

Partícula en un Campo electromagnético

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



24 de febrero de 2025

- 1 Energía y Potenciales dependientes de las velocidades $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$
- 2 Fuerza de Lorentz una *una fuerza generalizada*
- 3 El potencial vector
- 4 Simetría de Calibre
- 5 Teorema de Helmholtz
- 6 Recapitulando

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.

energía y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como

$$E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como

$$E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$$

- Como en general

$$T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como

$$E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$$

- Como en general

$$T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$$

- Entonces

$$E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como

$$E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$$

- Como en general

$$T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$$

- Entonces

$$E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total, $E(q_j, \dot{q}_j) = T + V$

- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_j, \dot{q}_j)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) - V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una función de energía como

$$E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - V)$$

- Como en general

$$T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = 2T$$

- Entonces

$$E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total, $E(q_j, \dot{q}_j) = T + V$
- Si $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$, la función de energía contiene términos adicionales a $T + V$.

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.

- Una partícula de masa m y carga q , moviéndose con velocidad \mathbf{v} , en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.
- La fuerza de Lorentz constituye una fuerza generalizada

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- o también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- o también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- o también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- Como $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector

- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$

- o también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$

- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

- Como $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Tendremos $\mathbf{F} = q \left[-\nabla \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right]$
 $\Rightarrow F_i = q \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right]$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector

- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$

- o también $\mathbf{F} = q \left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$

- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

- Como $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Tendremos $\mathbf{F} = q \left[-\nabla \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right]$

$$\Rightarrow F_i = q \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right]$$

- Como $\frac{\partial V}{\partial x_i} = q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$ y $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{q}{c} A_i$

- Finalmente el potencial será $V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$

- Finalmente el potencial será $V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2} m v^2 - q \varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$

- Finalmente el potencial será $V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2} m v^2 - q \varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + q \varphi$

- Finalmente el potencial será $V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2} m v^2 - q \varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + q \varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.

- Finalmente el potencial será $V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

- Finalmente el potencial será $V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2} m v^2 - q \varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + q \varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía E no depende del potencial vector \mathbf{A} y, por tanto, tampoco depende del campo magnético \mathbf{B} .

- Finalmente el potencial será $V = q \left(\varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2} m v^2 - q \varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 + q \varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía E no depende del potencial vector \mathbf{A} y, por tanto, tampoco depende del campo magnético \mathbf{B} .
- La fuerza magnética no realiza trabajo ya que siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula.

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**:
$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$
 donde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**:
$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$
 donde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario
- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación
$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$
$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad y \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad \text{donde}$$

$\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario

- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación
$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$
$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$
- El Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético bajo una transformación de calibre, es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi' + \frac{q}{c}\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \frac{q}{c}\nabla\Lambda \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathcal{L} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \nabla\Lambda \cdot \mathbf{v}\right) = \mathcal{L} + \frac{q}{c}\frac{d\Lambda}{dt}\end{aligned}$$

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de \mathcal{L} son invariantes bajo una transformación de calibre.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de \mathcal{L} son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de \mathcal{L} son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de \mathcal{L} son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de \mathcal{L} son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de \mathcal{L} son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.
- La simetría de calibre de las ecuaciones de Maxwell implica la conservación de la carga eléctrica

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S , y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_S \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S , y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único
- Todo campo vectorial \mathbf{F} , continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos “componentes”: una *longitudinal* o *irrotacional* \mathbf{F}_l y otra *transversa* o *solenoidal* \mathbf{F}_t .

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0. \end{cases}$$

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S , y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_S \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único
- Todo campo vectorial \mathbf{F} , continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos “componentes”: una *longitudinal* o *irrotacional* \mathbf{F}_l y otra *transversa* o *solenoidal* \mathbf{F}_t .

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0. \end{cases}$$

- En general el campo \mathbf{F} puede ser discontinuo, entonces

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \text{ y como}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \nabla \cdot \mathbf{F}_l = \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \nabla \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}(\mathbf{r}), \end{cases}$$

- Entonces

$$\nabla \times \mathbf{F}_I = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_I = -\nabla \phi(x^i) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_I = -\nabla^2 \phi(x^i) = \rho(\mathbf{r})$$

y la solución existe y es única.

