Modos normales de oscilación

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

11 de abril de 2025

Agenda

1. Repasamos los Modos normales de oscilación
2. Osciladores Acoplados
   - Los osciladores
   - Las ecuaciones de movimiento y sus modos nomales
   - De las frecuencias ω_i a las amplitudes a^i
3. Los Modos Normales Oscilación para el CO2
   - Descripción del sistema CO2
   - Energías cinética y potencial
   - Las frecuencias de oscilación ω_n
   - Ecuaciones generales y modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$
   - Modos normales para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$
4. Recapitulando
5. Para la discusión

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j \right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j \right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$ es decir

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \ldots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$ es decir
$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \ldots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$
- Esto permite calcular las s frecuencias de pequeñas oscilaciones $\omega_n, \quad n = 1, 2, \ldots, s$ como soluciones al polinomio característico

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s=2$
  $i=1:\left(V_{11}-\omega_n^2 T_{11}\right) a_1+\left(V_{12}-\omega_n^2 T_{12}\right) a_2=0$
  $i=2:\left(V_{21}-\omega_n^2 T_{21}\right) a_1+\left(V_{22}-\omega_n^2 T_{22}\right) a_1=0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t)=\sum_n c_n a_j\left(\omega_n\right) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.

Modos normales de oscilación 2/2

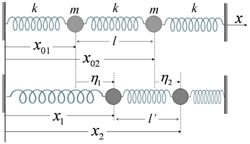
- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j\left(\omega_n\right) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j\left(\omega_n\right) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son
  $\eta_1 = a_1\left(\omega_1\right) \xi_1 + a_1\left(\omega_2\right) \xi_2, \quad \eta_2 = a_2\left(\omega_1\right) \xi_1 + a_2\left(\omega_2\right) \xi_2$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son
  $\eta_1 = a_1(\omega_1)\xi_1 + a_1(\omega_2)\xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_1)\xi_1 + a_2(\omega_2)\xi_2$
- Para ξ_2 tenemos $\eta_1 = a_1(\omega_2)\xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_2)\xi_2$, 2 pequeños desplazamientos que oscilas con la frecuencia ω_2 alrededor de su posición de equilibrio con amplitudes $a_1(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2)$.

Los Osciladores

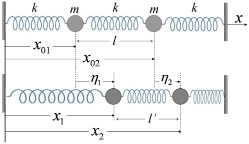
Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,

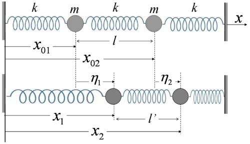
Los Osciladores

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$

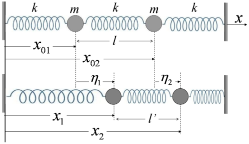
Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$

Los Osciladores

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$
- Donde $l' - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$

Ecuaciones de movimiento y sus modos nomales

- $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
  $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$

Ecuaciones de movimiento y sus modos nomales

- $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
  $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$

- $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
$V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \Rightarrow \det \left| k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
- Es decir $\det \begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0$

Ecuaciones de movimiento y sus modos nomales

- $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \Rightarrow \det\left| k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$
- Es decir $\det\begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{2k \pm k}{m}$

- $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
  $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \Rightarrow \det\left| k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$
- Es decir $\det\begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- La ecuación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\pm^1 \\ a_\pm^2 \end{pmatrix} = \frac{m\omega_\pm^2}{k}\begin{pmatrix} a_\pm^1 \\ a_\pm^2 \end{pmatrix}$

- $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con
  $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \Rightarrow \det\left| k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$
- Es decir $\det\begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- La ecuación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\pm^1 \\ a_\pm^2 \end{pmatrix} = \frac{m\omega_\pm^2}{k}\begin{pmatrix} a_\pm^1 \\ a_\pm^2 \end{pmatrix}$
- Claramente una ecuación de autovalores

