

Series de potencias y ecuaciones diferenciales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



27 de julio de 2022

- 1 Método de diferenciaciones sucesiva
- 2 Coeficientes indeterminados
- 3 Puntos y Estrategias
- 4 La ecuación de Legendre
- 5 Recapitulando

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)} = \mathcal{F}(x),$$

con las condiciones iniciales

$$y(x_0) = C_1; \quad y'(x_0) = C_2; \quad y''(x_0) = C_3; \quad \dots y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$

Los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)} = \mathcal{F}(x),$$

con las condiciones iniciales

$$y(x_0) = C_1; \quad y'(x_0) = C_2; \quad y''(x_0) = C_3; \quad \dots y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$

Los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.

- Tendrá como única solución de la ecuación homogénea $y = y(x)$, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:

$$y_h(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots$$

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)} = \mathcal{F}(x),$$

con las condiciones iniciales

$$y(x_0) = C_1; \quad y'(x_0) = C_2; \quad y''(x_0) = C_3; \quad \dots y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$

Los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.

- Tendrá como única solución de la ecuación homogénea $y = y(x)$, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:

$$y_h(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots$$

- La solución de la inhomogénea proviene de expandir en Taylor la

$$\text{función inhomogénea, esto es: } \mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^n \mathcal{F}^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}, \text{ y}$$

proponer una solución de la inhomogénea de la forma

$$y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j.$$

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)} = \mathcal{F}(x),$$

con las condiciones iniciales

$$y(x_0) = C_1; \quad y'(x_0) = C_2; \quad y''(x_0) = C_3; \quad \dots y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$

Los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.

- Tendrá como única solución de la ecuación homogénea $y = y_h(x)$, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:

$$y_h(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \cdots$$

- La solución de la inhomogénea proviene de expandir en Taylor la

$$\text{función inhomogénea, esto es: } \mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^n \mathcal{F}^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}, \text{ y}$$

proponer una solución de la inhomogénea de la forma

$$y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j.$$

- Finalmente, la solución general será $y(x) = y_h(x) + y_{ih}(x)$

- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = \sqrt{x + 1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$

- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = \sqrt{x + 1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
$$y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \dots$$

- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = \sqrt{x + 1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
$$y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \dots$$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
$$y''(0) = (x + 1)y' - x^2y \Big|_{x=0} = y'(0) = 1$$
$$y'''(0) = \frac{dy(x)}{dx} + (x + 1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2xy(x) - x^2\frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1 + 1 = 2$$

- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = \sqrt{x + 1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
$$y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \dots$$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
$$y''(0) = (x + 1)y' - x^2y \Big|_{x=0} = y'(0) = 1$$
$$y'''(0) = \frac{dy(x)}{dx} + (x + 1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2xy(x) - x^2\frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1 + 1 = 2$$
- La expansión en Taylor de la parte inhomogénea será
$$\sqrt{x + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \dots$$

- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = \sqrt{x + 1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será

$$y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \dots$$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$$y''(0) = (x + 1)y' - x^2y \Big|_{x=0} = y'(0) = 1$$

$$y'''(0) = \frac{dy(x)}{dx} + (x + 1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2xy(x) - x^2\frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1 + 1 = 2$$
- La expansión en Taylor de la parte inhomogénea será

$$\sqrt{x + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \dots$$
- La solución particular inhomogénea será $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, entonces

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)'' - (x + 1)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)' + x^2\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sqrt{x + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \dots$$
 igualando se tienen b_j

- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = \sqrt{x + 1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será

$$y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \dots$$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$$y''(0) = (x + 1)y' - x^2y \Big|_{x=0} = y'(0) = 1$$

$$y'''(0) = \frac{dy(x)}{dx} + (x + 1)\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2xy(x) - x^2\frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1 + 1 = 2$$
- La expansión en Taylor de la parte inhomogénea será

$$\sqrt{x + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \dots$$
- La solución particular inhomogénea será $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, entonces

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)'' - (x + 1)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)' + x^2\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sqrt{x + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \dots$$
 igualando se tienen b_j
- La solución general será

$$y(x) = y_h + y_{ih} = 1 + x + x^2 + \frac{7}{12}x^3 + \frac{7}{32}x^4 + \frac{27}{320}x^5 + \dots$$

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.
- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = x$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.
- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = x$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- Proponemos una solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{cases}$$

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.
- Sea $y'' - (x + 1)y' + x^2y = x$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- Proponemos una solución
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{cases}$$
- Con lo cual $y(0) = 1 = c_0$ y $y'(0) = 1 = c_1$

• Entonces

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x \\
 & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \\
 & x \\
 & \sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1)c_{l+2} x^l - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + \\
 & \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x
 \end{aligned}$$

- Entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1)c_{l+2} x^l - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k +$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

- Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n c_n - (n+1)c_{n+1}] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n =$$

$$x$$

- Entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1)c_{l+2} x^l - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

- Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n c_n - (n+1)c_{n+1}] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = x$$

- Por lo tanto $n=0 \Rightarrow 2c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$
y $n=1 \Rightarrow 3 \cdot 2 c_3 - c_1 - 2 c_2 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}$

- Entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1)c_{l+2} x^l - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

- Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n c_n - (n+1)c_{n+1}] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = x$$

- Por lo tanto $n=0 \Rightarrow 2c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$
 y $n=1 \Rightarrow 3 \cdot 2 c_3 - c_1 - 2 c_2 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}$

- la relación de recurrencia para $n \geq 2$ es

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - n c_n - (n+1)c_{n+1} - c_{n-2} = 0$$

- Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

- Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

- Un **punto ordinario** $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son analíticas. Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = L_1, \quad \text{con } L_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = L_2, \quad \text{con } L_2 \text{ finito}$$

- Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

- Un **punto ordinario** $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son analíticas. Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = L_1, \quad \text{con } L_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = L_2, \quad \text{con } L_2 \text{ finito}$$

- Un punto $x = x_0$ se llamará un **punto singular regular** si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = L_3, \quad \text{con } L_3 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = L_4, \quad \text{con } L_4 \text{ finito}$$

- Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

- Un **punto ordinario** $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son analíticas. Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = L_1, \quad \text{con } L_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = L_2, \quad \text{con } L_2 \text{ finito}$$

- Un punto $x = x_0$ se llamará un **punto singular regular** si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = L_3, \quad \text{con } L_3 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = L_4, \quad \text{con } L_4 \text{ finito}$$

- **Puntos singulares irregulares:** Ninguna de las anteriores.

La ecuación de Legendre: $x = 0$, punto ordinario

- La ecuación de Legendre $(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$

La ecuación de Legendre: $x = 0$, punto ordinario

- La ecuación de Legendre $(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

La ecuación de Legendre: $x = 0$, punto ordinario

- La ecuación de Legendre $(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

La ecuación de Legendre: $x = 0$, punto ordinario

- La ecuación de Legendre $(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

La ecuación de Legendre: $x = 0$, punto ordinario

- La ecuación de Legendre $(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Expandiendo $2a_2 + \lambda(\lambda + 1)a_0 [(\lambda + 2)(\lambda - 1)a_1 + (3 \cdot 2)a_3] x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda + n + 1)(\lambda - n)a_n] x^n = 0$

La ecuación de Legendre: $x = 0$, punto ordinario

- La ecuación de Legendre $(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Expandiendo $2a_2 + \lambda(\lambda + 1)a_0 [(\lambda + 2)(\lambda - 1)a_1 + (3 \cdot 2)a_3] x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda + n + 1)(\lambda - n)a_n] x^n = 0$
- Los coeficientes pares serán $a_2 = -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2} a_0$,
 $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} a_0$, $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} a_0$, ...
 $a_{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!} a_0$

La ecuación de Legendre: $x = 0$, punto ordinario

- La ecuación de Legendre $(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Expandiendo $2a_2 + \lambda(\lambda + 1)a_0 [(\lambda + 2)(\lambda - 1)a_1 + (3 \cdot 2)a_3] x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda + n + 1)(\lambda - n)a_n] x^n = 0$
- Los coeficientes pares serán $a_2 = -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2} a_0$,
 $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} a_0$, $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} a_0$, ...
 $a_{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!} a_0$
- Los coeficientes impares serán $a_3 = -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} a_1$,
 $a_5 = \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} a_1$,
 $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\lambda+2n)(\lambda+2n-2)\cdots(\lambda+2)(\lambda-1)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!} a_1$

- La solución general será $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$

$$y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2} x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 + \dots$$

$$y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} x^5 + \dots$$

- La solución general será $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$
$$y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2} x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 + \dots$$
$$y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} x^5 + \dots$$
- si $\lambda = 2n$ la series se corta y es un polinomio de potencias pares,

- La solución general será $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$
$$y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2} x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 + \dots$$
$$y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} x^5 + \dots$$
- si $\lambda = 2n$ la series se corta y es un polinomio de potencias pares,
- si $\lambda = 2n + 1$ la otra se corta en uno de potencias impares.

- La solución general será $y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$

$$y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2} x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 + \dots$$

$$y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} x^5 + \dots$$
- si $\lambda = 2n$ la series se corta y es un polinomio de potencias pares,
- si $\lambda = 2n + 1$ la otra se corta en uno de potencias impares.
- Entonces

λ	Ecuación de Legendre	Polinomio Asociado
0	$(1 - x^2) y'' - 2x y' = 0$	$y_0(x) = 1$
1	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 2 y = 0$	$y_1(x) = x$
2	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 6 y = 0$	$y_0(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 12 y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 20 y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

En presentación consideramos

1