Transformaciones Canónicas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

6 de noviembre de 2024

Agenda

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i, \quad P_i = q_i$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i, \quad P_i = q_i$
- Entonces $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i}\right) =$
  $-\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$
  $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{Q}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right) =$
  $-\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}$ Claramente no se cumplen

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$
\left.\begin{array}{r} \mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{c} \text{Transformación canónica} \\ P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right) \\ Q_i\left(q_j, p_j, t\right) \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{l} \tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right) \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} \end{array}\right.
$$

Transformaciones Canónicas

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$
\left.\begin{array}{r}
\mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right) \\
\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}
\end{array}\right| \begin{array}{c}
\rightarrow \text{ Transformación canónica } \rightarrow \\
P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right) \\
Q_i\left(q_j, p_j, t\right)
\end{array} \left| \begin{array}{l}
\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right) \\
\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\
\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}
\end{array}\right.
$$

- Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$ no depende explícitamente de alguna coordenada Q_j o momento P_j

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\tilde{\mathcal{H}}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$
  $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\tilde{\mathcal{H}}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}}\right)$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\tilde{\mathcal{H}}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}} \right)$
- La función $\mathcal{F}$ se llama función generadora de la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$.

- Dada una $\mathcal{F}\left(q_i, p_i, Q_i, P_i, t\right)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}\left(q_i, p_i, Q_i, P_i, t\right)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \tilde{\mathcal{H}}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.
- La relación entre el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ y el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ resultante de la transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{Q_i, P_i, t\}$ generada por una $\mathcal{F}$ siempre es $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$