Simetri¿ ½ as y Cantidades Conservadas

Luis A. Ni; ½i; ½ez

Escuela de Fi¿ sica, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



20 de diciembre de 2024

Agenda



- 1 Variables conjugadas y cï $\frac{1}{2}$ clicas
 - Ejemplo: Part�cula cono invertido
 - Ejemplo: Partiį ½ cula en medio viscoso
- Teorema de Noether
 - Ejemplo: Coordenada c�clica
 - Ejemplo: Part�cula en campo gravitatorio
- ③ Homogeneidad del espacio y conservacii;½n del momento lineal
- 4 Isotropi $\frac{1}{2}$ a del espacio y conservacii $\frac{1}{2}$ n del momento angular
 - Ejemplo: Oscilador armi¿¹/₂nico bidimensional
- ⑤ Homogeneidad del tiempo y conservaci�n de la energ�a
- $oxed{6}$ Energi \dot{i}_2^1 a y Potenciales dependientes de las velocidades $V=V(q_j,\dot{q}_j,)$

Variables conjugadas y c�clicas



• Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_j,t)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_i . Tambiï \dot{t}_2 n llamado momento canï \dot{t}_2 nico.

Variables conjugadas y cii ½clicas



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_j,t)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j . Tambiï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ n llamado momento canï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ nico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. Tambii $\frac{1}{2}$ n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fi $\frac{1}{2}$ sica.

Variables conjugadas y cï¿ ½ clicas



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_j,t)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j . Tambiï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ n llamado momento canï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ nico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. Tambii $\frac{1}{2}$ n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fi $\frac{1}{2}$ sica.
- Si un Lagrangiano \mathcal{L} de un sistema no contiene explï¿ $\frac{1}{2}$ citamente una coordenada q_i (puede contener \dot{q}_i y t), se dice que q_i es una coordenada cï¿ $\frac{1}{2}$ clica o ignorable.

Variables conjugadas y ci¿ ½ clicas



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_j,t)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j . Tambiï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ n llamado momento canï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ nico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. Tambii $\frac{1}{2}$ n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fi $\frac{1}{2}$ sica.
- Si un Lagrangiano \mathcal{L} de un sistema no contiene expl�citamente una coordenada q_i (puede contener \dot{q}_i y t), se dice que q_i es una coordenada c�clica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada ci $\frac{1}{2}$ clica, q_i , es constante. Luego, la cantidad $p_i(q_j,\dot{q}_j,t)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.

Variables conjugadas y cï¿ ½ clicas



- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j,\dot{q}_j,t)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j . Tambiï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ n llamado momento canï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ nico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. Tambii $\frac{1}{2}$ n puede corresponder al momento angular o a otra cantidad fi $\frac{1}{2}$ sica.
- Si un Lagrangiano \mathcal{L} de un sistema no contiene explï¿ $\frac{1}{2}$ citamente una coordenada q_i (puede contener \dot{q}_i y t), se dice que q_i es una coordenada cï¿ $\frac{1}{2}$ clica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada cii $\frac{1}{2}$ clica, q_i , es constante. Luego, la cantidad $p_i\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.
- Si una coordenada q_i es ci $\frac{1}{2}$ clica, entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, y la ecuacii $\frac{1}{2}$ n de Lagrange para esa coordenada ci $\frac{1}{2}$ clica q_i es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow p_i = \mathrm{cte}$.

Parti; ⅓cula sobre un cono invertido



 Consideremos una parti¿½cula que se mueve sobre una supreficie ci; ½nica



Partcula sobre un cono invertido



 Consideremos una parti¿½cula que se mueve sobre una supreficie ci; ½nica



• Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$

Partcula sobre un cono invertido



• Consideremos una parti¿½cula que se mueve sobre una supreficie ci; ½nica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cï $\frac{1}{2}$ clica. El momento conjugado p_{φ} asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{ cte }.$

Partcula sobre un cono invertido



• Consideremos una parti¿½cula que se mueve sobre una supreficie ci;½nica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2\right) mgr \cot \alpha$
- La coordenada φ es cï $\dot{\iota}^{\frac{1}{2}}$ clica. El momento conjugado p_{φ} asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{ cte }$.
- El momento angular de la parti \dot{z}_2^1 cula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$

