Estabilidad Órbitas Circulares

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

12 de septiembre de 2024

Agenda

1. Estabilidad de órbitas circulares
2. Perturbaciones $r = r_o + \eta$
3. Oscilaciones radiales
4. Precesión
5. Sección
6. Sección
7. Sección

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f\left(r_0\right) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f(r_0) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual $-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{3f(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0$

Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f(r_0) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual $-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{3f(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0$
- En general para fuerzas de la forma $f(r) = -kr^n (k > 0)$, la condición de estabilidad se cumple para $n > -3$

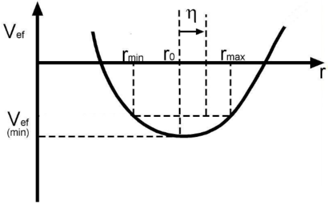
Estabilidad de órbitas circulares

- Sea radio r_0 de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple $\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio r_0 es $f(r_0) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual $-\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r_0} - \frac{3f(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0$
- En general para fuerzas de la forma $f(r) = -kr^n (k > 0)$, la condición de estabilidad se cumple para $n > -3$
- La fuerza gravitacional $(n = -2)$ y la fuerza de un resorte $(n = 1)$ producen órbitas circulares estables.

Perturbaciones $r = r_0 + \eta$

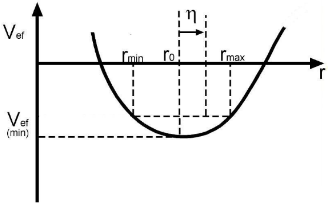
- Supongamos que la energía de la partícula es $E > V_{\mathrm{ef}}\left(r_0\right)$, donde r_0 es el radio de la órbita circular estable.

- Supongamos que la energía de la partícula es $E > V_{\text{ef}}(r_0)$, donde r_0 es el radio de la órbita circular estable.
- Consideremos una oscilación radial de pequeña amplitud η alrededor del radio de la órbita circular r_0. Esto es $r = r_0 + \eta$, con $\eta/r_0 \ll 1$



Perturbaciones $r = r_0 + \eta$

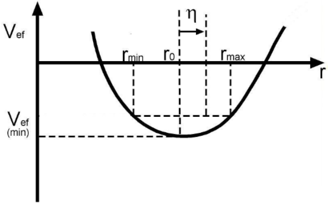
- Supongamos que la energía de la partícula es $E > V_{\rm ef}\,(r_0)$, donde r_0 es el radio de la órbita circular estable.
- Consideremos una oscilación radial de pequeña amplitud η alrededor del radio de la órbita circular r_0. Esto es $r = r_0 + \eta$, con $\eta / r_0 \ll 1$



- Desarrollamos por Taylor de la función $V_{\rm ef}(r)$ alrededor de r_0, y tenemos $V_{\rm ef}(r) = V_{\rm ef}\,(r_0) + \cancelto{0}{\left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial r}\right|_{r_0}} (r - r_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial r^2}\right|_{r_0} (r - r_0)^2 + \ldots$

Perturbaciones $r = r_0 + \eta$

- Supongamos que la energía de la partícula es $E > V_{\text{ef}}\,(r_0)$, donde r_0 es el radio de la órbita circular estable.
- Consideremos una oscilación radial de pequeña amplitud η alrededor del radio de la órbita circular r_0. Esto es $r = r_0 + \eta$, con $\eta/r_0 \ll 1$



- Desarrollamos por Taylor de la función $V_{\text{ef}}(r)$ alrededor de r_0, y tenemos $V_{\text{ef}}(r) = V_{\text{ef}}\,(r_0) + \cancelto{0}{\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r}\right|_{r_0}} (r - r_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} (r - r_0)^2 + \ldots$
- El primer término es una constante, $V_{\text{ef}}\,(r_0) = \text{cte}$, y puede ser suprimido el segundo término se anula por ser un mínimo.

