Ecuaciones de Euler

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

6 de mayo de 2025

Agenda

1. Ecuaciones de Euler
   - Generalidades
   - Derivadas en marcos inerciales y no inerciales
   - Ecuaciones de Euler
2. Trompo de Euler: $I_1^1 < I_2^2 < I_3^3$
   - Ecuaciones de Euler
   - Evolución de $\mathbf{L}$
   - Pequeñas oscilaciones de $\mathbf{L}$ alrededor de $\mathbf{x}_1$
3. Trompo simétrico: $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$
   - El planteamiento del problema
   - Las ecuaciones de Euler
   - Las velocidades angulares y ángulos de Euler

Generalidades

Las Ecuaciones de Euler:

- son una alternativa útil a las ecuaciones de Lagrange para estudiar la rotación de un cuerpo rígido libre o con torque.

Generalidades

Las Ecuaciones de Euler:

- son una alternativa útil a las ecuaciones de Lagrange para estudiar la rotación de un cuerpo rígido libre o con torque.
- son ecuaciones diferenciales de primer orden para las componentes $\tilde{\Omega}^i$ de la velocidad angular respecto al CM, mientras que las ecuaciones de Lagrange corresponden a ecuaciones diferenciales de segundo orden para los ángulos de Euler
- Permiten describir la evolución de la velocidad angular en un sistema fijo al CM del cuerpo.

Generalidades

Las Ecuaciones de Euler:

- son una alternativa útil a las ecuaciones de Lagrange para estudiar la rotación de un cuerpo rígido libre o con torque.
- son ecuaciones diferenciales de primer orden para las componentes $\tilde{\Omega}^i$ de la velocidad angular respecto al CM, mientras que las ecuaciones de Lagrange corresponden a ecuaciones diferenciales de segundo orden para los ángulos de Euler
- Permiten describir la evolución de la velocidad angular en un sistema fijo al CM del cuerpo.
- Aprovechan la simetría del cuerpo y se expresan naturalmente en torno a los ejes principales de inercia.

Generalidades

Las Ecuaciones de Euler:

- son una alternativa útil a las ecuaciones de Lagrange para estudiar la rotación de un cuerpo rígido libre o con torque.
- son ecuaciones diferenciales de primer orden para las componentes $\tilde{\Omega}^i$ de la velocidad angular respecto al CM, mientras que las ecuaciones de Lagrange corresponden a ecuaciones diferenciales de segundo orden para los ángulos de Euler
- Permiten describir la evolución de la velocidad angular en un sistema fijo al CM del cuerpo.
- Aprovechan la simetría del cuerpo y se expresan naturalmente en torno a los ejes principales de inercia.
- La interpretación física del efecto de los torques externos sobre cada componente de la velocidad angular es intuitiva.

Derivadas en marcos inerciales y no inerciales

- Consideremos dos sistema de coordenadas: laboratorio (x, y, z) y el sistema CM $(x1, x2, x3)$.

Derivadas en marcos inerciales y no inerciales

- Consideremos dos sistema de coordenadas: laboratorio (x, y, z) y el sistema CM $(x1, x2, x3)$.
- Supongamos además, que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden y observemos un vector $\mathbf{A}$ en ambos sistemas.

Derivadas en marcos inerciales y no inerciales

- Consideremos dos sistema de coordenadas: laboratorio (x, y, z) y el sistema CM $(x1, x2, x3)$.
- Supongamos además, que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden y observemos un vector $\mathbf{A}$ en ambos sistemas.
- El sistema $(x1, x2, x3)$ rota con una velocidad angular intantánea $\tilde{\Omega}^i$

- Consideremos dos sistema de coordenadas: laboratorio (x, y, z) y el sistema CM $(x1, x2, x3)$.
- Supongamos además, que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden y observemos un vector **A** en ambos sistemas.
- El sistema $(x1, x2, x3)$ rota con una velocidad angular intantánea $\tilde{\Omega}^i$
- El cambio infinitesimal en el vector **A** visto desde el Laboratorio se debe efecto de la rotación de los ejes $(x1, x2, x3)$.