Parti; ½ cula sobre un cono invertido

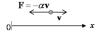


• Consideremos una parti¿½cula que se mueve sobre una supreficie ci; ½nica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cï $\dot{\iota}^{\frac{1}{2}}$ clica. El momento conjugado p_{φ} asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{ cte }$.
- El momento angular de la parti \dot{z}_{2}^{1} cula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$
- La componente z es $\mathcal{L}_z = m(x\dot{y} y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} \equiv p_{\varphi} = \mathrm{cte}$, ya que $\begin{array}{ccc} x = r\cos\varphi, & \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\mathrm{sen}\,\varphi, & \dot{y} = \dot{r}\mathrm{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{array}$







• Consideremos una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} en un medio viscoso, con coeficiente de friccii $\frac{1}{2}$ n α .

$$0 | \xrightarrow{\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

• Se mueve en la direccii $\dot{z}^{\frac{1}{2}}$ n x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$



$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\bullet \\
\mathbf{v}
\end{array}$$

- Se mueve en la direccii \dot{z}_2^1 n x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es ci $\frac{1}{2}$ clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante,

$$p_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_0 \Rightarrow \dot{x} = v_X(t) = v_0e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$



• Consideremos una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} en un medio viscoso, con coeficiente de friccii $\frac{1}{2}$ n α .

$$0 | \xrightarrow{\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

- Se mueve en la direcciï $\dot{z}^{\frac{1}{2}}$ n x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es ci $\frac{1}{2}$ clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante,

$$p_{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_{0} \Rightarrow \dot{x} = v_{x}(t) = v_{0}e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

• Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.



$$\begin{array}{c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \\
\mathbf{0} \\
\downarrow \\
\mathbf{v}
\end{array}$$

- Se mueve en la direccii $\dot{z}^{\frac{1}{2}}$ n x, de modo que $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es ci $\frac{1}{2}$ clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante,

$$p_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = m v_0 \Rightarrow \dot{x} = v_X(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posicii $\frac{1}{2}$ n seri $\frac{1}{2}$ $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$



$$\begin{array}{c|c}
\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \\
\downarrow \\
\mathbf{0} \\
\end{array}$$

- Se mueve en la direcciï \dot{z}^{1}_{2} n x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es ci $\frac{1}{2}$ clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. El momento conjugado p_x es constante,

$$p_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = m v_0 \Rightarrow \dot{x} = v_X(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posicii $\frac{1}{2}$ n seri $\frac{1}{2}$ $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuacii $\dot{\imath}_2^1$ n de movimiento, $m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}$



$$F = -\alpha \mathbf{v}$$

- Se mueve en la direcciï $\dot{z}^{\frac{1}{2}}$ n x, de modo que $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t}$
- La coordenada x es cï $\frac{1}{2}$ clica, i.e., $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0$. El momento conjugado p_x es constante,

$$p_{x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} = \text{cte } = mv_{0} \Rightarrow \dot{x} = v_{x}(t) = v_{0}e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

- Note que el momento conjugado es distinto del momento lineal $p = mv_x(t)$, que no es constante.
- La posicii $\frac{1}{2}$ n seri $\frac{1}{2}$ $x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} \left(1 e^{-(\alpha/m)t}\right)$
- A partir del Lagrangiano se obtiene la ecuacii $\dot{\imath}_2$ n de movimiento, $m\ddot{x}=-\alpha\dot{x}$
- Que es la Segunda Ley de Newton para la componente x de la fuerza $\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v}$ ejercida por el fluido sobre la partij $\frac{1}{2}$ cula.

Teorema de Noether



• Consideremos una transformacii $\dot{\iota}^{1}_{2}$ n infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.

Teorema de Noether



- Consideremos una transformacii $\frac{1}{2}$ n infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformacii; ½n infinitesimal representa una simetri; ½a del sistema, una simetri; ½a de la accii; ½n y se dice que la accii; ½n es invariante bajo esa transformacii; ½n.

Teorema de Noether



- Consideremos una transformacii $\frac{1}{2}$ n infinitesimal del Lagrangiano $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$ que no modifica las ecuaciones de movimiento.
- Esta transformacii; ½n infinitesimal representa una simetri; ½a del sistema, una simetri; ½a de la accii; ½n y se dice que la accii; ½n es invariante bajo esa transformacii; ½n.
- Teorema de Noether en Mecï¿¹/₂nica Clï¿¹/₂sica
 - Si la acciï $\underline{\iota}^{\frac{1}{2}}$ n de un sistema es invariante bajo una transformaciï $\underline{\iota}^{\frac{1}{2}}$ n infinitesimal de coordenadas $q'_j = q_j + \delta q_j$ que cambia el Lagrangiano a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}$, tal que $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f(q_j,t)}{\mathrm{d}t}$ para alguna funciï $\underline{\iota}^{\frac{1}{2}}$ n $f(q_j,t)$.
 - Entonces el Lagrangiano (y el sistema) $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ posee una simetri $\dot{\iota}_2^1$ a y la funci $\ddot{\iota}_2^1$ n $\mathcal{J}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j f$ constituye una cantidad conservada asociada a esa transformaci $\ddot{\iota}_2^1$ n.
 - ullet La cantidad ${\mathcal J}$ se denomina corriente de Noether.

