# Vectores complejos

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

9 de febrero de 2024

# Agenda de Vectores Complejos

# Números Complejos

- Un número complejo, $z$, es:

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Un número complejo, $z$, es:

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

- Cada número complejo, $z$ tendrá asociado un número complejo conjugado, $z^*$ tal que:

$$z = a + ib \quad \rightleftharpoons \quad z^* = a - ib\,,$$
$$\Downarrow$$
$$(z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2\,,$$

claramente: $z \cdot z^* \geq 0 \;\Rightarrow\; |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2\,.$

- Un número complejo, $z$, es:

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

- Cada número complejo, $z$ tendrá asociado un número complejo conjugado, $z^*$ tal que:

$$z = a + ib \quad \rightleftharpoons \quad z^* = a - ib\,,$$
$$\Downarrow$$
$$(z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2\,,$$

claramente: $z \cdot z^* \geq 0 \;\Rightarrow\; |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2\,.$

- no existe relación de orden entre los números complejos:

$z_1 \not> z_2 \quad \vee \quad z_1 \not< z_2$

# Algebra de números complejos

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son: $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .

# Algebra de números complejos

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son: $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias: $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow$ $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ .

# Algebra de números complejos

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son: $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \;\wedge\; b_1 = b_2\,.$
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias: $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow$ $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3\,,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*\,.$
- Se multiplican números complejos por escalares $z_3 = \alpha z_1 \;\Rightarrow\; \alpha(a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i(\alpha b_1)\,.$

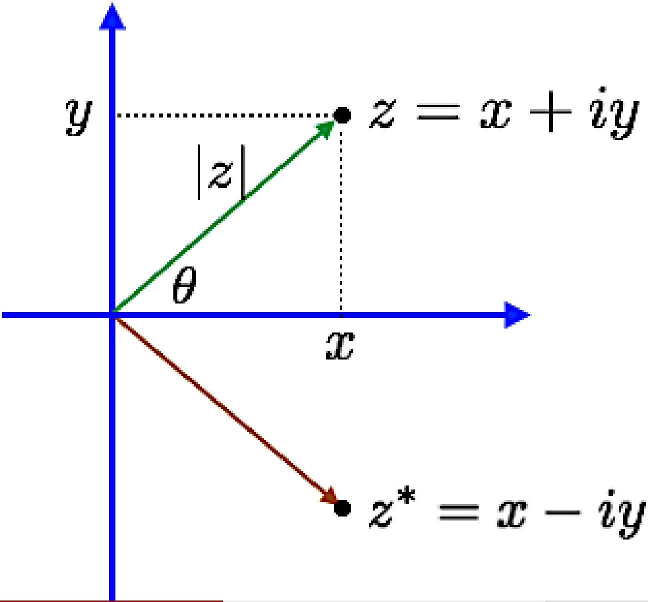
# Algebra de números complejos

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son: $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \;\wedge\; b_1 = b_2$.
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias: $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow$ $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$,
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\, z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.
- Se multiplican números complejos por escalares $z_3 = \alpha z_1 \;\Rightarrow\; \alpha(a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i(\alpha b_1)$.
- Se multiplican números complejos entre si, con cuidado que $i^2 = -1$: $z_3 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$, también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

# Algebra de números complejos

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son: $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \;\wedge\; b_1 = b_2$ .
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias: $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow$ $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ .
- Se multiplican números complejos por escalares $z_3 = \alpha z_1 \;\Rightarrow\; \alpha(a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i(\alpha b_1)$ .
- Se multiplican números complejos entre si, con cuidado que $i^2 = -1$: $z_3 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ , también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.
- Se dividen números complejos racionalizando frcaciones $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \;\Rightarrow\; \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}\frac{(a_2-ib_2)}{(a_2-ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)} + i\,\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)}$ ,

# Vectores y números complejos 1/2



# Vectores y números complejos 2/2

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números $z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b)\,.$

# Vectores y números complejos 2/2

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números $z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b)$ .
- La representación geométrica de $z^*$ (complejo conjugado de $z$) es la reflexión de $z$ respecto al eje real.

# Vectores y números complejos 2/2

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números $z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b)$ .
- La representación geométrica de $z^*$ (complejo conjugado de $z$) es la reflexión de $z$ respecto al eje real.
- $|z| = \sqrt{zz^*}$ viene a ser la distancia del punto $(0, 0)$ al punto $(x, y)$, es la longitud o norma del vector $(x, y)$.

