

Teoremas integrales y campos vectoriales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



4 de noviembre de 2025

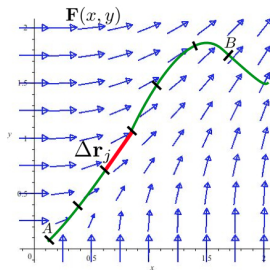
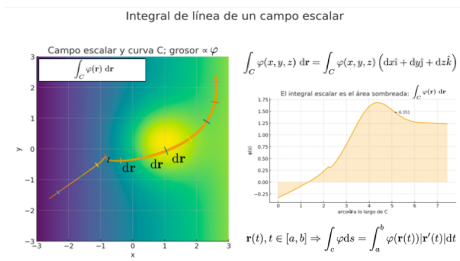
- 1 Integrales de línea
 - Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
 - Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- 2 Integrales de superficie $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- 3 Teorema de Gauss $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$
- 4 Teorema de Gauss y campo eléctrico
 - Generalidades
 - Discontinuidades y densidades superficiales de carga
 - Un ejemplo con densidad de carga
 - Identidades de Green
- 5 Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$.
- 6 Un ejemplo del Teorema de Stokes.

Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

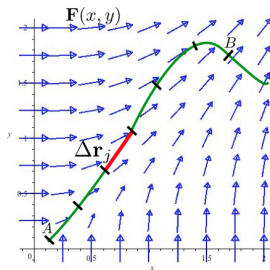
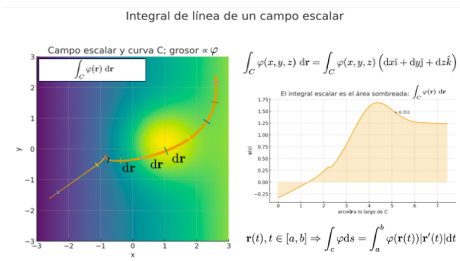
Integrales de línea: $\int_C \phi \, dr$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, dr$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C , las trayectorias, para la integración.



Integrales de línea: $\int_C \phi \, dr$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

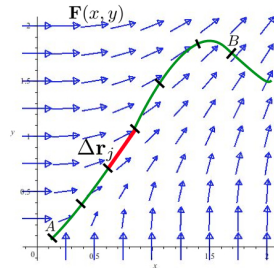
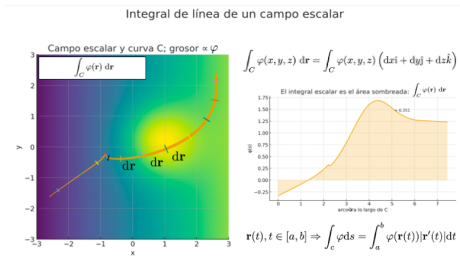
- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, dr$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C , las trayectorias, para la integración.



- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.

Integrales de línea: $\int_C \phi \, dr$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, dr$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C , las trayectorias, para la integración.



- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) \, dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) \, dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) \, dz . \end{aligned}$$

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}) , \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) \, dx + \hat{\mathbf{j}} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) \, dy + \hat{\mathbf{k}} \int_C \phi(x(z), y(z), z) \, dz . \end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $d\mathbf{r}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, por lo tanto:
 $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}) , \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) \, dx + \hat{\mathbf{j}} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) \, dy + \hat{\mathbf{k}} \int_C \phi(x(z), y(z), z) \, dz . \end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $d\mathbf{l}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, por lo tanto:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i, \text{ con } \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|.$$

- En esféricas es: $d\mathbf{l}_r = \hat{\mathbf{e}}_r dr$, $d\mathbf{l}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r d\theta$ y $d\mathbf{l}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) d\varphi$,
En cilíndricas $d\mathbf{l}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho$, $d\mathbf{l}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi$ y $d\mathbf{l}_z = \hat{\mathbf{e}}_z dz$.