- $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \Rightarrow \det\left| k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$
- Es decir $\det\begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0$
- La ecuación característica es $2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- La ecuación matricial es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\pm^1 \\ a_\pm^2 \end{pmatrix} = \frac{m\omega_\pm^2}{k}\begin{pmatrix} a_\pm^1 \\ a_\pm^2 \end{pmatrix}$
- Claramente una ecuación de autovalores
- Entonces, las ecuaciones serán $\left\{\begin{array}{rcl} 2a_\pm^1 - a_\pm^2 & = & \frac{m\omega_\pm^2}{k} a_\pm^1 \\ -a_\pm^1 + 2a_\pm^2 & = & \frac{m\omega_\pm^2}{k} a_\pm^1 \end{array}\right.$

De las frecuencias ω_i a las amplitudes a^i

- Si definimos $\lambda_\pm := \frac{m\omega_\pm^2}{k}$, entonces $\begin{cases} 2a_\pm^1 - a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^1 \\ -a_\pm^1 + 2a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^2 \end{cases}$

De las frecuencias ω_i a las amplitudes a^i

- Si definimos $\lambda_\pm := \frac{m\omega_\pm^2}{k}$, entonces $\left\{ \begin{array}{l} 2a_\pm^1 - a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^1 \\ \\ -a_\pm^1 + 2a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^2 \end{array} \right.$
- Entonces $(2-\lambda_\pm)a_\pm^1 - a_\pm^2 = 0$ y $-a_\pm^1 + (2-\lambda_\pm)a_\pm^2 = 0$

De las frecuencias ω_i a las amplitudes a^i

- Si definimos $\lambda_\pm := \frac{m\omega_\pm^2}{k}$, entonces $\left\{\begin{array}{l} 2a_\pm^1 - a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^1 \\ \\ -a_\pm^1 + 2a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^2 \end{array}\right.$
- Entonces $(2-\lambda_\pm)a_\pm^1 - a_\pm^2 = 0 \quad$ y $\quad -a_\pm^1 + (2-\lambda_\pm)a_\pm^2 = 0$
- Al despejar $a_\pm^2$ de la primera y sustituirla en la segunda, tendremos $a_\pm^1\left[(2-\lambda_\pm)^2 - 1\right] = 0 \quad \Rightarrow (2-\lambda_\pm)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2-\lambda_\pm = \pm 1$

De las frecuencias ω_i a las amplitudes a^i

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

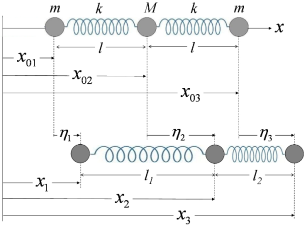
- Si definimos $\lambda_\pm := \frac{m\omega_\pm^2}{k}$, entonces $\begin{cases} 2a_\pm^1 - a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^1 \\ -a_\pm^1 + 2a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^2 \end{cases}$
- Entonces $(2-\lambda_\pm)a_\pm^1 - a_\pm^2 = 0 \quad \text{y} \quad -a_\pm^1 + (2-\lambda_\pm)a_\pm^2 = 0$
- Al despejar $a_\pm^2$ de la primera y sustituirla en la segunda, tendremos $a_\pm^1\left[(2-\lambda_\pm)^2 - 1\right] = 0 \quad \Rightarrow (2-\lambda_\pm)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2-\lambda_\pm = \pm 1$
- Entonces, si $2-\lambda_\pm = -1 \Rightarrow \lambda_+ = 3$ y si $2-\lambda_\pm = 1 \Rightarrow \lambda_- = 1$, que son los dos valores que corresponden a dos valores que optuvimos de la ecuación característica $\omega_\pm = \frac{2k\pm k}{m} \Rightarrow \omega_+ = \frac{3k}{m}$ y $\omega_- = \frac{k}{m}$

