Principios Variacionales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

12 de agosto de 2024

Agenda

1. Extremos de un funcional
2. Trayectorias cercanas a la extrema
3. Variaciones de un funcional
4. La ecuación de Euler
5. Cálculo de variaciones con restricciones
   - Multiplicadores de Lagrange
   - Partícula libre moviéndose sobre una esfera

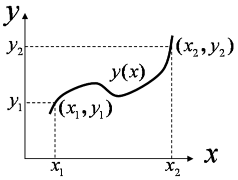
Extremos de un funcional

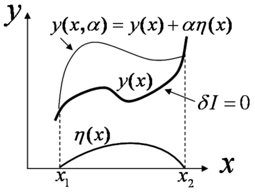
- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.

Extremos de un funcional

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $y(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[y(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).

- En los problemas de extremos del cálculo diferencial se busca el valor de una variable x para el cual una función $g = g(x)$ es máxima o mínima.
- En los problemas de extremos en el cálculo variacional se busca una función $y(x)$ con cual un funcional, $I = \mathcal{F}[y(x)]$, sea extremo (máximo o mínimo).
- Entonces anularemos las variaciones del funcional, $\delta I = \delta\mathcal{F}[y(x)] = 0$, para determinar la $y(x)$ que lo hace extremo.





Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x), y'(x), x)$.

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x,0) = y(x)$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x,0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left.\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

Trayectorias cercanas a la extrema

- Sea $y(x)$ la función que hace extremo el funcional $I = \mathcal{F}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x), y'(x), x)$.
- Consideremos todas las funciones cercanas a $y(x)$ de la forma $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, con lo cual $y(x, 0) = y(x)$
- La función $\eta(x)$ es diferenciable y $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, con lo cual $y(x_1, 0) = y(x_1) \equiv y_1$ y consecuentemente $y(x_2, 0) = y(x_2) \equiv y_2$
- Entonces hemos transformado el funcional en una función $I(\alpha) = \mathcal{F}[f(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x)$
- Sabemos como buscar los extremos de una función $\left.\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$
- Al evaluar $\alpha = 0$ garantizamos que obtenemos la $y(x)$ que hace extremo el funcional I.

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$

Variaciones de un funcional

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$
- El segundo término se integra por partes, $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x,$

- La derivada $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}f(y(x,\alpha),y'(x,\alpha),x)}{\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}x$
- Equivalentemente $\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]\mathrm{d}x$
- Donde $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x)$ y además $\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x.$
- El segundo término se integra por partes, $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$,
- Esto es: $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\right|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)\mathrm{d}x,$
- Finalmente $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)\mathrm{d}x.$

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$$

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
  $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos
$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.
- Los principios variacionales pueden extenderse a funcionales de varias funciones y sus derivadas $f\left(y_i(x), y_i'(x), \ldots, x\right)$, con $i = 1, 2, \ldots, s$,. Buscaremos las $y_i(x), i = 1, 2, \ldots, s$, que pasan por x_1 y x_2 y que hacen que I adquiera un valor extremo, i.e., $\delta I = 0$.

La Ecuación de Euler

- Evaluando en $\alpha = 0$, tenemos $\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\alpha=0} \eta(x)\mathrm{d}x = 0.$
- La condición $\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ implica que el integrando se anula.
- Con lo cual $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
- La ecuación de Euler expresa la condición que debe satisfacer la función $y(x)$ para que el funcionl I sea extremo.
- Es una ecuación diferencial de segundo orden para $y(x)$ para las condiciones dadas.
- Los principios variacionales pueden extenderse a funcionales de varias funciones y sus derivadas $f\left(y_i(x), y_i'(x), \ldots, x\right)$, con $i = 1, 2, \ldots, s$,. Buscaremos las $y_i(x), i = 1, 2, \ldots, s$, que pasan por x_1 y x_2 y que hacen que I adquiera un valor extremo, i.e., $\delta I = 0$.
- Entonces $I[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y_i(x), y_i'(x), x\right) \mathrm{d}x \Rightarrow \delta I = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, s$

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$, donde se cumplan la restricción $g(x, y(x), y'(x)) = 0$.

Cálculo de variaciones con restricciones

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$, donde se cumplan la restricción $g(x, y(x), y'(x)) = 0$.
- Introducimos un multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ y el funcional modificado a extremar pasa a ser: $\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x, y(x), y'(x)) + \lambda(x) g(x, y(x), y'(x))\right) \mathrm{d}x$.

- El cálculo variacional con restricciones holónomas se implementa mediante multiplicadores de Lagrange.
- Esto nos permite encontrar extremos de funcionales introduciendo variables adicionales (los multiplicadores de Lagrange) que garantizan esas restricciones y conducen a ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas que deben resolverse.
- Supongamos que queremos encontrar una función $y(x)$ que minimice (o maximice) un funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$, donde se cumplan la restricción $g(x, y(x), y'(x)) = 0$.
- Introducimos un multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ y el funcional modificado a extremar pasa a ser: $\tilde{I}[y, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x, y(x), y'(x)) + \lambda(x) g(x, y(x), y'(x))\right)\mathrm{d}x$.
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange, modificadas por la presencia del multiplicador de Lagrange son: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0$ con la restricción $G(x, y(x), y'(x)) = 0$

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right)\mathrm{d}t$

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right) \mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right) \mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$
- Derivando la restricción
  $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\, \mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right) \mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$
- Derivando la restricción
  $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$
- Sustituyendo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ tendremos $2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\lambda R^2 = 0$ y despejamos $\lambda = -\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{R^2}$

Partícula libre sobre una esfera

- Consideremos el siguiente funcional $I = \mathcal{F}[y] = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2)\,\mathrm{d}t$, sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- Construimos una acción modifica que incorpore la restricción $\tilde{I} = \int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2} \left(\frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\right)\mathrm{d}t$
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) - \lambda \cdot 2x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda x$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) - \lambda \cdot 2y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 2\lambda y$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) - \lambda \cdot 2z = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 2\lambda z$
- Derivando la restricción
  $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0$
- Sustituyendo $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ tendremos $2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\lambda R^2 = 0$ y despejamos $\lambda = -\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{R^2}$
- Las ecuaciones de movimento serán $m\ddot{x} = -2x\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{R^2}$ igual para y y para z. Las soluciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ extreman la acción $\tilde{I}$