Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

4 de septiembre de 2024

Ideas generales

- Una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right]$ siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \equiv p(t) \\ x \equiv q(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{q} = p(t) \\ \dot{p} = F(p(t), q(t), t) \end{array}\right.$$

Ideas generales

- Una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x}(t) = F[\dot{x}(t), x(t), t]$ siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden:
$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \equiv p(t) \\ x \equiv q(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = F[\dot{x}(t), x(t), t] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{q} = p(t) \\ \dot{p} = F(p(t), q(t), t) \end{array}\right.$$
- Rearreglado en forma vectorial
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ F[p(t), q(t), t] \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t)$$

Ideas generales

- Una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right]$ siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \equiv p(t) \\ x \equiv q(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{q} = p(t) \\ \dot{p} = F(p(t), q(t), t) \end{array}\right.$$

- Rearreglado en forma vectorial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{array}{c} q(t) \\ p(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} p(t) \\ F\left[p(t), q(t), t\right] \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t)$$

- Al resolver $y'(x) = f(y(x), x)$, obtenemos una "función" $y_k = y(x_k)$

Ideas generales

- Una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right]$ siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \equiv p(t) \\ x \equiv q(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{q} = p(t) \\ \dot{p} = F(p(t), q(t), t) \end{array}\right.$$

- Rearreglado en forma vectorial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{array}{c} q(t) \\ p(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} p(t) \\ F\left[p(t), q(t), t\right] \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t)$$

- Al resolver $y'(x) = f(y(x), x)$, obtenemos una “función” $y_k = y(x_k)$
- Con $x_k = x_0 + kh$, un conjunto de puntos discretos donde $k = 0, 1, 2, \ldots,$ $x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ y h el paso de la solución.

Ideas generales

- Una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right]$ siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden:
$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \equiv p(t) \\ x \equiv q(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{q} = p(t) \\ \dot{p} = F(p(t), q(t), t) \end{array}\right.$$
- Rearreglado en forma vectorial
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ F\left[p(t), q(t), t\right] \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t)$$
- Al resolver $y'(x) = f(y(x), x)$, obtenemos una "función" $y_k = y(x_k)$
- Con $x_k = x_0 + kh$, un conjunto de puntos discretos donde $k = 0, 1, 2, \ldots,\ x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ y h el paso de la solución.
- Un método **explícito** determina las y_{k+1} con los valores anteriores $y_k, y_{k-1}, \cdots, y_{k-p}$. Esto es $y_{k+1} = y_{k-1} + 2h\ f(x_k, y_k)$

Ideas generales

- Una ecuación diferencial de segundo orden $\ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right]$ siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden:
$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \equiv p(t) \\ x \equiv q(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{q} = p(t) \\ \dot{p} = F(p(t), q(t), t) \end{array}\right.$$
- Rearreglado en forma vectorial
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{array}{c} q(t) \\ p(t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} p(t) \\ F\left[p(t), q(t), t\right] \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t)$$
- Al resolver $y'(x) = f(y(x), x)$, obtenemos una "función" $y_k = y(x_k)$
- Con $x_k = x_0 + kh$, un conjunto de puntos discretos donde $k = 0, 1, 2, \ldots,\ x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ y h el paso de la solución.
- Un método **explícito** determina las y_{k+1} con los valores anteriores $y_k, y_{k-1}, \cdots, y_{k-p}$. Esto es $y_{k+1} = y_{k-1} + 2h\ f(x_k, y_k)$
- Un método **implícito** utilizan una función del mismo valor y_{k+1}. Esto es $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\ \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$

El rebusque de Taylor

- En general tenemos $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \ \varphi(x_k, y_k, h)$ con $h = x_{i+1} - x_i$;

El rebusque de Taylor

- En general tenemos $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \ \varphi(x_k, y_k, h)$ con $h = x_{i+1} - x_i$;
- Al expandir por Taylor alrededor del punto $x = x_k$ tendremos $y(x) = y(x_k) + (x - x_k)\ \ y'(x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}\,(x - x_k)^n\ \ y^{(n)}(x_k) + \cdots$

