Cuerpo Rígido: Energía cinética

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

22 de abril de 2025

Agenda

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j,$

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j,$
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\mathrm{cm}}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$
- El primer término es $\frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right) v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2} M v_{\rm cm}^2$.

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir
  $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$
- El primer término es $\frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right) v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2} M v_{\rm cm}^2$.
- El segundo término se simplifica usando
  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Entonces
  $\sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \cdot \left(\mathbf{v}_{\rm cm} \times \mathbf{\Omega}\right) =$
  $= \left(\mathbf{v}_{\rm cm} \times \mathbf{\Omega}\right) \cdot \cancelto{0}{\left(\sum_j m_j \mathbf{r}_j\right)} = 0$, ya que $\mathbf{R}_{\rm cm} = \frac{\sum_j m_j \mathbf{r}_j}{M} = 0$

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$

El Tensor de Inercia

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\rm cm} + T_{\rm rot}$

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$

El Tensor de Inercia

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$
- La energía cinética será $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k}\left(\Omega_i\Omega_k r_j^2\delta_{ik} - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right)$, o mejor $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\sum_j m_j\left(r_j^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$

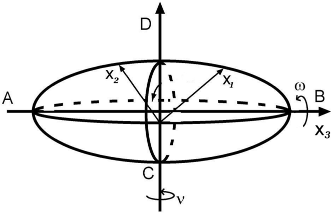
El Tensor de Inercia

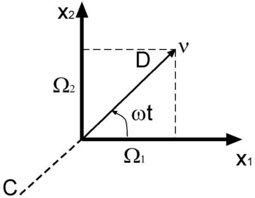
- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$
- La energía cinética será $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k}\left(\Omega_i\Omega_k r_j^2\delta_{ik} - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right)$, o mejor $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\sum_j m_j\left(r_j^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Donde

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum_j m_j\left(x_2^2 + x_3^2\right) & -\sum_j m_j x_1 x_2 & -\sum_j m_j x_1 x_3 \\ -\sum_j m_j x_2 x_1 & \sum_j m_j\left(x_1^2 + x_3^2\right) & -\sum_j m_j x_2 x_3 \\ -\sum_j m_j x_3 x_1 & -\sum_j m_j x_3 x_2 & \sum_j m_j\left(x_1^2 + x_2^2\right) \end{pmatrix}$$

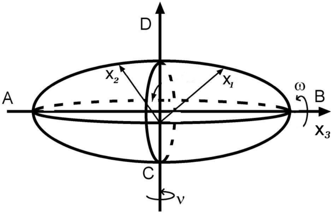
Elipsoide en rotación

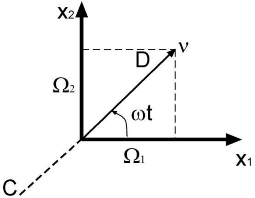
- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,





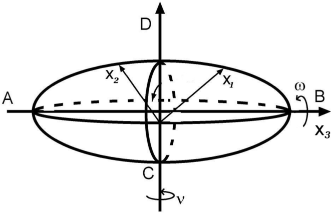
- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,

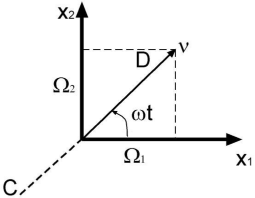




- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,

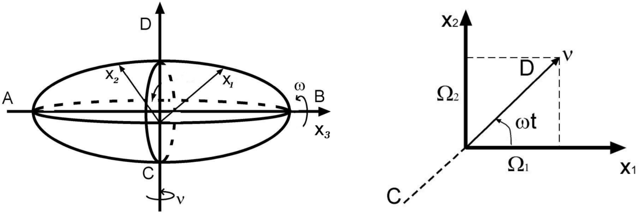




- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).
- Las componentes $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ son

$$\tilde{\Omega}_1 = \nu \cos \omega t, \quad \tilde{\Omega}_2 = \nu \operatorname{sen} \omega t \text{ y } \quad \tilde{\Omega}_3 = \omega,$$

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,



- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).
- Las componentes $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ son

$$\tilde{\Omega}_1 = \nu \cos \omega t, \quad \tilde{\Omega}_2 = \nu \operatorname{sen} \omega t \text{ y } \quad \tilde{\Omega}_3 = \omega,$$

- Finalmente $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} \tilde{\Omega}_1^2 + \frac{1}{2} I_{22} \tilde{\Omega}_2^2 + \frac{1}{2} I_{33} \tilde{\Omega}_3^2 \Rightarrow$
$T = \frac{1}{2}\left(I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \operatorname{sen}^2 \omega t\right) \nu^2 + \frac{1}{2} I_{33} \omega^2$

Recapitulando

En presentación consideramos

1. Descomposición: $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$

Recapitulando

En presentación consideramos

1. Descomposición: $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$
2. Tensor Inercia: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$, con $I_{ij} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right)$

Recapitulando

En presentación consideramos

1. Descomposición: $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$
2. Tensor Inercia: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$, con $I_{ij} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right)$
3. Elipsoide en Rotación: $\boldsymbol{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
   $T = \frac{1}{2} \left(I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \sin^2 \omega t \right) \nu^2 + \frac{1}{2} I_{33} \omega^2$