Demostracii; ‡n del Teorema de Noether



• La transformacii $\frac{1}{2}$ n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variacii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j$

Demostracii; ∮n del Teorema de Noether



- La transformacii \dot{t} $\frac{1}{2}$ n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variacii \dot{t} $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \delta q_{j} \right)$

Demostracii; ∃n del Teorema de Noether



- La transformacii \dot{t} $\frac{1}{2}$ n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variacii \dot{t} $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Segï $\dot{\iota}_{2}^{1}$ n el teorema, la variaci $\ddot{\iota}_{2}^{1}$ n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f\left(q_{j},t\right)}{\mathrm{d}t}$.

Demostracii; ¹/₂n del Teorema de Noether



- La transformacii $\frac{1}{2}$ n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variacii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \delta q_{j} \right)$
- Segi $\frac{1}{2}$ n el teorema, la variacii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$

Demostracii; ¹/₂n del Teorema de Noether



- La transformacii $\frac{1}{2}$ n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variacii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Seg�n el teorema, la variaci�n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetrï¿ ¹a de un sistema, le corresponde una cantidad conservada

Demostracii; ¹/₂n del Teorema de Noether



- La transformacii $\frac{1}{2}$ n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variacii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{i}} \delta q_{j} \right)$
- Segi $\frac{1}{2}$ n el teorema, la variaci $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f(q_j,t)}{\mathrm{d}t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetrï¿ ¹a de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetri¿¹as y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.

Demostracii; ∃n del Teorema de Noether



- La transformacii $\frac{1}{2}$ n $q'_j = q_j + \delta q_j$ (donde t es fijo, $\delta t = 0$) produce la siguiente variacii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} \delta q_j + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} \delta \dot{q}_j$
- Las ecuaciones de Lagrange, conducen a $\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \delta q_{j} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right)$
- Seg�n el teorema, la variaci�n $\delta \mathcal{L}$ se puede escribir $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$.
- Luego $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} \right) = \frac{\mathrm{d}f \left(q_{j}, t \right)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f \right) = 0 \Rightarrow$ $\mathcal{J} \left(q_{j}, \dot{q}_{j}, t \right) \equiv \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \delta q_{j} f = \text{ cte.}$
- El Teorema de Noether establece que a cada simetra de un sistema, le corresponde una cantidad conservada
- Las simetri¿½as y cantidades conservadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre su comportamiento.
- Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales de segundo orden para las q_j , mientras que las cantidades conservadas $\mathcal{J}(q_j,\dot{q}_j,t)=cte$, son ecuaciones diferenciales de primer orden

Coordenada cii; 1/2 clica



• Supongamos que la coordenada q_i es ci $\frac{1}{2}$ clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.



- Supongamos que la coordenada q_i es ci $\frac{1}{2}$ clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformacii \dot{t} n de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j$, $\delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$



- Supongamos que la coordenada q_i es ci $\frac{1}{2}$ clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformacii $\dot{\ell}$ n de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la funcii $\frac{1}{2}$ n f surge de $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$



- Supongamos que la coordenada q_i es ci $\frac{1}{2}$ clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformacii $\dot{\ell}$ n de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la funcii $\frac{1}{2}$ n f surge de $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada \mathcal{J} es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j f = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i c = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{cte.}$

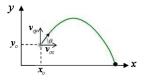


- Supongamos que la coordenada q_i es ci $\frac{1}{2}$ clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, para un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- La transformacii \dot{t} n de coordenadas $q_i' = q_i + \delta q_i$, con $\delta q_i =$ cte, y $q_j' = q_j, \delta q_j = 0$, para $i \neq j$, no produce cambios $\delta \mathcal{L}$ en el Lagrangiano. Esto es $\delta \mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{0} \delta q_i = 0$
- Por otro lado, la funcii $\frac{1}{2}$ n f surge de $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow f = c = \mathrm{cte}$
- La corriente de Noether conservada \mathcal{J} es $\mathcal{J} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j f = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i c = \text{cte } \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = \text{cte.}$
- El momento conjugado p_i asociado a q_i es constante.

