Cuerpo Rígido: ángulos y velocidades de Euler

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

30 de octubre de 2024

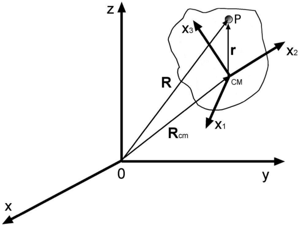
Agenda

Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas

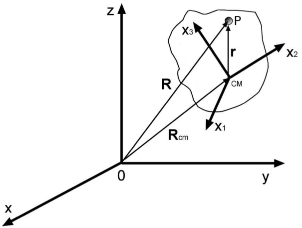
Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



Definiciones

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



- Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:
  - Un sistema inercial o laboratorio, denotado por (x, y, z) y con origen en un punto fijo O
  - Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa (CM), identificado por (x_1, x_2, x_3)

Desplazamiento general del cuerpo rígido

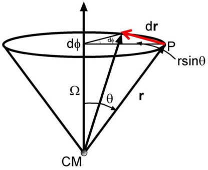
- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).

Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{r}$

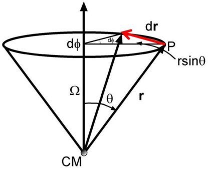
Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{r}$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}} + d\mathbf{r}$



Desplazamiento general del cuerpo rígido

- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y (x_1, x_2, x_3).
  - Rotación de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición $\mathbf{R}$ de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x, y, z) es $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\rm cm} + \mathbf{r}$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\rm cm} + d\mathbf{r}$



- Un cambio infinitesimal $d\mathbf{r}$ sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector $\mathbf{r}$, no a un cambio de su magnitud

Velocidades en un cuerpo rígido

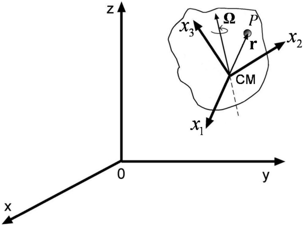
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.

Velocidades en un cuerpo rígido

- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$

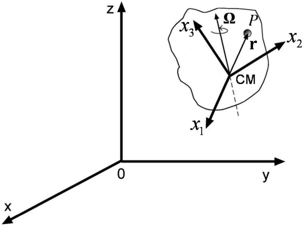
Velocidades en un cuerpo rígido

- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\rm cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



Velocidades en un cuerpo rígido

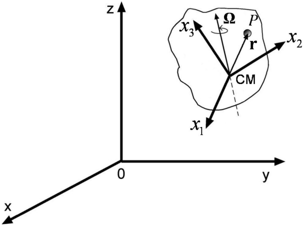
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),
  $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),
  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.

Velocidades en un cuerpo rígido

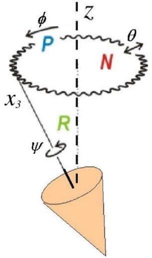
- Si θ el ángulo entre la dirección $d\phi$ y el vector $\mathbf{r}$, entonces el vector $d\mathbf{r}$ es perpendicular al plano $(d\phi, \mathbf{r})$.
- Su magnitud es $dr = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$ y su dirección $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$: velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),
  $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt}$ velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),
  $\mathbf{\Omega} = \frac{d\phi}{dt}$: velocidad angular instantánea de rotación.
- La dirección de la velocidad angular instantánea $\mathbf{\Omega}$ es la misma que la del vector $d\phi$

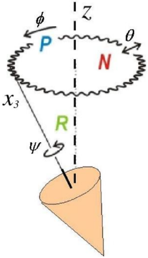
Precesión, nutación y rotación

- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,



Precesión, nutación y rotación

- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - **nutación:** inclinación con respecto al eje fijo y

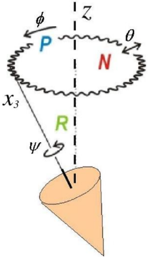


-
  - **Angulo Euler de precesión**, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - **Angulo Euler de nutación**, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3.

