cualitativo interesante a partir del comportamiento de la función $f(y)$. Los ceros de $f(y) = 0$ representan soluciones de equilibrio y de sus máximos y mínimos también podemos extraer información sin resolver la ecuación.

[1] Puede consultar http://www.populstat.info/Americas/colombic.htm o cualquier otra fuente confiable que puede citar
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Population_ecology

a) Considere otra vez la ecuación logística $y' = ky(1 - \frac{y}{K})$, encuentre las dos soluciones de equilibrio y discuta por qué una de ellas se considera como de equilibrio inestable y otra de equilibrio asintótico. Ilustre esas afirmaciones para el caso $k = 1/3$ y $K = 6$,

b) Considere ahora una variante de la ecuación logística $y' = -ky(1 - \frac{y}{T})(1 - \frac{y}{K})$, con $0 < T < K$ y $k > 0$. Esta ecuación se utilizó para describir el crecimiento y extinción en norteamérica de la Paloma Migratoria o Paloma de la Carolina[3].

1) a partir del análisis de las soluciones críticas discuta el significado de las constantes T y K y de las soluciones en las regiones $0 < y < T$, $T < y < K$ y $y > K$.
2) discuta el significado de los máximos y los mínimos de $f(y) = -ky(1 - \frac{y}{T})(1 - \frac{y}{K})$ y muestre cómo están relacionados con el comportamiento de las soluciones y(x)
3) Encuentre las solución gráfica para el caso $k = 1/3$, $T = 2$ y $K = 6$ e ilustre sus afirmaciones. En particular asocie el comportamiento de la función $f(y)$ con la familia de soluciones para este caso.

c) Finalmente considere la ecuación de Gompertz[4] $y' = -ky\ln(\frac{K}{y})$ con K y k constantes positivas

1) Encuentre las soluciones críticas y discuta cuáles corresponden a soluciones estables o inestables
2) Resuelva la ecuación de Gompertz para $k = 1/3$ y $K = 6$ y compárela con la ecuación de Verhulst. ¿Cómo se compara el crecimiento de poblaciones descrito por cada una de estas ecuaciones?

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Passenger_pigeon
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Gompertz_function