Órbitas y fuerzas centrales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

2 de septiembre de 2024

Agenda

1. Problema de dos cuerpos

Problema de dos cuerpos 1/3

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.

Problema de dos cuerpos 1/3

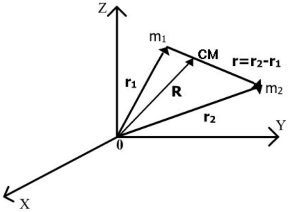
- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Este sistema se conoce como el problema de dos cuerpos.

Problema de dos cuerpos 1/3

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Este sistema se conoce como el problema de dos cuerpos.
- El sistema posee seis grados de libertad: tres coordenadas para $\mathbf{r}_1$ de la partícula 1 y tres para $\mathbf{r}_2$.

Problema de dos cuerpos 1/3

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Este sistema se conoce como el problema de dos cuerpos.
- El sistema posee seis grados de libertad: tres coordenadas para $\mathbf{r}_1$ de la partícula 1 y tres para $\mathbf{r}_2$.
- Definimos el vector de posición del centro de masa (CM) del sistema como $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$ y posición relativa como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$



Problema de dos cuerpos 2/3

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$

Problema de dos cuerpos 2/3

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$

Problema de dos cuerpos 2/3

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}'^2_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$

Problema de dos cuerpos 2/3

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}'^2_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$

Problema de dos cuerpos 2/3

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$
- El Lagrangiano del sistema es $L(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) = T - V\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$

Problema de dos cuerpos 2/3

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$
- El Lagrangiano del sistema es $L(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) = T - V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$
- Los seis grados de libertad del sistema se describen mediante las componentes de los vectores **r** y **R**.

Problema de dos cuerpos 3/3

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
  $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$. El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \text{cte}$.

Problema de dos cuerpos 3/3

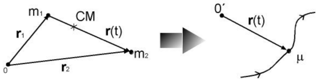
- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
  $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$. El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \text{cte}$.
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.

Problema de dos cuerpos 3/3

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\rm T}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
  $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\rm T} = M_{\rm T}\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$. El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\rm cm} = \text{cte}$.
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
- El término $T_{\rm cm}$, la energía cinética del centro de masa es constante y se omite en el Lagrangiano, $L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$

Problema de dos cuerpos 3/3

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} =$ cte.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema : $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} =$ cte. El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} =$ cte.
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
- El término T_{cm}, la energía cinética del centro de masa es constante y se omite en el Lagrangiano, $L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$
- El problema de dos cuerpos se reduce al de una partícula de masa μ en la posición relativa $\mathbf{r}(t)$ con respecto a un origen O'.



Título transparencia

-