Cuerpo Rígido: ángulos y velocidades de Euler

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

31 de octubre de 2024

Agenda

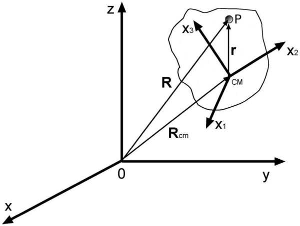
1. Definiciones
2. Desplazamiento general del cuerpo rígido
3. Velocidades en un cuerpo rígido
4. Precesión, nutación y rotación
5. Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$, ángulos y velocidades de Euler
6. Transformaciones entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio
   - Rotaciones de Euler
   - Matrices de Euler
   - Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$
   - Productos escalares
   - Vectores unitarios

Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas

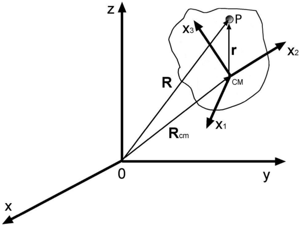
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



- Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:
  - Un sistema inercial o laboratorio, denotado por (x, y, z) y con origen en un punto fijo O
  - Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa (CM), identificado por (x_1, x_2, x_3)

Desplazamiento general del cuerpo rígido

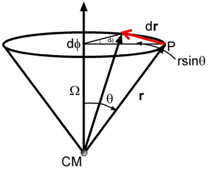
- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).

Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\rm cm} + \mathbf{r}$

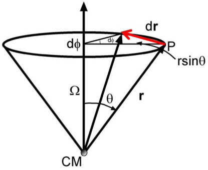
Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{cm}} + \mathbf{r}$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\text{cm}} + d\mathbf{r}$



Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\rm cm} + \mathbf{r}$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\rm cm} + d\mathbf{r}$



- Un cambio infinitesimal $d\mathbf{r}$ sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector $\mathbf{r}$, no a un cambio de su magnitud

Velocidades en un cuerpo rígido

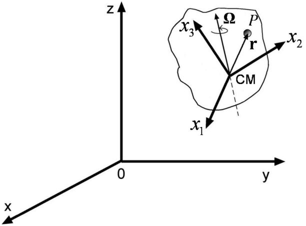
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.

Velocidades en un cuerpo rígido

- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$

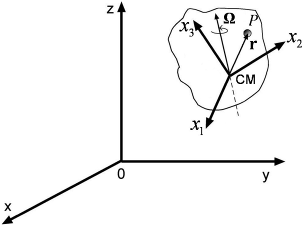
Velocidades en un cuerpo rígido

- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \,\text{sen}\, \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

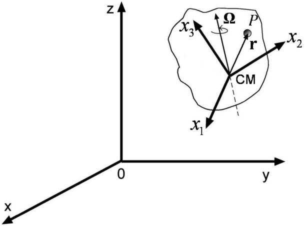
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),
  $\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),
  $\mathbf{\Omega} = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.

Velocidades en un cuerpo rígido

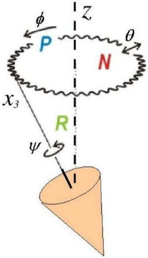
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),
  $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),
  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.
- La dirección de la velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma que la del vector $d\phi$

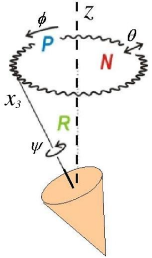
Precesión, nutación y rotación

- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,



Precesión, nutación y rotación

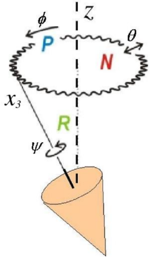
- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - **nutación:** inclinación con respecto al eje fijo y



-
  - **Angulo Euler de precesión**, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - **Angulo Euler de nutación**, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3.

Precesión, nutación y rotación

- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - **nutación:** inclinación con respecto al eje fijo y
  - **rotación:** rotación del cuerpo sobre sí mismo.



-
  - **Angulo Euler de precesión**, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - **Angulo Euler de nutación**, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3.
  - **Angulo Euler de rotación**, $\psi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje x_3, sobre el plano (x_1, x_2), medido desde N a x_1.

Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\,\mathrm{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$

Velocidad $\mathbf{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta)\,\text{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta) \cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\mathbf{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.

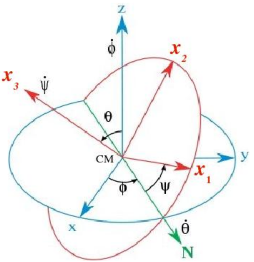
Velocidad $\mathbf{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

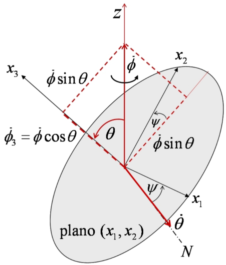
- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\,\mathrm{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\mathbf{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.

