Nombre:

Considere el tensor de Maxwell definido como:

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix}, \text{ con: } \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde $\boldsymbol{E} = (E^x, E^y, E^z)$ y $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente, medidos por un observador O en coordenadas cartesianas.

1. Si un observador mide un campo eléctrico $\boldsymbol{E} = E^x \hat{\text{ß}} + E^y \hat{\mathbf{j}}$ y ningún campo magnético ¿Cuáles campos, $F_{\mu\alpha}$, medirá otro observador que viaja con una velocidad respecto al primero de $\boldsymbol{\beta} = v\hat{\mathbf{i}}$?

R Observador en reposo: mide $\mathbf{E} = (E^x, E^y, 0))$ y $\mathbf{B} = (0, 0, 0)$

Se quiere saber qué campos mide un observador que se mueve con velocidad $\boldsymbol{\beta} = \frac{v}{c}\hat{\mathbf{i}}$.

Queremos calcular el nuevo tensor de Maxwell $F'_{\mu\nu}$, y de ahí extraer los nuevos campos $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ que mide el observador en movimiento. Esto es $F'_{\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F_{\mu\nu}$

La matriz de Lorentz para un boost en (x) es:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Para $\mathbf{E} = (E^x, E^y, 0)$, $\mathbf{B} = 0$, el tensor electromagnético contravariante es:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & 0 \\ E^x & 0 & 0 & 0 \\ E^y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado un boost $\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\mathbf{i}}$, las transformaciones de los campos son:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) = \gamma E_y \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) = 0 \\ B'_x &= B_x = 0 \\ B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) = 0 \\ B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) = -\gamma\frac{v}{c^2}E_y \end{aligned}$$