Partícula en un Campo electromagnético

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

26 de agosto de 2024

Agenda

1. Fuerza de Lorentz una *una fuerza generalizada*
2. El potencial vector
3. Sección

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$

Fuerza de Lorentz

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y de velocidades.

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $L = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$
- La ecuación de Lagrange es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y de velocidades.
- La fuerza de Lorentz constituye una fuerza generalizada

El potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

El potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
  $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector

El potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$

El potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
  $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

El potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$

El potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$
- y también $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
  $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$
- y también $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

El potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
  $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$
- y también $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- Hemos utilizado $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

Título transparencia

-