

# Estabilidad y Precesión de Órbitas

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



27 de marzo de 2025

- 1 Estabilidad de órbitas circulares
- 2 Perturbaciones  $r = r_0 + \eta$
- 3 Oscilaciones radiales
- 4 Estabilidad para  $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$
- 5 Precesión
- 6 Precesión de orbitas planetarias
- 7 Orbitas Cerradas
- 8 Precesión para  $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$
- 9 Recapitulando
- 10 Para la discusión

- Sea radio  $r_0$  de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

- Sea radio  $r_0$  de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$

- Sea radio  $r_0$  de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple  $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$

- Sea radio  $r_0$  de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple  $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio  $r_0$  es  $F(r_0) = - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} = - \frac{L^2}{\mu r_0^3}$

- Sea radio  $r_0$  de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple  $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio  $r_0$  es  $F(r_0) = - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} = - \frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual  $- \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{3F(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0$

- Sea radio  $r_0$  de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple  $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio  $r_0$  es  $F(r_0) = - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} = - \frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual  $- \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{3F(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0$
- En general para fuerzas de la forma  $F(r) = -kr^n (k > 0)$ , la condición de estabilidad se cumple para  $n > -3$



- Sea radio  $r_0$  de una órbita circular descrita por una partícula sujeta a un potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces, un mínimo es  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0$
- y un verdadero mínimo cumple  $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{r_0} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} > 0$
- La fuerza central atractiva sobre una partícula en la órbita circular de radio  $r_0$  es  $F(r_0) = - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r_0} = - \frac{L^2}{\mu r_0^3}$
- con lo cual  $- \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r_0} - \frac{3F(r_0)}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0$
- En general para fuerzas de la forma  $F(r) = -kr^n (k > 0)$ , la condición de estabilidad se cumple para  $n > -3$
- La fuerza gravitacional ( $n = -2$ ) y la fuerza de un resorte ( $n = 1$ ) producen órbitas circulares estables.

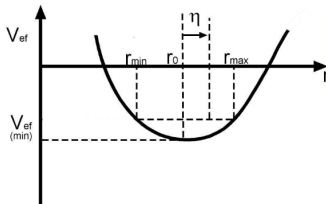
# Perturbaciones $r = r_0 + \eta$

- Supongamos que la energía de la partícula es  $E > V_{\text{ef}}(r_0)$ , donde  $r_0$  es el radio de la órbita circular estable.





- Supongamos que la energía de la partícula es  $E > V_{\text{ef}}(r_0)$ , donde  $r_0$  es el radio de la órbita circular estable.
- Consideremos una oscilación radial de pequeña amplitud  $\eta$  alrededor del radio de la órbita circular  $r_0$ . Esto es  $r = r_0 + \eta$ , con  $\eta/r_0 \ll 1$



- Desarrollamos por Taylor de la función  $V_{\text{ef}}(r)$  alrededor de  $r_0$ , y tenemos  $V_{\text{ef}}(r) = V_{\text{ef}}(r_0) + \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \Big|_{r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} (r - r_0)^2 + \dots$
- El primer término es una constante,  $V_{\text{ef}}(r_0) = \text{cte}$ , y puede ser suprimido el segundo término se anula por ser un mínimo.

- A segundo orden  $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} (r - r_0)^2 + \dots \approx \frac{1}{2} K \eta^2$ , con  
$$K \equiv \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} = \text{cte}$$

- A segundo orden  $V_{\text{ef}}(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} (r - r_0)^2 + \dots \approx \frac{1}{2} K \eta^2$ , con
$$K \equiv \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} = \text{cte}$$
- La ecuación de movimiento radial,  $\mu \ddot{r} = f_{\text{ef}}(r)$  para  $r = r_0 + \eta$  resulta
$$\ddot{\eta} + \omega_r^2 \eta = 0$$

- 
- A diagram of a cell with a dashed circular boundary. Three radii are shown from the center to the boundary:  $r_0$  (dashed line),  $r_{\max}$  (solid line), and  $r_{\min}$  (solid line). The cell's actual boundary is a solid line with wavy protrusions and indentations.



