

Dinámica Hamiltoniana

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



5 de noviembre de 2024

- 1 Entre Lagrange y Hamilton
 - La idea lagrangiana
 - La idea hamiltoniana
 - Velocidades generalizada y momentos conjugados
- 2 El esquema Hamiltoniano
 - Del lagrangeano al hamiltoniano
 - El oscilador armónico
 - Partícula moviéndose en cono vertical
 - Partícula en un potencial central
- 3 Simetrías y leyes de conservación
- 4 Sección

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) .

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) .
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) .
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las $2n$ condiciones iniciales: los valores de las coordenadas q_s y velocidades \dot{q}_s para un instante particular t_0 .

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) .
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las $2n$ condiciones iniciales: los valores de las coordenadas q_s y velocidades \dot{q}_s para un instante particular t_0 .
- El movimiento se representa geométricamente mediante una trayectoria en el espacio de configuración n -dimensional descrito por las coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i) , en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i .

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i) , en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i .
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i) , en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i .
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de $2n$ dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes q_i y p_i .

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i) , en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i .
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de $2n$ dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes q_i y p_i .
- La importancia del formalismo hamiltoniano radica en que proporciona un método potente, general y flexible para la investigación de las cuestiones estructurales más profundas de la mecánica clásica y también en que sirve de fundamento a la mecánica cuántica y a la mecánica estadística.

- No se trata de sustituir trivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, n$, tratando q_1, \dots, q_n y s_1, \dots, s_n como variables independientes.

- No se trata de sustituir trivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, n$, tratando q_1, \dots, q_n y s_1, \dots, s_n como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \dots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.

- No se trata de sustituir trivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, n$, tratando q_1, \dots, q_n y s_1, \dots, s_n como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \dots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las q_i y s_i de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.

- No se trata de sustituir trivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, n$, tratando q_1, \dots, q_n y s_1, \dots, s_n como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \dots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las q_i y s_i de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.
- Bajar el orden del sistema de ecuaciones dinámicas, se consigue describiendo la evolución del sistema mediante $2n$, cantidades: las posiciones q_1, \dots, q_n y los momentos conjugados p_1, \dots, p_n , definidos por $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, $i = 1, \dots, n$.

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables (q_i, \dot{q}_i) por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables (q_i, \dot{q}_i) por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables (q_i, \dot{q}_i) por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
- Las ecuaciones dinámicas serán $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, n$

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables (q_i, \dot{q}_i) por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $\mathcal{H}(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
- Las ecuaciones dinámicas serán $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, n$
- El planteamiento hamiltoniano de la dinámica implica los siguientes pasos
 - Se fijan las coordenadas generalizadas y construye el lagrangeano a partir de las energías cinética y potencial
 - Se expresan la velocidades generalizadas en término de los momentos canónicos conjugados $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
 - Se construye el Hamiltoniano a partir de la transformación de Legendre del Lagrangeano
 - Se plantean las ecuaciones dinámicas de Hamilton

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$

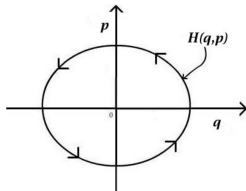
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir
$$\mathcal{H}(q, p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir
$$\mathcal{H}(q, p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir
$$\mathcal{H}(q, p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir
$$\mathcal{H}(q, p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$
- Con solución $q(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, es decir
$$p(t) = m\dot{q} = Am\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir
$$\mathcal{H}(q, p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$
- Con solución $q(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, es decir
 $p(t) = m\dot{q} = Am\omega \cos(\omega t + \varphi)$
- El Hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces
$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \text{cte}$$
 Una elipse en el espacio de fase



- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$$

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$$
Es decir $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \csc^2 \alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$
- El Hamiltoniano es
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$$
Es decir $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$;
$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = \text{cte} \text{ y } \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - mg \cot \alpha$$

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \csc^2 \alpha$ y
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$
- El Hamiltoniano es
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$$
Es decir $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2} + mgr \cot \alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$;
$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = \text{cte} \text{ y } \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - mg \cot \alpha$$
- Adicionalmente, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \text{cte}.$

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \csc^2 \alpha$ y
$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$
- El Hamiltoniano es
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$$
Es decir $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2} + mgr \cot \alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$;
$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} = \text{cte} \text{ y } \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - mg \cot \alpha$$
- Adicionalmente, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \text{cte}.$
- La función $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \text{cte}$ describe una hipersuperficie 3-dimensional en el espacio de fase 4-dimensional $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$.