Oscilaciones radiales

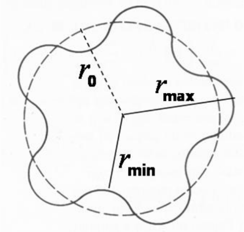
- A segundo orden $V_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}(r - r_0)^2 + \ldots \approx \frac{1}{2}K\eta^2$, con $K \equiv \frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0} = \mathrm{cte}$

Oscilaciones radiales

- A segundo orden $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}(r - r_0)^2 + \ldots \approx \frac{1}{2}K\eta^2$, con $K \equiv \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0} = \text{cte}$
- La ecuación de movimiento radial, $\mu\ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$ para $r = r_0 + \eta$ resulta $\ddot{\eta} + \omega_r^2\eta = 0$

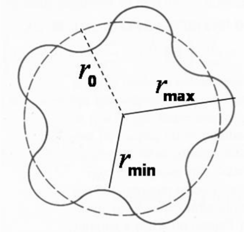
Oscilaciones radiales

- A segundo orden $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}(r - r_0)^2 + \ldots \approx \frac{1}{2}K\eta^2$, con $K \equiv \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0} = \text{cte}$
- La ecuación de movimiento radial, $\mu\ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$ para $r = r_0 + \eta$ resulta $\ddot{\eta} + \omega_r^2\eta = 0$
- Que la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia de oscilación radial $\omega_r^2 = \frac{K}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}$



Oscilaciones radiales

- A segundo orden $V_{\rm ef}(r) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}(r - r_0)^2 + \ldots \approx \frac{1}{2}K\eta^2$, con $K \equiv \frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial r^2}\Big|_{r_0} = \mathrm{cte}$
- La ecuación de movimiento radial, $\mu\ddot{r} = f_{\rm ef}(r)$ para $r = r_0 + \eta$ resulta $\ddot{\eta} + \omega_r^2\eta = 0$
- Que la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia de oscilación radial $\omega_r^2 = \frac{K}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial r^2}\Big|_{r_0}$



- Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial $V(r) = \frac{-k}{r}e^{-(r/a)}$ donde $k > 0$ y $a > 0$.

Precesión

- El ángulo de precesión $\Delta\theta$ es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial T_r.

Precesión

- El ángulo de precesión $\Delta\theta$ es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial T_r.
- Esto es $\Delta\theta = \dot{\theta} T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$, y como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$,

Precesión

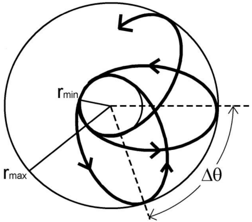
- El ángulo de precesión $\Delta\theta$ es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial T_r.
- Esto es $\Delta\theta = \dot{\theta}\, T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$, y como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$,
- tenemos $\Delta\theta = 2\pi \frac{L}{\mu r_0^2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\bigg|_{r_0} \right)^{-1/2}$

Precesión

- El ángulo de precesión $\Delta\theta$ es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial T_r.
- Esto es $\Delta\theta = \dot{\theta} T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$, y como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$,
- tenemos $\Delta\theta = 2\pi \frac{L}{\mu r_0^2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial r^2}\bigg|_{r_0} \right)^{-1/2}$
- La dirección del perihelio $r_{\text{mín}}$ cambia en un ángulo $\Delta\theta$ durante la precesión de la órbita.

Precesión

- El ángulo de precesión $\Delta\theta$ es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial T_r.
- Esto es $\Delta\theta = \dot{\theta}\, T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$, y como $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$,
- tenemos $\Delta\theta = 2\pi \frac{L}{\mu r_0^2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial r^2}\bigg|_{r_0} \right)^{-1/2}$
- La dirección del perihelio $r_{\text{mín}}$ cambia en un ángulo $\Delta\theta$ durante la precesión de la órbita.
- La condición para que ocurra precesión es que $\Delta\theta < 2\pi$; es decir, $\dot{\theta} < \omega_r$.



Título transparencia

Título transparencia

Título transparencia