## Simetrías y Cantidades Conservadas

#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



18 de febrero de 2025

## Agenda



- Variables conjugadas y cíclicas
  - Ejemplo: Partícula cono invertido
  - Ejemplo: Partícula en medio viscoso
- Teorema de Noether
  - Transformaciones contínuas
  - Ejemplo: Coordenada cíclica
  - Ejemplo: Partícula en campo gravitatorio
- 3 Homogeneidad del espacio y conservación del momento lineal
- 4 Isotropía del espacio y conservación del momento angular
  - Ejemplo: Oscilador armónico bidimensional
- 5 Homogeneidad del tiempo y conservación de la energía
- $oldsymbol{6}$  Energía y Potenciales dependientes de las velocidades  $V=V(q_j,\dot{q}_j,)$
- Recapitulando



• Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ , se define el momento conjugado,  $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$  asociado a la coordenada generalizada  $q_i$ . También llamado momento canónico.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano  $\mathcal{L}\left(q_{j},\dot{q}_{j},t\right)$ , se define el momento conjugado,  $p_{j}\left(q_{j},\dot{q}_{j},t\right)\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{j}}$  asociado a la coordenada generalizada  $q_{j}$ . También llamado momento canónico.
- El  $p_j$  no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ , se define el momento conjugado,  $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$  asociado a la coordenada generalizada  $q_i$ . También llamado momento canónico.
- El  $p_j$  no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano  $\mathcal{L}$  de un sistema no contiene explícitamente una coordenada  $q_i$  (puede contener  $\dot{q}_i$  y t), se dice que  $q_i$  es una coordenada cíclica o ignorable.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ , se define el momento conjugado,  $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$  asociado a la coordenada generalizada  $q_i$ . También llamado momento canónico.
- El  $p_j$  no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano  $\mathcal{L}$  de un sistema no contiene explícitamente una coordenada  $q_i$  (puede contener  $\dot{q}_i$  y t), se dice que  $q_i$  es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado  $p_i$  asociado a una coordenada cíclica,  $q_i$ , es constante. Luego, la cantidad  $p_i\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)$  es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ , se define el momento conjugado,  $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$  asociado a la coordenada generalizada  $q_i$ . También llamado momento canónico.
- El  $p_j$  no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano  $\mathcal{L}$  de un sistema no contiene explícitamente una coordenada  $q_i$  (puede contener  $\dot{q}_i$  y t), se dice que  $q_i$  es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado  $p_i$  asociado a una coordenada cíclica,  $q_i$ , es constante. Luego, la cantidad  $p_i\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)$  es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.
- Si una coordenada  $q_i$  es cíclica, entonces  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , y la ecuación de Lagrange para esa coordenada cíclica  $q_i$  es  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow p_i = \mathrm{cte}$ .







• Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



• Su Lagrangeano es  $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$ 





- Su Lagrangeano es  $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) mgr\cot\alpha$
- La coordenada  $\varphi$  es cíclica. El momento conjugado  $p_{\varphi}$  asociado con la coordenada angular  $\varphi$  es constante,  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{ cte }.$





- Su Lagrangeano es  $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) mgr\cot\alpha$
- La coordenada  $\varphi$  es cíclica. El momento conjugado  $p_{\varphi}$  asociado con la coordenada angular  $\varphi$  es constante,  $p_{\varphi}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=$  cte .
- El momento angular de la partícula,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$





- Su Lagrangeano es  $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) mgr\cot\alpha$
- La coordenada  $\varphi$  es cíclica. El momento conjugado  $p_{\varphi}$  asociado con la coordenada angular  $\varphi$  es constante,  $p_{\varphi}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=$  cte .
- El momento angular de la partícula,  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$
- La componente z es  $\mathcal{L}_z = m(x\dot{y} y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} \equiv p_{\varphi} = \mathrm{cte},$ ya que  $\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, & \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\mathrm{sen}\,\varphi \\ y &= r\mathrm{sen}\,\varphi, & \dot{y} &= \dot{r}\mathrm{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned}$







• Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  en un medio viscoso, con coeficiente de fricción  $\alpha$ .

