

# Partícula en un Campo electromagnético

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



29 de agosto de 2024

- 1 Fuerza de Lorentz una *una fuerza generalizada*
- 2 El potencial vector
- 3 Simetría de Calibre

- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$

- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas:  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ .

- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas:  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ .
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , donde  $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$  y  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , genérico

- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas:  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ .
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , donde  $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$  y  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , genérico
- La ecuación de Lagrange es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$

- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas:  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ .
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , donde  $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$  y  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , genérico
- La ecuación de Lagrange es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$

- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas:  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ .
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , donde  $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$  y  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , genérico
- La ecuación de Lagrange es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir:  $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$



- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas:  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ .
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , donde  $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$  y  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , genérico
- La ecuación de Lagrange es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir:  $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.

- Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$ , en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y un campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , está sujeta a fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas:  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ .
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , donde  $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mv^2$  y  $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , genérico
- La ecuación de Lagrange es  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Es decir:  $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.
- La fuerza de Lorentz constituye una fuerza generalizada

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector
- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector
- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector
- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector
- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- o también  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$



- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector
- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- o también  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$
- Donde  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector
- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$
- Entonces  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$
- o también  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$
- Donde  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
- Como  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector

- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

- Entonces  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- La fuerza de Lorentz será  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$

- o también  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$

- Donde  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

- Como  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Tendremos  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right]$   
 $\Rightarrow F_i = q \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right]$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

- Claramente  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  un potencial vector

- Con lo cual  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$

- Entonces  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- La fuerza de Lorentz será  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]$

- o también  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla\varphi + \frac{1}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$

- Donde  $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$

- Como  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

- Tendremos  $\mathbf{F} = q \left[ -\nabla \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right]$

$$\Rightarrow F_i = q \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{dA_i}{dt} \right]$$

- Como  $\frac{\partial V}{\partial x_i} = q \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$  y  $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{q}{c} A_i$

- Finalmente el potencial será  $V = q \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$

- Finalmente el potencial será  $V = q \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2} m v^2 - q \varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$

- Finalmente el potencial será  $V = q \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía  $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$

- Finalmente el potencial será  $V = q \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía  $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía  $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , ya a que  $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  depende de la velocidad de la partícula.



- Finalmente el potencial será  $V = q \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía  $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía  $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , ya a que  $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía  $E$  se conserva dado que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

- Finalmente el potencial será  $V = q \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía  $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía  $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , ya a que  $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía  $E$  se conserva dado que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía  $E$  no depende del potencial vector  $\mathbf{A}$  y, por tanto, tampoco depende del campo magnético  $\mathbf{B}$ .

- Finalmente el potencial será  $V = q \left( \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right)$
- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$
- La función energía  $E = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \dot{x}_j - L = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía  $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , ya a que  $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía  $E$  se conserva dado que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía  $E$  no depende del potencial vector  $\mathbf{A}$  y, por tanto, tampoco depende del campo magnético  $\mathbf{B}$ .
- La fuerza magnética no realiza trabajo ya que siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula.

- El momento conjugado  $p_i$  asociado con la coordenada  $x_i$  es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

- El momento conjugado  $p_i$  asociado con la coordenada  $x_i$  es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.

- El momento conjugado  $p_i$  asociado con la coordenada  $x_i$  es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  que derivan de  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .

- El momento conjugado  $p_i$  asociado con la coordenada  $x_i$  es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  que derivan de  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .
- Consideremos la **transformación de calibre**:
$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$
 donde  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  es un campo escalar arbitrario

- El momento conjugado  $p_i$  asociado con la coordenada  $x_i$  es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  que derivan de  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .
- Consideremos la **transformación de calibre**:
$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$
 donde  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  es un campo escalar arbitrario
- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación
$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$
$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$



- El momento conjugado  $p_i$  asociado con la coordenada  $x_i$  es
$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  que derivan de  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  y  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .
- Consideremos la **transformación de calibre**:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad y \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad \text{donde}$$

$\Lambda(\mathbf{r}, t)$  es un campo escalar arbitrario

- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación
$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$
$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$$
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$
- El Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético bajo una transformación de calibre, es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi' + \frac{q}{c}\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \frac{q}{c}\nabla\Lambda \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathcal{L} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \nabla\Lambda \cdot \mathbf{v}\right) = \mathcal{L} + \frac{q}{c}\frac{d\Lambda}{dt}\end{aligned}$$

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de  $L$  son invariantes bajo una transformación de calibre.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de  $L$  son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de  $L$  son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell conservan su forma bajo una transformación de calibre, lo cual indica la existencia de una simetría fundamental en la interacción electromagnética, llamada **simetría de calibre**

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de  $L$  son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell conservan su forma bajo una transformación de calibre, lo cual indica la existencia de una simetría fundamental en la interacción electromagnética, llamada **simetría de calibre**
- Si expresamos  $L' = L + \delta L$ , donde  $\delta L$  es la transformación infinitesimal  $\delta L = \frac{d\Lambda}{dt}$  que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de  $L$  son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell conservan su forma bajo una transformación de calibre, lo cual indica la existencia de una simetría fundamental en la interacción electromagnética, llamada **simetría de calibre**
- Si expresamos  $L' = L + \delta L$ , donde  $\delta L$  es la transformación infinitesimal  $\delta L = \frac{d\Lambda}{dt}$  que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de  $L$  son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell conservan su forma bajo una transformación de calibre, lo cual indica la existencia de una simetría fundamental en la interacción electromagnética, llamada **simetría de calibre**
- Si expresamos  $L' = L + \delta L$ , donde  $\delta L$  es la transformación infinitesimal  $\delta L = \frac{d\Lambda}{dt}$  que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.
- La simetría de calibre de las ecuaciones de Maxwell implica la conservación de la carga eléctrica