Espacios Vectoriales: El Concepto

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

24 de octubre de 2022

Agenda: Espacios Vectoriales: El Concepto

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Considere el siguiente conjunto $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n, \cdots\}$ y la operación interna $\square$ (la ley del grupo). Entonces los elementos del conjunto forman un *grupo abeliano*.

- Cerrada respecto a la operación $\square$:
  $\{g_i \in \mathbf{G}, g_j \in \mathbf{G}\} \;\Rightarrow\; \exists\; g_k = g_i \,\square\, g_j \in \mathbf{G}$
- Asociativa respecto a la operación $\square$:
  $g_k \,\square\, (g_i \,\square\, g_j) = (g_k \,\square\, g_i) \,\square\, g_j$
- Existencia de un elemento neutro: $\exists\; \hat{g} \in \mathbf{G} \;\Rightarrow\; g_i \,\square\, \hat{g} = g_i = \hat{g} \,\square\, g_i$
- Existencia de un elemento inverso:
  $g_i \in \mathbf{G} \;\Rightarrow\; \exists\; g_i^{-1} \in \mathbf{G} \;\Rightarrow\; g_i \,\square\, g_i^{-1} = g_i^{-1} \,\square\, g_i = \hat{g}$
- Conmutativa respecto a la operación $\square$: $g_i \,\square\, g_j \equiv g_j \,\square\, g_i$.

Ejemplos de Grupos

- Enteros $\mathbb{Z}$ respecto a la suma;
- Racionales $\mathbb{Q}$ respecto a la suma y a la multiplicación;
- Rotaciones 2D y 3D (grupo no-abeliano);
- Matrices $n \times m$ respecto a la suma, (grupo abeliano).

Cuerpo

Definiremos como un cuerpo (o campo) el conjunto $\mathbf{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$ sobre el cual están definidas dos operaciones: suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ y que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Forman un grupo abeliano respecto a la suma $(+)$ con el elemento neutro representado por el cero 0.
2. Forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación $(\cdot)$. Se excluye el cero 0 y se denota el elemento neutro de la multiplicación como 1.
3. Es distributiva respecto a la suma $(+)$: Dados α_i, α_j y α_k se tiene que
   $\alpha_i \cdot (\alpha_j + \alpha_k) = \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot \alpha_k$.

Ejemplos típicos de campos lo constituyen los racionales $\mathcal{Q}$, los números reales $\mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbb{C}$. Normalmente se refiere estos campos como *Campos Escalares*.

Espacio Vectorial 1/2

Sea $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle \cdots |v_i\rangle \cdots\}$, será un espacio vectorial lineal y sus elementos $|v_i\rangle$ vectores, si $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$ forman un grupo abeliano respecto a $\boxplus$ y una operación multiplicación por un elemento de un campo, $\mathbf{K} = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma \cdots\}$:

- $\mathbf{V}$ es cerrado bajo la operación suma $\boxplus$:
  $\forall\ |v_i\rangle\,, |v_j\rangle \in \mathbf{V}\ \Rightarrow\ |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
- La operación suma $\boxplus$ es conmutativa:
  $\forall\ |v_i\rangle\,, |v_j\rangle \in \mathbf{V}\ \Rightarrow\ |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle$
- La operación suma $\boxplus$ es asociativa:
  $\forall\ |v_i\rangle\,, |v_j\rangle\,, |v_k\rangle \in \mathbf{V}\ \Rightarrow\ (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus (|v_j\rangle \boxplus |v_k\rangle)$
- Existe un único elemento neutro
  $|0\rangle\ :\ |0\rangle \boxplus |v_i\rangle = |v_i\rangle \boxplus |0\rangle = |v_i\rangle\ \forall\ |v_i\rangle \in \mathbf{V}$
- Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\mathbf{V}$:
  $\forall\ |v_i\rangle \in \mathbf{V}\ \exists\ |-v_i\rangle\ /\ |v_i\rangle \boxplus |-v_i\rangle = |0\rangle$

Espacio Vectorial 1/2

Pero además $\mathbf{V}$ es cerrado bajo el producto por un escalar: $\forall\ \alpha \in \mathbf{K}$ y cualquier $|v_i\rangle \in \mathbf{V} \;\Rightarrow\; \alpha\,|v_i\rangle \in \mathbf{V}$ y