$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \\
\mathbf{0}
\end{array}$$

• Se mueve en la dirección x, de modo que  $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$ 



$$F = -\alpha \mathbf{v}$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{v}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que  $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e.,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ . El momento conjugado  $p_x$  es constante,  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ .



$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \\
\mathbf{0} \\
\end{array}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e.,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ . El momento conjugado  $p_x$  es constante,  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ .
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal  $p = mv_x(t)$ , que no es constante.



$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \\
\mathbf{0} \\
\downarrow \\
\mathbf{v}
\end{array}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e.,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ . El momento conjugado  $p_x$  es constante,  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ .
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal  $p = mv_x(t)$ , que no es constante.
- La posición es  $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$



$$0 | \xrightarrow{\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e.,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ . El momento conjugado  $p_x$  es constante,  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ .
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal  $p = mv_x(t)$ , que no es constante.
- La posición es  $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuación de movimiento,  $m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}$



$$\begin{array}{c|c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \mathbf{v}
\end{array}$$

- Se mueve en la dirección x, de modo que  $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cíclica, i.e.,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ . El momento conjugado  $p_x$  es constante,  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_x(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ .
- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal  $p = mv_x(t)$ , que no es constante.
- La posición es  $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} (1 e^{-(\alpha/m)t})$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuación de movimiento,  $m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}$
- Que es la Segunda Ley de Newton para la componente x de la fuerza  $\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}$  ejercida por el fluido sobre la Partícula.

#### Teorema de Noether



• Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano  $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$  que no modifica las ecuaciones de movimiento.

#### Teorema de Noether



- Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano  $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$  que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformación infinitesimal representa una simetría del sistema, una simetría de la acción y se dice que la acción es invariante bajo esa transformación.

### Teorema de Noether



- Consideremos una transformación infinitesimal del Lagrangiano  $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$  que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformación infinitesimal representa una simetría del sistema, una simetría de la acción y se dice que la acción es invariante bajo esa transformación.
- Teorema de Noether en mecánica Clásica
  - Si la acción de un sistema es invariante bajo una transformación infinitesimal de coordenadas  $q'_j = q_j + \delta q_j$  que cambia el Lagrangiano a  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ , tal que  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f(q_j,t)}{\mathrm{d} t}$  para alguna función  $f(q_j,t)$ .
  - Entonces el Lagrangiano (y el sistema)  $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$  posee una simetría y la función  $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j f$  constituye una cantidad conservada asociada a esa transformación.
  - ullet La cantidad  ${\mathcal J}$  se denomina corriente de Noether.



• La transformación  $q_j' = q_j + \delta q_j$  (donde t es fijo,  $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variación  $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$ 



- La transformación  $q_j' = q_j + \delta q_j$  (donde t es fijo,  $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variación  $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a  $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$



- La transformación  $q_j' = q_j + \delta q_j$  (donde t es fijo,  $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variación  $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a  $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación  $\delta \mathcal{L}$  se puede escribir  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ .



- La transformación  $q_j' = q_j + \delta q_j$  (donde t es fijo,  $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variación  $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a  $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación  $\delta \mathcal{L}$  se puede escribir  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ .
- Luego  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left( q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$   $\mathcal{J} \left( q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$



- La transformación  $q_j' = q_j + \delta q_j$  (donde t es fijo,  $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variación  $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a  $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación  $\delta \mathcal{L}$  se puede escribir  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ .
- Luego  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left( q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$   $\mathcal{J} \left( q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada



- La transformación  $q_j' = q_j + \delta q_j$  (donde t es fijo,  $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variación  $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a  $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación  $\delta \mathcal{L}$  se puede escribir  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ .
- Luego  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left( q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$   $\mathcal{J} \left( q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetrías y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.



- La transformación  $q_j' = q_j + \delta q_j$  (donde t es fijo,  $\delta t = 0$ ) produce la siguiente variación  $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a  $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Según el teorema, la variación  $\delta \mathcal{L}$  se puede escribir  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ .
- Luego  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left( q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$   $\mathcal{J} \left( q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetría de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetrías y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.
- Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales de segundo orden para las  $q_j$ , mientras que las cantidades conservadas  $\mathcal{J}(q_j,\dot{q}_j,t)=cte$ , son ecuaciones diferenciales de primer orden



• Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua  $q^i(t) o \tilde{q}^i(s,t)$  con  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$ .



- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua  $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$  con  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$ .
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  si  $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t),\dot{q}^i(s,t),t)=0$  y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.



- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua  $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$  con  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$ .
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  si  $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t),\dot{q}^i(s,t),t)=0$  y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0$   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Big|_{s=0}$   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \Rightarrow Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} = cte, \text{ que es la}$ cantidad conservada



- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua  $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$  con  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$ .
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  si  $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t),\dot{q}^i(s,t),t)=0$  y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0$   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Big|_{s=0}$   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \Rightarrow Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} = cte, \text{ que es la cantidad conservada}$
- ullet El teorema de Noether es válido **necesariamente** parametrizadas por un parámetro  $s\in\mathbb{R}$



- Otra manera de ver el Teorema de Noether es contruir una transformación contínua  $q^i(t) \to \tilde{q}^i(s,t)$  con  $s \in \mathbb{R}$ , donde  $\tilde{q}^i(0,t) = q^i(t)$ .
- Esta transformación es una simetría continua del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  si  $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}(q^i(s,t),\dot{q}^i(s,t),t)=0$  y para cada simetría continua existe una cantidad conservada.
- Entonces  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0$   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \Big|_{s=0}$   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) \Rightarrow Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \Big|_{s=0} = cte, \text{ que es la cantidad conservada}$
- ullet El teorema de Noether es válido **necesariamente** parametrizadas por un parámetro  $s\in\mathbb{R}$
- Muchas teorías son invariantes bajo reflexión, también conocida como paridad, que actúa como  $\mathbf{r}_i \to -\mathbf{r}_i$ . Este tipo de simetrías no dan lugar a leyes de conservación en física clásica (aunque sí en física cuántica).

## Coordenada cíclica



• Supongamos que la coordenada  $q_i$  es cíclica,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .

## Coordenada cíclica



- Supongamos que la coordenada  $q_i$  es cíclica,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .
- La transformación de coordenadas  $q_i' = q_i + \delta q_i$ , con  $\delta q_i =$  cte, y  $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$ , para  $i \neq j$ , no produce cambios  $\delta \mathcal{L}$  en el Lagrangiano. Esto es  $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$

#### Coordenada cíclica



- Supongamos que la coordenada  $q_i$  es cíclica,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .
- La transformación de coordenadas  $q_i' = q_i + \delta q_i$ , con  $\delta q_i =$  cte, y  $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$ , para  $i \neq j$ , no produce cambios  $\delta \mathcal{L}$  en el Lagrangiano. Esto es  $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{0} \delta q_i = 0$
- ullet Por otro lado, la función f surge de  $\delta \mathcal{L} = rac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$

#### Coordenada cíclica



- Supongamos que la coordenada  $q_i$  es cíclica,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .
- La transformación de coordenadas  $q_i' = q_i + \delta q_i$ , con  $\delta q_i =$  cte, y  $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$ , para  $i \neq j$ , no produce cambios  $\delta \mathcal{L}$  en el Lagrangiano. Esto es  $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la función f surge de  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada  $\mathcal{J}$  es  $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j f = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i c = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{cte.}$

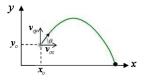
#### Coordenada cíclica



- Supongamos que la coordenada  $q_i$  es cíclica,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para un Lagrangiano  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ .
- La transformación de coordenadas  $q_i' = q_i + \delta q_i$ , con  $\delta q_i =$  cte, y  $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$ , para  $i \neq j$ , no produce cambios  $\delta \mathcal{L}$  en el Lagrangiano. Esto es  $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- ullet Por otro lado, la función f surge de  $\delta \mathcal{L} = rac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada  $\mathcal{J}$  es  $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j f = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i c = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{cte.}$
- El momento conjugado  $p_i$  asociado a  $q_i$  es constante.