Derivadas en marcos inerciales y no inerciales

- Consideremos dos sistema de coordenadas: laboratorio (x, y, z) y el sistema CM $(x1, x2, x3)$.
- Supongamos además, que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden y observemos un vector **A** en ambos sistemas.
- El sistema $(x1, x2, x3)$ rota con una velocidad angular intantánea $\tilde{\Omega}^i$
- El cambio infinitesimal en el vector **A** visto desde el Laboratorio se debe efecto de la rotación de los ejes $(x1, x2, x3)$.
- Esto es $\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{(x,y,z)} = \mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{(x1,x2,x3)} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}(t)}_{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{\mathrm{rot}}}$

Derivadas en marcos inerciales y no inerciales

- Consideremos dos sistema de coordenadas: laboratorio (x, y, z) y el sistema CM $(x1, x2, x3)$.
- Supongamos además, que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden y observemos un vector $\mathbf{A}$ en ambos sistemas.
- El sistema $(x1, x2, x3)$ rota con una velocidad angular intantánea $\tilde{\Omega}^i$
- El cambio infinitesimal en el vector $\mathbf{A}$ visto desde el Laboratorio se debe efecto de la rotación de los ejes $(x1, x2, x3)$.
- Esto es $\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{(x,y,z)} = \mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{(x1,x2,x3)} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}(t)}_{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{\mathrm{rot}}}$
- El cambio $\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{\mathrm{rot}}$ causado por la rotación de $(x1, x2, x3)$ no modifica la magnitud del vector $\mathbf{A}$, sino su dirección.

- Consideremos dos sistema de coordenadas: laboratorio (x, y, z) y el sistema CM $(x1, x2, x3)$.
- Supongamos además, que los orígenes de ambos sistemas de coordenadas coinciden y observemos un vector $\mathbf{A}$ en ambos sistemas.
- El sistema $(x1, x2, x3)$ rota con una velocidad angular intantánea $\tilde{\Omega}^i$
- El cambio infinitesimal en el vector $\mathbf{A}$ visto desde el Laboratorio se debe efecto de la rotación de los ejes $(x1, x2, x3)$.
- Esto es $\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{(x,y,z)} = \mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{(x1,x2,x3)} + \underbrace{\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{A}(t)}_{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{\mathrm{rot}}}$
- El cambio $\mathrm{d}\mathbf{A}(t)_{\mathrm{rot}}$ causado por la rotación de $(x1, x2, x3)$ no modifica la magnitud del vector $\mathbf{A}$, sino su dirección.
- Es equivalente cuando analizamos el vector posición $\mathbf{r}$ de una partícula del cuerpo rígido, que mantiene su magnitud en el sistema de coordenadas fijo en el cuerpo y $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\mathbf{\Phi} \times \mathbf{r}$

Ecuaciones de Euler

- En general $d\mathbf{A}_{\mathrm{rot}} = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{A}$, con $d\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} dt$

Ecuaciones de Euler

- En general $d\mathbf{A}_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{A}$, con $d\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} dt$
- La variación de $\mathbf{A}$, para los observadores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, están relacionadas por $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}$

Ecuaciones de Euler

- En general $d\mathbf{A}_{\text{rot}} = d\mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}$, con $d\mathbf{\Phi} = \tilde{\mathbf{\Omega}} dt$
- La variación de $\mathbf{A}$, para los observadores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, están relacionadas por $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A} = \mathbf{L}$, entonces $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{L}$

Ecuaciones de Euler

- En general $d\mathbf{A}_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{A}$, con $d\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} dt$
- La variación de $\mathbf{A}$, para los observadores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, están relacionadas por $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A} = \mathbf{L}$, entonces $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{L}$
- El torque en el sistema $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ es $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}$,
  entonces $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{L}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- En general $d\mathbf{A}_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{A}$, con $d\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} dt$
- La variación de $\mathbf{A}$, para los observadores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, están relacionadas por $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A} = \mathbf{L}$, entonces $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{L}$
- El torque en el sistema $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ es $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}$, entonces $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{L}$
- Las componentes de $\mathbf{L}$ respecto a $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ son $L^i = \sum_k I^i_k \tilde{\Omega}^k$.