# Estabilidad para $V(r) = \frac{-k}{r}e^{-(r/a)}$

Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial  $V(r) = \frac{-k}{r}e^{-(r/a)}$  donde  $k > 0$  y  $a > 0$ .

- Es el potencial de Coulomb apantallado (cuando  $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$ , donde  $Z$  es el número atómico y  $e$  es la carga del electrón)

# Estabilidad para $V(r) = \frac{-k}{r}e^{-(r/a)}$

Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial  $V(r) = \frac{-k}{r}e^{-(r/a)}$  donde  $k > 0$  y  $a > 0$ .

- Es el potencial de Coulomb apantallado (cuando  $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$ , donde  $Z$  es el número atómico y  $e$  es la carga del electrón)
- disminuye con la distancia más rápidamente que  $1/r$ . Por tanto, aproxima el potencial electrostático del núcleo atómico en las proximidades del núcleo teniendo en cuenta la «cancelación» parcial o el «apantallamiento» de la carga nuclear por los electrones atómicos.

# Estabilidad para $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$

Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial  $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$  donde  $k > 0$  y  $a > 0$ .

- Es el potencial de Coulomb apantallado (cuando  $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$ , donde  $Z$  es el número atómico y  $e$  es la carga del electrón)
- disminuye con la distancia más rápidamente que  $1/r$ . Por tanto, aproxima el potencial electrostático del núcleo atómico en las proximidades del núcleo teniendo en cuenta la «cancelación» parcial o el «apantallamiento» de la carga nuclear por los electrones atómicos.
- la fuerza será  $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -k \left( \frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-(r/a)}$

# Estabilidad para $V(r) = \frac{-k}{r}e^{-(r/a)}$

Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial  $V(r) = \frac{-k}{r}e^{-(r/a)}$  donde  $k > 0$  y  $a > 0$ .

- Es el potencial de Coulomb apantallado (cuando  $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$ , donde  $Z$  es el número atómico y  $e$  es la carga del electrón)
- disminuye con la distancia más rápidamente que  $1/r$ . Por tanto, aproxima el potencial electrostático del núcleo atómico en las proximidades del núcleo teniendo en cuenta la «cancelación» parcial o el «apantallamiento» de la carga nuclear por los electrones atómicos.
- la fuerza será  $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -k \left( \frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-(r/a)}$
- con lo cual  $\frac{\partial f}{\partial r} = k \left( \frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{ar^2} + \frac{2}{r^3} \right) e^{-(r/a)}$

# Estabilidad para $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$

Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial  $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$  donde  $k > 0$  y  $a > 0$ .

- Es el potencial de Coulomb apantallado (cuando  $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$ , donde  $Z$  es el número atómico y  $e$  es la carga del electrón)
- disminuye con la distancia más rápidamente que  $1/r$ . Por tanto, aproxima el potencial electrostático del núcleo atómico en las proximidades del núcleo teniendo en cuenta la «cancelación» parcial o el «apantallamiento» de la carga nuclear por los electrones atómicos.
- la fuerza será  $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -k \left( \frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-(r/a)}$
- con lo cual  $\frac{\partial f}{\partial r} = k \left( \frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{ar^2} + \frac{2}{r^3} \right) e^{-(r/a)}$
- la condición de estabilidad es  $\frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0 \Rightarrow 3 + \frac{r_0 f'(r_0)}{f(r_0)} > 0$

# Estabilidad para $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$

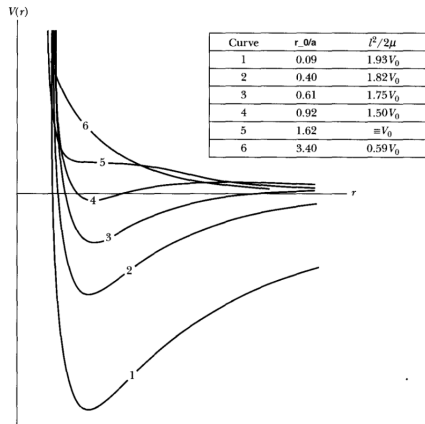
Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial  $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$  donde  $k > 0$  y  $a > 0$ .

