Bases y componentes de vectores

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

10 de octubre de 2022

Agenda

Bases y componentes

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\left\{a^1, a^2, a^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

Bases y componentes

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\left\{a^1, a^2, a^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\left\{a^1, a^2, a^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.
- Utilizamos la convención dextrógira : $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y construimos el conjunto de vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

Bases y componentes

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\left\{a^1, a^2, a^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.
- Utilizamos la convención dextrógira : $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y construimos el conjunto de vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.
- Si a cada punto P del espacio asociamos un radio vector $\mathbf{r}(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P entonces los números $\left\{x^1, x^2, x^3\right\}$ son las componentes de $\mathbf{r}(P)$. Es decir $\mathbf{r}(P) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$.

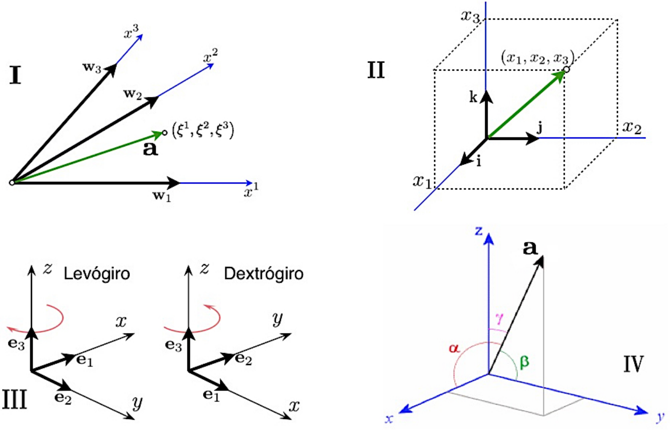

Figura: Sistemas coordenados

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\left(P\right) = x^1\ \mathbf{e}_1 + x^2\ \mathbf{e}_2 + x^3\ \mathbf{e}_3\ .$

Sistemas coordenados

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\left(P\right) = x^1 \; \mathbf{e}_1 + x^2 \; \mathbf{e}_2 + x^3 \; \mathbf{e}_3 \, .$
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}\left(P\right)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^+ (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha \mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right) \mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right) \mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right) \mathbf{e}_3 \;\Rightarrow$ $|\alpha \mathbf{a}| = \alpha \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \, .$

Sistemas coordenados

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector:
$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\left(P\right) = x^1\ \mathbf{e}_1 + x^2\ \mathbf{e}_2 + x^3\ \mathbf{e}_3\,.$
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}\left(P\right)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^+ (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha\mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right)\mathbf{e}_3 \ \Rightarrow$
$|\alpha\mathbf{a}| = \alpha\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,.$
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}\,,$

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\,(P) = x^1\ \mathbf{e}_1 + x^2\ \mathbf{e}_2 + x^3\ \mathbf{e}_3\,.$
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}\,(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^+(x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha\mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right)\mathbf{e}_3 \ \Rightarrow$ $|\alpha\mathbf{a}| = \alpha\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,.$
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}}\,,$

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(P) = x^1\ \mathbf{e}_1 + x^2\ \mathbf{e}_2 + x^3\ \mathbf{e}_3\,.$
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^+(x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha\mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right)\mathbf{e}_3 \ \Rightarrow$ $|\alpha\mathbf{a}| = \alpha\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,.$
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}\,,$
- Cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$.

Algebra vectorial en componentes

- Sumas y restas de vectores
$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\left(a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3\right)+\left(b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3\right)=$
$\left(a^1+b^1\right)\mathbf{e}_1+\left(a^2+b^2\right)\mathbf{e}_2+\left(a^3+b^3\right)\mathbf{e}_3\,,$
- tres vectores: $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3\,,\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{c}=c^1\mathbf{e}_1+c^2\mathbf{e}_2+c^3\mathbf{e}_3$, serán *linealmente independientes* si se cumple que: $\alpha\ \mathbf{a}+\beta\ \mathbf{b}+\gamma\ \mathbf{c}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0\,.$ para la base canónica: $\mathbf{e}_1\equiv(1,0,0)\,,\mathbf{e}_2\equiv(0,1,0)\,,\mathbf{e}_3\equiv(0,0,1)$
$\mathbf{0}=\alpha\left(a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3\right)+\beta\left(b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3\right)+$
$\gamma\left(c^1\mathbf{e}_1+c^2\mathbf{e}_2+c^3\mathbf{e}_3\right)\ \Rightarrow$
$$\begin{array}{l}\alpha a^1+\beta b^1+\gamma c^1=0\\ \alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2=0\\ \alpha a^3+\beta b^3+\gamma c^3=0\end{array}\ \Rightarrow\left|\begin{array}{ccc}a^1&b^1&c^1\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{array}\right|\neq0\,.\ \Rightarrow$$
$a^1\left(b^2c^3-b^3c^2\right)+a^2\left(b^3c^1-b^1c^3\right)+a^3\left(b^1c^2-b^2c^1\right)\neq0$

Productos de vectores en componentes

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
  - *Ortogonalidad:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:
    $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.
  - *El Teorema del coseno y Pitágoras:*
    $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \ \Rightarrow \ |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$,

Productos de vectores en componentes

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
  - *Ortogonalidad:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.
  - *El Teorema del coseno y Pitágoras:* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \;\Rightarrow\; |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}$,
- producto vectorial en componentes
  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right) \mathbf{e}_1 + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right) \mathbf{e}_2 + \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right) \mathbf{e}_3$,

Productos de vectores en componentes

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
  - *Ortogonalidad:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:
    $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.
  - *El Teorema del coseno y Pitágoras:*
    $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \ \Rightarrow \ |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$,
- producto vectorial en componentes
  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right) \mathbf{e}_1 + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right) \mathbf{e}_2 + \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right) \mathbf{e}_3$,
- Triple producto mixto:

$$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle} = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} .$$

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma
   $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3$,
   Independencia lineal
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3$, Independencia lineal $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$
4. Producto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$,

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma
   $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3$,
   Independencia lineal
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$
4. Producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$,
5. Producto vectorial
   $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(a^2b^3 - a^3b^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^3b^1 - a^1b^3\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^1b^2 - a^2b^1\right)\mathbf{e}_3$,

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma
   $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3$,
   Independencia lineal
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$
4. Producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$,
5. Producto vectorial
   $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(a^2b^3 - a^3b^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^3b^1 - a^1b^3\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^1b^2 - a^2b^1\right)\mathbf{e}_3$,
6. Triple producto mixto $V = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$

Para la Discusión

1. Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,,\ \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}\,,\ \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,.$$

Revisemos si forman una base.

1. Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,,\ \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}\,,\ \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,.$$

   Revisemos si forman una base.

2. Calculemos el volumen con el triple producto vectorial: $V = |\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]|$

Para la Discusión

1. Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,,\; \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}\,,\; \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,.$$

   Revisemos si forman una base.

2. Calculemos el volumen con el triple producto vectorial: $V = |\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]|$

3. Para un vector arbitrario, $\mathbf{d} = d^1\hat{\mathbf{i}} + d^2\hat{\mathbf{j}} + d^3\hat{\mathbf{k}}$, construya las siguientes cantidades: $c^1 = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,, \quad c^2 = -\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,, \quad c^3 = -\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,,$ y muestre que $c^1(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + c^2(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + c^3(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \mathbf{d} = \mathbf{0}\,,$