Partï¿ ½ cula en campo gravitatorio



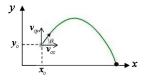
• Consideremos una parti \dot{z}_2^1 cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



Partï¿ ½ cula en campo gravitatorio



• Consideremos una parti \dot{l}_2^2 cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$

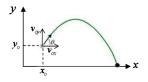


• El cambio en \mathcal{L} bajo la transformacii $\dot{\iota}$ and de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{\hat{\iota}} \equiv -mg \delta y$

Partii ¹/₂ cula en campo gravitatorio



• Consideremos una parti $\dot{l}_2^{\frac{1}{2}}$ cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$

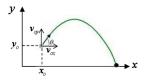


- El cambio en \mathcal{L} bajo la transformacii $\dot{\mathbf{z}}_{2}^{1}$ n de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg \delta y$
- Con lo cual $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow \quad f = -mg\,t\,\delta y$

Partï¿ ½cula en campo gravitatorio



• Consideremos una parti $\dot{l}_2^{\frac{1}{2}}$ cula en movimiento vertical en el campo gravitacional con un lagrangiano $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$



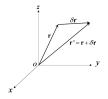
- El cambio en \mathcal{L} bajo la transformacii $\dot{\mathbf{z}}_{2}^{1}$ n de coordenadas, $y' = y + \delta y$, con $\delta y =$ cte, es $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \underbrace{\delta \dot{y}}_{=0} \equiv -mg \delta y$
- Con lo cual $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -mg\delta y \Rightarrow f = -mg t \delta y$
- Con la cantidad conservada $\mathcal{J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta y f = \text{cte} \Rightarrow m\dot{y}\delta y + mgt\delta y = \text{cte} \Rightarrow \dot{y} + gt = \text{cte}$



• Consideremos un sistema de N parti $\frac{1}{2}$ culas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$.

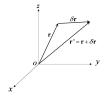


- Consideremos un sistema de N partï $\dot{\epsilon}^{\frac{1}{2}}$ culas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades meci¿¹/₂nicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una direccii;¹/₂n arbitraria del espacio.





- Consideremos un sistema de N partï $^{1}_{\dot{c}}$ culas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha}=\left(x_{1\,\alpha},x_{2\,\alpha},x_{3\,\alpha}\right)\,\alpha=1,\ldots,N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(\mathbf{r}_{\alpha},\dot{\mathbf{r}}_{\alpha},t\right)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades meci¿¹/₂nicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una direccii;¹/₂n arbitraria del espacio.

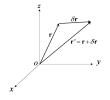


• Supongamos la transformacii $\frac{1}{2}$ n de coordenadas $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r}$, donde $\delta \mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes δx_j son constantes; i. e., $\delta \dot{\mathbf{r}} = 0$.

Conservaciii and del momento lineal 1/2



- Consideremos un sistema de N partï $\dot{t}^{\frac{1}{2}}$ culas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{1\alpha}, x_{2\alpha}, x_{3\alpha}) \ \alpha = 1, \dots, N$, con un Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{r}_{\alpha}, \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}, t)$.
- Homogenidad del espacio significa que las propiedades meci¿ nicas de un sistema no cambian si todo el sistema es desplazado en una direccii; n arbitraria del espacio.



- Supongamos la transformacii $\frac{1}{2}$ n de coordenadas $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r}$, donde $\delta \mathbf{r} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ es un vector infinitesimal cuyas componentes δx_j son constantes; i. e., $\delta \dot{\mathbf{r}} = 0$.
- Homogeneidad del espacio implica que la transformacii $\frac{1}{2}$ n infinitesimal no produce cambios en el Lagrangiano del sistema, $\delta \mathcal{L} = 0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ implica que f es constante.



• La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} - f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{3\,\alpha}} \right)$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta {f r}$ es constante, ${f P}_{\rm T} \equiv \sum_{lpha=1}^{\it N} rac{\partial {\cal L}}{\partial {\dot {f r}}_lpha} = {
 m cte}$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta {\bf r}$ es constante, ${\bf P}_{\rm T} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\cal N} {\partial {\cal L} \over \partial \dot{{\bf r}}_{\alpha}} = {
 m cte}$
- ullet La cantidad ${f P}_{
 m T}$ es el momento lineal total del sistema.