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}) , \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) \, dx + \hat{\mathbf{j}} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) \, dy + \hat{\mathbf{k}} \int_C \phi(x(z), y(z), z) \, dz . \end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $d\boldsymbol{\nu}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, por lo tanto:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i, \text{ con } \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|.$$

- En esféricas es: $d\boldsymbol{\nu}_r = \hat{\mathbf{e}}_r dr$, $d\boldsymbol{\nu}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r d\theta$ y $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) d\varphi$,
En cilíndricas $d\boldsymbol{\nu}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho$, $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi$ y $d\boldsymbol{\nu}_z = \hat{\mathbf{e}}_z dz$.
- En general: $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_C \phi(\mathbf{r}(q^i)) \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de línea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta
$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$$
$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz .$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de línea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y, z)dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de línea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y, z)dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^i)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} =$
 $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2, q^3)h_1 dq^1 + \int_C A_{q^2}(q^1, q^2, q^3)h_2 dq^2 + \int_C A_{q^3}(q^1, q^2, q^3)h_3 dq^3.$

- La segunda familia de integrales de línea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y, z)dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^i)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} =$
 $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$
- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \left(\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk}\right) |\mathbf{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \tilde{\epsilon}^{ijk}\right) |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de línea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y, z)dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^i)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} =$
 $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$
- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \left(\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk} \right) |\mathbf{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \tilde{\epsilon}^{ijk} \right) |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle$
- Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de línea se especifican a través del parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $d\mathbf{r}$ serán $dx = f'(\lambda)d\lambda$, $dy = g'(\lambda)d\lambda$ y $dz = h'(\lambda)d\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial $\mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \begin{cases} A^1(x, y, z) = A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv F(\lambda) \\ A^2(x, y, z) = A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv G(\lambda) \\ A^3(x, y, z) = A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv H(\lambda) \end{cases}$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de línea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y, z)dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^i)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} =$
 $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$
- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r} = \left(\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk} \right) |\mathbf{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \tilde{\epsilon}^{ijk} \right) |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle$
- Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de línea se especifican a través del parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $d\mathbf{r}$ serán $dx = f'(\lambda)d\lambda$, $dy = g'(\lambda)d\lambda$ y $dz = h'(\lambda)d\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial $\mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \begin{cases} A^1(x, y, z) = A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv F(\lambda) \\ A^2(x, y, z) = A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv G(\lambda) \\ A^3(x, y, z) = A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv H(\lambda) \end{cases}$
- por lo tanto: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)] d\lambda$

Integrales de superficie $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.

Integrales de superficie $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S \, dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS.$$

Integrales de superficie $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_S \, dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS.$$
- los operadores diferenciales:
 - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \phi \, (q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad de Campo}$
 - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad Flujo}$
 - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow \text{Densidad Circulación}$

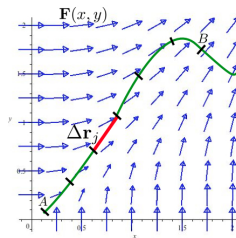
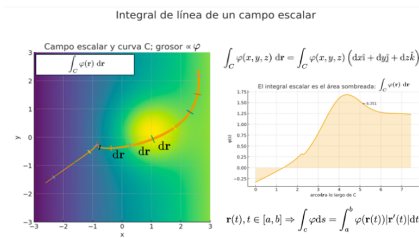
Integrales de superficie $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS.$$
- los operadores diferenciales:
 - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \phi \, (q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad de Campo}$
 - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad Flujo}$
 - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow \text{Densidad Circulación}$
- as integrales de volumen $\int_V \phi(\mathbf{r}) \, dV$ y $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dV$

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_S A_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS.$$
- los operadores diferenciales:
 - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \phi \, (q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad de Campo}$
 - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \text{Densidad Flujo}$
 - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow \text{Densidad Circulación}$
- as integrales de volumen $\int_V \phi(\mathbf{r}) \, dV$ y $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dV$
- Mientras que el segundo tipo de integral es simplemente:

$$\int_V \mathbf{A}(x^i) \, dV = \mathbf{i} \int_V A_x(x^j) \, dV + \mathbf{j} \int_V A_y(x^j) \, dV + \mathbf{k} \int_V A_z(x^j) \, dV.$$



- El Teorema de Gauss es $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$.