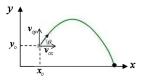


• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$ 





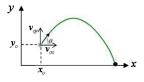
• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$ 



• El cambio en  $\mathcal{L}$  bajo la transformación de coordenadas,  $y' = y + \delta y$ , con  $\delta y =$  cte, es  $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg \delta y$ 



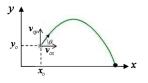
• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$ 



- El cambio en  $\mathcal{L}$  bajo la transformación de coordenadas,  $y' = y + \delta y$ , con  $\delta y =$  cte, es  $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg \delta y$
- Con lo cual  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow \quad f = -mg\,t\,\delta y$



• Consideremos una partícula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$ 



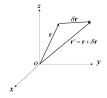
- El cambio en  $\mathcal{L}$  bajo la transformación de coordenadas,  $y' = y + \delta y$ , con  $\delta y =$  cte, es  $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg\delta y$
- Con lo cual  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow f = -mg \, t \, \delta y$
- Con la cantidad conservada  $\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta y f = \text{cte} \Rightarrow m\dot{y}\delta y + mgt\delta y = \text{cte} \Rightarrow \dot{y} + gt = \text{cte}$



• Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones  $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$ , con un Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$ .

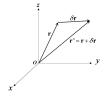


- Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones  $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$ , con un Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$ .
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.





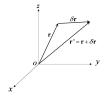
- Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones  $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$ , con un Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$ .
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.



• Supongamos la transformación de coordenadas  $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r}$ , donde  $\delta \mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$  es un vector infinitesimal cuyas componentes  $\delta x_j$  son constantes; i. e.,  $\delta \dot{\mathbf{r}} = 0$ .



- Consideremos un sistema de N Partículas con posiciones  $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$ , con un Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$ .
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades mecánicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una dirección arbitraria del espacio.



- Supongamos la transformación de coordenadas  $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r}$ , donde  $\delta \mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$  es un vector infinitesimal cuyas componentes  $\delta x_j$  son constantes; i. e.,  $\delta \dot{\mathbf{r}} = 0$ .
- Homogeneidad del espacio implica que la transformación infinitesimal no produce cambios en el Lagrangiano del sistema,  $\delta \mathcal{L} = 0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$  implica que f es constante.



• La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} - f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$ 



- La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$



- La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- $\bullet \ \, \mathsf{Donde} \,\, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left( \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como  $\delta \mathbf{r}$  es constante,  $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$



- La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- $\bullet \ \, \mathsf{Donde} \,\, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \equiv \left( \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1 \, \alpha}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2 \, \alpha}, \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3 \, \alpha} \right)$
- Como  $\delta {\bf r}$  es constante,  ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\cal N} {\partial {\cal L} \over \partial \dot{{\bf r}}_{\alpha}} = {
  m cte}$
- ullet La cantidad  ${f P}_{
  m T}$  es el momento lineal total del sistema.



- La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como  $\delta {\bf r}$  es constante,  ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} {\partial {\cal L} \over \partial {\dot {\bf r}}_{\alpha}} = {
  m cte}$
- ullet La cantidad  ${f P}_{
  m T}$  es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas,  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^{2} V\left(\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}, \ldots, \mathbf{r}_{N}\right)$



- La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como  $\delta \mathbf{r}$  es constante,  $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- ullet La cantidad  ${f P}_{
  m T}$  es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas,  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces,  $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$

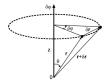


- La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como  $\delta {\bf r}$  es constante,  ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\cal N} {\partial {\cal L} \over \partial \dot{{\bf r}}_{\alpha}} = {
  m cte}$
- ullet La cantidad  ${f P}_{
  m T}$  es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas,  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces,  $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$
- El momento lineal de una partícula es  ${f p}_{lpha}=m_{lpha}{f v}_{lpha}=rac{\partial {\cal L}}{\partial \dot{{f r}}_{lpha}}$



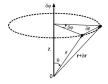
- La corriente conservada es  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como  $\delta {\bf r}$  es constante,  ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\cal N} {\partial {\cal L} \over \partial \dot{{\bf r}}_{\alpha}} = {
  m cte}$
- ullet La cantidad  ${f P}_{
  m T}$  es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energía potencial depende solamente de las coordenadas,  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\right)$
- Entonces,  $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$
- El momento lineal de una partícula es  ${f p}_{lpha}=m_{lpha}{f v}_{lpha}=rac{\partial {\cal L}}{\partial \dot{{f r}}_{lpha}}$
- En un sistema donde existe simetría translacional en una dirección espacial, la componente del momento lineal total del sistema en esa dirección se conserva.





