# Dispersión

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

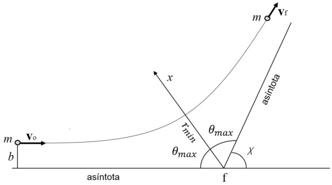
17 de septiembre de 2024

# Agenda

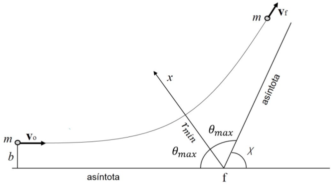
1. Dispersión: El concepto
2. Parámetro de Impacto
3. Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$
4. Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$
5. Sección eficaz
6. Sección eficaz diferencial
7. El experimento de Rutherford

# Dispersión

- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$



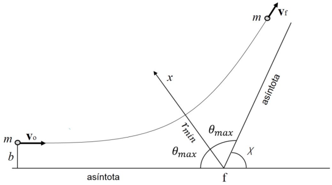
- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$




- Consideremos una partícula de masa $M$ situada en el foco $f$ y una partícula con masa $m \ll M(\mu \approx m)$ incidente desde $r \to \infty$

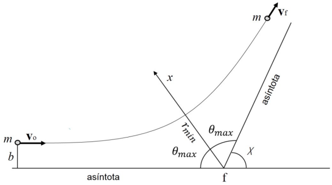
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$




- Consideremos una partícula de masa $M$ situada en el foco $f$ y una partícula con masa $m \ll M (\mu \approx m)$ incidente desde $r \to \infty$
- La partícula describe una trayectoria abierta desde $r = \infty$ hasta $r = r_{\text{mín}}$ y retorna a $r = \infty$, cambiando la dirección de su velocidad.

- La dispersión (scattering) en un campo de fuerza central consiste en la desviación de la trayectoria de una partícula con energía $E > 0$ debida a la interacción en un potencial $V(r)$



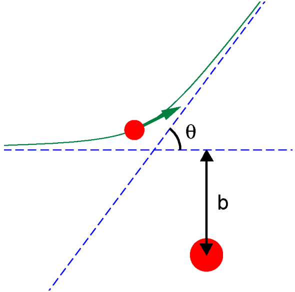

- Consideremos una partícula de masa $M$ situada en el foco $f$ y una partícula con masa $m \ll M (\mu \approx m)$ incidente desde $r \to \infty$
- La partícula describe una trayectoria abierta desde $r = \infty$ hasta $r = r_{\text{mín}}$ y retorna a $r = \infty$, cambiando la dirección de su velocidad.
- El ángulo entre la dirección del vector velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y la dirección del vector velocidad final $\mathbf{v}_f$ se denomina ángulo de dispersión, que denotaremos por $\chi$

# Parámetro de Impacto

- La energía inicial de la partícula en $r = \infty$ es $E = \frac{1}{2}mv_0^2$

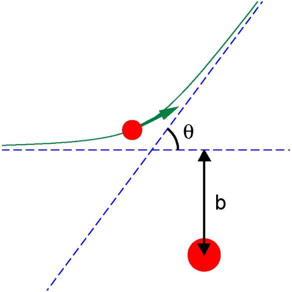
# Parámetro de Impacto

- La energía inicial de la partícula en $r = \infty$ es $E = \frac{1}{2} m v_0^2$
- El parámetro de impacto $b$ es la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula incidente y la recta paralela que pasa por el centro del potencial $V(r)$



# Parámetro de Impacto

- La energía inicial de la partícula en $r = \infty$ es $E = \frac{1}{2} m v_0^2$
- El parámetro de impacto $b$ es la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula incidente y la recta paralela que pasa por el centro del potencial $V(r)$




- Los datos claves para la dispersión con campos centrales son $b$ y $E$.

# Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r\sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$

## Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r \sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$

# Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

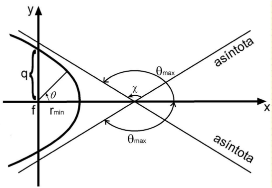
- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r\sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$

# Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r \sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$
- El ángulo de dispersión $\chi$ entre las asíntotas es $\chi = 2\theta_{\text{máx}} - \pi$.

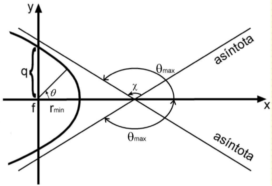
# Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r \sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$
- El ángulo de dispersión $\chi$ entre las asíntotas es $\chi = 2\theta_{\text{máx}} - \pi$.
- Esto es $\cos\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$



# Dispersión Hiperbólica para $V(r) = -\frac{k}{r}$

- La magnitud del momento angular de la partícula será $L = rp\sin(\pi - \theta) = mv_0 r\sin\theta = mv_0 b \Rightarrow L^2 = m^2 v_0^2 b^2 = 2Emb^2$
- Si $V(r) = -\frac{k}{r}$, la órbita con $E > 0$ es una hipérbola, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, con $q = \frac{L^2}{mk} = \frac{2Eb^2}{k}$ y $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{k}\right)^2} > 1$
- Entonces: $r_{\text{mín}} = \frac{q}{1+e}$, para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$ para $\cos\theta_{\text{máx}} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_{\text{máx}} < \pi$
- El ángulo de dispersión $\chi$ entre las asíntotas es $\chi = 2\theta_{\text{máx}} - \pi$.
- Esto es $\cos\left(\frac{\chi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta_{\text{máx}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$