- El Teorema de Gauss es $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$.
- Compruebe el teorema de Gauss para un cubo de lado l y un campo vectorial $\mathbf{B} = (x + 1)\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y - z\hat{\mathbf{e}}_z$

- El Teorema de Gauss es $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$.
- Compruebe el teorema de Gauss para un cubo de lado l y un campo vectorial $\mathbf{B} = (x + 1)\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y - z\hat{\mathbf{e}}_z$
- Para un campo escalar $\phi(x, y, z) \Rightarrow \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$
Si \mathbf{c} es un vector constante, tendremos $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c} \phi(x, y, z)$ y,
 $\iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV \Leftrightarrow \mathbf{c} \cdot \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{s} = \mathbf{c} \cdot \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$
con lo cual $0 = \mathbf{c} \cdot [\iint_S \phi(x^i) d\mathbf{s} - \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV]$
- Usando la misma estrategia anterior compruebe la expresión del teorema de Gauss para un campo vectorial
 $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x^i) dV$.

- El flujo del campo eléctrico \mathbf{E} y la distribución de cargas:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

-

-

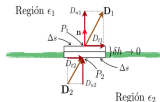
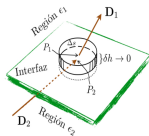
- $$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\sum_i \left(\iint_{S_i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i + \iint_{S_i} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i \right) \Rightarrow$$

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

-

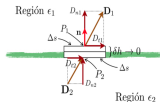
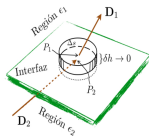
◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

-
- The diagram shows a large yellow region divided into two parts, \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2 , by a dashed boundary line labeled S_2 . The entire region is bounded by a solid line labeled S_1 . The intersection of the two regions is labeled S .



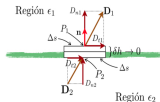
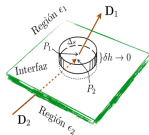
- $$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S}$$

-



- $$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S} + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S}$$

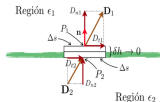
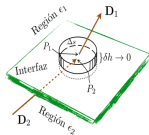
-
- The diagram shows a large yellow region divided into two parts, \mathcal{R}_1 and \mathcal{R}_2 , by a dashed boundary line labeled S_2 . The entire region is bounded by a solid line labeled S_1 . The intersection of the two regions is labeled S .



- $$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$.

-

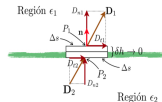
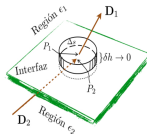
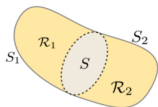


- $$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S} + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S}$$

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \, d\bar{S}$ con $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ el vector unitario, normal a la superficie \bar{S} y que apunta de $R_1 \rightarrow R_2$.

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S , y una superficie \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo



- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_S d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_S d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$.

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S d\bar{S} \text{ con } \hat{\mathbf{n}}_S \text{ el vector unitario, normal a la superficie } \bar{S} \text{ y que apunta de } R_1 \rightarrow R_2.$$

- El ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , a través de una superficie \bar{S} , que separa dos medios. La ecuación de Maxwell correspondiente será $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(r) \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S = \sigma$, con $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.