Ecuaciones de Euler

- En general $d\mathbf{A}_{\text{rot}} = d\mathbf{\Phi} \times \mathbf{A}$, con $d\mathbf{\Phi} = \tilde{\mathbf{\Omega}} dt$
- La variación de $\mathbf{A}$, para los observadores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, están relacionadas por $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A} = \mathbf{L}$, entonces $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{L}$
- El torque en el sistema $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ es $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}$,
  entonces $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{L}$
- Las componentes de $\mathbf{L}$ respecto a $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ son $L^i = \sum_k I^i_k \tilde{\Omega}^k$.
- Entonces las *Ecuaciones de Euler* son
  $\tau^i = \sum_k I^i_k \dot{\tilde{\Omega}}^k + (\tilde{\mathbf{\Omega}} \times L)^i, = \sum_k I^i_k \dot{\tilde{\Omega}}^k + \epsilon^{ijk} \tilde{\Omega}_j \left(\sum_m I^m_k \tilde{\Omega}_k \right) \quad i = 1, 2, 3$

- En general $d\mathbf{A}_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{A}$, con $d\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} dt$
- La variación de $\mathbf{A}$, para los observadores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, están relacionadas por $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A} = \mathbf{L}$, entonces $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{L}$
- El torque en el sistema $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ es $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}$,
  entonces $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{L}$
- Las componentes de $\mathbf{L}$ respecto a $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ son $L^i = \sum_k I^i_k \tilde{\Omega}^k$.
- Entonces las *Ecuaciones de Euler* son
  $\tau^i = \sum_k I^i_k \dot{\tilde{\Omega}}^k + (\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times L)^i, = \sum_k I^i_k \dot{\tilde{\Omega}}^k + \epsilon^{ijk} \tilde{\Omega}_j \left(\sum_m I^m_k \tilde{\Omega}_k\right) \quad i = 1, 2, 3$
- Si I^i_k es diagonal, entonces $\begin{cases} \tau^1 = I^1_1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 + \tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 \left(I^3_3 - I^2_2\right), \\ \tau^2 = I^2_2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 + \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_3 \left(I^1_1 - I^3_3\right), \\ \tau^3 = I^3_3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 + \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 \left(I^2_2 - I^1_1\right). \end{cases}$

Trompo de Euler y Ecuaciones de Euler

- El trompo de Euler
  - Cuerpo rígido con un punto fijo, con momentos de inercia $I_1^1 < I_2^2 < I_3^3$
  - No hay torque externo: $\tau = 0$.
  - Se usa el sistema de referencia fijo al CM (ejes principales de inercia).

- El trompo de Euler
  - Cuerpo rígido con un punto fijo, con momentos de inercia $I_1^1 < I_2^2 < I_3^3$
  - No hay torque externo: $\tau = 0$.
  - Se usa el sistema de referencia fijo al CM (ejes principales de inercia).
- Ecuaciones de Euler para un cuerpo libre $\begin{cases} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I_2^2 - I_3^3)\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3 \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2 \end{cases}$

  Un sistema de ecuaciones diferenciales, no lineales y acopladas, que describe la evolución de $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ en el sistema del CM.

Trompo de Euler y Ecuaciones de Euler

- El trompo de Euler
  - Cuerpo rígido con un punto fijo, con momentos de inercia $I_1^1 < I_2^2 < I_3^3$
  - No hay torque externo: $\tau = 0$.
  - Se usa el sistema de referencia fijo al CM (ejes principales de inercia).
- Ecuaciones de Euler para un cuerpo libre $\begin{cases} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I_2^2 - I_3^3)\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3 \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2 \end{cases}$

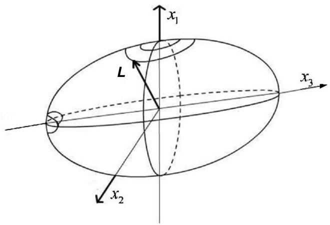
  Un sistema de ecuaciones diferenciales, no lineales y acopladas, que describe la evolución de $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ en el sistema del CM.
- Cantidades Conservadas
  - **Energía:** $E = T = \frac{1}{2}\left(I_1^1(\tilde{\Omega}^1)^2 + I_2^2(\tilde{\Omega}^2)^2 + I_3^3(\tilde{\Omega}^3)^2\right)$
  - **Magnitud del momento angular:**
    $L^2 = (L^1)^2 + (L^2)^2 + (L^3)^2 = (I_1^1)^2(\tilde{\Omega}^1)^2 + (I_2^2)^2(\tilde{\Omega}^2)^2 + (I_3^3)^2(\tilde{\Omega}^3)^2$

