

# Tres enfoques para un problema

## Partícula Cargada en un Campo Magnético

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



29 de mayo de 2025

- 1 El problema
- 2 Formalismo Hamiltoniano
- 3 Formalismo de Hamilton-Jacobi
- 4 Recapitulando

## • Sistema físico

- Masa  $m$ , carga  $q$ , movimiento en plano  $xy$
- Campo magnético uniforme:  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , sin campo eléctrico:  $\mathbf{E} = 0$
- Potencial vectorial  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  en el calibre de Landau tenemos  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  y además  $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = Bx\dot{y}$

- **Sistema físico**

- Masa  $m$ , carga  $q$ , movimiento en plano  $xy$
- Campo magnético uniforme:  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , sin campo eléctrico:  $\mathbf{E} = 0$
- Potencial vectorial  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  en el calibre de Landau tenemos  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  y además  $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = Bx\dot{y}$

- **El lagrangiano del sistema**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$$

## ● Sistema físico

- Masa  $m$ , carga  $q$ , movimiento en plano  $xy$
- Campo magnético uniforme:  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , sin campo eléctrico:  $\mathbf{E} = 0$
- Potencial vectorial  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  en el calibre de Landau tenemos  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  y además  $\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} = Bx\dot{y}$

## ● El lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$$

## ● Ecuaciones de Euler-Lagrange

- Para  $x$ :  $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - qB\dot{y} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = qB\dot{y}$
- Para  $y$ :  $\frac{d}{dt}(m\dot{y} + qBx) = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = -qB\dot{x}$
- Sistema resultante:  $\ddot{x} = \omega_c\dot{y}$ ,  $\ddot{y} = -\omega_c\dot{x}$  Dos ecuaciones acopladas, donde  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  es frecuencia de ciclotrón
- Derivando:  $\ddot{\dot{x}} = \omega_c\ddot{y} = -\omega_c^2\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_c^2x = 0$ , también  $\ddot{y} + \omega_c^2y = 0$
- Ecuaciones de oscilador armónico para  $x(t)$  y  $y(t)$  con solución
- $x(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$  y  $y(t) = C\cos(\omega_c t) + D\sin(\omega_c t)$
- La partícula describe una órbita circular con  $|\mathbf{v}| = \text{cte}$  y  $R = \frac{v_0}{\omega_c}$

- El hamiltoniano se define por:  $\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L}$

- El hamiltoniano se define por:  $\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L}$
- Como  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$  tenemos  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$  y  
 $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$

- El hamiltoniano se define por:  $\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L}$
- Como  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$  tenemos  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$  y  $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$
- Entonces  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qBx)^2$



- El hamiltoniano se define por:  $\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L}$
- Como  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$  tenemos  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$  y  $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$
- Entonces  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qBx)^2$
- Las Ecuaciones de Hamilton  $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m}$   
 $\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx); \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx)$   
 $\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y - qBx}{m} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\dot{p}_y - qB\dot{x}}{m} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m};$   
finalmente  $\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y = \text{cte} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m}$

- El hamiltoniano se define por:  $\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L}$
- Como  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + qBx\dot{y}$  tenemos  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$  y  $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qBx$
- Entonces  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_y - qBx)^2$
- Las Ecuaciones de Hamilton  $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m}$   
 $\dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx); \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{qB}{m}(p_y - qBx)$   
 $\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y - qBx}{m} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{\dot{p}_y - qB\dot{x}}{m} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m};$   
finalmente  $\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_y = \text{cte} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{qB\dot{x}}{m}$
- Como  $p_y$  es constante:  $X = x - \frac{p_y}{qB} \Rightarrow \ddot{X} = -\omega_c^2 X$ , con  $\omega_c = \frac{qB}{m}$ , y otra vez se obtienen las mismas ecuaciones movimiento

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como:  $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E}t$

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como:  $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces:  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como:  $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces:  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y} = p_y$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual:  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2 \right] = \mathcal{E}$ . Entonces

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como:  $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces:  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y} = p_y$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual:  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2 \right] = \mathcal{E}$ . Entonces
- $\left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2} dx$



- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - qBx\right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como:  $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces:  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y} = p_y$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual:  $\frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 + (p_y - qBx)^2 \right] = \mathcal{E}$ . Entonces
- $\left(\frac{d\mathcal{W}}{dx}\right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2} dx$
- Las ecuaciones  $p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $p_y = \text{cte}$ ,  $Q_y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = y + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_y}$

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} - qBx \right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como:  $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces:  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y} = p_y$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual:  $\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right)^2 + (p_y - qBx)^2 \right] = \mathcal{E}$ . Entonces
- $\left( \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2} dx$
- Las ecuaciones  $p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $p_y = \text{cte}$ ,  $Q_y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = y + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_y}$
- La dependencia de  $x(t)$  se obtiene:  $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$

- La función de acción  $S(x, y, t)$  será tal que  $\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Con lo cual Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} - qBx \right)^2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
- Intentamos la separabilidad como:  $S(x, y, t) = \mathcal{W}(x) + p_y y - \mathcal{E} t$
- Entonces:  $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y} = p_y$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{E}$
- Con lo cual:  $\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right)^2 + (p_y - qBx)^2 \right] = \mathcal{E}$ . Entonces
- $\left( \frac{d\mathcal{W}}{dx} \right)^2 = 2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2 \Rightarrow \mathcal{W}(x) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2} dx$
- Las ecuaciones  $p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ ,  $p_y = \text{cte}$ ,  $Q_y = \frac{\partial S}{\partial p_y} = y + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_y}$
- La dependencia de  $x(t)$  se obtiene:  $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$
- Pero como  $p_x = \frac{d\mathcal{W}}{dx}$ , tenemos:  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \sqrt{2m\mathcal{E} - (p_y - qBx)^2}$

En presentación consideramos

1