- Es el potencial de Coulomb apantallado (cuando  $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$ , donde  $Z$  es el número atómico y  $e$  es la carga del electrón)
- disminuye con la distancia más rápidamente que  $1/r$ . Por tanto, aproxima el potencial electrostático del núcleo atómico en las proximidades del núcleo teniendo en cuenta la «cancelación» parcial o el «apantallamiento» de la carga nuclear por los electrones atómicos.
- la fuerza será  $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -k \left( \frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-(r/a)}$
- con lo cual  $\frac{\partial f}{\partial r} = k \left( \frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{ar^2} + \frac{2}{r^3} \right) e^{-(r/a)}$
- la condición de estabilidad es  $\frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0 \Rightarrow 3 + \frac{r_0 f'(r_0)}{f(r_0)} > 0$
- Por lo tanto:  $3 + \frac{r_0 k \left( \frac{1}{a^2 r_0} + \frac{2}{ar_0^2} + \frac{2}{r_0^3} \right)}{-k \left( \frac{1}{ar_0} + \frac{1}{r_0^2} \right)} > 0 \Rightarrow \frac{a^2}{r_0^2} + \frac{a}{r_0} - 1 > 0$

# Estabilidad para $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$

Investigar la estabilidad de órbitas circulares descritas por el potencial  $V(r) = \frac{-k}{r} e^{-(r/a)}$  donde  $k > 0$  y  $a > 0$ .

- Es el potencial de Coulomb apantallado (cuando  $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$ , donde  $Z$  es el número atómico y  $e$  es la carga del electrón)
- disminuye con la distancia más rápidamente que  $1/r$ . Por tanto, aproxima el potencial electrostático del núcleo atómico en las proximidades del núcleo teniendo en cuenta la «cancelación» parcial o el «apantallamiento» de la carga nuclear por los electrones atómicos.
- la fuerza será  $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -k \left( \frac{1}{ar} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-(r/a)}$
- con lo cual  $\frac{\partial f}{\partial r} = k \left( \frac{1}{a^2 r} + \frac{2}{ar^2} + \frac{2}{r^3} \right) e^{-(r/a)}$
- la condición de estabilidad es  $\frac{3f(r_0)}{r_0} + f'(r_0) < 0 \Rightarrow 3 + \frac{r_0 f'(r_0)}{f(r_0)} > 0$
- Por lo tanto:  $3 + \frac{r_0 k \left( \frac{1}{a^2 r_0} + \frac{2}{ar_0^2} + \frac{2}{r_0^3} \right)}{-k \left( \frac{1}{ar_0} + \frac{1}{r_0^2} \right)} > 0 \Rightarrow \frac{a^2}{r_0^2} + \frac{a}{r_0} - 1 > 0$
- Entonces,  $q^2 + q - 1 = 0$ , con  $q \equiv a/r_0$ , solución  $q = \frac{a}{r_0} \gtrsim 0,62$





- El ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial  $T_r$ .

- El ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial  $T_r$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \dot{\theta} T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$ , y como  $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$ ,

- El ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial  $T_r$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \dot{\theta} T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$ , y como  $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$ ,
- tenemos  $\Delta\theta = 2\pi \frac{L}{\mu r_0^2} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} \right)^{-1/2}$

- El ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es el recorrido por la dirección del perihelio en el plano del movimiento durante un período de oscilación radial  $T_r$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \dot{\theta} T_r = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$ , y como  $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0^2}$ ,
- tenemos  $\Delta\theta = 2\pi \frac{L}{\mu r_0^2} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \Big|_{r_0} \right)^{-1/2}$
- La dirección del perihelio  $r_{\text{mín}}$  cambia en un ángulo  $\Delta\theta$  durante la precesión de la órbita.