- El trompo de Euler
  - Cuerpo rígido con un punto fijo, con momentos de inercia $I_1^1 < I_2^2 < I_3^3$
  - No hay torque externo: $\tau = 0$.
  - Se usa el sistema de referencia fijo al CM (ejes principales de inercia).
- Ecuaciones de Euler para un cuerpo libre $\begin{cases} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I_2^2 - I_3^3)\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3 \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2 \end{cases}$

  Un sistema de ecuaciones diferenciales, no lineales y acopladas, que describe la evolución de $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ en el sistema del CM.
- Cantidades Conservadas
  - **Energía:** $E = T = \frac{1}{2}\left(I_1^1(\tilde{\Omega}^1)^2 + I_2^2(\tilde{\Omega}^2)^2 + I_3^3(\tilde{\Omega}^3)^2\right)$
  - **Magnitud del momento angular:** $L^2 = (L^1)^2 + (L^2)^2 + (L^3)^2 = (I_1^1)^2(\tilde{\Omega}^1)^2 + (I_2^2)^2(\tilde{\Omega}^2)^2 + (I_3^3)^2(\tilde{\Omega}^3)^2$
  - Entonces tendremos
    - $\frac{(L^1)^2}{2EI_1^1} + \frac{(L^2)^2}{2EI_2^2} + \frac{(L^3)^2}{2EI_3^3} = 1$. Elipsoide, semiejes $\sqrt{2EI_1^1} < \sqrt{2EI_2^2} < \sqrt{2EI_3^3}$.
    - $L^2 = (L^1)^2 + (L^2)^2 + (L^3)^2$. Esfera de radio igual a L en el sistema CM.

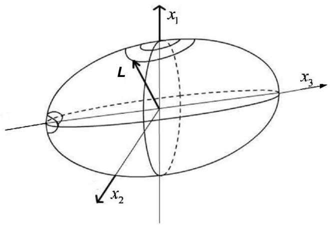
Evolución de **L**

- La solución vive en la intersección de la esfera y del elipsoide, si $2EI_1^1 < L^2 < 2EI_3^3$



Evolución de L

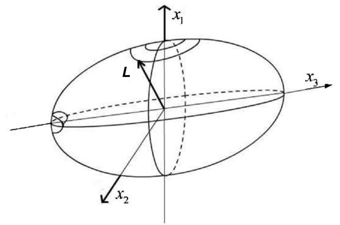
- La solución vive en la intersección de la esfera y del elipsoide, si $2EI_1^1 < L^2 < 2EI_3^3$



- Las intersecciones de la esfera con el elipsoide corresponden a curvas cerradas alrededor de los ejes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_3$.

Evolución de $\mathbf{L}$

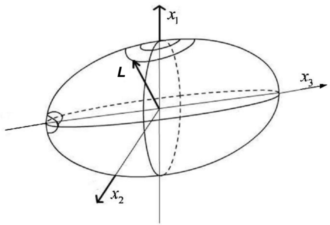
- La solución vive en la intersección de la esfera y del elipsoide, si $2EI_1^1 < L^2 < 2EI_3^3$



- Las intersecciones de la esfera con el elipsoide corresponden a curvas cerradas alrededor de los ejes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_3$.
- El movimiento del vector $\mathbf{L}$ relativo al sistema $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ fijo en el cuerpo debe ser periódico.

Evolución de **L**

- La solución vive en la intersección de la esfera y del elipsoide, si $2EI_1^1 < L^2 < 2EI_3^3$



- Las intersecciones de la esfera con el elipsoide corresponden a curvas cerradas alrededor de los ejes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_3$.
- El movimiento del vector **L** relativo al sistema $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ fijo en el cuerpo debe ser periódico.
- Durante un período de oscilación el vector **L** describe una especie de superficie cónica alrededor de $\mathbf{x}_1$ o de $\mathbf{x}_3$.

