Teoremas integrales y campos vectoriales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

22 de febrero de 2022

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C, las trayectorias, para la integración.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C, las trayectorias, para la integración.
- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C, las trayectorias, para la integración.
- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C, las trayectorias, para la integración.
- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x, y, z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) \, (\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k})$.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C, las trayectorias, para la integración.
- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x,y,z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x,y,z) \left(\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}\right)$.
- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, por lo tanto: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $\quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C, las trayectorias, para la integración.
- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x,y,z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x,y,z) \, (\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k})$.
- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, por lo tanto: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $\quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.
- En esféricas es: $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_r = \hat{\mathbf{e}}_r \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r \mathrm{d}\theta$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \operatorname{sen}(\theta) \mathrm{d}\varphi$, En cilíndricas $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho \mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_z = \hat{\mathbf{e}}_z \mathrm{d}z$.

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C, las trayectorias, para la integración.
- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x,y,z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x,y,z) \, (\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k})$.
- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, por lo tanto: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $\quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.
- En esféricas es: $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_r = \hat{\mathbf{e}}_r \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r \mathrm{d}\theta$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\varphi$, En cilíndricas $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho \mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_z = \hat{\mathbf{e}}_z \mathrm{d}z$.
- En general: $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(\mathbf{r}(q^j)) \left(\sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i \right)$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j)) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$

  $$\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3\mathrm{d}q^3.$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j)) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$

  $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3\mathrm{d}q^3.$

- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería

  $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \times [\mathrm{d}x\ \mathbf{i} + \mathrm{d}y\ \mathbf{j} + \mathrm{d}z\ \mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\int_C A_j\ \mathrm{d}x_k\ \epsilon^{ijk}\right) |\mathrm{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j\ h_i\ \mathrm{d}q^i\ \tilde{\epsilon}^{ijk}\right) |\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$ $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3\mathrm{d}q^3$.

- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \times [\mathrm{d}x\ \mathbf{i} + \mathrm{d}y\ \mathbf{j} + \mathrm{d}z\ \mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\int_C A_j\ \mathrm{d}x_k\ \epsilon^{ijk}\right)|\mathrm{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j\ h_i\ \mathrm{d}q^i\ \tilde{\epsilon}^{ijk}\right)|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle$

- Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifian a través dek parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $\mathrm{d}\mathbf{r}$ serán $\mathrm{d}x = f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, $\mathrm{d}y = g'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ y $\mathrm{d}z = h'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial

$$\mathbf{A}(x^i) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} A^1(x,y,z) = & A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv & F(\lambda) \\ A^2(x,y,z) = & A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv & G(\lambda) \\ A^3(x,y,z) = & A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv & H(\lambda) \end{array} \right.$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z$.

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$ $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3\mathrm{d}q^3$.

- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \times [\mathrm{d}x\ \mathbf{i} + \mathrm{d}y\ \mathbf{j} + \mathrm{d}z\ \mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\int_C A_j\ \mathrm{d}x_k\ \epsilon^{ijk}\right) |\mathrm{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j\ h_i\ \mathrm{d}q^i\ \tilde{\epsilon}^{ijk}\right) |\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle$

- Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifian a través dek parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $\mathrm{d}\mathbf{r}$ serán $\mathrm{d}x = f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, $\mathrm{d}y = g'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ y $\mathrm{d}z = h'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial

$$\mathbf{A}(x^i) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} A^1(x,y,z) = & A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv & F(\lambda) \\ A^2(x,y,z) = & A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv & G(\lambda) \\ A^3(x,y,z) = & A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv & H(\lambda) \end{array} \right.$$

- por lo tanto: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)\right] \mathrm{d}\lambda$

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, \mathrm{d}\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$.

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, \mathrm{d}\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es
  $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \, \mathrm{d}S$.

