Nombre:

1. En una playa, el salvavidas divisa una persona que pide ayuda en el mar. La persona en apuros se encuentra a una minima distancia d_p de la playa. El salvavidas calcula que la persona se encuentra a una distancia D_{SP} y su mínima distancia a la playa es d_s. Además sabe que puede correr con una velocidad v_t y nadar con v_n.

R Este problema es un clásico de minimización en el ámbito de los rescates, conocido como el *problema del nadador* o *problema de Fermat*. El salvavidas necesita encontrar la trayectoria más rápida para rescatar a una persona en el mar, teniendo en cuenta que puede correr y nadar con diferentes velocidades. El objetivo es minimizar el **tiempo total de rescate**, que depende de las velocidades y de la trayectoria seguida.

Definiciones

- d_p: Distancia mínima de la persona al borde de la playa.
- D_{SP}: Distancia total horizontal entre el salvavidas y la persona en apuros.
- d_s: Distancia mínima del salvavidas a la playa en su punto inicial (su posición inicial respecto a la línea de costa).
- v_t: Velocidad de carrera en la arena.
- v_n: Velocidad de nado en el agua.
- v_r: Velocidad de la corriente del río (en el segundo caso).

a) **¿En cuál punto de la playa debe dejar de correr y comenzar a nadar el salvavidas para rescatar a quien pide auxilio?**. Este punto lo denotaremos como x, que es la distancia horizontal desde el salvavidas hasta el punto donde decide entrar al agua. Además vamos a expresar el **tiempo total** que el salvavidas tarda en llegar a la persona:

$$T(x) = \frac{1}{v_t}\sqrt{d_s^2 + x^2} + \frac{1}{v_n}\sqrt{(d_n - x)^2 + d_p^2}$$

Hallando el mínimo $\frac{dT(x)}{dx} = 0$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{x}{v_T\sqrt{d_s^2 + x^2}} + \frac{-(d_n - x)}{v_n\sqrt{(d_n - x)^2 + d_p^2}} = 0$$

con lo cual

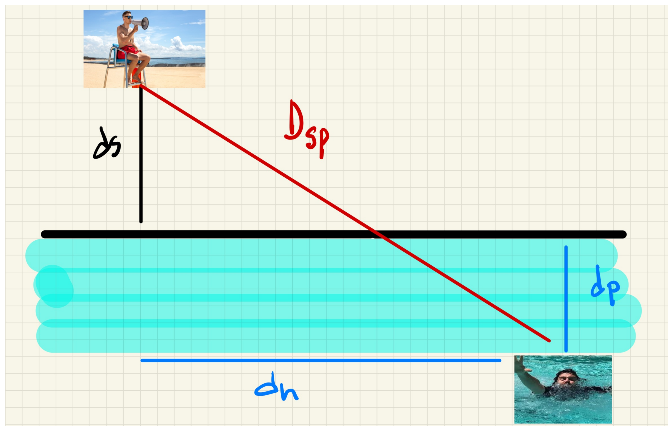
$$\frac{x}{v_T\sqrt{d_s^2 + x^2}} = \frac{(d_n - x)}{v_n\sqrt{(d_n - x)^2 + d_p^2}}$$

Que se puede resolver como un polinomio de segundo grado

b) **¿Cómo cambia el resultado si el rescate se da en un río que aleja a la persona del salvavidas con una velocidad v_r?**

c) Analice todos los casos posibles y determine cuando se puede rescatar a la persona y cuando no. Use las estimaciones máximas para la velocidad de la carrera y de natación.

(6ptos)



2. Sea una partícula en presencia de un potencial que en coordenadas cilíndricas es de la forma $V(\rho, k\phi + z)$, donde k es una constante. Encontrar una simetría del lagrangiano y hallar dos constantes de movimiento. (4ptos)

R En coordenadas cilíndricas, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi & \dot{x} &= \dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi \\ y &= \rho\sin\phi & \dot{y} &= \dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi \\ z &= z & \dot{z} &= \dot{z} \end{aligned}$$

el lagrangiano se escribe como:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho, k\phi + z)$$

Como el lagrangeano no depende del tiempo, entonde la primera cantidad conservada es la energía