Pequeñas oscilaciones de **L** alrededor de $\mathbf{x}_1$

- Supongamos que las componentes son pequeñas, $L^2 \ll 1$ y $L^3 \ll 1$

Pequeñas oscilaciones de $\mathbf{L}$ alrededor de $\mathbf{x}_1$

- Supongamos que las componentes son pequeñas, $L^2 \ll 1$ y $L^3 \ll 1$
- Entonces $L^2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \tilde{\Omega}^2 \ll 1 \quad$ y $\quad L^3 = I_3^3 \tilde{\Omega}^3 \Rightarrow \tilde{\Omega}^3 \ll 1$

- Supongamos que las componentes son pequeñas, $L^2 \ll 1$ y $L^3 \ll 1$
- Entonces $L^2 = I_2^2\tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \tilde{\Omega}^2 \ll 1 \quad \text{y} \quad L^3 = I_3^3\tilde{\Omega}^3 \Rightarrow \tilde{\Omega}^3 \ll 1$
- Entonces $$\left.\begin{array}{l} I_1^1\dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I_2^2 - I_3^3)\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3 \\ I_2^2\dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3\dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I_1^1\dot{\tilde{\Omega}}^1 \approx 0 \quad \Rightarrow \tilde{\Omega}^1 = cte \\ I_2^2\dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3\dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2 \end{array}\right.$$

Pequeñas oscilaciones de $\mathbf{L}$ alrededor de $\mathbf{x}_1$

- Supongamos que las componentes son pequeñas, $L^2 \ll 1$ y $L^3 \ll 1$
- Entonces $L^2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \tilde{\Omega}^2 \ll 1 \quad$ y $\quad L^3 = I_3^3 \tilde{\Omega}^3 \Rightarrow \tilde{\Omega}^3 \ll 1$
- Entonces $\left.\begin{array}{r} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I_2^2 - I_3^3)\tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 \approx 0 \quad \Rightarrow \tilde{\Omega}^1 = cte \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 \end{array}\right.$
- Derivando la segunda (tercera) y sustituyendo en la tercera (segunda) tendremos $\ddot{\Omega}^i = -\frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)\left(I_2^2 - I_1^1\right)}{I_2^2 I_3^3} (\tilde{\Omega}^1)^2 \Omega^i$, con $i = 2, 3$.

Pequeñas oscilaciones de $\mathbf{L}$ alrededor de $\mathbf{x}_1$

- Supongamos que las componentes son pequeñas, $L^2 \ll 1$ y $L^3 \ll 1$
- Entonces $L^2 = I^2_2 \tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \tilde{\Omega}^2 \ll 1$ y $L^3 = I^3_3 \tilde{\Omega}^3 \Rightarrow \tilde{\Omega}^3 \ll 1$
- Entonces $\left.\begin{array}{l} I^1_1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I^2_2 - I^3_3)\tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 \\ I^2_2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I^3_3 - I^1_1)\tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1 \\ I^3_3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I^1_1 - I^2_2)\tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I^1_1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 \approx 0 \quad \Rightarrow \tilde{\Omega}^1 = cte \\ I^2_2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I^3_3 - I^1_1)\tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1 \\ I^3_3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I^1_1 - I^2_2)\tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 \end{array}\right.$
- Derivando la segunda (tercera) y sustituyendo en la tercera (segunda) tendremos $\ddot{\Omega}^i = -\frac{\left(I^3_3 - I^1_1\right)\left(I^2_2 - I^1_1\right)}{I^2_2 I^3_3}(\tilde{\Omega}^1)^2 \Omega^i$, con $i = 2, 3$.
- Con lo cual $\ddot{\Omega}^i = -\omega^2_{x_1}\Omega^i$, donde $\omega_{x_1} = \tilde{\Omega}^1 \sqrt{\frac{\left(I^3_3 - I^1_1\right)\left(I^2_2 - I^1_1\right)}{I^2_2 I^3_3}}$,

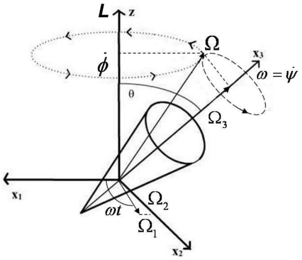
Pequeñas oscilaciones de $\mathbf{L}$ alrededor de $\mathbf{x}_1$