Teorema de Helmholtz 1/2

- Entonces

$$\nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_l = -\nabla \phi(x^i) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_l = -\nabla^2 \phi(x^i) = \rho(\mathbf{r})$$

y la solución existe y es única.

- Por otra parte $\nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_t = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}_t = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

- Entonces

$$\nabla \times \mathbf{F}_l = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_l = -\nabla \phi(x^i) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_l = -\nabla^2 \phi(x^i) = \rho(\mathbf{r})$$

y la solución existe y es única.

- Por otra parte $\nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_t = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}_t = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

- Al seleccionar el calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ tendremos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{A} = \partial^i \partial_i \mathbf{A} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}) \Rightarrow$$

$$\partial^i \partial_i A^k = -J^k(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 A_x = -J_x(\mathbf{r}) \\ \nabla^2 A_y = -J_y(\mathbf{r}) \\ \nabla^2 A_z = -J_z(\mathbf{r}) \end{cases}$$

- Energía y Potenciales Dependientes de las Velocidades:
 - Lagrangianos con potenciales dependientes de la velocidad.
 - Relación entre la función de energía y la energía mecánica.

- Energía y Potenciales Dependientes de las Velocidades:
 - Lagrangianos con potenciales dependientes de la velocidad.
 - Relación entre la función de energía y la energía mecánica.
- Fuerza de Lorentz como una Fuerza Generalizada:
 - Fuerza de Lorentz: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$..
 - Tratamiento de la fuerza de Lorentz dentro del formalismo lagrangiano..

- Energía y Potenciales Dependientes de las Velocidades:
 - Lagrangianos con potenciales dependientes de la velocidad.
 - Relación entre la función de energía y la energía mecánica.
- Fuerza de Lorentz como una Fuerza Generalizada:
 - Fuerza de Lorentz: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$.
 - Tratamiento de la fuerza de Lorentz dentro del formalismo lagrangiano..
- El Potencial Vector:
 - Campos eléctrico y magnético en términos de los potenciales escalar y vectorial: $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.
 - Cómo la fuerza de Lorentz puede derivarse del potencial vector.

- Energía y Potenciales Dependientes de las Velocidades:
 - Lagrangianos con potenciales dependientes de la velocidad.
 - Relación entre la función de energía y la energía mecánica.
- Fuerza de Lorentz como una Fuerza Generalizada:
 - Fuerza de Lorentz: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$.
 - Tratamiento de la fuerza de Lorentz dentro del formalismo lagrangiano..
- El Potencial Vector:
 - Campos eléctrico y magnético en términos de los potenciales escalar y vectorial: $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.
 - Cómo la fuerza de Lorentz puede derivarse del potencial vector.
- Simetría de Calibre (*Gauge*):
 - La invariancia de las ecuaciones bajo transformaciones de calibre.
 - Cómo el potencial escalar y el potencial vector pueden modificarse sin cambiar los campos eléctricos y magnéticos.

- Energía y Potenciales Dependientes de las Velocidades:
 - Lagrangianos con potenciales dependientes de la velocidad.
 - Relación entre la función de energía y la energía mecánica.
- Fuerza de Lorentz como una Fuerza Generalizada:
 - Fuerza de Lorentz: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$..
 - Tratamiento de la fuerza de Lorentz dentro del formalismo lagrangiano..
- El Potencial Vector:
 - Campos eléctrico y magnético en términos de los potenciales escalar y vectorial: $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.
 - Cómo la fuerza de Lorentz puede derivarse del potencial vector.
- Simetría de Calibre (*Gauge*):
 - La invariancia de las ecuaciones bajo transformaciones de calibre.
 - Cómo el potencial escalar y el potencial vector pueden modificarse sin cambiar los campos eléctricos y magnéticos.
- Teorema de Helmholtz:
 - Descomposición de campos vectoriales en términos de sus componentes irrotacionales y solenoidales.
 - Aplicación del teorema a la formulación del campo electromagnético en términos de los potenciales escalar y vectorial.