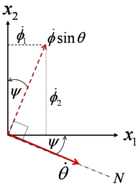
Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta)\,\text{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta)\cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\boldsymbol{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.
- Para cada componente $\tilde{\Omega}_i$, respecto al sistema centro de masa, tenemos $\tilde{\Omega}_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad i = 1, 2, 3.$
  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\,\text{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi$
  $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

Componentes y velocidades angulares







Del sistema Centro de Masa al Laboratorio 1/2

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).

Del sistema Centro de Masa al Laboratorio 1/2

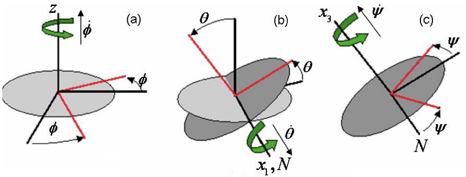
- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).
- Si $\mathbf{r}_L$ son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\, r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\,\mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\, \tilde{r}^j$

Del sistema Centro de Masa al Laboratorio 1/2

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).
- Si $\mathbf{r}_L$ son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\, r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\,\mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\, \tilde{r}^j$
- Claramente $\mathbb{U}\tilde{\mathbb{U}} \equiv \tilde{\mathbb{U}}\mathbb{U} = \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{\mathbb{U}} = \mathbb{U}^{-1}$

Del sistema Centro de Masa al Laboratorio 1/2

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).
- Si $\mathbf{r}_L$ son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\, r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\,\mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\, \tilde{r}^j$
- Rotamos tres veces $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$ respecto a $S_{x,y,z}$.



$$\tilde{\mathbb{U}}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{\mathbb{U}}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ \tilde{\mathbb{U}}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices de Euler

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

Matrices de Euler

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}^{T}_{\psi\theta\phi}$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$
$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$
- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.
- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}^{T}_{\psi\theta\phi}$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.
- $\tilde{\mathbb{U}}^{-1} = \tilde{\mathbb{U}}^{T} = \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$

- Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.

- Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.
- $\begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$

Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$

- Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.
- $\begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$
- Dado que para el centro de masa
  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi$
  $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

Velocidades Angulares $\boldsymbol{\Omega}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$

- Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$.
- $\begin{pmatrix}\Omega^1\\ \Omega^2\\ \Omega^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\Omega}^1\\ \tilde{\Omega}^2\\ \tilde{\Omega}^3\end{pmatrix}$
- Dado que para el centro de masa
  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\psi$
  $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Tendremos para el sistema laboratorio
  $\Omega^1 = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$
  $\Omega^2 = \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi - \dot{\psi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta$
  $\Omega^3 = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta$

Productos escalares

- En general tenemos que $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3}$

Productos escalares

- En general tenemos que $\vec{\mathbf{\Omega}} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3}$
- Por lo tanto
  $\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3} \tilde{\Omega}^3$
  $\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3} \tilde{\Omega}^3$
  $\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3} \tilde{\Omega}^3$

Productos escalares

- En general tenemos que $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto
$$\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$$
- $$\begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$$

Productos escalares

- En general tenemos que $\vec{\mathbf{\Omega}} = \Omega^1\hat{\mathbf{x}} + \Omega^2\hat{\mathbf{y}} + \Omega^3\hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1\hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2\hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3\hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto
$$\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1\tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2\tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3\tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1\tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2\tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3\tilde{\Omega}^3$$
$$\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1\tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2\tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3\tilde{\Omega}^3$$
- $$\begin{pmatrix}\Omega^1\\ \Omega^2\\ \Omega^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi\\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\Omega}^1\\ \tilde{\Omega}^2\\ \tilde{\Omega}^3\end{pmatrix}$$
- $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1 = \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi$;
$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2 = -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi$; $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$;
$\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1 = \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi$;
$\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2 = -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi$; $\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3 = -\operatorname{sen}\theta\cos\phi$;
$\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1 = \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta$; $\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_2 = \cos\psi\operatorname{sen}\theta$; $\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3 = \cos\theta$.

- Más aún si $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\hat{\mathbf{z}}$ y al proyectarla tendremos que $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto expresamos $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)\hat{\mathbf{z}}$

- Más aún si $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\hat{\mathbf{z}}$ y al proyectarla tendremos que $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto expresamos $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)\hat{\mathbf{z}}$
- Del mismo modo $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{z}}$. Con lo cual $\hat{\mathbf{x}}_2 = (-\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos\psi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{z}}$

Vectores unitarios

- Más aún si $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\hat{\mathbf{z}}$ y al proyectarla tendremos que $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto expresamos $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)\hat{\mathbf{z}}$
- Del mismo modo $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{z}}$. Con lo cual $\hat{\mathbf{x}}_2 = (-\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{x}} + (-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos\psi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{z}}$
- Finalmente $\hat{\mathbf{x}}_3 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{z}}$. Finalmente, $\hat{\mathbf{x}}_3 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{x}} - \operatorname{sen}\theta\cos\phi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$