Dinámica Hamiltoniana

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

5 de noviembre de 2024

Agenda

1. Entre Lagrange y Hamilton
   - La idea lagrangiana
   - La idea hamiltoniana
   - Velocidades generalizada y momentos conjugados
2. El esquema Hamiltoniano
   - Del lagrangeano al hamiltoniano
   - El oscilador armónico
   - Partícula moviéndose en cono vertical

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$.

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$.
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right), i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$.
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las $2n$ condiciones iniciales: los valores de las coordenadas q_s y velocidades $\dot{q}_s$ para un instante particular t_0.

La idea lagrangiana

- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right), i = 1, 2, \ldots, s$, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$.
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las $2n$ condiciones iniciales: los valores de las coordenadas q_s y velocidades $\dot{q}_s$ para un instante particular t_0.
- El movimiento se representa geométricamente mediante una trayectoria en el espacio de configuración n-dimensional descrito por las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de $2n$ dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes q_i y p_i.

La idea hamiltoniana

- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p_i, q_i), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos conjugados p_i.
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de $2n$ dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes q_i y p_i.
- La importancia del formalismo hamiltoniano radica en que proporciona un método potente, general y flexible para la investigación de las cuestiones estructurales más profundas de la mecánica clásica y también en que sirve de fundamento a la mecánica cuántica y a la mecánica estadística.

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i$, $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i$, $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las q_i y s_i de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.

- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de $2n$ ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables $s_i = \dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tratando $q_1, \ldots, q_n$ y $s_1, \ldots, s_n$ como variables independientes.
- Es decir $\dot{q}_i = s_i, \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$, donde $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$ es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las q_i y s_i de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.
- Bajar el orden del sistema de ecuaciones dinámicas, se consigue describiendo la evolución del sistema mediante $2n$, cantidades: las posiciones $q_1, \ldots, q_n$ y los momentos conjugados $p_1, \ldots, p_n$, definidos por $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n$.

Del lagrangeano al hamiltoniano

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $H(q, p, t)$ como generador de la dinámica.

Del lagrangeano al hamiltoniano

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $H(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $H(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
- Las ecuaciones dinámicas serán $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n$

Del lagrangeano al hamiltoniano

- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables $(q_i, \dot{q}_i)$ por (q_i, p_i) en todas las magnitudes mecánicas y sustituir la función el Lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ por $H(q, p, t)$ como generador de la dinámica.
- Definimos $H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$ como la transformación de Legendre del lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. En el lado derecho las velocidades se expresan como $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
- Las ecuaciones dinámicas serán $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n$
- El planteamiento hamiltoniano de la dinámica implica los siguientes pasos
  - Fija las coordenadas generalizadas y construye el lagrangeano a partir de las energías cinética y potencial
  - Expresa la velocidades generalizadas en término de los momentos canónicos conjungados $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$.
  - Construye el Hamiltoniano a partir de la transformación de Legendre del Lagrangeano
  - Plantea las ecuaciones dinámicas de Hamilton

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $H(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $H(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$

El oscilador armónico

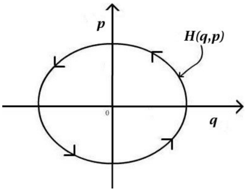
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $H(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $H(q, p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $H(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$
- Con solución $q(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$, es decir $p(t) = m\dot{q} = Am\omega\cos(\omega t + \varphi)$

El oscilador armónico

- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un momento conjugado: $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es $H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$, es decir $H(q,p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ y $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$
- Con solución $q(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$, es decir $p(t) = m\dot{q} = Am\omega\cos(\omega t + \varphi)$
- El Hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \text{cte}$ Una elipse en el espacio de fase



Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \cot \alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2 \alpha - \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha$.
  Es decir $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2\alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \csc^2\alpha - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr\cot\alpha$. Es decir $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m\csc^2\alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$; $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} =$cte y $\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg\cot\alpha$

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha - \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cot\alpha$. Es decir $H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m\csc^2\alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$; $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} =$cte y $\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg\cot\alpha$
- Adicionalmente, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) =$ cte.

Partícula moviéndose en cono vertical

- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$ y $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como $\dot{r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$ y $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es $H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha - \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cot\alpha.$ Es decir $H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m\csc^2\alpha} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$; $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m\csc^2\alpha}$; $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} =$cte y $\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - mg\cot\alpha$
- Adicionalmente, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \text{cte}.$
- La función $H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) = \text{cte}$ describe una hipersuperficie 3-dimensional en el espacio de fase 4-dimensional $(r,\varphi,p_r,p_\varphi)$.