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) + V(\rho, k\phi + z)$$

Para encontrar la segunda cantidad conservada tenemos que diseñar una transformación $q \to \bar{q}$ que deje invariante el lagrangeano $L_\epsilon(q, \dot{q}) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$. Para construirla es indispensable que $V(\rho, k\phi + z) = V(\bar{\rho}, \bar{k}\bar{\phi} + \bar{z})$, entonces podemos hacer

$$\bar{\rho} = \rho, \quad \bar{\phi} = \phi + \frac{\epsilon}{k}, \quad \bar{z} = z - \epsilon \Rightarrow L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\bar{\rho}}^2 + \bar{\rho}^2\dot{\bar{\phi}}^2 + \dot{\bar{z}}^2\right) - V(\bar{\rho}, \bar{k}\bar{\phi} + \bar{z}) = L(q, \dot{q})$$

Donde ϵ y k son constantes para garantizar que $\dot{q}_i = \dot{\bar{q}}_i$. Para esa transformación la segunda cantidad conservada será:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = m\rho^2\frac{\dot{\phi}}{k} - m\dot{z}$$

3. Una partícula de masa m gira en un círculo de radio a, sometida a la fuerza central $f(r) = -kr$ (oscilador armónico esférico) (8ptos).

R **El potencial efectivo para esta partícula.** Para analizar el movimiento de una partícula bajo una fuerza central, es común utilizar el concepto de *potencial efectivo*. La fuerza $f(r) = -kr$ sugiere que el potencial asociado es $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Por su parte la energía cinética del movimiento angular se expresa como: $T_{\text{angular}} = \frac{L^2}{2mr^2}$, donde L es el momento angular de la partícula. De esta forma, el potencial efectivo $V_{\text{ef}}(r)$ se puede escribir como:

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

R **La relación entre el período y el radio r_o de una órbita circular** Para una órbita circular tenemos

$$\frac{mv^2}{r} = kr \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L^2}{mr^3} = kr \quad \Rightarrow L^2 = mkr^4 \quad \Rightarrow (mr^2\omega)^2 = mkr^4$$

ya que $L = mr^2\omega$. Por lo tanto el período es independiente del radio de la órbita circular

R **La frecuencia de pequeñas oscilaciones radiales alrededor de la órbita circular ligeramente perturbada**. consideramos una pequeña perturbación en el radio, es decir, $r = r_0 + \delta r$, donde δr es una pequeña desviación del radio de equilibrio r_0. La ecuación de movimiento para las oscilaciones radiales es:

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} \quad \Rightarrow m\ddot{\delta r} = \frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} \delta r \quad \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\Big|_{r=r_0}}$$

la segunda derivada de $V_{\text{ef}}(r)$ en $r = r_0$ es

$$\frac{dV_{\text{ef}}}{dr} = kr - \frac{L^2}{mr^3} \quad \Rightarrow \frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2} = k + \frac{3L^2}{mr^4} \quad \Rightarrow \frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} = k + \frac{3L^2}{mr_0^4}$$

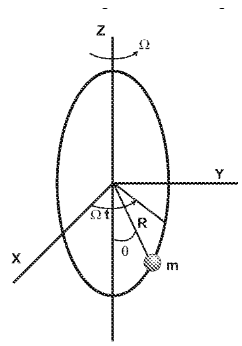
Es decir

$$\frac{d^2V_{\text{ef}}}{dr^2}\Big|_{r=r_0} = k + \frac{3mkr_0^4}{mr_0^4} = 4k \quad \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

R **El ángulo de precesión durante una oscilación radial.** La frecuencia de la oscilación radial (ω_r) es distinta de la frecuencia de la órbita circular (ω). La precesión se produce debido a esta diferencia en las frecuencias.El ángulo de precesión por cada ciclo de oscilación radial se puede aproximar como la diferencia en las frecuencias angulares dividida por la frecuencia de la órbita circular:

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{\omega_r - \omega}{\omega}\right) \quad \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\left(\frac{2\sqrt{k/m} - \sqrt{k/m}}{\sqrt{k/m}}\right) = 2\pi$$

Esto implica que la precesión durante una oscilación radial completa es de 2π, lo que sugiere que no hay precesión neta en este caso específico, y la órbita se mantiene cerrada.