-

Figure

## Precessional Rates Of Planetary Perihelia

	Planet	Observed (arcseconds/century)	Newtonian Calculated (arcseconds/century)	General Relativity Contribution (arcseconds/century)
1	Mercury	575.31	531.63	43.0
2	Venus	204.52	204.44	8.6
3	Earth	100.29	100.03	3.83
4	Mars	53.49	53.07	1.35
5	Jupiter	11.73	11.55	0.07
6	Saturn	6.62	6.54	0.014
7	Uranus	2.02	2.0	0.0004
8	Neptune	0.7	0.67	
9	Pluto	0.4		

- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.

- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.
- Se cierra si el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es múltiplo racional de  $2\pi$ .



- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.
- Se cierra si el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es múltiplo racional de  $2\pi$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \left(\frac{m}{n}\right) 2\pi$ , con  $m, n$ , enteros,  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_r = mT_\theta$

- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.
- Se cierra si el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es múltiplo racional de  $2\pi$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \left(\frac{m}{n}\right) 2\pi$ , con  $m, n$ , enteros,  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_r = mT_\theta$
- Después de  $n$  períodos radiales ( $r_{\text{mín}} \rightarrow r_{\text{máx}} \rightarrow r_{\text{mín}}$ ), el perihelio completa  $m$  revoluciones ( $m2\pi$ ) y la órbita se cierra.

- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.
- Se cierra si el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es múltiplo racional de  $2\pi$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \left(\frac{m}{n}\right) 2\pi$ , con  $m, n$ , enteros,  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_r = mT_\theta$
- Después de  $n$  períodos radiales ( $r_{\text{mín}} \rightarrow r_{\text{máx}} \rightarrow r_{\text{mín}}$ ), el perihelio completa  $m$  revoluciones ( $m2\pi$ ) y la órbita se cierra.
- Si  $\dot{\theta}/\omega_r$  es un número irracional, la órbita resultante se denomina cuasiperiódica y nunca se cierra.

- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.
- Se cierra si el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es múltiplo racional de  $2\pi$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \left(\frac{m}{n}\right) 2\pi$ , con  $m, n$ , enteros,  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_r = mT_\theta$
- Después de  $n$  períodos radiales ( $r_{\text{mín}} \rightarrow r_{\text{máx}} \rightarrow r_{\text{mín}}$ ), el perihelio completa  $m$  revoluciones ( $m2\pi$ ) y la órbita se cierra.
- Si  $\dot{\theta}/\omega_r$  es un número irracional, la órbita resultante se denomina cuasiperiódica y nunca se cierra.
- El ángulo  $\theta$  en función de  $r$  puede calcularse

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} + \theta_0 \Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{2L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)}}$$

- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.
- Se cierra si el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es múltiplo racional de  $2\pi$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \left(\frac{m}{n}\right) 2\pi$ , con  $m, n$ , enteros,  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_r = mT_\theta$
- Después de  $n$  períodos radiales ( $r_{\text{mín}} \rightarrow r_{\text{máx}} \rightarrow r_{\text{mín}}$ ), el perihelio completa  $m$  revoluciones ( $m2\pi$ ) y la órbita se cierra.
- Si  $\dot{\theta}/\omega_r$  es un número irracional, la órbita resultante se denomina cuasiperiódica y nunca se cierra.
- El ángulo  $\theta$  en función de  $r$  puede calcularse
$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} + \theta_0 \Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{2L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)}}$$
- El ángulo de precesión  $\Delta\theta$  depende del potencial central  $V(r)$

- Una órbita finita, con  $r \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ , es cerrada si las coordenadas  $r$  y  $\theta$  se repiten periódicamente.
- Se cierra si el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  es múltiplo racional de  $2\pi$ .
- Esto es  $\Delta\theta = \left(\frac{m}{n}\right) 2\pi$ , con  $m, n$ , enteros,  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = \frac{m}{n} \Rightarrow nT_r = mT_\theta$
- Después de  $n$  períodos radiales ( $r_{\text{mín}} \rightarrow r_{\text{máx}} \rightarrow r_{\text{mín}}$ ), el perihelio completa  $m$  revoluciones ( $m2\pi$ ) y la órbita se cierra.
- Si  $\dot{\theta}/\omega_r$  es un número irracional, la órbita resultante se denomina cuasiperiódica y nunca se cierra.