De las frecuencias ω_i a las amplitudes a^i

- Si definimos $\lambda_\pm := \frac{m\omega_\pm^2}{k}$, entonces $\left\{ \begin{array}{l} 2a_\pm^1 - a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^1 \\ \\ -a_\pm^1 + 2a_\pm^2 = \lambda_\pm a_\pm^2 \end{array} \right.$
- Entonces $(2-\lambda_\pm)a_\pm^1 - a_\pm^2 = 0 \quad$ y $\quad -a_\pm^1 + (2-\lambda_\pm)a_\pm^2 = 0$
- Al despejar $a_\pm^2$ de la primera y sustituirla en la segunda, tendremos $a_\pm^1 \left[(2-\lambda_\pm)^2 - 1\right] = 0 \quad \Rightarrow (2-\lambda_\pm)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2-\lambda_\pm = \pm 1$
- Entonces, si $2-\lambda_\pm = -1 \Rightarrow \lambda_+ = 3$ y si $2-\lambda_\pm = 1 \Rightarrow \lambda_- = 1$, que son los dos valores que corresponden a dos valores que optuvimos de la ecuación característica $\omega_\pm = \frac{2k \pm k}{m} \Rightarrow \omega_+ = \frac{3k}{m}$ y $\omega_- = \frac{k}{m}$
- Finalmente, $\frac{a_\pm^2}{a_\pm^1} = (2-\lambda_\pm) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a_+^2}{a_+^1} = +1 & \text{en fase} \\ \\ \frac{a_-^2}{a_-^1} = -1 & \text{en contra fase} \end{array} \right.$

Descripción del sistema CO2

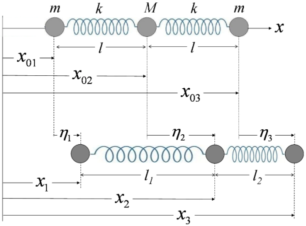
- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO2



M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1, l_2, las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

Descripción del sistema CO2

- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO2



  M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1, l_2, las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

- Sean x_{01}, x_{02}, x_{03} las posiciones de equilibrio de las tres partículas y $\eta_i = x_i - x_{0i}$, con $i = 1, 2, 3$ los desplazamientos del equilibrio.

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\eta_3 - \eta_2\right)^2 \Rightarrow$ $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2} m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2} m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2} k \left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2} k \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\eta_3 - \eta_2\right)^2 \Rightarrow$ $V = \frac{1}{2} k \left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\eta_3 - \eta_2\right)^2 \Rightarrow$ $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$
- y $V_{ij} = \begin{pmatrix} V_{11} = k & V_{12} = -k & V_{13} = 0 \\ V_{21} = -k & V_{22} = 2k & V_{23} = -k \\ V_{31} = 0 & V_{32} = -k & V_{33} = k \end{pmatrix}$

Las frecuencias de oscilación ω_n

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La condición $\det\left|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right| = 0$, implica
$$\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$

Las frecuencias de oscilación ω_n

- La condición $\det\left|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right| = 0$, implica
$$\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$
- La ecuación característica cúbica para ω_n, es
$$\left(k-\omega^2 m\right)\left[\left(2k-\omega^2 M\right)\left(k-\omega^2 m\right) - k^2\right] - k^2\left(k-\omega^2 m\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2\left(k-\omega^2 m\right)\left[k(M+2m) - \omega^2 Mm\right] = 0$$

Las frecuencias de oscilación ω_n

- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$, implica
$$\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$
- La ecuación característica cúbica para ω_n, es
$$\left(k-\omega^2 m\right)\left[\left(2k-\omega^2 M\right)\left(k-\omega^2 m\right)-k^2\right]-k^2\left(k-\omega^2 m\right)=0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2\left(k-\omega^2 m\right)\left[k(M+2m)-\omega^2 Mm\right]=0$$
- Con soluciones $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n,

$$
\begin{array}{lrcl}
i = 1: & \left(k - \omega_n^2 m\right) a_1 - k a_2 & = & 0 \\
i = 2: & -k a_1 + \left(2k - \omega_n^2 M\right) a_2 - k a_3 & = & 0 \\
i = 3: & -k a_2 + \left(k - \omega_n^2 m\right) a_3 & = & 0
\end{array}
$$

Modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$

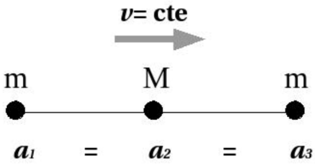
- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n,

$$
\begin{array}{lrcl}
i = 1: & \left(k - \omega_n^2 m\right) a_1 - k a_2 & = & 0 \\
i = 2: & -k a_1 + \left(2k - \omega_n^2 M\right) a_2 - k a_3 & = & 0 \\
i = 3: & -k a_2 + \left(k - \omega_n^2 m\right) a_3 & = & 0
\end{array}
$$

