Modos normales de oscilación

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

14 de octubre de 2024

Agenda

1. Modos normales
2. Sección
3. Sección
4. Sección
5. Sección
6. Sección

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$

Modos normales de oscilación $1/2$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j \right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$ es decir

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \ldots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$ es decir

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \ldots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

- Esto permite calcular las s frecuencias de pequeñas oscilaciones $\omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s$ como soluciones al polinomio característico

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_k, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_k^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_k^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_k^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_k^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_k, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_k^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_k^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_k^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_k^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_k, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_k\right)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_k^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_k^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_k^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_k^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_k\right)$ y $a_2\left(\omega_k\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j\left(\omega_k\right) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_k, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_k\right)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_k^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_k^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_k^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_k^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_k\right)$ y $a_2\left(\omega_k\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j\left(\omega_k\right) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}, \quad k = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_k a_j\left(\omega_k\right) \xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_k, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_k\right)$.
  Si $s=2$
  $i=1:\left(V_{11}-\omega_k^2 T_{11}\right) a_1+\left(V_{12}-\omega_k^2 T_{12}\right) a_2=0$
  $i=2:\left(V_{21}-\omega_k^2 T_{21}\right) a_1+\left(V_{22}-\omega_k^2 T_{22}\right) a_1=0$
  Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_k\right)$ y $a_2\left(\omega_k\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t)=\sum_k c_k a_j\left(\omega_k\right) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}, \quad k=1,2,\ldots,s$, tendremos $\eta_j(t)=\sum_k a_j\left(\omega_k\right)\xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_k satisface la ecuación $\ddot{\xi}_k+\omega_k^2\xi_k=0$.

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_k, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_k^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_k^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_k^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_k^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}, \quad k = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_k a_j(\omega_k) \xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_k satisface la ecuación $\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son
  $\eta_1 = a_1(\omega_1)\xi_1 + a_1(\omega_2)\xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_1)\xi_1 + a_2(\omega_2)\xi_2$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_k, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_k^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_k^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_k^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_k^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}, \quad k = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_k a_j(\omega_k) \xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_k satisface la ecuación $\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son
  $\eta_1 = a_1(\omega_1)\xi_1 + a_1(\omega_2)\xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_1)\xi_1 + a_2(\omega_2)\xi_2$
- Para ξ_2 tenemos $\eta_1 = a_1(\omega_2)\xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_2)\xi_2$, 2 pequeños desplazamientos que oscilas con la frecuencia ω_2 alrededor de su posición de equilibrio con amplitudes $a_1(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2)$.

Título transparencia

-

Título transparencia

-

Título transparencia

Título transparencia

-