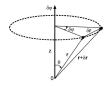


• Consideremos una partícula en la posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  respecto a O y una rotación infinitesimal del vector  $\mathbf{r}$  alrededor del eje con  $|\mathbf{r}|$  fijo.



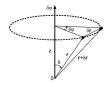
• Sea  $\delta \varphi$  la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.





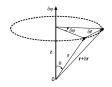
- Sea  $\delta \varphi$  la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la Partícula transformado por la rotación infinitesimal es  ${\bf r}'={\bf r}+\delta{\bf r}$





- Sea  $\delta \varphi$  la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la Partícula transformado por la rotación infinitesimal es  ${\bf r}'={\bf r}+\delta{\bf r}$
- Sonde  $\delta \mathbf{r}$  tiene dirección perpendicular al plano  $(\mathbf{r}, \delta \varphi)$  y magnitud  $\delta r = r \sin \theta \delta \varphi$ , con  $\theta$  es el ángulo entre  $\delta \varphi$  y r. Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$





- Sea  $\delta \varphi$  la magnitud constante del ángulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posición de la Partícula transformado por la rotación infinitesimal es  ${\bf r}'={\bf r}+\delta{\bf r}$
- Sonde  $\delta \mathbf{r}$  tiene dirección perpendicular al plano  $(\mathbf{r}, \delta \varphi)$  y magnitud  $\delta r = r \sin \theta \delta \varphi$ , con  $\theta$  es el ángulo entre  $\delta \varphi$  y r. Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$
- Consideremos a continuación un sistema de N Partículas con posiciones  $\mathbf{r}_{\alpha}, \alpha=1,\ldots,N$ , sujeto a una rotación infinitesimal  $\delta \varphi$



• El cambio en el vector de posición de la Partícula  $\alpha$  es  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ .



- El cambio en el vector de posición de la Partícula  $\alpha$  es  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ .
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e.,  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Expresando  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ , obtenemos  $f = \mathrm{cte}$



- El cambio en el vector de posición de la Partícula  $\alpha$  es  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ .
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e.,  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Expresando  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ , obtenemos  $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$



- El cambio en el vector de posición de la Partícula  $\alpha$  es  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ .
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e.,  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Expresando  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ , obtenemos  $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo  $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$  y  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ , podemos escribir  $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$



- El cambio en el vector de posición de la Partícula  $\alpha$  es  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ .
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e.,  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Expresando  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ , obtenemos  $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo  $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$  y  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ , podemos escribir  $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .



- El cambio en el vector de posición de la Partícula  $\alpha$  es  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ .
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e.,  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Expresando  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ , obtenemos  $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo  $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$  y  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ , podemos escribir  $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .
- Como  $\delta \varphi$  es constante,  $\mathbf{L}_T \equiv \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte.}$  La cantidad vectorial  $\mathbf{L}_T$  es el momento angular total del sistema.



- El cambio en el vector de posición de la Partícula  $\alpha$  es  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ .
- La Isotropía del espacio implica que esta transformación infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e.,  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Expresando  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ , obtenemos  $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo  $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$  y  $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$ , podemos escribir  $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ .
- Como  $\delta \varphi$  es constante,  $\mathbf{L}_T \equiv \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \mathrm{cte.}$  La cantidad vectorial  $\mathbf{L}_T$  es el momento angular total del sistema.
- Si un sistema posee simetría rotacional alrededor de un eje, se conserva la componente del momento angular en esa dirección.



• Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$ 



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.
- Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , posee componentes  $\delta x = -y \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$  y  $\delta y = x \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.
- Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , posee componentes  $\delta x = -y \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$  y  $\delta y = x \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de  $\mathcal{L}$  bajo esta transformación infinitesimal es  $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.
- Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , posee componentes  $\delta x = -y \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$  y  $\delta y = x \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de  $\mathcal{L}$  bajo esta transformación infinitesimal es  $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$  implica que  $f = \mathsf{cte} = c$ .