- Así $\int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = \mathbf{D}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 \Rightarrow \rho(r)(\Delta S_2 \delta h) = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_2} \Delta S_2 \Rightarrow \rho(r)\delta h \equiv \sigma = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_2}$

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$
 - El plano infinito en $z = 0$ tiene densidad de carga superficial σ
 - Calcular el campo eléctrico total $\vec{E}(z)$ y analizar en $z = 0$

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$
 - El plano infinito en $z = 0$ tiene densidad de carga superficial σ
 - Calcular el campo eléctrico total $\vec{E}(z)$ y analizar en $z = 0$
- El flujo del campo es $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$

Un ejemplo con densidad de carga

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$
 - El plano infinito en $z = 0$ tiene densidad de carga superficial σ
 - Calcular el campo eléctrico total $\vec{E}(z)$ y analizar en $z = 0$
- El flujo del campo es $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$
- La ley de Gauss impone $E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, con $Q = \sigma A$, pero además, por simetría $E_{z+} = -E_{z-}$

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$
 - El plano infinito en $z = 0$ tiene densidad de carga superficial σ
 - Calcular el campo eléctrico total $\vec{E}(z)$ y analizar en $z = 0$
- El flujo del campo es $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$
- La ley de Gauss impone $E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, con $Q = \sigma A$, pero además, por simetría $E_{z+} = -E_{z-}$
- Por lo tanto, el campo eléctrico generado por el plano cargado es

$$\vec{E}_z = \begin{cases} \vec{E}_{z+} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z > 0 \\ \vec{E}_{z-} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, & z < 0 \end{cases}$$

- Considere plano xy cargado + campo de fondo uniforme $\vec{E}_0 = E_0\hat{z}$
 - El plano infinito en $z = 0$ tiene densidad de carga superficial σ
 - Calcular el campo eléctrico total $\vec{E}(z)$ y analizar en $z = 0$
- El flujo del campo es $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_{z+}A - E_{z-}A$
- La ley de Gauss impone $E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, con $Q = \sigma A$, pero además, por simetría $E_{z+} = -E_{z-}$
- Por lo tanto, el campo eléctrico generado por el plano cargado es
$$\vec{E}_z = \begin{cases} \vec{E}_{z+} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}, & z > 0 \\ \vec{E}_{z-} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}, & z < 0 \end{cases}$$
- La discontinuidad en $z = 0$ sigue siendo la misma:
$$\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \left(E_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) - \left(E_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)$ el teorema de Gauss implica
$$\iint_S (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) dV$$

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$ el teorema de Gauss implica
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$ el teorema de Gauss implica
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$
- Si consideramos campos vectoriales
$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) = \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i) + \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)$$
$$\nabla \cdot (\xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \nabla\xi(x^i) \cdot \nabla\zeta(x^i) + \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i).$$

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$ el teorema de Gauss implica
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$
- Si consideramos campos vectoriales
$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) &= \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i) + \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) \\ \nabla \cdot (\xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) &= \nabla\xi(x^i) \cdot \nabla\zeta(x^i) + \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i).\end{aligned}$$
- Restando
$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i)$$

- Para campos vectoriales particulares el teorema de Gauss nos lleva a las *identidades o teoremas de Green*
- Si $\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)$ el teorema de Gauss implica
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) dV$$
- La *primera identidad de Green o teorema escalar de Green*:
$$\iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i)(\nabla \cdot \nabla\xi(x^i)) + \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i)] dV$$
- Si consideramos campos vectoriales
$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i)) &= \nabla\zeta(x^i) \cdot \nabla\xi(x^i) + \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) \\ \nabla \cdot (\xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) &= \nabla\xi(x^i) \cdot \nabla\zeta(x^i) + \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i).\end{aligned}$$
- Restando
$$\nabla \cdot (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) = \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i)$$
- Integrando en un volumen V obtendremos el *teorema simétrico de Green, la segunda identidad*
$$\begin{aligned}\iiint_V \{ \zeta(x^i)\nabla \cdot \nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla \cdot \nabla\zeta(x^i) \} dV = \\ \iint_S (\zeta(x^i)\nabla\xi(x^i) - \xi(x^i)\nabla\zeta(x^i)) \cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$.

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva C . $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.

Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$.

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva C . $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.
- **Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.

Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$.

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva C . $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.
- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie
 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iint_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S .

La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$.

- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva C . $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.
- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie
 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S .
La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.
- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$
 $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$

Teorema de Stokes: $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$.

