Teoría Potencial

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

7 de noviembre de 2025

Agenda: Teoría Potencial

1. Potenciales escalares
2. Potenciales vectoriales
3. Los potenciales electromagnéticos
4. Teorema de Helmholtz
5. Teorema de Helmholtz
6. Recapitulando

- Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ en una determinada región R (simplemente conexa) se le puede asociar un potencial $\phi(x, y, z)$ tendremos $\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x^i) = 0 \Leftrightarrow \oint \mathbf{F}(x^i) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$

Potenciales escalares

- Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ en una determinada región R (simplemente conexa) se le puede asociar un potencial $\phi(x,y,z)$ tendremos $\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x^i) = 0 \Leftrightarrow \oint \mathbf{F}(x^i)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$
- Estas tres condiciones son equivalentes.
- Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional

$$-\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\right) = 0 \\ \\ -\oint \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\oint \mathrm{d}\phi = \phi\left(x_0^i\right) - \phi\left(x_0^i\right) = 0 \end{array} \right.$$

porque $\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\varphi$.

Potenciales escalares

- Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ en una determinada región R (simplemente conexa) se le puede asociar un potencial $\phi(x,y,z)$ tendremos $\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x^i) = 0 \Leftrightarrow \oint \mathbf{F}(x^i)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$
- Estas tres condiciones son equivalentes.
- Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional
$$-\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\right) = 0 \\ \\ -\oint \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\oint \mathrm{d}\phi = \phi\left(x_0^i\right) - \phi\left(x_0^i\right) = 0 \end{array} \right.$$
porque $\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\varphi$.
- Un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial. Un campo conservativo implica $-\int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_B) - \varphi(\mathbf{r}_A)$ Claramente, $\oint \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ y el teorema de Stokes lleva $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x^i) = 0$

- Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ en una determinada región R (simplemente conexa) se le puede asociar un potencial $\phi(x, y, z)$ tendremos $\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x^i) = 0 \Leftrightarrow \oint \mathbf{F}(x^i) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$
- Estas tres condiciones son equivalentes.
- Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional
$$-\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\right) = 0 \\ \\ -\oint \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\oint \mathrm{d}\phi = \phi\left(x_0^i\right) - \phi\left(x_0^i\right) = 0 \end{array} \right.$$
porque $\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\varphi$.
- Un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial. Un campo conservativo implica $-\int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_B) - \varphi(\mathbf{r}_A)$ Claramente, $\oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ y el teorema de Stokes lleva $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x^i) = 0$
- Un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y es conservativo.
$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x^i) = 0 \Rightarrow \iint_{S_2} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \phi\left(x_0^i\right) - \phi\left(x_0^i\right),$

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.
- El *potencial vectorial* $\mathbf{A}(x, y, z)$ del campo $\mathbf{F}$, no es único.

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.
- El *potencial vectorial* $\mathbf{A}(x, y, z)$ del campo $\mathbf{F}$, no es único.
- Existe la arbitrariedad de un campo escalar, *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (gauge), tal qué $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)$

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \nabla \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.
- El *potencial vectorial* $\mathbf{A}(x, y, z)$ del campo $\mathbf{F}$, no es único.
- Existe la arbitrariedad de un campo escalar, *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (gauge), tal qué $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(x^i)$
- $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A}$

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.
- El *potencial vectorial* $\mathbf{A}(x, y, z)$ del campo $\mathbf{F}$, no es único.
- Existe la arbitrariedad de un campo escalar, *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (gauge), tal qué $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)$
- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$
- Varios potenciales vectoriales $\mathbf{A}$ generan el mismo campo vectorial $\mathbf{F}$.

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.
- El *potencial vectorial* $\mathbf{A}(x, y, z)$ del campo $\mathbf{F}$, no es único.
- Existe la arbitrariedad de un campo escalar, *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (gauge), tal qué $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)$
- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$
- Varios potenciales vectoriales $\mathbf{A}$ generan el mismo campo vectorial $\mathbf{F}$.
- Existen varios calibres. Los más conocidos son

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.
- El *potencial vectorial* $\mathbf{A}(x, y, z)$ del campo $\mathbf{F}$, no es único.
- Existe la arbitrariedad de un campo escalar, *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (gauge), tal qué $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)$
- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$
- Varios potenciales vectoriales $\mathbf{A}$ generan el mismo campo vectorial $\mathbf{F}$.
- Existen varios calibres. Los más conocidos son
  - **Calibre de Lorentz:** $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\chi(x^i)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$

