# Aplicaciones Transformaciones Canónicas

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

11 de noviembre de 2024

# Agenda

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$, donde $f_i(q_j, p_j)$ y, $g_i(q_j, p_j)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}(q_i, P_i)$, con $\mathcal{G}(q_i, P_i)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$ y $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \quad \text{y} \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} \quad \text{y} \quad g_i\left(q_j, p_j\right) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$

# Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \quad$ y $\quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} \quad$ y $\quad g_i\left(q_j, p_j\right) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$
- Si existe $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, entonces la transformación infinitesimal es canónica.

# Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i\left(q_j, p_j\right) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$

# Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$, $\Rightarrow f_i\left(q_j, p_j\right) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $G$.

# Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $G$.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$

- $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$, $\Rightarrow f_i\left(q_j, p_j\right) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j}\delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $G$.
- El cambio en la función $K\left(q_i, p_i\right)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta K = K\left(Q_i, P_i\right) - K\left(q_i, p_i\right) = K\left(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i\right) - K\left(q_i, p_i\right)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i\right)$

# Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $G$.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo $f_i$ y $g_i$, $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$

# Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

Universidad Industrial de Santander CONSTRUIMOS FUTURO

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en $\epsilon$,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función $G$.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo $f_i$ y $g_i$, $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$
- Si una función $K(q_i, p_i)$ en el espacio de fase es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, entonces $\delta K = 0$ y $\{K, \mathcal{G}\} = 0$.

# Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$

# Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \{G, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow G\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

# Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{G, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow G\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.

# Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{G, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow G\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

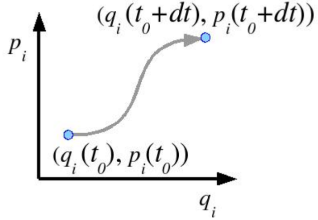
# Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

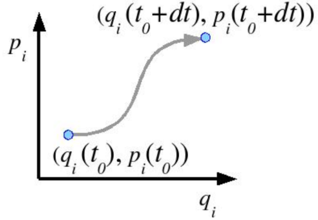
$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{G, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow G\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.
- La relación entre invariancia y constantes de movimiento se expresa más simple en la formulación hamiltoniana.

- Consideremos la evolución de una condición inicial en el espacio de fase en un intervalo de tiempo infinitesimal $dt$.
  $(q_i(t_0), p_i(t_0)) \rightarrow (q_i(t_0+dt), p_i(t_0+dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$



- Consideremos la evolución de una condición inicial en el espacio de fase en un intervalo de tiempo infinitesimal $dt$.
  $(q_i(t_0), p_i(t_0)) \to (q_i(t_0+dt), p_i(t_0+dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$




- Entonces tendremos la transformación
  $P_j \equiv p_j(t_0+dt) = p_j(t_0) + \dot{p}_j dt + \cdots = p_j + \dot{p}_j dt + \cdots$ y
  $Q_j \equiv q_j(t_0+dt) = q_j(t_0) + \dot{q}_j dt + \cdots = q_j + \dot{q}_j dt + \cdots$

# Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[ \delta_{ik}\delta_{jk} + \left( \delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

# Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[ \delta_{ik}\delta_{jk} + \left( \delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe

$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial H}{\partial q_i}\left(q_i(t_0), p_i(t_0)\right) dt + \cdots$$

$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial H}{\partial p_j}\left(q_i(t_0), p_i(t_0)\right) dt + \cdots$$

# Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[ \delta_{ik}\delta_{jk} + \left( \delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$
- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe
$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial H}{\partial q_i} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial H}{\partial p_j} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \to \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$

# Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left( \delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[ \delta_{ik}\delta_{jk} + \left( \delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$
- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe
$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial H}{\partial q_i} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial H}{\partial p_j} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \to \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$
- La evolución temporal de un sistema en su espacio de fase es una transformación canónica inducida por el Hamiltoniano.

# Título transparencia