- Oumuamua y Borisov

# Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 1/2

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

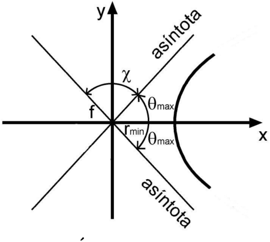
- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$

# Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 1/2

- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$

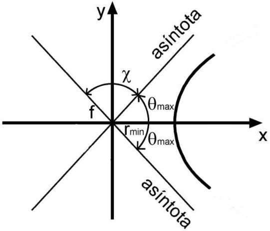
# Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 1/2

- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(e\cos\theta - 1)$



# Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 1/2

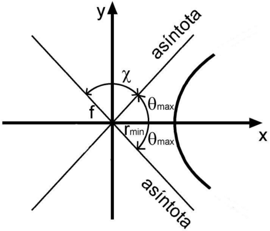
- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(e\cos\theta - 1)$




- Donde $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1}$ para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$, para $\cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \theta_{\text{máx}} < \frac{\pi}{2}$

# Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 1/2

- La ecuación de la órbita para un potencial repulsivo $V(r) = \frac{k}{r}$ es $\frac{L^2}{m}(u'' + u) = -\frac{dV}{du} \Rightarrow u'' + u = -\frac{mk}{L^2}$, con $u = 1/r$
- Su solución es $u = u_h + u_p$ con $u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ y $u_p = -\frac{mk}{L^2}$
- Con lo cual la órbita será $u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(e\cos\theta - 1)$




- Donde $r_{\text{mín}} = \frac{q}{e-1}$ para $\theta = 0$ y $r_{\text{máx}} \to \infty$, para $\cos\theta_{\text{máx}} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \theta_{\text{máx}} < \frac{\pi}{2}$
- La órbita hiperbólica no encierra al foco y el ángulo de dispersión es $\chi = \pi - 2\theta_{\text{máx}}$, i.e. $\operatorname{sen}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{1}{e}$

- El ángulo de dispersión $\chi$ se determina geométricamente con $\theta_{\text{máx}}$

# Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 2/2

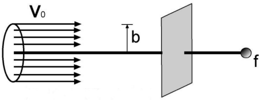
- El ángulo de dispersión $\chi$ se determina geométricamente con $\theta_{\text{máx}}$
- Este ángulo es
  $$\theta_{\text{máx}} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}} = b \int_{r_{\text{mín}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

# Dispersión hiperbólica para $V(r) = \frac{k}{r}$ 2/2

- El ángulo de dispersión $\chi$ se determina geométricamente con $\theta_{\text{máx}}$
- Este ángulo es
$$\theta_{\text{máx}} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}} = b \int_{r_{\text{mín}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$
- Es decir $\theta_{\text{máx}} = b \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - b^2 u^2}}$ donde $u = 1/r$, con $u = 0 (r \to \infty)$ y $u_m = 1/r_{\text{mín}}$

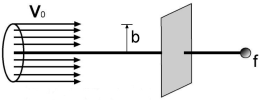
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos $\chi$.

- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos $\chi$.
- La intensidad del flujo $I$ es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\ \text{part.}}{\text{área}\ \times t}$



# Sección eficaz

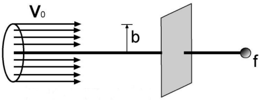
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos $\chi$.
- La intensidad del flujo $I$ es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\text{ part.}}{\text{área } \times t}$




- Las partículas con el mismo valor $b$ son dispersadas en un cono con vértice en $f$ y ángulo $\chi$,

# Sección eficaz

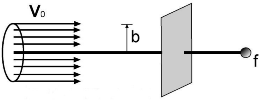
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos $\chi$.
- La intensidad del flujo $I$ es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\ \text{part.}}{\text{área}\ \times t}$




- Las partículas con el mismo valor $b$ son dispersadas en un cono con vértice en $f$ y ángulo $\chi$,
- El cono encierra un ángulo sólido $\Omega$.

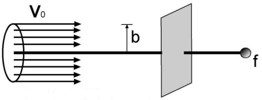
# Sección eficaz

- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos $\chi$.
- La intensidad del flujo $I$ es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\text{ part.}}{\text{área } \times t}$




- Las partículas con el mismo valor $b$ son dispersadas en un cono con vértice en $f$ y ángulo $\chi$,
- El cono encierra un ángulo sólido $\Omega$.
- El ángulo sólido diferencial $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(2\pi r \sin\chi)(r d\chi)}{r^2} = 2\pi \sin\chi d\chi$

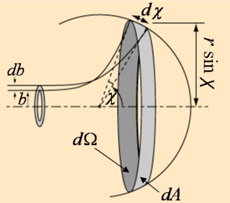
- Se emplea un haz de partículas idénticas con distintos parámetros de impacto las cuales son dispersadas con diferentes ángulos $\chi$.
- La intensidad del flujo $I$ es el número de partículas incidentes por unidad de área y por unidad de tiempo $I = \frac{\#\text{ part.}}{\text{área } \times t}$