4. Una cuenta de masa m desliza sin fricción bajo la acción de la gravedad por un alambre circular de radio R. El alambre gira con velocidad constante Ω alrededor de su diámetro vertical. (6ptos)

R *a)* **El lagrangiano y las ecuaciones de movimiento**
Este es un sistema con solo un grado de libertad. La coordenada generalizada es el ángulo θ con el eje vertical del alambre. Entonces la posición de la partícula puede ser escrita como

$$x = R \operatorname{sen}\theta \cos\Omega t\,, \quad y = R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega t \quad \text{y} \quad z = -R\cos\theta\,.$$

Mientras las componentes de la velocidad son

$$\dot{x} = R\dot{\theta}\cos\theta\cos\Omega t - R\Omega \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega t\,, \quad \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta \operatorname{sen}\Omega t + R\Omega \operatorname{sen}\theta\cos\Omega t \quad \text{y} \quad \dot{z} = R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

La energía cinética y potencial son

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) \quad \text{y} \quad V = mgz = -mgR\cos\theta$$

respectivamente. Nótese que hemos tomamos el cero de la energía potencial en la parte media del alambre ($z = 0$).
Finalmente, con el siguiente lagrangiano

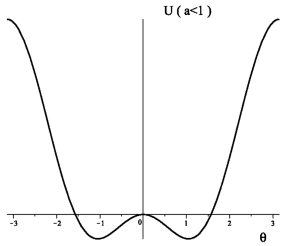
$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) + mgR\cos\theta$$

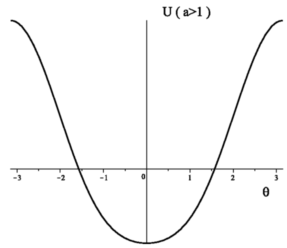
construimos las ecuaciones de Euler Lagrange

$$\ddot{\theta} - \Omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta = 0$$

b) **Los puntos de equilibrio y tipos de estabilidad**
La ecuación anterior es equivalente a la ecuación de una partícula moviéndose en una dimensión y sometida a una fuerza $F(\theta)$, la cual deriva de un potencial $U(\theta)$:

$$F(\theta) = -\frac{dU}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad U(\theta) = \Omega^2\cos\theta\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{g}{R\Omega^2}\right)$$





La forma de este potencial depende de si $a = g/R\Omega^2$ es mayor o menor que 1
Los puntos de equilibrio verifican la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta\left(\cos\theta - \frac{g}{R\Omega^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \theta = 0, \pm\pi, \quad \pm\theta_0 \equiv \arccos\frac{g}{R\Omega^2}$$

Dependiendo del valor de a se distinguen dos casos:

- Para $a \geq 1$, los puntos $\pm\pi$ son inestables y $\theta = 0$ es un punto estable. Los puntos $\pm\theta_0$ no existen.
- Para $a < 1$, los puntos $\pm\pi$ siguen siendo inestables y $\theta = 0$ pasa a ser inestable también. Los puntos $\pm\theta_0$ son estables. El sistema presenta simetría axial y cuando $a < 1$, partícula oscila alrededor de uno de los puntos de equilibrio $\pm\theta_0$. En este caso se rompe la simetría. Esto no ocurre cuando $a > 1$ ya que en este caso el punto estable es $\theta = 0$.

c) **Frecuencia de las pequeñas vibraciones alrededor de los puntos de equilibrio estables**
Para calcular la frecuencia de las oscilaciones alrededor del punto de equilibrio se supone valores de θ próximos a $\theta_0 : \theta \simeq \theta_0 + \vartheta$. Sustituyendo en la ecuación de movimiento y desarrollando en serie se obtiene:

$$\ddot{\vartheta} = \Omega^2 \operatorname{sen}(\theta_0 + \vartheta)\cos(\theta_0 + \vartheta) - \frac{g}{R}\operatorname{sen}(\theta_0 + \vartheta) \simeq -\Omega^2\left(1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}\right)\vartheta \quad \Rightarrow \omega = \Omega\sqrt{1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}}$$

En el caso en que el punto de equilibrio fuera $\theta = 0$, se obtiene: $\square$

$$\omega = \Omega\sqrt{\frac{g^2}{R^2\Omega^4} - 1}$$