Precesión, nutación y rotación

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - **precesión:** rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - **nutación:** inclinación con respecto al eje fijo y
  - **rotación:** rotación del cuerpo sobre sí mismo.



-
  - **Angulo Euler de precesión**, $\phi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - **Angulo Euler de nutación**, $\theta \in [0, \pi]$: ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta x_3.
  - **Angulo Euler de rotación**, $\psi \in [0, 2\pi]$: ángulo de rotación con respecto al eje x_3, sobre el plano (x_1, x_2), medido desde N a x_1.

Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\text{sen}\;\psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta)\,\text{sen}\;\psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta)\cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$

Velocidad $\mathbf{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\text{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta)\,\text{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\text{sen}\ \theta) \cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\mathbf{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.

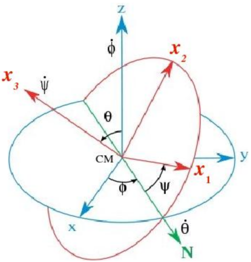
Velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

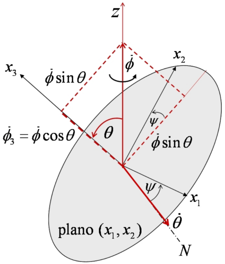
- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\,\mathrm{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.

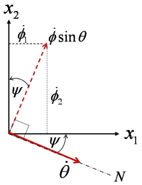
Velocidad $\mathbf{\Omega}$ ángulos y velocidades de Euler

- Las velocidades angulares $\dot{\phi}, \dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes (x_1, x_2, x_3) como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$ y $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$, $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$ y $\dot{\theta}_3 = 0$, ya que $\dot{\theta}$ es perpendicular a x_3
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\,\mathrm{sen}\ \psi$, $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta)\cos\psi$ y $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$
- La velocidad angular instantánea $\mathbf{\Omega}$ es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ se expresan en términos de los ángulos de (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades angulares $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$.
- Para cada componente Ω_i, respecto al sistema centro de masa, tenemos $\Omega_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad i = 1, 2, 3.$
  $\Omega_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\,\mathrm{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\Omega_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$
  $\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

Componentes y velocidades angulares







- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).

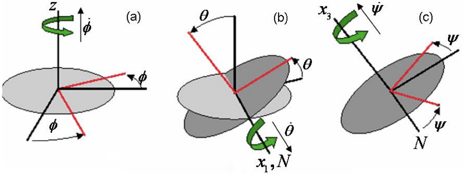
Del sistema Centro de Masa al Laboratorio 1/2

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).
- Si $\mathbf{r}_L$ son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1 x_2 x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\, \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\, r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\, \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\, \tilde{r}^j$

Del sistema Centro de Masa al Laboratorio 1/2

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).
- Si $\mathbf{r}_L$ son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1 x_2 x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\, r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\,\mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\, \tilde{r}^j$
- Claramente $\mathbb{U}\tilde{\mathbb{U}} \equiv \tilde{\mathbb{U}}\mathbb{U} = \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{\mathbb{U}} = \mathbb{U}^{-1}$

- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler (ϕ, θ, ψ).
- Si $\mathbf{r}_L$ son las coordenadas de un punto en el sistema S_{xyz} laboratorio y $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$ las de un punto en el sistema $\tilde{S}_{x_1 x_2 x_3}$ centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\, r^j$ y $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\,\mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\,\tilde{r}^j$
- Rotamos tres veces $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$ respecto a $S_{x,y,z}$.



$$\tilde{\mathbb{U}}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbb{U}}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tilde{\mathbb{U}}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$
$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$
- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.
- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}^{T}_{\psi\theta\phi}$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.

Título transparencia

- En general concatenamos las tres rotaciones como $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Como tenemos $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ también tendremos $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$.

- Por lo tanto $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa $\tilde{\mathbb{U}}^{-1}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}^{T}_{\psi\theta\phi}$ y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.

- $\tilde{\mathbb{U}}^{-1} = \tilde{\mathbb{U}}^{T} = \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\psi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$