El rebusque de Taylor

- En general tenemos $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \ \varphi(x_k, y_k, h)$ con $h = x_{i+1} - x_i$;
- Al expandir por Taylor alrededor del punto $x = x_k$ tendremos $y(x) = y(x_k) + (x - x_k)\ \ y'(x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}\,(x - x_k)^n\ \ y^{(n)}(x_k) + \cdots$
- Identificando

$$
\begin{aligned}
&y(x_k) \rightarrow y_k \\
&y'(x_k) \rightarrow f(y_k, x_k) \\
&y''(x_k) \rightarrow f'(y_k, x_k) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} y'_k \\
&y'''(x_k) \rightarrow f''(y_k, x_k) = \partial_x f' + \partial_y f' y'_k = \\
&\partial_{xx} f + (\partial_{xy} f)\, y'_k + [\partial_{yx} f + (\partial_{yy} f)\, y'_k]\, y'_k + \partial_y f\ \ y''_k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

El rebusque de Taylor

- En general tenemos $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \varphi(x_k, y_k, h)$ con $h = x_{i+1} - x_i$;
- Al expandir por Taylor alrededor del punto $x = x_k$ tendremos $y(x) = y(x_k) + (x - x_k)\; y'(x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_k)^n\; y^{(n)}(x_k) + \cdots$
- Identificando

$$
\begin{aligned}
&y(x_k) \to y_k \\
&y'(x_k) \to f(y_k, x_k) \\
&y''(x_k) \to f'(y_k, x_k) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} y'_k \\
&y'''(x_k) \to f''(y_k, x_k) = \partial_x f' + \partial_y f' y'_k = \\
&\partial_{xx} f + (\partial_{xy} f)\, y'_k + [\partial_{yx} f + (\partial_{yy} f)\, y'_k]\, y'_k + \partial_y f\;\; y''_k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

- $y_{n+1} = y_n + h\; f(y_k, x_k) + \frac{1}{2!}h^2\; f'(y_k, x_k) + \frac{1}{3!}h^3\; f''(y_k, x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}\; h^n\; f^{(n-1)}(y_k, x_k) + \cdots$

El rebusque de Taylor

- En general tenemos $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \ \varphi(x_k, y_k, h)$ con $h = x_{i+1} - x_i$;
- Al expandir por Taylor alrededor del punto $x = x_k$ tendremos $y(x) = y(x_k) + (x - x_k) \ y'(x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_k)^n \ y^{(n)}(x_k) + \cdots$
- Identificando

$$y(x_k) \rightarrow y_k$$
$$y'(x_k) \rightarrow f(y_k, x_k)$$
$$y''(x_k) \rightarrow f'(y_k, x_k) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} y'_k$$
$$y'''(x_k) \rightarrow f''(y_k, x_k) = \partial_x f' + \partial_y f' y'_k =$$
$$\partial_{xx} f + (\partial_{xy} f)\, y'_k + [\partial_{yx} f + (\partial_{yy} f)\, y'_k]\, y'_k + \partial_y f \ y''_k$$
$$\vdots$$

- $y_{n+1} = y_n + h \ f(y_k, x_k) + \frac{1}{2!} h^2 \ f'(y_k, x_k) + \frac{1}{3!} h^3 \ f''(y_k, x_k) + \cdots + \frac{1}{n!} \ h^n \ f^{(n-1)}(y_k, x_k) + \cdots$
- Resuelva $y' = x^2 + exp(y^2)$ para $y(0) = 1$

La idea de la integración y los métodos numéricos

- Integrar una ecuación diferencial ordinaria es aproximar la integral $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}\xi \; f(\xi, y(\xi))\,,$

- Integrar una ecuación diferencial ordinaria es aproximar la integral $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}\xi \; f(\xi, y(\xi))$,
- **Euler:** $f(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$

La idea de la integración y los métodos numéricos

- Integrar una ecuación diferencial ordinaria es aproximar la integral $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}\xi \; f(\xi, y(\xi))$,
- **Euler:** $f(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$
- **Euler Mejorado:** el promedio $\frac{1}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right] \Rightarrow$
  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$
  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h\, f(x_k, y_k))\right]$