- El ángulo  $\theta$  en función de  $r$  puede calcularse

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} + \theta_0 \Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{2L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)}}$$

- El ángulo de precesión  $\Delta\theta$  depende del potencial central  $V(r)$
- **Teorema de Bertrand** Las únicas formas funcionales de potenciales centrales  $V(r)$  que producen órbitas cerradas son  $V(r) \propto \frac{1}{r}$  (gravitacional) y  $V(r) \propto r^2$  (oscilador armónico).

# Precesión para $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$

Calcular el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  para oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio  $r_0$  para una partícula en el potencial  $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$ , donde  $g(r)$  es una función de  $r$  y  $k = \text{cte}$ .

- El potencial efectivo es  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = g(r) - \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

# Precesión para $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$

Calcular el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  para oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio  $r_0$  para una partícula en el potencial  $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$ , donde  $g(r)$  es una función de  $r$  y  $k = \text{cte}$ .

- El potencial efectivo es  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = g(r) - \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = g'(r_0) + \frac{k}{r_0^2} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0 \Rightarrow L^2 = \mu (g'(r_0)r_0^3 + kr_0)$



# Precesión para $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$

Calcular el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  para oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio  $r_0$  para una partícula en el potencial  $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$ , donde  $g(r)$  es una función de  $r$  y  $k = \text{cte}$ .

- El potencial efectivo es  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = g(r) - \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = g'(r_0) + \frac{k}{r_0^2} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0 \Rightarrow L^2 = \mu (g'(r_0)r_0^3 + kr_0)$
- La frecuencia radial es  $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{\mu} \left( g''(r_0) - \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} \right)$

# Precesión para $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$

Calcular el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  para oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio  $r_0$  para una partícula en el potencial  $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$ , donde  $g(r)$  es una función de  $r$  y  $k = \text{cte}$ .

- El potencial efectivo es  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = g(r) - \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = g'(r_0) + \frac{k}{r_0^2} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0 \Rightarrow L^2 = \mu (g'(r_0)r_0^3 + kr_0)$
- La frecuencia radial es  $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{\mu} \left( g''(r_0) - \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} \right)$
- Con  $L^2$  tendremos  $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left[ g''(r_0) - \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3}{r_0^4} (g'(r_0)r_0^3 + kr_0) \right] = \frac{1}{\mu} \left( g''(r_0) + \frac{3}{r_0} g'(r_0) + \frac{k}{r_0^3} \right)$

# Precesión para $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$

Calcular el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  para oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio  $r_0$  para una partícula en el potencial  $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$ , donde  $g(r)$  es una función de  $r$  y  $k = \text{cte}$ .

- El potencial efectivo es  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = g(r) - \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = g'(r_0) + \frac{k}{r_0^2} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0 \Rightarrow L^2 = \mu (g'(r_0)r_0^3 + kr_0)$
- La frecuencia radial es  $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{\mu} \left( g''(r_0) - \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} \right)$
- Con  $L^2$  tendremos  $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left[ g''(r_0) - \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3}{r_0^4} (g'(r_0)r_0^3 + kr_0) \right] = \frac{1}{\mu} \left( g''(r_0) + \frac{3}{r_0} g'(r_0) + \frac{k}{r_0^3} \right)$
- Además la velocidad angular es  $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_0^2} = \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{g'(r_0)}{r_0} + \frac{k}{r_0^3} \right) \right]^{1/2}$

# Precesión para $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$

Calcular el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  para oscilaciones radiales alrededor de una órbita circular de radio  $r_0$  para una partícula en el potencial  $V(r) = g(r) - \frac{k}{r}$ , donde  $g(r)$  es una función de  $r$  y  $k = \text{cte}$ .

