Principios Variacionales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

20 de mayo de 2025

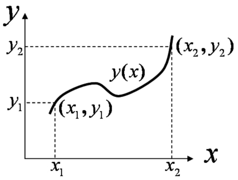
Agenda

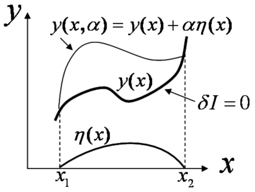
- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.

Extremos de un funcional

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $y(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[y(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $y(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[y(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).
- Entonces anularemos las variaciones del funcional, $\delta I = \delta\mathcal{F}[y(x)] = 0$, para determinar la $y(x)$ que lo hace extremo.





Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, f(y(x), y'(x), x)$.

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x,0) = y(x)$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x,0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1,0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2,0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left.\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x,0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1,0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2,0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x,\alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left.\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$
- Al evaluar $\alpha = 0$ garantizamos que obtenemos la $y(x)$ que hace extremo el funcional I.

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$
- El segundo término se integra por partes, $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x,$

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$
- El segundo término se integra por partes, $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x,$
- Finalmente $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)\mathrm{d}x.$

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$$

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.
- Los principios variacionales pueden extenderse a funcionales de varias funciones y sus derivadas $f\left(y_i(x), y_i'(x), \ldots, x\right)$, con $i = 1, 2, \ldots, s$,. Buscaremos las $y_i(x), i = 1, 2, \ldots, s$, que pasan por x_1 y x_2 y que hacen que I adquiera un valor extremo, i.e., $\delta I = 0$.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.
- Los principios variacionales pueden extenderse a funcionales de varias funciones y sus derivadas $f\left(y_i(x), y_i'(x), \ldots, x\right)$, con $i = 1, 2, \ldots, s$,. Buscaremos las $y_i(x), i = 1, 2, \ldots, s$, que pasan por x_1 y x_2 y que hacen que I adquiera un valor extremo, i.e., $\delta I = 0$.
- Entonces $I[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y_i(x), y_i'(x), x\right) \mathrm{d}x \Rightarrow \delta I = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, s$

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$, donde se cumplan la restricción holónoma $g(x, y(x)) = 0$.

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x$, donde se cumplan la restricción holónoma $g(x, y(x)) = 0$.
- Introducimos un multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ y el funcional modificado a extremar pasa a ser: $\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x, y(x), y'(x)) + \lambda(x) g(x, y(x))\right) \mathrm{d}x$.

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$, donde se cumplan la restricción holónoma $g(x, y(x)) = 0$.
- Introducimos un multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ y el funcional modificado a extremar pasa a ser: $\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} (f(x, y(x), y'(x)) + \lambda(x) g(x, y(x)))\,\mathrm{d}x$.
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange, modificadas por la presencia del multiplicador de Lagrange son: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$ con la restricción anholónoma $g(x, y(x)) = 0$

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right) \mathrm{d}t$

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right) \mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right)\mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$
- Derivando la restricción
  $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right)\mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$
- Derivando la restricción
  $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$
- Sustituyendo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ tendremos $2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\lambda R^2 = 0$ y despejamos $\lambda = -\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{R^2}$

Partícula libre sobre una esfera

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right)\mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$
- Derivando la restricción $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$
- Sustituyendo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ tendremos $2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\lambda R^2 = 0$ y despejamos $\lambda = -\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{R^2}$
- Las ecuaciones de movimento serán $m\ddot{x} = -2x\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{R^2}$ igual para y y para z. Las soluciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ extreman la acción $\tilde{I}$

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ, como una coordenada mas.

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ, como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vículos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ, como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vículos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.
- $\mathcal{L}\left[x^A(q^i, t), \dot{x}^A(q^i, \dot{q}^i, t), t, \lambda^\alpha\right] \equiv \mathcal{L}'\left[q^i, \dot{q}^i, t\right]$, $A = 1, \ldots, 3N$; $i = 1, \ldots n$ y $\alpha = 1, \ldots, k$. Con $k = 3N - n$.

El péndulo simple y su vínculo

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ, como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vículos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.
- $\mathcal{L}\left[x^A(q^i, t), \dot{x}^A(q^i, \dot{q}^i, t), t, \lambda^\alpha\right] \equiv \mathcal{L}'\left[q^i, \dot{q}^i, t\right]$, $A = 1, \ldots, 3N$; $i = 1, \ldots n$ y $\alpha = 1, \ldots, k$. Con $k = 3N - n$.
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$, dado que $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$.

El péndulo simple y su vínculo

- El Lagrangiano para un péndulo viene dado por el de una partícula libre limitada por restricciones o vínculos.
- Los vínculos/restricciones son $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$
- Es decir $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)$
- Las ecuaciones de movimiento serán $m\ddot{x} = \lambda x$, y $\ddot{y} = mg + \lambda y$
- La ecuación de movimiento para λ reproduce la restricción. Esto es $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Nótese λ, como una coordenada mas.
- Si expresamos el lagrangeano en término de sus grados de libertad, q^i (liberando los vículos), las ecuaciones de Lagrange son las mismas.
- $\mathcal{L}\left[x^A(q^i, t), \dot{x}^A(q^i, \dot{q}^i, t), t, \lambda^\alpha\right] \equiv \mathcal{L}'\left[q^i, \dot{q}^i, t\right]$, $A = 1, \ldots, 3N$; $i = 1, \ldots n$ y $\alpha = 1, \ldots, k$. Con $k = 3N - n$.
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$, dado que $f_\alpha(x^A, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i} = 0$.
- $$\underbrace{\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)}_{\mathcal{L}} \equiv \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta}_{\mathcal{L}'}.$$

En presentación consideramos

1. **Objetivo:** Encontrar la función $y(x)$ que hace extremo un funcional

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx.$$

3. **Ecuación de Euler:**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

En presentación consideramos

1. **Objetivo:** Encontrar la función $y(x)$ que hace extremo un funcional
$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx.$$
2. **Condición de Extremal:** Se introduce una variación $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$ con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Se impone:
$$\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$
3. **Ecuación de Euler:**
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

En presentación consideramos

1. **Objetivo:** Encontrar la función $y(x)$ que hace extremo un funcional
$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx.$$
2. **Condición de Extremal:** Se introduce una variación $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$ con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Se impone:
$$\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$
3. **Ecuación de Euler:**
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$
4. **Con Restricciones:** Se usa el método de multiplicadores de Lagrange para restricciones holónomas $g(x, y) = 0$, modificando el funcional:
$$\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} (f + \lambda g)\, dx.$$

En presentación consideramos

1. **Objetivo:** Encontrar la función $y(x)$ que hace extremo un funcional
$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx.$$
2. **Condición de Extremal:** Se introduce una variación $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$ con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Se impone:
$$\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$
3. **Ecuación de Euler:**
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$
4. **Con Restricciones:** Se usa el método de multiplicadores de Lagrange para restricciones holónomas $g(x, y) = 0$, modificando el funcional:
$$\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} (f + \lambda g)\, dx.$$