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- ullet La cantidad ${f P}_{
 m T}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energi \dot{z}_2^1 a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\right)$



- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- ullet La cantidad $oldsymbol{P}_T$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energi $\dot{\boldsymbol{\iota}}_2^1$ a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}_\alpha^2 V\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_N\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$

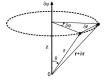


- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- ullet La cantidad $oldsymbol{P}_T$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energi $\dot{\mathbf{r}}_{2}^{\frac{1}{2}}$ a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}m_{\alpha}\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^{2}-V\left(\mathbf{r}_{1},\mathbf{r}_{2},\ldots,\mathbf{r}_{N}\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$
- El momento lineal de una partï $\dot{\mathbf{z}}$ cula es $\mathbf{p}_{lpha}=m_{lpha}\mathbf{v}_{lpha}=rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{lpha}}$



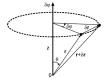
- La corriente conservada es $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} f = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} = \text{cte} \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{cte}$
- Donde $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{1\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{2\,\alpha}}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{3\,\alpha}} \right)$
- Como $\delta \mathbf{r}$ es constante, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \mathrm{cte}$
- ullet La cantidad ${f P}_{
 m T}$ es el momento lineal total del sistema.
- Si el Lagrangiano de un sistema cuya energi $\dot{\mathbf{r}}_{2}^{\frac{1}{2}}$ a potencial depende solamente de las coordenadas, $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}m_{\alpha}\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^{2}-V\left(\mathbf{r}_{1},\mathbf{r}_{2},\ldots,\mathbf{r}_{N}\right)$
- Entonces, $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$
- El momento lineal de una partï¿ $rac{1}{2}$ cula es $\mathbf{p}_{lpha}=m_{lpha}\mathbf{v}_{lpha}=rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{lpha}}$
- En un sistema donde existe simetri; ¹/₂a translacional en una direccii; ¹/₂n espacial, la componente del momento lineal total del sistema en esa direccii; ¹/₂n se conserva.





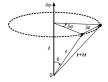


• Consideremos una parti $\frac{1}{2}$ cula en la posicii $\frac{1}{2}$ n $\mathbf{r} = (x, y, z)$ respecto a O y una rotacii $\frac{1}{2}$ n infinitesimal del vector \mathbf{r} alrededor del eje con $|\mathbf{r}|$ fijo.



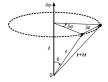
• Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del "¿ $\frac{1}{2}$ ngulo rotado en sentido antihorario.





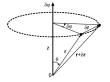
- Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del $\ddot{\iota}_{2}^{\frac{1}{2}}$ ngulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posicii $\frac{1}{2}$ n de la parti $\frac{1}{2}$ cula transformado por la rotacii $\frac{1}{2}$ n infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$





- Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del $\ddot{\iota}_{2}^{\frac{1}{2}}$ ngulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posicii $\frac{1}{2}$ n de la parti $\frac{1}{2}$ cula transformado por la rotacii $\frac{1}{2}$ n infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$
- Sonde $\delta \mathbf{r}$ tiene direccii $\frac{1}{2}$ n perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta \varphi)$ y magnitud $\delta \mathbf{r} = r \sec \theta \delta \varphi$, con θ es el i $\frac{1}{2}$ ngulo entre $\delta \varphi$ y r. Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$





- Sea $\delta \varphi$ la magnitud constante del $\ddot{\imath}_2^{\frac{1}{2}}$ ngulo rotado en sentido antihorario.
- El vector de posicii \dot{l}_{2}^{1} n de la parti \dot{l}_{2}^{1} cula transformado por la rotacii \dot{l}_{2}^{1} n infinitesimal es $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$
- Sonde $\delta \mathbf{r}$ tiene direccii $\frac{1}{2}$ n perpendicular al plano $(\mathbf{r}, \delta \varphi)$ y magnitud $\delta r = r \sin \theta \delta \varphi$, con θ es el i $\frac{1}{2}$ ngulo entre $\delta \varphi$ y r. Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$
- Consideremos a continuacii $\frac{1}{2}$ n un sistema de N parti $\frac{1}{2}$ culas con posiciones $\mathbf{r}_{\alpha}, \alpha = 1, \dots, N$, sujeto a una rotacii $\frac{1}{2}$ n infinitesimal $\delta \varphi$



• El cambio en el vector de posicii $\frac{1}{2}$ n de la parti $\frac{1}{2}$ cula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.



- El cambio en el vector de posicii $\dot{\imath}_{2}^{1}$ n de la parti $\dot{\imath}_{2}^{1}$ cula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropi \dot{l}_2 del espacio implica que esta transformacii \dot{l}_2 n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$



- El cambio en el vector de posicii $\dot{\epsilon}_{2}^{1}$ n de la parti $\dot{\epsilon}_{2}^{1}$ cula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropi \dot{l}_2^1 a del espacio implica que esta transformacii \dot{l}_2^1 n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L}=0$. Expresando $\delta \mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos f= cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$



- El cambio en el vector de posicii $\dot{\xi}^{\frac{1}{2}}$ n de la parti $\dot{\xi}^{\frac{1}{2}}$ cula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotrop�a del espacio implica que esta transformacï;½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L}=0$. Expresando $\delta \mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos f= cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}$ y $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$



- El cambio en el vector de posicii $\dot{\imath}_{2}^{\frac{1}{2}}$ n de la parti $\ddot{\imath}_{2}^{\frac{1}{2}}$ cula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotrop�a del espacio implica que esta transformacï;½n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L}=0$. Expresando $\delta \mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos f= cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \mathbf{y} \ \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.



