

Principio de Mínima Acción

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



15 de agosto de 2024

- 1 Principio de Mínima Acción
- 2 Principios de Mínima Acción y Extremos Variacionales
- 3 Ecuaciones de Lagrange
- 4 ¿Por qué son importantes las Ecuaciones de Lagrange?
- 5 Propiedades de las Ecuaciones de Lagrange
 - Lagrangeanos equivalentes
 - Invariancia respecto a transformaciones de coordenadas generalizadas

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \dots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \dots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.
- El estado del sistema está descrito por $t_1 : \{q_j(t_1)\}, \{\dot{q}_j(t_1)\}$ y $t_2 : \{q_j(t_2)\}, \{\dot{q}_j(t_2)\}$

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \dots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.
- El estado del sistema está descrito por $t_1 : \{q_j(t_1)\}, \{\dot{q}_j(t_1)\}$ y $t_2 : \{q_j(t_2)\}, \{\dot{q}_j(t_2)\}$
- El Principio de mínima acción, implica que la evolución del sistema entre el estado en t_1 al t_2 es tal que el valor de la integral definida $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt$, denominada la acción del sistema, sea mínima; es decir, $\delta S = 0$ (S es un extremo).

Se pueden establecer una analogía entre el Principio de mínima acción y un principio variacional para funciones de varias variables:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \leftrightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_i, y'_i, x) dx$$

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \leftrightarrow f(y_i, y'_i, x)$$

$$t \leftrightarrow x$$

$$q_j \leftrightarrow y_i$$

$$\dot{q}_j \leftrightarrow y'_i$$

$$\delta q_j(t) \leftrightarrow \eta_i(x)$$

$$\delta \dot{q}_j(t) \leftrightarrow \eta'_i(x)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0.$$

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.
- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y \dot{q}_j es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt$$

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.

- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y \dot{q}_j es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt$$

- Podemos expresar el segundo término como

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \dots, s$, que hacen extrema a S .
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente \dot{q}_j como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.

- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y \dot{q}_j es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt$$

- Podemos expresar el segundo término como

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\delta q_j) dt = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

- Finalmente $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2$
- La energía potencial es $V = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Sea $x_{j\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición \mathbf{r}_α de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2$
- La energía potencial es $V = \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$
- El Lagrangiano está dado por
$$\mathcal{L} = T - V = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2 - \sum_{\alpha=1}^N V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$

- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha) \dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial L}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha) \dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\alpha}$ es $\frac{dp_{j\alpha}}{dt} = F_{j\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α .

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\alpha}$ es $\frac{dp_{j\alpha}}{dt} = F_{j\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α .
- Las ecuaciones de Lagrange no constituyen una nueva teoría del movimiento

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\alpha}$ de la partícula α es
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\alpha} = p_{j\alpha}$, y $\frac{\partial L}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\alpha}} = F_{j\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\alpha}$ es $\frac{dp_{j\alpha}}{dt} = F_{j\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α .
- Las ecuaciones de Lagrange no constituyen una nueva teoría del movimiento
- Los resultados de la formulación Lagrangiana o de la formulación Newtoniana del movimiento de un sistema dado son los mismos, pero Las ecuaciones de Lagrange son más generales que la segunda Ley de Newton y son aplicables a cualquier conjunto de coordenadas generalizadas de un sistema.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**
- La formulación Newtoniana, requiere que las ligaduras sean descritas como “fuerzas” actuando sobre las partículas. La formulación Lagrangiana incluye las ligaduras dentro de las coordenadas generalizadas.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**
- La formulación Newtoniana, requiere que las ligaduras sean descritas como “fuerzas” actuando sobre las partículas. La formulación Lagrangiana incluye las ligaduras dentro de las coordenadas generalizadas.
- La formulación Lagrangiana permite descubrir simetrías fundamentales de los sistemas físicos

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{df(q_j, t)}{dt}$

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{df(q_j, t)}{dt}$
- La nueva acción es $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$
 $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt + f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1)$

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{df(q_j, t)}{dt}$
- La nueva acción es $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) dt \Rightarrow$
 $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt + f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1)$
- Luego, $\delta S' = \delta S + \underbrace{\delta f(q_j(t_2), t_2)}_{=0} - \underbrace{\delta f(q_j(t_1), t_1)}_{=0} \Rightarrow \delta S' = \delta S$
- Por lo tanto $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_{j\alpha}} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\alpha}} = 0$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las $q_i, s \quad i = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $s \quad i = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $s = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas
 $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, t),$
 $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, también satisface $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $s = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, t)$, $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, también satisface $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$
- Entonces calculamos $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones de coordenadas generalizadas.
- Sean las q_i , $i = 1, \dots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas
 $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, t)$,
 $\mathcal{L}(Q_i, \dot{Q}_i, t)$, también satisface $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$
- Entonces calculamos $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}$
- El “nuevo” Lagrangiano será
 $\mathcal{L}(Q_1, \dots, \dot{Q}_1, \dots, t) = \mathcal{L} \left[q_i(Q_1, \dots, t), \dot{q}_i(Q_1, \dots, \dot{Q}_1, \dots, t), t \right]$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

- Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right)}_{=0} \right] \end{aligned}$$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^s \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

- Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right)}_{=0} \right] \end{aligned}$$

- Por lo tanto $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$