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, \mathrm{d}\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es
  $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \, \mathrm{d}S$.
- los operadores diferenciales:
  - grad $\phi \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi\left(q^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad de Campo
  - div $\mathbf{A} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad Flujo
  - rot $\mathbf{A} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$ Densidad Circulación

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, \mathrm{d}\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \, \mathrm{d}S$.
- los operadores diferenciales:
    - grad $\phi \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi \left(q^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad de Campo
    - div $\mathbf{A} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad Flujo
    - rot $\mathbf{A} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$ Densidad Circulación
- as integrales de volumen $\int_V \phi(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}V$ y $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}V$

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, \mathrm{d}\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \, \mathrm{d}S$.
- los operadores diferenciales:
  - grad $\phi \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi\left(q^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad de Campo
  - div $\mathbf{A} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad Flujo
  - rot $\mathbf{A} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$ Densidad Circulación
- as integrales de volumen $\int_V \phi(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V$ y $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V$
- Mientras que el segundo tipo de integral es simplemente: $\int_V \mathbf{A}(x^i)\, \mathrm{d}V = \mathbf{i} \int_V A_x(x^j)\mathrm{d}V + \mathbf{j} \int_V A_y(x^j)\mathrm{d}V + \mathbf{k} \int_V A_z(x^j)\mathrm{d}V$.

Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es
$\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V.$

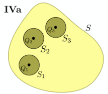
Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es
  $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V$.
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_s \phi\left(x^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\phi\left(x^i\right) \mathrm{d}V$
  Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_s \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{B}\left(x^i\right) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}\left(x^i\right) \mathrm{d}V$.

Teorema de Gauss

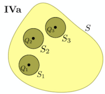
- El Teorema de Gauss es $\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V$.
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_s \phi\left(x^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \phi\left(x^i\right) \mathrm{d}V$
  Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_s \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{B}\left(x^i\right) = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}\left(x^i\right) \mathrm{d}V$.
- **Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado: $\mathbf{E}_i\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$.

- El Teorema de Gauss es
  $\iint_s \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A}\cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{A}\, \mathrm{d}V .$
- Campo escalar $\phi(x,y,z)$, $\Rightarrow \iint_s \phi\left(x^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\phi\left(x^i\right) \mathrm{d}V$
  Campo vectorial $\mathbf{B}(x,y,z) \Rightarrow \iint_s \mathrm{d}\mathbf{S}\times \mathbf{B}\left(x^i\right) = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\left(x^i\right)\mathrm{d}V.$
- **Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado:
  $\mathbf{E}_i\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i}\mathbf{E}_i\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$
- Si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S, podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i. Por lo tanto
  $\iint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\,\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_i = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \iint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\sum_i\iint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_i\,.$



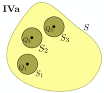
Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es
$\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V$.
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_s \phi\left(x^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi\left(x^i\right) \mathrm{d}V$
Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_s \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{B}\left(x^i\right) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}\left(x^i\right) \mathrm{d}V$.
- **Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado:
$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$.
- Si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S, podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i. Por lo tanto
$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, \mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i$.



- Hemos definido una superficie con “huecos” alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que entra sale, $\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\sum_i \iint_{S_i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}' \right) \cdot \mathbf{n}_{S_i} \, \mathrm{d}S_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} \mathrm{d}S_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

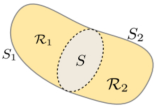
- El Teorema de Gauss es
$\iint_s \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V.$
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_s \phi\left(x^i\right) \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\phi\left(x^i\right) \mathrm{d}V$
Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_s \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{B}\left(x^i\right) = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}\left(x^i\right) \mathrm{d}V.$
- **Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado:
$\mathbf{E}_i\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$
- Si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S, podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i. Por lo tanto
$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_i\,.$

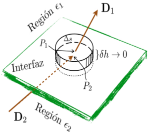


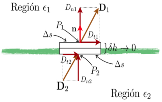
- Hemos definido una superficie con "huecos" alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que entra sale, $\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\sum_i \iint_{S_i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}' \right) \cdot \mathbf{n}_{S_i}\, \mathrm{d}S_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} \mathrm{d}S_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
- Finalmente encontramos una de las leyes de Maxwell si reescribimos la integral de superficie utilizando la ley de Gauss
$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V \;\Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}\right) \mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

Discontinuidades y densidades superficiales de carg

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S, y una superficie $\bar{S}$, separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo



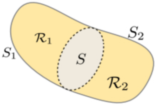


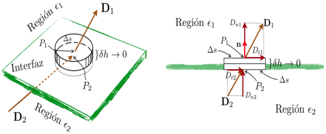


- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$$

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S, y una superficie $\bar{S}$, separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo



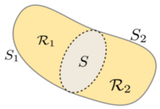


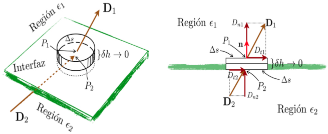
- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$$

Discontinuidades y densidades superficiales de carg

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S, y una superficie $\bar{S}$, separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo





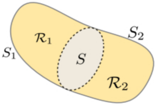
- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

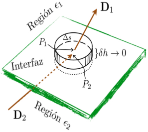
$$\int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\, \mathrm{d}\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\, \mathrm{d}\bar{S}$$

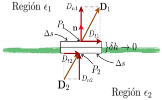
- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V \equiv \int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V + \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V$.