- El cambio en el vector de posicii $\dot{\imath}_{2}^{\frac{1}{2}}$ n de la parti $\ddot{\imath}_{2}^{\frac{1}{2}}$ cula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotrop�a del espacio implica que esta transformaci�n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L}=0$. Expresando $\delta \mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos f= cte
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} \delta x_{j\,\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \mathbf{y} \ \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.
- Como $\delta \varphi$ es constante, $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \mathrm{cte}$. La cantidad vectorial \mathbf{L}_{T} es el momento angular total del sistema.



- El cambio en el vector de posicii $\dot{\epsilon}_{2}^{1}$ n de la parti $\dot{\epsilon}_{2}^{1}$ cula α es $\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$.
- La isotropi \dot{l}_2 a del espacio implica que esta transformacii \dot{l}_2 n infinitesimal no introduce cambios en el Lagrangiano del sistema; i. e., $\delta \mathcal{L} = 0$. Expresando $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, obtenemos $f = \mathrm{cte}$
- Entonces, el teorema de Noether establece que la cantidad conservada $\mathcal{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j}_{\alpha} f = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}_{\alpha}} \delta x_{j}_{\alpha} = \text{cte } \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \text{cte.}$
- Sustituyendo $\mathbf{p}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \mathbf{y} \ \delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}$, podemos escribir $\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta \varphi \times \mathbf{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta \varphi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta \varphi \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \text{cte}$
- Donde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.
- Como $\delta \varphi$ es constante, $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \mathrm{cte.}$ La cantidad vectorial \mathbf{L}_{T} es el momento angular total del sistema.
- Si un sistema posee simetri $\frac{1}{2}$ a rotacional alrededor de un eje, se conserva la componente del momento angular en esa direccii $\frac{1}{2}$ n.



• Sea una parti $\dot{\imath}_{2}^{\frac{1}{2}}$ cula de masa m sobre el plano (x,y) sin friccii $\dot{\imath}_{2}^{\frac{1}{2}}$ n, sujeta a la fuerza eli $\dot{\imath}_{2}^{\frac{1}{2}}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2}) - \frac{1}{2}k(x^{2} + y^{2})$



- Sea una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x, y) sin friccii $\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii $\dot{\mathbf{z}}$ n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.



- Sea una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x, y) sin fricci $\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii \dot{z}_2 n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{z}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$



- Sea una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x, y) sin friccii $\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii \dot{z}_2 n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{z}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi, \delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi, \delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variacii $\dot{\iota}^{\frac{1}{2}}$ n de \mathcal{L} bajo esta transformacii $\dot{\iota}^{\frac{1}{2}}$ n infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_{i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i}} \delta x_{i} + \sum_{i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}} \delta \dot{x}_{i} = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$



- Sea una parti $;\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x,y) sin friccii $;\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $;\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii \dot{z}_2 n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{z}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variacii $\dot{\ell}^{\frac{1}{2}}$ n de \mathcal{L} bajo esta transformacii $\dot{\ell}^{\frac{1}{2}}$ n infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_{i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i}} \delta x_{i} + \sum_{i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}} \delta \dot{x}_{i} = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condicii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_i, t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.



- Sea una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x, y) sin friccii $\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii \dot{z}_2 n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{z}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variacii \dot{i} and de $\mathcal L$ bajo esta transformacii \dot{i} infinitesimal es $\delta \mathcal L = \sum_i \frac{\partial \mathcal L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condicii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_{j},t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada

$$\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta \varphi - c = \text{cte}$$



- Sea una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x, y) sin friccii $\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii \dot{z}_2 n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{z}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ y $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variacii \dot{i} and de $\mathcal L$ bajo esta transformacii \dot{i} infinitesimal es $\delta \mathcal L = \sum_i \frac{\partial \mathcal L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = kxy\delta \varphi kyx\delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condicii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f \left(q_j,t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada

$$\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \text{cte}$$

• Como $\delta \varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} - y\dot{x}) \equiv L_z = cte$