- $\alpha\,(\beta\,|v_i\rangle) = (\alpha\beta)\,|v_i\rangle$
- $(\alpha + \beta)\,|v_i\rangle = \alpha\,|v_i\rangle \boxplus \beta\,|v_i\rangle$
- $\alpha\,(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha\,|v_i\rangle \boxplus \alpha\,|v_j\rangle$
- $\mathbf{1}\,|v_i\rangle = |v_i\rangle \;\;\forall\;\; |v_i\rangle \in \mathbf{V}$

- La condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ sea un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$ es que para cualesquier $|u_i\rangle$ y $|v_i\rangle$ de $\mathbf{S}$ y cualesquier α y β de $\mathbf{K}$ se tiene que: $\alpha\,|u_i\rangle + \beta\,|v_i\rangle \;\in\; \mathbf{S}$.

Algunos espacios vectoriales 1/2

- Los números reales $\mathbf{V} = \mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbf{V} = \mathbb{C}$ con el campo $\mathbf{K}$ de reales o complejos y definidas las operaciones ordinarias de suma y multiplicación.
- El espacio $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$: producto cartesiano de $\mathbb{R}$, con $n-$uplas de números, la operación suma ordinaria de vectores en n-dimensionales y la multiplicación por escalares.

$$
\begin{aligned}
|x\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \\
|x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots x_n + y_n) \\
\alpha\, |x\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots \alpha x_n) \;.
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{E}^\infty$ con $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots)$ de infinitas componentes.

$$
\begin{aligned}
|x\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots) \\
|x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots) \\
\alpha\, |x\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n, \cdots) \;,
\end{aligned}
$$

con la restricción que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = L$, con L finito .

Algunos espacios vectoriales 2/2

- Las matrices $n \times n$ reales o complejas $\mathbf{K}$ real o complejo.

$$|x\rangle = M_{ab} \quad \wedge \quad |y\rangle = N_{ab}$$
$$|x\rangle \boxplus |y\rangle \equiv M_{ab} + N_{ab} = (M+N)_{ab}$$
$$\alpha\,|x\rangle = \alpha M_{ab} = (\alpha M)_{ab}$$

- Los $\mathcal{P} = \left\{a_0, a_1 x, a_2 x^2, \cdots, a_n x^n, \cdots\right\}$, con $\boxplus$ la suma y multiplicación ordinaria de polinomios con números.
- Espacios Funcionales con la suma ordinaria entre funciones y la multiplicación por un número (por un elemento de un campo)

$$|f\rangle = f(x) \quad \wedge \quad |g\rangle = g(x)$$
$$|f\rangle \boxplus |g\rangle \equiv f(x) + g(x) \equiv (f+g)(x)$$
$$\alpha\,|f\rangle = (\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x)\,.$$

- Las funciones continuas e infinitamente diferenciables, definidas en $[a,b]$: $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$.

En presentación consideramos

1. La definición abstracta de grupo
   1. construimos la tabla de multiplicación de un grupo
   2. discutimos la importancia del homorfismo entre grupos abstractos

Recapitulando

En presentación consideramos

1. La definición abstracta de grupo
   1. construimos la tabla de multiplicación de un grupo
   2. discutimos la importancia del homorfismo entre grupos abstractos
2. Definimos un cuerpo de números como un conjunto de números con dos operaciones definidas y que forman grupo respecto a cada una de esas operaciones

Recapitulando

En presentación consideramos

1. La definición abstracta de grupo
   1. construimos la tabla de multiplicación de un grupo
   2. discutimos la importancia del homorfismo entre grupos abstractos
2. Definimos un cuerpo de números como un conjunto de números con dos operaciones definidas y que forman grupo respecto a cada una de esas operaciones
3. Definimos el concepto de espacio vectorial y lo ejemplificamos con distintos objetos matemáticos.

Autoevaluación

- Considere un conjunto **S** conformado únicamente por números reales positivos y las siguientes reglas sobre **S**:
  - Por "suma" de dos números entenderemos su producto en el sentido usual de números reales,
  - y el "producto" de un elemento $r \in \mathbf{S}$ y un número real λ entenderemos r elevado a la potencia de λ, en el sentido usual ¿**S** es un espacio vectorial?
- Considere el conjunto de vectores en el plano conformado por vectores localizados en el origen y cuyos puntos finales permanecen siempre en el primer cuadrante ¿Este conjunto es un espacio vectorial?

Problemas para discusión

Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \, .$$

1. Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).
2. Si los coeficientes a_i son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?
3. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?
    1. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.
    2. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
    3. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
    4. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.