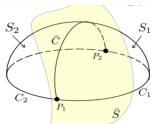
- El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con el flujo del rotacional del campo a través de la superficie encerrada por la curva C . $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS$.
- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie
 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iint_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S .
La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.
- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$
 $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$
- Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria: $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$

- La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

- $$\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_{\zeta} (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$$

- **Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria: $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$
- Un campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ que es discontinuo sobre una superficie \bar{S} , que divide R en dos subregiones R_1 y R_2

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{curva } \bar{C} \text{ en } S_1} + \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{curva } \bar{C} \text{ en } S_2},$$

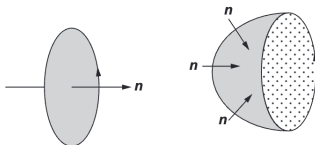


Un ejemplo del Teorema de Stokes 1/.

- Para el campo $\mathbf{B} = e^{-r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, calculemos $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ para un circuito cerrado y comparemos el resultado con las integrales $\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$ para dos superficies diferentes que tienen el mismo perímetro.

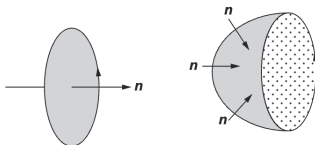
Un ejemplo del Teorema de Stokes 1/.

- Para el campo $\mathbf{B} = e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$, calculemos $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ para un circuito cerrado y comparemos el resultado con las integrales $\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$ para dos superficies diferentes que tienen el mismo perímetro.
- Las superficies son: un disco circular delimitado por una circunsferencia unitaria en el plano xy , y un hemisferio delimitado por el mismo circuito, con su superficie en la región $z < 0$.



Un ejemplo del Teorema de Stokes 1/.

- Para el campo $\mathbf{B} = e^{-r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, calculemos $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ para un circuito cerrado y comparemos el resultado con las integrales $\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$ para dos superficies diferentes que tienen el mismo perímetro.
- Las superficies son: un disco circular delimitado por una circunsferencia unitaria en el plano xy , y un hemisferio delimitado por el mismo circuito, con su superficie en la región $z < 0$.



- Para la integral de línea, $d\mathbf{r} = r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi$, que se reduce a $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi$ como $\theta = \pi/2$ y $r = 1$ tendremos $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi = \frac{2\pi}{e}$

Un ejemplo del Teorema de Stokes 2/2.

- Para calcular la integral de superficie tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_r - r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{-r} \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - (1 - r) e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Un ejemplo del Teorema de Stokes 2/2.

- Para calcular la integral de superficie tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_r - r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{-r} \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - (1 - r) e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Para el disco, $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r \sin \theta dr d\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi$, porque $\theta = \pi/2$, con $0 \leq r \leq 1$, y $0 \leq \varphi < 2\pi$

$$\text{Entonces } \int_{S_1} -(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr (1 - r) e^{-r} = \frac{2\pi}{e}$$

El signo menos es porque la normal está en la dirección decreciente θ

- Para calcular la integral de superficie tendremos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_r - r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta e^{-r}) \hat{\mathbf{e}}_\theta \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{e^{-r} \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_r - (1 - r) e^{-r} \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Para el disco, $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r \sin \theta dr d\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi$, porque $\theta = \pi/2$, con $0 \leq r \leq 1$, y $0 \leq \varphi < 2\pi$

$$\text{Entonces } \int_{S_1} -(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr (1 - r) e^{-r} = \frac{2\pi}{e}$$

El signo menos es porque la normal está en la dirección decreciente θ

- Para el hemisferio, definido por $r = 1$, $\pi/2 \leq \theta < \pi$, y $0 \leq \varphi < 2\pi$, tenemos $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{e}}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta d\theta d\varphi$

(la normal está en la dirección decreciente de r), y

$$\int_{S_2} -(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta d\theta d\varphi = - \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta e^{-1} \cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{e}$$