- El potencial efectivo es  $V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = g(r) - \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$
- Entonces  $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial r} \right|_{r_0} = g'(r_0) + \frac{k}{r_0^2} - \frac{L^2}{\mu r_0^3} = 0 \Rightarrow L^2 = \mu (g'(r_0)r_0^3 + kr_0)$
- La frecuencia radial es  $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{\mu} \left( g''(r_0) - \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3L^2}{\mu r_0^4} \right)$
- Con  $L^2$  tendremos  $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left[ g''(r_0) - \frac{2k}{r_0^3} + \frac{3}{r_0^4} (g'(r_0)r_0^3 + kr_0) \right] = \frac{1}{\mu} \left( g''(r_0) + \frac{3}{r_0} g'(r_0) + \frac{k}{r_0^3} \right)$
- Además la velocidad angular es  $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_0^2} = \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{g'(r_0)}{r_0} + \frac{k}{r_0^3} \right) \right]^{1/2}$
- El ángulo de precesión es  $\Delta\theta = 2\pi \left( \frac{\dot{\theta}}{\omega_r} \right) = 2\pi \left( \frac{g'(r_0)r_0^2 + k}{g''(r_0)r_0^3 + 3g'(r_0)r_0^2 + k} \right)^{1/2}$

- **Estabilidad de órbitas circulares:**

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0} > 0$$

- **Estabilidad de órbitas circulares:**

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0} > 0$$

- **Perturbaciones radiales:** Para  $r = r_0 + \eta \Rightarrow \ddot{\eta} + \omega_r^2 \eta = 0$ , entonces

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0}$$

- **Estabilidad de órbitas circulares:**

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0} > 0$$

- **Perturbaciones radiales:** Para  $r = r_0 + \eta \Rightarrow \ddot{\eta} + \omega_r^2 \eta = 0$ , entonces

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0}$$

- **Potencial apantallado:**  $V(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a} \Rightarrow \frac{a}{r_0} \gtrsim 0,62$

- **Estabilidad de órbitas circulares:**

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0} > 0$$

- **Perturbaciones radiales:** Para  $r = r_0 + \eta \Rightarrow \ddot{\eta} + \omega_r^2 \eta = 0$ , entonces

$$\omega_r^2 = \left. \frac{1}{\mu} \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0}$$

- **Potencial apantallado:**  $V(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a} \Rightarrow \frac{a}{r_0} \gtrsim 0,62$

- **Precesión orbital:**  $\Delta\theta = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = 2\pi \left( \frac{L}{\mu r_0^2 \omega_r} \right)$



- **Estabilidad de órbitas circulares:**

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0} > 0$$

- **Perturbaciones radiales:** Para  $r = r_0 + \eta \Rightarrow \ddot{\eta} + \omega_r^2 \eta = 0$ , entonces

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{d^2 V_{\text{ef}}}{dr^2} \right|_{r_0}$$

- **Potencial apantallado:**  $V(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a} \Rightarrow \frac{a}{r_0} \gtrsim 0,62$

- **Precesión orbital:**  $\Delta\theta = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r} = 2\pi \left( \frac{L}{\mu r_0^2 \omega_r} \right)$

- **Órbitas cerradas:** Solo se obtienen con  $V(r) \propto \frac{1}{r}$  y  $V(r) \propto r^2$  (Teorema de Bertrand).

## Estabilidad y Precesión en un Potencial Central

Una partícula de masa  $\mu$  se mueve bajo la influencia del potencial central, de Coulomb modificado con una corrección repulsiva de corto alcance:

$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\lambda}{r^2}$ , donde  $k > 0$  y  $\lambda > 0$  son constantes.

- Calcular el potencial efectivo  $V_{\text{ef}}(r)$  para este sistema.
- Encontrar la condición para una órbita circular en el radio  $r_0$ .
- Determinar la condición bajo la cual esta órbita es estable.
- Calcular el ángulo de precesión  $\Delta\theta$  del perihelio por periodo radial.
- Determine si la órbita precesa hacia delante ( $\Delta\theta > 2\pi$ ) o hacia atrás ( $\Delta\theta < 2\pi$ ).