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S, y una superficie $\bar{S}$, separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo







- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

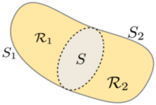
  $\int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$ y $\int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$

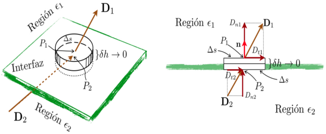
- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V \equiv \int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V + \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V$.

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

  $\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$ con $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ el vector unitario, normal a la superficie $\bar{S}$ y que apunta de $R_1 \to R_2$.

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S, y una superficie $\bar{S}$, separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo





- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

  $\int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$ y $\int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V \equiv \int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V + \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V$.

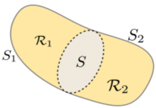
- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

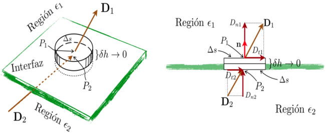
  $\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}\, \mathrm{d}\bar{S}$ con $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ el vector unitario, normal a la superficie $\bar{S}$ y que apunta de $R_1 \to R_2$.

- El ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$, a través de una superficie $\bar{S}$, que separa dos medios. La ecuación de Maxwell correspondiente será $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} = \sigma\,, \quad$ con $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S, y una superficie $\bar{S}$, separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo





- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

  $\int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\, \mathrm{d}\bar{S}$ y $\int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\, \mathrm{d}\bar{S}$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V \equiv \int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V + \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V$.

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

  $\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, \mathrm{d}V = \iint_{S} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\, \mathrm{d}\bar{S}$ con $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}$ el vector unitario, normal a la superficie $\bar{S}$ y que apunta de $R_1 \to R_2$.

- El ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$, a través de una superficie $\bar{S}$, que separa dos medios. La ecuación de Maxwell correspondiente será $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}} = \sigma\,,$ con $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.

- Así $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D})\mathrm{d}V = \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{S}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{S}_1 \;\Rightarrow \rho(\mathbf{r})(\Delta S_2\ \delta h) = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s_2} \Delta S_2 \;\Rightarrow \rho(\mathbf{r})\delta h \equiv \sigma = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s_2}$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C, con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C.

  $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S.$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C, con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C.

  $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S.$

- **Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C, con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C.

  $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S.$

- **Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie
  $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \int_S [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S.

  La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C, con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C.

  $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S.$

- **Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie
  $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \int_S [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S.

  La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint \phi(x, y, z)\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y, z)$

  $\oint \; \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (\mathrm{d}\mathbf{S} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \mathbf{B}(x, y, z)$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C, con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C.

  $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S$.
- **Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie
  $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \int_S [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S.

  La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.
- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint \phi(x, y, z)\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y, z)$

  $\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (\mathrm{d}\mathbf{S} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \mathbf{B}(x, y, z)$
- **Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C, con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C.

  $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, \mathrm{d}S.$

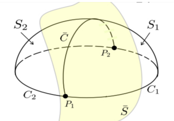
- **Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie
  $\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \int_S [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S.

  La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint \phi(x, y, z) \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \boldsymbol{\nabla} \phi(x, y, z)$

  $\oint \; \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (\mathrm{d}\mathbf{S} \times \boldsymbol{\nabla}) \times \mathbf{B}(x, y, z)$

- **Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$
- Un campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ que es discontinuo sobre una superficie $\bar{S}$, que divide R en dos subregiones R_1 y R_2
  $$\iint_{S_1} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \underbrace{\int_{P_2}^{P_1}}_{\text{curva } \bar{C} \text{ en } S_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \underbrace{\int_{P_1}^{P_2}}_{\text{curva } \bar{C} \text{ en } S_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$



Entonces $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{P_1}^{P_2} \left(\mathbf{A}|_{S_2} - \mathbf{A}|_{S_1} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$

Recapitulando

- LZZZZZZ