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.
- Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , posee componentes  $\delta x = -y \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$  y  $\delta y = x \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de  $\mathcal{L}$  bajo esta transformación infinitesimal es  $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$  implica que  $f = \mathsf{cte} = c$ .
- La cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.
- Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , posee componentes  $\delta x = -y \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$  y  $\delta y = x \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de  $\mathcal{L}$  bajo esta transformación infinitesimal es  $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$  implica que  $f = \mathsf{cte} = c$ .
- La cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$
- Como  $\delta \varphi = cte$ , tenemos  $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x,y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.
- Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , posee componentes  $\delta x = -y \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$  y  $\delta y = x \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de  $\mathcal{L}$  bajo esta transformación infinitesimal es  $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$  implica que  $f = \mathsf{cte} = c$ .
- La cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$
- Como  $\delta \varphi = cte$ , tenemos  $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{2} k r^2$  y la coordenada  $\varphi$  es cíclica,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$



- Sea una partícula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricción, sujeta a una fuerza elástica  $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right)$
- Supongamos una rotación infinitesimal  $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$  alrededor del eje z.
- Entonces  $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , posee componentes  $\delta x = -y \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$  y  $\delta y = x \delta \varphi$ ,  $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variación de  $\mathcal{L}$  bajo esta transformación infinitesimal es  $\delta \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condición  $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$  implica que  $f = \mathsf{cte} = c$ .
- La cantidad conservada  $\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi c = \text{cte}$
- Como  $\delta \varphi = cte$ , tenemos  $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}kr^2$  y la coordenada  $\varphi$  es cíclica,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$
- El momento conjugado  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{cte.}$



 Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente de  $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$ .



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente de  $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$ .
- El cambio total de  $\mathcal{L}$  es  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}}$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano  $\mathcal L$  no depende explícitamente de  $t:\mathcal L=\mathcal L\left(q_j,\dot q_j\right)$ .
- El cambio total de  $\mathcal{L}$  es  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$ ,



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano  $\mathcal L$  no depende explícitamente de  $t:\mathcal L=\mathcal L\left(q_j,\dot q_j\right)$ .
- El cambio total de  $\mathcal{L}$  es  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$ ,
- Tendremos  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{d}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano  $\mathcal L$  no depende explícitamente de  $t:\mathcal L=\mathcal L\left(q_j,\dot q_j\right)$ .
- El cambio total de  $\mathcal{L}$  es  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$ ,
- Tendremos  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{d}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$
- Con lo cual  $\frac{d}{\mathrm{d}t} \left[ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} \right] = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} = \text{ cte.}$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecánicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogéneo en el tiempo, el Lagrangiano  $\mathcal L$  no depende explícitamente de  $t:\mathcal L=\mathcal L\left(q_j,\dot q_j\right)$ .
- El cambio total de  $\mathcal{L}$  es  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuación de Lagrange,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$ ,
- Tendremos  $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[ \frac{d}{\mathrm{d}t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$
- Con lo cual  $\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} \right] = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} = \text{cte.}$
- ullet La energía es la cantidad escalar  $E\left(q_j,\dot{q}_j,t
  ight)\equiv\sum_{j=1}^srac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j-\mathcal{L}$



• Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas:  $V(q_i, \dot{q}_i)$ .



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas:  $V(q_j, \dot{q}_j)$ .
- El Lagrangiano tiene la forma  $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$ . y se define una función de energía como  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{j=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas:  $V(q_i, \dot{q}_i)$ .
- El Lagrangiano tiene la forma  $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$ . y se define una función de energía como  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T\left(\dot{q}_{1},\ldots,\dot{q}_{s}
ight)=rac{1}{2}\sum_{ij}^{s}\mathcal{T}_{ij}\dot{q}_{i}\dot{q}_{j}\Rightarrow\sum_{j}^{s}rac{\partial T}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}=\left(\sum_{j}^{s}\mathcal{T}_{jj}\dot{q}_{j}
ight)\dot{q}_{j}=2T$$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas:  $V(q_i, \dot{q}_i)$ .
- El Lagrangiano tiene la forma  $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$ . y se define una función de energía como  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T\left(\dot{q}_{1},\ldots,\dot{q}_{s}\right)=rac{1}{2}\sum_{ij}^{s}\mathcal{T}_{ij}\dot{q}_{i}\dot{q}_{j}\Rightarrow\sum_{j}^{s}rac{\partial T}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}=\left(\sum_{j}^{s}\mathcal{T}_{jj}\dot{q}_{j}\right)\dot{q}_{j}=2T$$