- Sea una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x, y) sin friccii $\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii \dot{z}_2 n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{z}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ v $\delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variacii $\dot{\ell}^{\frac{1}{2}}$ n de \mathcal{L} bajo esta transformacii $\dot{\ell}^{\frac{1}{2}}$ n infinitesimal es $\delta \mathcal{L} = \sum_{i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{i}} \delta x_{i} + \sum_{i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}} \delta \dot{x}_{i} = kxy \delta \varphi kyx \delta \varphi m\dot{x}\dot{y}\delta \varphi + m\dot{y}\dot{x}\delta \varphi = 0$
- La condicii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_{j},t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada

$$\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \text{cte}$$

- Como $\delta \varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}kr^2$ y la coordenada φ es cï $\dot{\iota}\frac{1}{2}$ clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$



- Sea una parti $\frac{1}{2}$ cula de masa m sobre el plano (x, y) sin friccii $\frac{1}{2}$ n, sujeta a la fuerza eli $\frac{1}{2}$ stica de constante k $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$
- Supongamos una rotacii $\dot{\mathbf{z}}$ n infinitesimal $\delta \varphi = \delta \varphi \hat{\mathbf{z}}$ alrededor del eje z.
- Entonces $\delta \mathbf{r} = \delta \varphi \times \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, posee componentes $\delta x = -y \delta \varphi$, $\delta \dot{x} = -\dot{y} \delta \varphi$ $\forall \quad \delta y = x \delta \varphi$, $\delta \dot{y} = \dot{x} \delta \varphi$
- La variacii $\dot{i}\frac{1}{2}$ n de \mathcal{L} bajo esta transformacii $\dot{i}\frac{1}{2}$ n infinitesimal es $\delta\mathcal{L}=\sum_{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{i}}\delta x_{i}+\sum_{i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{i}}\delta \dot{x}_{i}=kxy\delta\varphi-kyx\delta\varphi-m\dot{x}\dot{y}\delta\varphi+m\dot{y}\dot{x}\delta\varphi=0$
- La condicii $\frac{1}{2}$ n $\delta \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d} f\left(q_{j},t\right)}{\mathrm{d} t}$ implica que $f = \mathsf{cte} = c$.
- La cantidad conservada

$$\mathcal{J} = \sum_{j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j}} \delta x_{j} - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - c = \text{cte}$$

- Como $\delta \varphi = cte$, tenemos $m(x\dot{y} y\dot{x}) \equiv L_z = cte$
- En coordenadas polares, el Lagrangiano es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}kr^2$ y la coordenada φ es cï $\dot{\iota}\frac{1}{2}$ clica, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$
- El momento conjugado $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{cte.}$

Conservacii; ¹/₂n de la energi; ¹/₂a



Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades meci
 ¹/₂nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.



- Consideremos un sistema homogi $\dot{\xi}^{\frac{1}{2}}$ neo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende expli $\dot{\xi}^{\frac{1}{2}}$ citamente de $t:\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)$.



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades meci
 ¹/₂nicas
 de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se
 observen.
- Consideremos un sistema homogi \dot{z}_2 neo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende expli \dot{z}_2 citamente de $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$.
- El cambio total de \mathcal{L} serï $\dot{\iota}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades meci¿½nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogi \dot{z}_2 neo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende expli \dot{z}_2 citamente de $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de \mathcal{L} serï $\dot{\iota}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuacii; $\frac{1}{2}$ n de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿¹/₂nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogi $\dot{\iota}_{2}^{1}$ neo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende expli $\dot{\iota}_{2}^{1}$ citamente de $t:\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)$.
- El cambio total de \mathcal{L} serï $\dot{z}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuaciï $\frac{1}{2}$ n de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$

Conservacii $\frac{1}{2}$ n de la energi $\frac{1}{2}$ a



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades meci¿ 1/2 nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homogi $\dot{\iota}_{2}^{1}$ neo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende expli $\dot{\iota}_{2}^{1}$ citamente de $t:\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)$.
- El cambio total de \mathcal{L} serï $\dot{z}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuaciï $\frac{1}{2}$ n de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$
- Con lo cual $\frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} \right] = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} = \text{ cte.}$



- Homogeneidad del tiempo significa que las propiedades mecï¿¹/₂nicas de un sistema no dependen del intervalo de tiempo en el cual se observen.
- Consideremos un sistema homog $\ddot{i}_2^{\frac{1}{2}}$ neo en el tiempo, el Lagrangiano \mathcal{L} no depende expl $\ddot{i}_2^{\frac{1}{2}}$ citamente de $t: \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$.
- El cambio total de \mathcal{L} serï $\dot{\iota}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$
- Usamos la ecuacii; $\frac{1}{2}$ n de Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)$,
- Tendremos $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{d}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \right]$
- Con lo cual $\frac{d}{\mathrm{d}t} \left[\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} \right] = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \mathcal{L} = \text{ cte.}$
- La energi \dot{l}_2^1 a es la cantidad escalar $E\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)\equiv\sum_{j=1}^s rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-\mathcal{L}$

Energij $\frac{1}{2}$ a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$



• Existen sistemas donde la energi $\dot{i}_{2}^{\frac{1}{2}}$ a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.