- Integrar una ecuación diferencial ordinaria es aproximar la integral $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}\xi \; f(\xi, y(\xi))\,,$
- **Euler:** $f(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\; f(x_k, y_k)$
- **Euler Mejorado:** el promedio $\frac{1}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right] \Rightarrow$
  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$
  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h\; f(x_k, y_k))\right]$
- **Runge-Kutta:**
  $y_{k+1} = y_k + \left[\alpha\; f(y_k, x_k) + \beta\; f(y_k + \delta\; f(y_k, x_k) h_k, x_k + \gamma\; h_k)\right] h_k$
  - **Euler Mejorado o Heuns:** $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = \delta = 1$
  - **Euler Modificado:** $\alpha = 0$; $\beta = 1$; y $\gamma = \delta = \frac{1}{2}$
    $y_{k+1} = y_k + f(y_k, x_k)\; h_k + \left[\frac{1}{2}\partial_x f_k + \frac{1}{2}\; f_k\; \partial_y f_k\right] h_k^2$
  - **Runge-Kutta de cuarto orden:**
    $y_{k+1} = y_k + \left[\alpha\; \kappa_1 + \beta\; \kappa_2 + \gamma\; \kappa_3 + \delta\; \kappa_4\right] h_k$
    Entonces $y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}\left[\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right]$
    con $\kappa_1 = f(x_k, y_k)$, $\kappa_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h_k,\; y_k + \frac{1}{2}\kappa_1)$
    $\kappa_3 = f(x_k + \frac{1}{2}h_k,\; y_k + \frac{1}{2}\kappa_2)$, $\kappa_4 = f(x_k + h_k,\; y_k + \kappa_3)$

- Integrar una ecuación diferencial ordinaria es aproximar la integral $y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}\xi \; f(\xi, y(\xi))\,,$
- **Euler:** $f(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\; f(x_k, y_k)$
- **Euler Mejorado:** el promedio $\frac{1}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right] \Rightarrow$
  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$
  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h\; f(x_k, y_k))\right]$
- **Runge-Kutta:**
  $y_{k+1} = y_k + \left[\alpha\; f(y_k, x_k) + \beta\; f(y_k + \delta\; f(y_k, x_k)h_k, x_k + \gamma\; h_k)\right] h_k$
  - **Euler Mejorado o Heuns:** $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = \delta = 1$
  - **Euler Modificado:** $\alpha = 0$; $\beta = 1$; y $\gamma = \delta = \frac{1}{2}$
    $y_{k+1} = y_k + f(y_k, x_k)\; h_k + \left[\frac{1}{2}\partial_x f_k + \frac{1}{2}\; f_k\; \partial_y f_k\right] h_k^2$
  - **Runge-Kutta de cuarto orden:**
    $y_{k+1} = y_k + \left[\alpha\; \kappa_1 + \beta\; \kappa_2 + \gamma\; \kappa_3 + \delta\; \kappa_4\right] h_k$
    Entonces $y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}\left[\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right]$
    con $\kappa_1 = f(x_k, y_k)$, $\kappa_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h_k,\; y_k + \frac{1}{2}\kappa_1)$
    $\kappa_3 = f(x_k + \frac{1}{2}h_k,\; y_k + \frac{1}{2}\kappa_2)$, $\kappa_4 = f(x_k + h_k,\; y_k + \kappa_3)$
- Vuelva a resolver $y' = x^2 + exp(y^2)$ para $y(0) = 1$

Fórmulas implicitas y Explicitas

- Los métodos multipaso requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos monopaso para un mismo nivel de precisión.

Fórmulas implicitas y Explicitas

- Los métodos multipaso requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos monopaso para un mismo nivel de precisión.
- Los métodos multipaso requieren de un método monopaso que le permita determinar los y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, $\cdots$, y_n puntos iniciales.

Fórmulas implicitas y Explicitas

- Los métodos multipaso requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos monopaso para un mismo nivel de precisión.
- Los métodos multipaso requieren de un método monopaso que le permita determinar los $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, \cdots, y_n$ puntos iniciales.
- Las fórmulas implícitas son mas precisas (con menos evaluaciones) que las explícitas. Las explícitas extrapolan la solución al punto y_{i+1}, las implícitas la interpolan.

- Los métodos multipaso requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos monopaso para un mismo nivel de precisión.
- Los métodos multipaso requieren de un método monopaso que le permita determinar los $y_{n+k-1},\ y_{n+k-2},\ y_{n+k-3},\ \cdots, y_n$ puntos iniciales.
- Las fórmulas implícitas son mas precisas (con menos evaluaciones) que las explícitas. Las explícitas extrapolan la solución al punto y_{i+1}, las implícitas la interpolan.
- Las fórmulas explícitas e implícitas son complementarias: las explícitas *predecen* el valor de y_{i+1} necesario para la $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ del cálculo de y^*_{i+1} en la fórmula implícita.
  - **Milne 4to** *Predictor:* $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}\right]$
    Corrector: $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1} - 4f_i + f_{i-1}\right]$
  - **Adams Moulton** *Predictor:*
    $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right]$
    Corrector: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right]$