- Las partículas con el mismo valor $b$ son dispersadas en un cono con vértice en $f$ y ángulo $\chi$,
- El cono encierra un ángulo sólido $\Omega$.
- El ángulo sólido diferencial $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{(2\pi r \sin\chi)(r d\chi)}{r^2} = 2\pi \sin\chi d\chi$
- La sección eficaz de dispersión $\sigma(\Omega)$ es la fracción de partículas incidentes que son desviadas dentro del ángulo sólido $\Omega$,

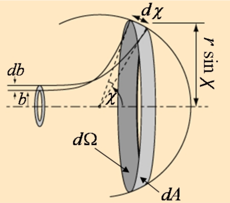
# Sección eficaz diferencial

- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.



# Sección eficaz diferencial

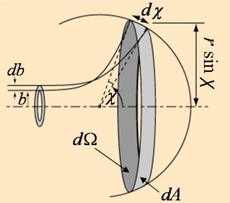
- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.




- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.

# Sección eficaz diferencial

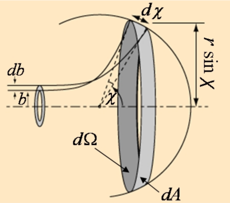
- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.




- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.
- Las partículas incidentes en el anillo de radio $b$ y ancho $db$ por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo $d\Omega$ por unidad de tiempo, $n(\Omega)d\Omega$.

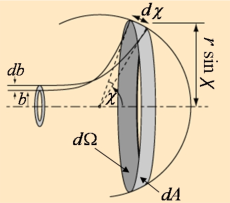
# Sección eficaz diferencial

- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.




- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.
- Las partículas incidentes en el anillo de radio $b$ y ancho $db$ por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo $d\Omega$ por unidad de tiempo, $n(\Omega)d\Omega$.
- Esto es $I2\pi bdb = I\sigma(\Omega)d\Omega \Leftrightarrow 2\pi bdb = \sigma(\Omega)2\pi \operatorname{sen}\chi d\chi$

- Entonces $\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{n(\Omega)}{I}d\Omega$, corresponde a la fracción de partículas dispersadas por unidad de tiempo en $d\Omega$.



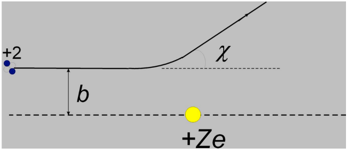

- Es la probabilidad de dispersión en un diferencial de ángulo sólido $d\Omega$.
- Las partículas incidentes en el anillo de radio $b$ y ancho $db$ por unidad de tiempo debe ser igual a aquellas dispersadas en el diferencial de ángulo $d\Omega$ por unidad de tiempo, $n(\Omega)d\Omega$.
- Esto es $I2\pi bdb = I\sigma(\Omega)d\Omega \Leftrightarrow 2\pi bdb = \sigma(\Omega)2\pi \mathrm{sen}\,\chi d\chi$
- La sección eficaz en función del ángulo de dispersión es $\sigma(\chi) = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|$.

# El experimento de Rutherford

- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.

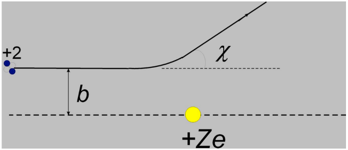
# El experimento de Rutherford

- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.
- Las partículas incidentes son partículas $\alpha$ con carga $q' = +2e$.



# El experimento de Rutherford

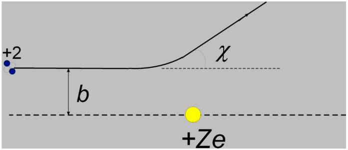
- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.
- Las partículas incidentes son partículas $\alpha$ con carga $q' = +2e$.




- Calculemos el ángulo de dispersión $\chi$ para una partícula incidente con energía $E > 0$ y parámetro de impacto $b$ en un potencial central repulsivo $V(r) = k/r$, con $k = qq' = 2Ze^2$.

# El experimento de Rutherford

- Tenemos un potencial de Coulomb repulsivo $V(r) = qq'/r$, el núcleo actúa como centro dispersor de carga $q = +Ze$.
- Las partículas incidentes son partículas $\alpha$ con carga $q' = +2e$.




- Calculemos el ángulo de dispersión $\chi$ para una partícula incidente con energía $E > 0$ y parámetro de impacto $b$ en un potencial central repulsivo $V(r) = k/r$, con $k = qq' = 2Ze^2$.
- La integral para $\theta_{\max}$ con este potencial es $\theta_{\text{máx}} = b\int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{1-\frac{k}{E}u-b^2u^2}}$
- Entonces $\theta_{\text{máx}} = \cos^{-1}\left[\frac{\left(1+\frac{2b^2E}{k}u\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{2bE}{k}\right)^2}}\right]\Bigg|_0^{u_m} = \cos^{-1}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{2b^2E}{k}u\right)\right]\Bigg|_0^{u_m}$