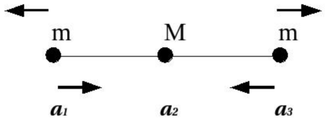
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 = \text{ cte } \Rightarrow$ reposo o velocidad constante

Modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n,
$$\begin{array}{llcl} i=1: & \left(k-\omega_n^2 m\right)a_1 - ka_2 & = & 0 \\ i=2: & -ka_1 + \left(2k-\omega_n^2 M\right)a_2 - ka_3 & = & 0 \\ i=3: & -ka_2 + \left(k-\omega_n^2 m\right)a_3 & = & 0 \end{array}$$
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 = \text{ cte } \Rightarrow$ reposo o velocidad constante
- Entonces para $\omega_1 = 0$, tenemos $a_1(\omega_1) = a_2(\omega_1) = a_3(\omega_1)$

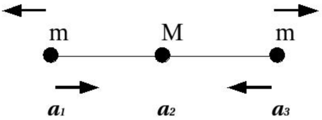


- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
  Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$

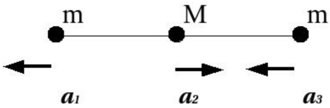


Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
  Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$

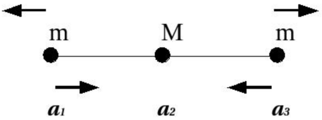


- Ahora para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$,
  Tenemos $a_1(\omega_3) = a_3(\omega_3)$ y $a_2(\omega_3) = \frac{k - \omega_3^2 m}{k} a_1(\omega_3) \equiv -\frac{2m}{M} a_1(\omega_3)$

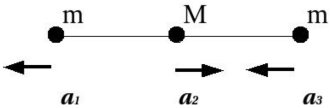


Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
  Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$



- Ahora para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$,
  Tenemos $a_1(\omega_3) = a_3(\omega_3)$ y $a_2(\omega_3) = \frac{k - \omega_3^2 m}{k} a_1(\omega_3) \equiv -\frac{2m}{M} a_1(\omega_3)$



- Los modos normales reflejan que el momento lineal total de la molécula es constante, puesto que la fuerza externa total sobre la molécula es cero.

Recapitulando

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$

Recapitulando

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$

Recapitulando

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$

Recapitulando

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$

Recapitulando

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$
- Las soluciones generales son: $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n(t), \quad \ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$

Recapitulando

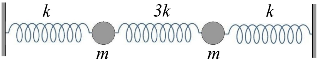
- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$
- Las soluciones generales son: $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n(t), \quad \ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$
- Dos Osciladores Acoplados
  - $T = \frac{1}{2} m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$, y $V = \frac{1}{2} k[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2]$
  - con las frecuencias normales: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

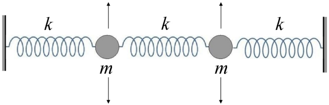
Recapitulando

- Formulación general de pequeñas oscilaciones: $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0$
- Para soluciones $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$, obtenemos: $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0$
- Con soluciones no triviales a partir de $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$
- Se obtiene los autovalores ω_n y autovectores $a_j(\omega_n)$
- Las soluciones generales son: $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n(t), \quad \ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$
- Dos Osciladores Acoplados
  - $T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$, y $V = \frac{1}{2}k[\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + \eta_2^2]$
  - con las frecuencias normales: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$
- La molécula de CO_2
  - Sistema lineal O?C?O: 3 masas, 2 resortes.
  - Tres modos normales: $\omega_1 = 0$: traslación; $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: O–C en oposición de fase; $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}(1 + 2m/M)}$: O–C en fase.

Para la discusión

1. Encuentre las frecuencias y las configuraciones de los modos normales correspondientes a pequeñas oscilaciones longitudinales del sistema de dos masas y tres resortes.





2. Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones transversales de un sistema formado por dos masas m, conectadas entre sí y a las paredes por resortes horizontales de constante k cada uno.