- Supongamos que las componentes son pequeñas, $L^2 \ll 1$ y $L^3 \ll 1$
- Entonces $L^2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \tilde{\Omega}^2 \ll 1 \quad$ y $\quad L^3 = I_3^3 \tilde{\Omega}^3 \Rightarrow \tilde{\Omega}^3 \ll 1$
- Entonces $\left.\begin{array}{l} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I_2^2 - I_3^3)\tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 \approx 0 \qquad \Rightarrow \tilde{\Omega}^1 = cte \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3 \tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_2 \end{array}\right.$
- Derivando la segunda (tercera) y sustituyendo en la tercera (segunda) tendremos $\ddot{\Omega}^i = -\frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)\left(I_2^2 - I_1^1\right)}{I_2^2 I_3^3} (\tilde{\Omega}^1)^2 \Omega^i$, con $i = 2, 3$.
- Con lo cual $\ddot{\Omega}^i = -\omega_{x_1}^2 \Omega^i$, donde $\omega_{x_1} = \tilde{\Omega}^1 \sqrt{\frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)\left(I_2^2 - I_1^1\right)}{I_2^2 I_3^3}}$,
- Es la frecuencia de pequeñas oscilaciones estables del vector $\mathbf{L}$ alrededor del eje $\mathbf{x}_1$.

Pequeñas oscilaciones de **L** alrededor de $\mathbf{x}_1$

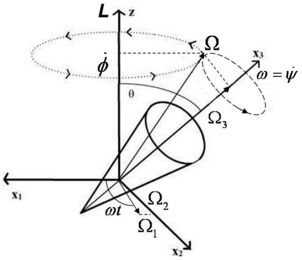
- Supongamos que las componentes son pequeñas, $L^2 \ll 1$ y $L^3 \ll 1$
- Entonces $L^2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 \Rightarrow \tilde{\Omega}^2 \ll 1$ y $L^3 = I_3^3 \tilde{\Omega}^3 \Rightarrow \tilde{\Omega}^3 \ll 1$
- Entonces $\left.\begin{array}{l} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 = (I_2^2 - I_3^3)\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3 \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}^1 \approx 0 \quad \Rightarrow \tilde{\Omega}^1 = cte \\ I_2^2 \dot{\tilde{\Omega}}^2 = (I_3^3 - I_1^1)\tilde{\Omega}_3\tilde{\Omega}_1 \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}^3 = (I_1^1 - I_2^2)\tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_2 \end{array}\right.$
- Derivando la segunda (tercera) y sustituyendo en la tercera (segunda) tendremos $\ddot{\Omega}^i = -\frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)\left(I_2^2 - I_1^1\right)}{I_2^2 I_3^3}(\tilde{\Omega}^1)^2\Omega^i$, con $i = 2, 3$.
- Con lo cual $\ddot{\Omega}^i = -\omega_{x_1}^2 \Omega^i$, donde $\omega_{x_1} = \tilde{\Omega}^1 \sqrt{\frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)\left(I_2^2 - I_1^1\right)}{I_2^2 I_3^3}}$,
- Es la frecuencia de pequeñas oscilaciones estables del vector **L** alrededor del eje $\mathbf{x}_1$.
- Siguiendo este método se pueden obtener las oscilaciones alrededor de los ejes $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$

Trompo simétrico: $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$



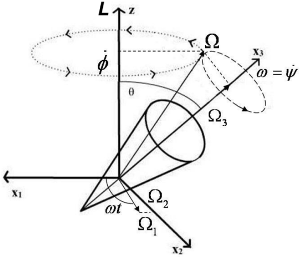
- Es un caso especial del trompo de Euler: No hay torque externo: $\boldsymbol{\tau} = 0$. Los momentos de inercia son $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$.

Trompo simétrico: $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$



- Es un caso especial del trompo de Euler: No hay torque externo: $\boldsymbol{\tau} = 0$. Los momentos de inercia son $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$.
- Como $\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = cte$ (módulo, dirección y sentido).