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$.

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$.

- Despejamos las velocidades generalizadas $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, y $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}$

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es
$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$.
- Despejamos las velocidades generalizadas $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, y $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}$
- Construimos el Hamiltoniano
$$\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r)$$

- El lagrangeano en coordenadas esféricas es
$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$.
- Despejamos las velocidades generalizadas $\dot{r} = \frac{p_r}{m}$, $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$, y $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}$
- Construimos el Hamiltoniano
$$\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r)$$
- Las ecuaciones de Hamilton serán $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$; $\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$;
 $\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}$; $\dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \sin^2 \theta} - \frac{dV}{dr}$;
 $\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cot \theta}{mr^2 \sin^2 \theta}$ y $\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0$.

- El Hamiltoniano \mathcal{H} es equivalente a la función de energía \mathcal{E}
$$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$$

- El Hamiltoniano \mathcal{H} es equivalente a la función de energía \mathcal{E}
$$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$$
- Es claro que
$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$$
$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

- El Hamiltoniano \mathcal{H} es equivalente a la función de energía \mathcal{E}
$$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$$
- Es claro que
$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explícitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ es constante.

- El Hamiltoniano \mathcal{H} es equivalente a la función de energía \mathcal{E}
$$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explícitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)

- El Hamiltoniano \mathcal{H} es equivalente a la función de energía \mathcal{E}
$$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explícitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$. \mathcal{L}_2 es una función homogénea de grado dos,
$$f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_s) = \lambda^2 f(y_1, \dots, y_s), \mathcal{L}_1 \text{ homogénea de grado 1 y } \mathcal{L}_0 \text{ homogénea de grado cero. Se cumple } \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = n f.$$

- El Hamiltoniano \mathcal{H} es equivalente a la función de energía \mathcal{E}
$$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explícitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$. \mathcal{L}_2 es una función homogénea de grado dos,
$$f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_s) = \lambda^2 f(y_1, \dots, y_s), \mathcal{L}_1 \text{ homogénea de grado 1 y } \mathcal{L}_0 \text{ homogénea de grado cero. Se cumple } \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = n f.$$
- Entonces $\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 - \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0$

- El Hamiltoniano \mathcal{H} es equivalente a la función de energía \mathcal{E}
$$\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$$
- Es claro que $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explícitamente del tiempo, entonces $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$. \mathcal{L}_2 es una función homogénea de grado dos,
$$f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_s) = \lambda^2 f(y_1, \dots, y_s), \mathcal{L}_1 \text{ homogénea de grado 1 y } \mathcal{L}_0 \text{ homogénea de grado cero. Se cumple } \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = n f.$$
- Entonces $\mathcal{E}(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 - \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0$
- Si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ y el potencial no depende de las velocidades $\mathcal{L}_2 = T$ y $\mathcal{L}_0 = -V$, entonces $\mathcal{E} = T + V = E$

-
- A diagram showing a particle of mass m moving in a circular path of radius r in the xy -plane. The particle is at a position vector \mathbf{r} from the origin. The angular displacement is $\theta = \omega t$, and the angular velocity is ω .

-

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

-

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

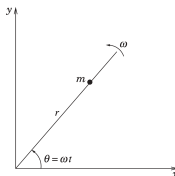
-

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

-
- A diagram showing a particle of mass m moving in a circular path of radius r in the xy -plane. The particle is at a position vector \mathbf{r} from the origin. The angular position is $\theta = \omega t$, and the angular velocity is ω .

- El lagrangeano $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$,
- El momento conjugado $p_r = m\dot{r}$
- El hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2$ no es la energía,
 $E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2$ pero se conserva $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$
- Diferentes elecciones de coordenadas generalizadas cambian la forma funcional de un Lagrangiano, pero su valor sigue siendo el mismo.

- Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular ω constante.



- El lagrangeano $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$,
- El momento conjugado $p_r = m\dot{r}$
- El hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} r^2$ no es la energía,
 $E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2$ pero se conserva $\partial\mathcal{H}/\partial t = 0$
- Diferentes elecciones de coordenadas generalizadas cambian la forma funcional de un Lagrangiano, pero su valor sigue siendo el mismo.
- El valor y la forma funcional del hamiltoniano dependen del conjunto de coordenadas generalizadas. Puede ocurrir que se conserve en un sistema de coordenadas pero varíe en otro.