Energi \dot{z}_2 a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$



- Existen sistemas donde la energi $\frac{1}{2}$ a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una funcii; $\frac{1}{2}$ n de energi; $\frac{1}{2}$ a como $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$

Energi \dot{z}_2 a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$



- Existen sistemas donde la energi $\frac{1}{2}$ a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una funcii \dot{l}_2 n de energi \dot{l}_2 a como $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T\left(\dot{q}_{1},\ldots,\dot{q}_{s}
ight)=rac{1}{2}\sum_{ij}^{s}\mathcal{T}_{ij}\dot{q}_{i}\dot{q}_{j}\Rightarrow\sum_{j}^{s}rac{\partial T}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}=\left(\sum_{j}^{s}\mathcal{T}_{jj}\dot{q}_{j}
ight)\dot{q}_{j}=2T$$

Energi $\frac{1}{2}$ a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$



- Existen sistemas donde la energi $\frac{1}{2}$ a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una funcii \dot{l}_2 n de energi \dot{l}_2 a como $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T\left(\dot{q}_{1},\ldots,\dot{q}_{s}
ight)=rac{1}{2}\sum_{ij}^{s}\mathcal{T}_{ij}\dot{q}_{i}\dot{q}_{j}\Rightarrow\sum_{j}^{s}rac{\partial T}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}=\left(\sum_{j}^{s}\mathcal{T}_{jj}\dot{q}_{j}
ight)\dot{q}_{j}=2T$$

Entonces

$$E\left(q_{j},\dot{q}_{j}\right)=2T-\sum_{j=1}^{s}rac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}-T+V=T+V-\sum_{j=1}^{s}rac{\partial V}{\partial\dot{q}_{j}}\dot{q}_{j}$$

Energi $\frac{1}{2}$ a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$



- Existen sistemas donde la energi $\frac{1}{2}$ a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una funcii \dot{l}_2 n de energi \dot{l}_2 a como $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s)=\frac{1}{2}\sum_{ij}^s\mathcal{T}_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\Rightarrow\sum_j^s\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\left(\sum_j^s\mathcal{T}_{jj}\dot{q}_j\right)\dot{q}_j=2T$$

Entonces

$$E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

• Si la energi; $\frac{1}{2}$ a potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la funcii; $\frac{1}{2}$ n de energi; $\frac{1}{2}$ a es igual a la energi; $\frac{1}{2}$ a meci; $\frac{1}{2}$ nica total, $E(q_i, \dot{q}_i) = T + V$

Energi \dot{z}_2 a y Potenciales $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$



- Existen sistemas donde la energi $\frac{1}{2}$ a potencial depende tanto de las coordenadas como de las velocidades generalizadas: $V(q_i, \dot{q}_i)$.
- El Lagrangiano tiene la forma $\mathcal{L} = T(\dot{q}_j) V(q_j, \dot{q}_j)$. y se define una funcii \dot{l}_2 n de energi \dot{l}_2 a como $E(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \sum_{i=1}^s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j (T V)$
- Como en general

$$T(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s)=\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{ij}^s\mathcal{T}_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\Rightarrow\textstyle\sum_j^s\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\left(\textstyle\sum_j^s\mathcal{T}_{jj}\dot{q}_j\right)\dot{q}_j=2T$$

Entonces

$$E(q_j, \dot{q}_j) = 2T - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + V = T + V - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

- Si la energi; $\frac{1}{2}$ a potencial V es independiente de las velocidades, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$; entonces la funcii; $\frac{1}{2}$ n de energi; $\frac{1}{2}$ a es igual a la energi; $\frac{1}{2}$ a meci; $\frac{1}{2}$ nica total, $E(q_j, \dot{q}_j) = T + V$
- Si $V = V(q_j, \dot{q}_j,)$, la funcii \dot{l}_2 n de energi \dot{l}_2 a contiene ti \dot{l}_2 rminos adicionales a T + V.