

# Series de Funciones

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



27 de abril de 2021

- 1 Series de Potencias
- 2 Algebra de Series de Potencias
- 3 Inversión, derivación e integración de series
- 4 Series de Taylor
- 5 La expansión binomial y la función  $\Gamma(z)$
- 6 Propiedades de la función  $\Gamma(x)$
- 7 Sección
- 8 Sección
- 9 Sección
- 10 Recapitulando

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$ , con lo cual una serie infinita será  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ,

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$ , con lo cual una serie infinita será  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de  $x$  y no para otros.

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$ , con lo cual una serie infinita será  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de  $x$  y no para otros.
- El punto central con las series de funciones  $f(x)$  complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos,  $a_k(x)$ , más simples.

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$ , con lo cual una serie infinita será  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de  $x$  y no para otros.
- El punto central con las series de funciones  $f(x)$  complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos,  $a_k(x)$ , más simples.
- Así las sumas parciales converjan a la función  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x)$ .

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$ , con lo cual una serie infinita será  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de  $x$  y no para otros.
- El punto central con las series de funciones  $f(x)$  complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos,  $a_k(x)$ , más simples.
- Así las sumas parciales converjan a la función  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x)$ .
- Una serie de potencias  $a_n = c_n x^n$  será un polinomio de grado infinito:  $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  o también  $P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ .

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$ , con lo cual una serie infinita será  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ ,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de  $x$  y no para otros.
- El punto central con las series de funciones  $f(x)$  complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos,  $a_k(x)$ , más simples.
- Así las sumas parciales converjan a la función  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x)$ .
- Una serie de potencias  $a_n = c_n x^n$  será un polinomio de grado infinito:  $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  o también  $P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ .
- Los coeficientes  $c_n$  son números independientes de  $x$ . Pero, más aún, estas series pueden ser series de potencias de número complejos. Vale decir,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  con  $z = x + iy$ .



- **Generalidades:** los índices de las series son etiquetas mudas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$$

- **Generalidades:** los índices de las series son etiquetas mudas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$$

- **Las series se igualan**  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1}$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$ .  
Entonces  $b_n = a_{n+1} (n+1)$

- **Generalidades:** los índices de las series son etiquetas mudas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$$

- **Las series se igualan**  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1}$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$ .  
Entonces  $b_n = a_{n+1} (n+1)$

- **Las series se suman**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$ ,

- **Generalidades:** los índices de las series son etiquetas mudas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$$

- **Las series se igualan**  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1}$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$ .  
Entonces  $b_n = a_{n+1} (n+1)$

- **Las series se suman**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$ ,
- o también  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (x - x_0)^{k+2} = a_0 + a_1 (x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$

- **Generalidades:** los índices de las series son etiquetas mudas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$$

- **Las series se igualan**  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1}$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$ .  
Entonces  $b_n = a_{n+1} (n+1)$

- **Las series se suman**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$ ,

- o también  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (x - x_0)^{k+2} = a_0 + a_1 (x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$

- **La series se multiplican**

$$[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n] [\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \text{ con}$$
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

- **Las series se ¡invierten!** Si  $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  Entonces  
$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right]^k$$

- **Las series se ¡invierten!** Si  $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  Entonces  
$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right]^k$$
- Con lo cual  $b_1 = \frac{1}{a_1}$ ,  $b_2 = -\frac{a_2}{(a_1)^3}$ ,  $b_3 = \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \dots$

- **Las series se ¡invierten!** Si  $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  Entonces  
$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right]^k$$
- Con lo cual  $b_1 = \frac{1}{a_1}$ ,  $b_2 = -\frac{a_2}{(a_1)^3}$ ,  $b_3 = \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \dots$
- Como  $c_n (x - x_0)^n$  son funciones continuas y **la serie se deriva** término a término  $\frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}$



- **Las series se ¡invierten!** Si  $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  Entonces  
$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right]^k$$
- Con lo cual  $b_1 = \frac{1}{a_1}$ ,  $b_2 = -\frac{a_2}{(a_1)^3}$ ,  $b_3 = \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \dots$
- Como  $c_n (x - x_0)^n$  son funciones continuas y **la serie se deriva** término a término  $\frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}$
- **Las series se integran**  $\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$   
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b dx c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} .$$

- Sea  $f = f(x)$  una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ .

- Sea  $f = f(x)$  una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ .
- Además,  $\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$   
 $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a),$

- Sea  $f = f(x)$  una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ .
- Además,  $\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$   
 $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a),$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas  
 $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a); \quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$   
 $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$

- Sea  $f = f(x)$  una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ .
- Además,  $\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$   
 $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a),$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas  
 $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a); \quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$   
 $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$
- Con lo cual  $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \approx$   
 $f(a) + \int_a^{a+h} dx [f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a),$

- Sea  $f = f(x)$  una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ .
- Además,  $\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$   
 $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a),$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas  
 $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a); \quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$   
 $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$
- Con lo cual  $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \approx$   
 $f(a) + \int_a^{a+h} dx [f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a),$
- En general la serie de Taylor será  
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$$

- Sea  $f = f(x)$  una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que  $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$  están definidas en el intervalo  $[a, b]$ .
- Además,  $\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$   
 $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a),$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas  
 $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a); \quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$   
 $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$
- Con lo cual  $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \approx$   
 $f(a) + \int_a^{a+h} dx [f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a),$
- En general la serie de Taylor será  
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$$
- Con  $\mathcal{R}_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$

- Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n + \cdots \quad \forall x$$



- Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es:

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
 \text{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
 \text{cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
 \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\
 (1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n + \cdots \quad \forall x
 \end{aligned}$$

- El desarrollo en series de Taylor para una función de dos variables es

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(a, b) + (x-a) f_x|_{ab} + (y-b) f_y|_{ab} \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[ (x-a)^2 f_{xx}|_{ab} + 2(x-a)(y-a) f_{xy}|_{ab} + (y-a)^2 f_{yy}|_{ab} \right] \\
 &+ \frac{1}{3!} \left[ (x-a)^3 f_{xxx}|_{ab} + 3(x-a)^2(y-a) f_{xxy}|_{ab} + 3(x-a)(y-a)^2 f_{xyy}|_{ab} + (y-a)^3 f_{yyy}|_{ab} \right] \\
 &+ \cdots
 \end{aligned}$$

- La expansión binomial para  $m$  entero positivo es
$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \text{ la serie termina en } m = n.$$

- La expansión binomial para  $m$  entero positivo es
$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \text{ la serie termina en } m = n.$$
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$  y puede definirse como  $(1 + \frac{x}{a})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$ .

- La expansión binomial para  $m$  entero positivo es
$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \text{ la serie termina en } m = n.$$
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$  y puede definirse como  $(1 + \frac{x}{a})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$ .
- La función  $\Gamma(z)$  es la generalización del factorial para valores de  $z$  complejo y se define  $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx, k > 0$ .

- La expansión binomial para  $m$  entero positivo es
$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \text{ la serie termina en } m = n.$$
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$  y puede definirse como  $(1 + \frac{x}{a})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$ .
- La función  $\Gamma(z)$  es la generalización del factorial para valores de  $z$  complejo y se define  $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx, k > 0$ .
- Cuando  $n$  es un entero positivo coincide con el factorial
$$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-t+n \ln(t)} dt$$

- La expansión binomial para  $m$  entero positivo es
$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \text{ la serie termina en } m = n.$$
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$  y puede definirse como  $(1 + \frac{x}{a})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} (\frac{x}{a})^n$ .
- La función  $\Gamma(z)$  es la generalización del factorial para valores de  $z$  complejo y se define  $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx, k > 0$ .
- Cuando  $n$  es un entero positivo coincide con el factorial
$$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-t+n \ln(t)} dt$$
- Si  $f(t) = -t + n \ln(t) = f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \dots$ 
$$f(t) = -n + n \ln(n) + 0 + (t-n)^2 (-n/n^2)/2 + \dots$$

- La expansión binomial para  $m$  entero positivo es
$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \text{ la serie termina en } m = n.$$
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$  y puede definirse como  $(1 + \frac{x}{a})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} (\frac{x}{a})^n$ .
- La función  $\Gamma(z)$  es la generalización del factorial para valores de  $z$  complejo y se define  $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx, k > 0$ .
- Cuando  $n$  es un entero positivo coincide con el factorial
$$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-t+n \ln(t)} dt$$
- Si  $f(t) = -t + n \ln(t) = f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \dots$ 
$$f(t) = -n + n \ln(n) + 0 + (t-n)^2 (-n/n^2)/2 + \dots$$
- Entonces  $n! \sim \int_0^{\infty} e^{-n+n \ln(n) - (t-n)^2/2n} dt = n^n e^{-n} \int_0^{\infty} e^{-(t-n)^2/2n} dt$

- La expansión binomial para  $m$  entero positivo es
$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \text{ la serie termina en } m = n.$$
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de  $m$  y puede definirse como  $(1 + \frac{x}{a})^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$ .
- La función  $\Gamma(z)$  es la generalización del factorial para valores de  $z$  complejo y se define  $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx, k > 0$ .
- Cuando  $n$  es un entero positivo coincide con el factorial
$$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-t+n \ln(t)} dt$$
- Si  $f(t) = -t + n \ln(t) = f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \dots$ 
$$f(t) = -n + n \ln(n) + 0 + (t-n)^2 (-n/n^2)/2 + \dots$$
- Entonces  $n! \sim \int_0^{\infty} e^{-n+n \ln(n) - (t-n)^2/2n} dt = n^n e^{-n} \int_0^{\infty} e^{-(t-n)^2/2n} dt$
- Si  $n \gg 1$   $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  **La Fórmula de Stirling**



# Propiedades de la función $\Gamma(x)$

- Si  $k = 1$ , tenemos  $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = 1$ .