# Vectores y números complejos 2/2

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números $z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b)\,.$
- La representación geométrica de $z^*$ (complejo conjugado de $z$) es la reflexión de $z$ respecto al eje real.
- $|z| = \sqrt{zz^*}$ viene a ser la distancia del punto $(0, 0)$ al punto $(x, y)$, es la longitud o norma del vector $(x, y)$.
- En el plano real podemos ver que: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons$

$$z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))\,, \text{ con: } \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x}, \text{ donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

# Vectores y números complejos 2/2

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números $z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b)$.
- La representación geométrica de $z^*$ (complejo conjugado de $z$) es la reflexión de $z$ respecto al eje real.
- $|z| = \sqrt{zz^*}$ viene a ser la distancia del punto $(0, 0)$ al punto $(x, y)$, es la longitud o norma del vector $(x, y)$.
- En el plano real podemos ver que: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons$

$$z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))\,, \text{ con: } \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x}, \text{ donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = Re\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = Im\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

- Los vectores complejos se multiplican y se ¡ dividen !
  - $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$
  - $\frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} \right)$ .

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Los vectores complejos se multiplican y se ¡ dividen !
  - $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$
  - $\frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} \right)$ .
- Los productos escalar y vectorial nos llevan a:
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \left(a^i\right)^* a_i$ siempre será un número real.
  - $z_1 \cdot z_2 = Re\left(z_1 z_2^*\right) = Re\left(z_1^* z_2\right)$ y en componentes $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(a^i\right)^* b_i$
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^*$.
    - $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda^* \ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
    - $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
  - $z_1 \times z_2 = Im\left(z_1^* z_2\right) = -Im\left(z_1 z_2^*\right)$ .

# Expresiones de números complejos

- Tenemos tres formas de representar un número complejo:
$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right) \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|e^{i\theta}\,.$

# Expresiones de números complejos

- Tenemos tres formas de representar un número complejo:
  $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right) \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|e^{i\theta}\,.$
- La forma polar (y la de Euler), es ambigua, ya que:
  $z = r(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)) = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i\mathrm{sen}(\theta + 2n\pi)),$
  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

# Expresiones de números complejos

- Tenemos tres formas de representar un número complejo:
  $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|\left(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)\right) \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|e^{i\theta}\,.$
- La forma polar (y la de Euler), es ambigua, ya que:
  $z = r(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)),$
  $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
- Las sumas de números complejos se plantean más fácilmente en su forma cartesiana. La multiplicación y división serán directas en la forma de Euler. Si $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, entonces:
  $z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} =$
  $|z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))\,.$
- La división será:
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))\,.$
- A partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar:
  $z^n = |z|^n(e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta} \Rightarrow |z|^n\left(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right)^n =$
  $|z|^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\operatorname{sen}\left(n\theta\right)\right)\,,$

## Recapitulando

1. Números complejos $z = a + ib$ con $a$ parte real $b$ parte imaginarias. Su complejo conjugado $z^* = z = a - ib$

# Recapitulando

1. Números complejos $z = a + ib$ con $a$ parte real $b$ parte imaginarias. Su complejo conjugado $z^* = z = a - ib$
2. Algebra de números complejos:
    - igualdad $(a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
    - suma $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
    - Conjugado $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$.
    - $z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ ,
    - División $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}\frac{(a_2-ib_2)}{(a_2-ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)}$ ,

# Recapitulando

1. Números complejos $z = a + ib$ con $a$ parte real $b$ parte imaginarias. Su complejo conjugado $z^* = z = a - ib$
2. Algebra de números complejos:
   - igualdad $(a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \ \wedge \ b_1 = b_2$ .
   - suma $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
   - Conjugado $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\, z$.
   - $z_3 = z_1 z_2 \ \Rightarrow \ (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ ,
   - División $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \ \Rightarrow \ \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} \frac{(a_2-ib_2)}{(a_2-ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)}$ ,
3. Vectores Complejos: *dupla* de números $z = (a + ib) \ \leftrightharpoons \ z = (a, b)$ .
   - Los vectores complejos se multiplican y se ¡ dividen !
   - Productos escalar/vectorial $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \equiv \left(a^i\right)^* b_i$ y $z_1 \times z_2 = Im(z_1^* z_2) = -Im(z_1 z_2^*)$ .

# Recapitulando

1. Números complejos $z = a + ib$ con $a$ parte real $b$ parte imaginarias. Su complejo conjugado $z^* = z = a - ib$
2. Algebra de números complejos:
   - igualdad $(a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
   - suma $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
   - Conjugado $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\, z$.
   - $z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ ,
   - División $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}\frac{(a_2-ib_2)}{(a_2-ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2+b_2^2)}$ ,
3. Vectores Complejos: *dupla* de números $z = (a + ib) \leftrightharpoons z = (a, b)$ .
   - Los vectores complejos se multiplican y se ¡ dividen !
   - Productos escalar/vectorial $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \equiv \left(a^i\right)^* b_i$ y $z_1 \times z_2 = Im(z_1^* z_2) = -Im(z_1 z_2^*)$ .
4. Tenemos tres formas de representar un número complejo: $z = x + iy \leftrightharpoons z = |z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \leftrightharpoons z = |z|e^{i\theta}$ .