Entonces

$$E\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)=2T-\sum_{j=1}^{s}rac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-T+V=T+V-\sum_{j=1}^{s}rac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}$$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas:  $V(q_i, \dot{q}_i)$ .
- El Lagrangiano tiene la forma  $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$ . y se define una función de energía como  $E(q_i, \dot{q}_i) \sum^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i} \dot{q}_i \mathcal{L} \sum^s \frac{\partial T}{\partial i} \dot{q}_i \sum^s \frac{\partial V}{\partial i} \dot{q}_i (T V)$
- $E\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\mathcal{L}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-\left(T-V\right)$  Como en general
- $T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s) = \frac{1}{2}\sum_{ij}^s \mathcal{T}_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \Rightarrow \sum_j^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \left(\sum_j^s \mathcal{T}_{jj}\dot{q}_j\right)\dot{q}_j = 2T$
- Entonces  $E\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)=2T-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-T+V=T+V-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}$
- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades,  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$ ; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total,  $E\left(q_j,\dot{q}_j\right)=T+V$



- Existen sistemas donde la energía potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas:  $V(q_i, \dot{q}_i)$ .
- El Lagrangiano tiene la forma  $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$ . y se define una función de energía como  $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{ij}^s \mathcal{T}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \Rightarrow \sum_j^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \left(\sum_j^s \mathcal{T}_{jj} \dot{q}_j\right) \dot{q}_j = 2T$$

Entonces

$$E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

- Si la energía potencial V es independiente de las velocidades,  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$ ; entonces la función de energía es igual a la energía mecánica total,  $E\left(q_j,\dot{q}_j\right)=T+V$
- Si  $V = V(q_j, \dot{q}_j)$ , la función de energía contiene términos adicionales a T + V.

### Recapitulando



En esta clase presentamos una introducción rigurosa al teorema de Noether y el papel de las simetrías en las leyes de conservación,

#### Momentos Conjugados y Coordenadas Cíclicas

- Definición del momento conjugado  $p_j = rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ .
- Si una coordenada  $q_i$  no aparece explícitamente en el lagrangiano, cíclicas (o ignorables) el momento conjugado  $p_i$  se conserva.
- Ejemplos:
  - Una partícula moviéndose sobre un cono invertido, donde el ángulo azimutal  $\phi$  es cíclico. La cantidad de movimiento angular se conserva.
  - Una partícula en un medio viscoso, muestra cómo el momento conjugado a una coordenada cíclica puede diferir del momento físico.

### Recapitulando



En esta clase presentamos una introducción rigurosa al teorema de Noether y el papel de las simetrías en las leyes de conservación,

#### Momentos Conjugados y Coordenadas Cíclicas

- Definición del momento conjugado  $p_j = rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ .
- Si una coordenada  $q_i$  no aparece explícitamente en el lagrangiano, cíclicas (o ignorables) el momento conjugado  $p_i$  se conserva.
- Ejemplos:
  - ullet Una partícula moviéndose sobre un cono invertido, donde el ángulo azimutal  $\phi$  es cíclico. La cantidad de movimiento angular se conserva.
  - Una partícula en un medio viscoso, muestra cómo el momento conjugado a una coordenada cíclica puede diferir del momento físico.
- Teorema de Noether. Para cada simetría continua de la acción, hay una cantidad conservada correspondiente
  - ullet Coordenada cíclica o momento conservado.
  - $\bullet \ \ \text{Homogeneidad del espacio} \rightarrow \text{conservación del momento lineal}.$
  - $\bullet$  Invariancia rotacional  $\to$  conservación del momento angular.
  - ullet Homogeneidad del tiempo o conservación de la energía.