- Si  $k = 1$ , tenemos  $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = 1$ .
- Si  $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx$  integramos por partes

$$\Gamma(k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-x} x^k}{k} \right]_0^b + \frac{1}{k} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx, \quad k > 0,$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} \Gamma(k+1) \Rightarrow \Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$$

- Si  $k = 1$ , tenemos  $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = 1$ .
- Si  $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx$  integramos por partes

$$\Gamma(k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-x} x^k}{k} \right]_0^b + \frac{1}{k} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx, \quad k > 0,$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} \Gamma(k+1) \Rightarrow \Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$$

- También  $\Gamma(k+1) = \frac{1}{k+1} \Gamma(k+2) \Rightarrow \Gamma(k) = \frac{1}{k(k+1)} \Gamma(k+2)$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)} \dots$$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}, \quad k \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1).$$

- Si  $k = 1$ , tenemos  $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = 1$ .
- Si  $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx$  integramos por partes

$$\Gamma(k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-x} x^k}{k} \right]_0^b + \frac{1}{k} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx, \quad k > 0,$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} \Gamma(k+1) \Rightarrow \Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$$

- También  $\Gamma(k+1) = \frac{1}{k+1} \Gamma(k+2) \Rightarrow \Gamma(k) = \frac{1}{k(k+1)} \Gamma(k+2)$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)} \dots$$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}, \quad k \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1).$$

- la fórmula de reflexión de Euler  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

- Si  $k = 1$ , tenemos  $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = 1$ .
- Si  $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx$  integramos por partes

$$\Gamma(k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-x} x^k}{k} \right]_0^b + \frac{1}{k} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx, \quad k > 0,$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} \Gamma(k+1) \Rightarrow \Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$$

- También  $\Gamma(k+1) = \frac{1}{k+1} \Gamma(k+2) \Rightarrow \Gamma(k) = \frac{1}{k(k+1)} \Gamma(k+2)$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)} \dots$$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}, \quad k \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1).$$

- la fórmula de reflexión de Euler  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$
- Propiedades de la función  $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1}$

- Si  $k = 1$ , tenemos  $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = 1$ .
- Si  $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx$  integramos por partes

$$\Gamma(k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-x} x^k}{k} \right]_0^b + \frac{1}{k} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx, \quad k > 0,$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} \Gamma(k+1) \Rightarrow \Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$$

- También  $\Gamma(k+1) = \frac{1}{k+1} \Gamma(k+2) \Rightarrow \Gamma(k) = \frac{1}{k(k+1)} \Gamma(k+2)$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)} \dots$$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}, \quad k \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1).$$

- la fórmula de reflexión de Euler  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$
- Propiedades de la función  $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) \int_0^1 dt t^{a-1}(1-t)^{b-1}$
- Fórmula de Hastings  $\Gamma(z+1) = z! = 1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + z(a_5 + z(a_6 + z(a_7 + za_8))))))))).$

- Si  $k = 1$ , tenemos  $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = 1$ .
- Si  $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x} x^{k-1} dx$  integramos por partes

$$\Gamma(k) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-x} x^k}{k} \right]_0^b + \frac{1}{k} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx, \quad k > 0,$$

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k} \Gamma(k+1) \Rightarrow \Gamma(k+1) = k \Gamma(k)$$

- También  $\Gamma(k+1) = \frac{1}{k+1} \Gamma(k+2) \Rightarrow \Gamma(k) = \frac{1}{k(k+1)} \Gamma(k+2)$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)} \dots$$

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}, \quad k \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1).$$

- la fórmula de reflexión de Euler  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$
- Propiedades de la función  $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) \int_0^1 dt t^{a-1}(1-t)^{b-1}$
- Fórmula de Hastings  $\Gamma(z+1) = z! =$   
 $1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + z(a_5 + z(a_6 + z(a_7 + za_8))))))))).$

- También la aproximación polinómica

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(z)} \approx \sum_{k=1}^8 C_k z^k.$$









En presentación consideramos

1