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO



- Es un caso especial del trompo de Euler: No hay torque externo: $\boldsymbol{\tau} = 0$. Los momentos de inercia son $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$.
- Como $\boldsymbol{\tau} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = cte$ (módulo, dirección y sentido).
- Más aún, $L^3 = L\cos\theta$, tenemos
$$L^3 = I_3^3\tilde{\Omega}_3 = L\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Omega}_3 = \frac{L\cos\theta}{I_3^3} = \text{ cte } \Rightarrow \theta = \text{cte}.$$

Las ecuaciones de Euler

- Las ecuaciones de Euler son $\begin{cases} I_1^1\dot{\tilde{\Omega}}_1 = -\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3\left(I_3^3 - I_1^1\right) \\ I_1^1\dot{\tilde{\Omega}}_2 = \tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_3\left(I_3^3 - I_1^1\right) \\ I_3^3\dot{\tilde{\Omega}}_3 = 0. \end{cases}$

- Las ecuaciones de Euler son $\begin{cases} I^1_1\dot{\tilde{\Omega}}_1 = -\tilde{\Omega}_2\tilde{\Omega}_3\left(I^3_3 - I^1_1\right) \\ I^1_1\dot{\tilde{\Omega}}_2 = \tilde{\Omega}_1\tilde{\Omega}_3\left(I^3_3 - I^1_1\right) \\ I^3_3\dot{\tilde{\Omega}}_3 = 0. \end{cases}$
- Con lo cual $\ddot{\tilde{\Omega}}^1 = -\omega^2\tilde{\Omega}^1 \quad$ y $\quad \ddot{\tilde{\Omega}}^2 = -\omega^2\tilde{\Omega}^2$

- Las ecuaciones de Euler son $\begin{cases} I^1_1 \dot{\tilde{\Omega}}_1 = -\tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 \left(I^3_3 - I^1_1 \right) \\ I^1_1 \dot{\tilde{\Omega}}_2 = \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_3 \left(I^3_3 - I^1_1 \right) \\ I^3_3 \dot{\tilde{\Omega}}_3 = 0. \end{cases}$
- Con lo cual $\ddot{\tilde{\Omega}}^1 = -\omega^2 \tilde{\Omega}^1 \quad$ y $\quad \ddot{\tilde{\Omega}}^2 = -\omega^2 \tilde{\Omega}^2$
- Donde $\omega^2 = \frac{\left(I^3_3 - I^1_1 \right)}{I^1_1} \tilde{\Omega}_3 = \frac{\left(I^3_3 - I^1_1 \right)}{I^1_1 I^3_3} L \cos\theta =$cte.

- Las ecuaciones de Euler son $\begin{cases} I^1_1 \dot{\tilde{\Omega}}_1 = -\tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 \left(I^3_3 - I^1_1\right) \\ I^1_1 \dot{\tilde{\Omega}}_2 = \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_3 \left(I^3_3 - I^1_1\right) \\ I^3_3 \dot{\tilde{\Omega}}_3 = 0. \end{cases}$
- Con lo cual $\ddot{\tilde{\Omega}}^1 = -\omega^2 \tilde{\Omega}^1 \quad$ y $\quad \ddot{\tilde{\Omega}}^2 = -\omega^2 \tilde{\Omega}^2$
- Donde $\omega^2 = \frac{\left(I^3_3 - I^1_1\right)}{I^1_1} \tilde{\Omega}_3 = \frac{\left(I^3_3 - I^1_1\right)}{I^1_1 I^3_3} L \cos\theta =$cte.
- Con soluciones $\tilde{\Omega}_1 = A \cos \omega t \quad$ y $\quad \tilde{\Omega}_2 = A \operatorname{sen} \omega t$,

  donde $A = \left(\tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2\right)^{1/2}$ es constante

Las ecuaciones de Euler

- Las ecuaciones de Euler son $\begin{cases} I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}_1 = -\tilde{\Omega}_2 \tilde{\Omega}_3 \left(I_3^3 - I_1^1\right) \\ I_1^1 \dot{\tilde{\Omega}}_2 = \tilde{\Omega}_1 \tilde{\Omega}_3 \left(I_3^3 - I_1^1\right) \\ I_3^3 \dot{\tilde{\Omega}}_3 = 0. \end{cases}$
- Con lo cual $\ddot{\tilde{\Omega}}^1 = -\omega^2 \tilde{\Omega}^1$ y $\ddot{\tilde{\Omega}}^2 = -\omega^2 \tilde{\Omega}^2$
- Donde $\omega^2 = \frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)}{I_1^1} \tilde{\Omega}_3 = \frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)}{I_1^1 I_3^3} L \cos\theta =$cte.
- Con soluciones $\tilde{\Omega}_1 = A \cos \omega t$ y $\tilde{\Omega}_2 = A \operatorname{sen} \omega t$, donde $A = \left(\tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2\right)^{1/2}$ es constante
- Tomamos la dirección constante de $\mathbf{L}$ en la dirección z,
- Entonces $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ rota con respecto a $\mathbf{L}$, con $\tilde{\Omega}_3$ sobre el eje x_3 constante,
- Su proyección sobre el plano (x_1, x_2) rota con velocidad angular constante ω.

- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, es
  $L_2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 = I_2^2 \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta = L \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I_2^2}$
- donde hemos utilizado la expresión de $\tilde{\Omega}_2$ en términos de los ángulos de Euler, y tomando $\psi = 0$ (usando la simetría axial del trompo).

Las velocidades angulares y ángulos de Euler

- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, es $L_2 = I_2^2\tilde{\Omega}^2 = I_2^2\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I_2^2}$
- donde hemos utilizado la expresión de $\tilde{\Omega}_2$ en términos de los ángulos de Euler, y tomando $\psi = 0$ (usando la simetría axial del trompo).
- La velocidad angular de rotación $\dot{\psi}$ del trompo sobre su eje x_3 es $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \Rightarrow \dot{\psi} = \tilde{\Omega}_3 - \dot{\phi}\cos\theta = \frac{L\cos\theta}{I_3^3} - \frac{L}{I_1^1}\cos\theta$

Las velocidades angulares y ángulos de Euler

- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, es
  $L_2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 = I_2^2 \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta = L \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I_2^2}$
- donde hemos utilizado la expresión de $\tilde{\Omega}_2$ en términos de los ángulos de Euler, y tomando $\psi = 0$ (usando la simetría axial del trompo).
- La velocidad angular de rotación $\dot{\psi}$ del trompo sobre su eje x_3 es
  $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \Rightarrow \dot{\psi} = \tilde{\Omega}_3 - \dot{\phi}\cos\theta = \frac{L\cos\theta}{I_3^3} - \frac{L}{I_1^1}\cos\theta$
- El vector $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ ejecuta una rotación respecto al sistema (x, y, z) describiendo un cono alrededor de la dirección $\mathbf{z} = \mathbf{L}$, con velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$;

Las velocidades angulares y ángulos de Euler

- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, es $L_2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 = I_2^2 \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta = L \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I_2^2}$
- donde hemos utilizado la expresión de $\tilde{\Omega}_2$ en términos de los ángulos de Euler, y tomando $\psi = 0$ (usando la simetría axial del trompo).
- La velocidad angular de rotación $\dot{\psi}$ del trompo sobre su eje x_3 es $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \Rightarrow \dot{\psi} = \tilde{\Omega}_3 - \dot{\phi}\cos\theta = \frac{L\cos\theta}{I_3^3} - \frac{L}{I_1^1}\cos\theta$
- El vector $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ ejecuta una rotación respecto al sistema (x, y, z) describiendo un cono alrededor de la dirección $\mathbf{z} = \mathbf{L}$, con velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$;
- El vector $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ también ejecuta una rotación en el sistema (x_1, x_2, x_3) describiendo otro cono alrededor del eje x_3 del trompo, con velocidad angular $\omega = \dot{\psi}$.

- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, es $L_2 = I_2^2 \tilde{\Omega}^2 = I_2^2 \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta = L \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I_2^2}$
- donde hemos utilizado la expresión de $\tilde{\Omega}_2$ en términos de los ángulos de Euler, y tomando $\psi = 0$ (usando la simetría axial del trompo).
- La velocidad angular de rotación $\dot{\psi}$ del trompo sobre su eje x_3 es $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \Rightarrow \dot{\psi} = \tilde{\Omega}_3 - \dot{\phi}\cos\theta = \frac{L\cos\theta}{I_3^3} - \frac{L}{I_1^1}\cos\theta$
- El vector $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ ejecuta una rotación respecto al sistema (x, y, z) describiendo un cono alrededor de la dirección $\mathbf{z} = \mathbf{L}$, con velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$;
- El vector $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ también ejecuta una rotación en el sistema (x_1, x_2, x_3) describiendo otro cono alrededor del eje x_3 del trompo, con velocidad angular $\omega = \dot{\psi}$.
- El vector $\mathbf{L}$ también rota con velocidad angular $\dot{\psi}$ alrededor de x_3, visto desde el sistema (x_1, x_2, x_3).