Potenciales vectoriales

- Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*).
- Un potencial *vectorial* es $\mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0$.
- El *potencial vectorial* $\mathbf{A}(x, y, z)$ del campo $\mathbf{F}$, no es único.
- Existe la arbitrariedad de un campo escalar, *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (gauge), tal qué $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)$
- $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$
- Varios potenciales vectoriales $\mathbf{A}$ generan el mismo campo vectorial $\mathbf{F}$.
- Existen varios calibres. Los más conocidos son
  - **Calibre de Lorentz:** $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \chi(x^i)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$
  - **El calibre de Coulomb, de radiación o transverso:** $\boldsymbol{\nabla}^2 \chi(x^i) = 0$ $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}'(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{A}(x^i) + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)\right) = 0.$

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. No hay monopolos magnéticos.

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. No hay monopolos magnéticos.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; $\quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; $\quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. No hay monopolos magnéticos.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$
- Con lo cual $-\nabla\varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. No hay monopolos magnéticos.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0,$
- Con lo cual $-\nabla\varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- Como $\mathbf{A}$ tiene una libertad de calibre imponemos $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. No hay monopolos magnéticos.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$
- Con lo cual $-\nabla \varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- Como $\mathbf{A}$ tiene una libertad de calibre imponemos $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
- La ecuación de Gauss del campo electrico queda
  $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; $\quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; $\quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. No hay monopolos magnéticos.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$
- Con lo cual $-\nabla\varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- Como $\mathbf{A}$ tiene una libertad de calibre imponemos $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
- La ecuación de Gauss del campo electrico queda
$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$
- El calibre de Lorentz permite desacoplar $\mathbf{A}$ y φ

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
  $\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0};\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0;\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t};\quad \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\left(\mathbf{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$. No hay monopolos magnéticos.
- $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0,$
- Con lo cual $-\nabla\varphi=\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- Como $\mathbf{A}$ tiene una libertad de calibre imponemos $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{A}=0$
- La ecuación de Gauss del campo electrico queda
  $\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=-\nabla^2\varphi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$
- El calibre de Lorentz permite desacoplar $\mathbf{A}$ y φ
- El potencial escalar φ se obtiene la densidad de carga ρ

Los potenciales electromagnéticos

- Las ecuaciones de Maxwell son
  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$
- Las ecuaciones de Maxwell se expresan en términos de potenciales escalares $\phi(x^i)$, potenciales vectoriales $\mathbf{A}(x^i)$, cargas Q_i y corrientes $\mathbf{J}$.
- $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, garantiza $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. No hay monopolos magnéticos.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$
- Con lo cual $-\nabla\varphi = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- Como $\mathbf{A}$ tiene una libertad de calibre imponemos $\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
- La ecuación de Gauss del campo electrico queda
  $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$
- El calibre de Lorentz permite desacoplar $\mathbf{A}$ y φ
- El potencial escalar φ se obtiene la densidad de carga ρ
- Finalmente, a partir $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}$, obtenemos $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$

- Si el rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ y la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F}_l = 0$ de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único.

Teorema de Helmholtz 1/2

- Si el rotacional $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ y la divergencia $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = 0$ de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único.
- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t\,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0\,. \end{array} \right.$

Teorema de Helmholtz 1/2

- Si el rotacional $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ y la divergencia $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = 0$ de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único.
- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t$, con $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \,. \end{array} \right.$
- En general el campo $\mathbf{F}$ puede ser discontinuo, entonces

$$\left. \begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = \rho(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \,, \end{array} \right.$$

Teorema de Helmholtz 2/2

- Entonces
  $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_I = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}_I = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}_I = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho\left(\mathbf{r}\right)$
  y la solución existe y es única.

Teorema de Helmholtz 2/2

- Entonces
  $$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \ \Rightarrow \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \ \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho\left(\mathbf{r}\right)$$
  y la solución existe y es única.
- Por otra parte $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \Rightarrow$
  $$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}\right) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \mathbf{J}\left(\mathbf{r}\right) \ .$$

Teorema de Helmholtz 2/2

- Entonces
  $\nabla\times\mathbf{F}_l = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}_l = -\nabla\phi(x^i) \;\Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}_l = -\nabla^2\phi(x^i) = \rho\left(\mathbf{r}\right)$
  y la solución existe y es única.
- Por otra parte $\nabla\cdot\mathbf{F}_t = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_t = \nabla\times\mathbf{A} \Rightarrow$
  $\nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}_t = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{J}\left(\mathbf{r}\right)$.
- El calibre de Coulomb $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ tendremos
  $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla^2\mathbf{A} = \partial^i\partial_i\ \mathbf{A} = -\mathbf{J}\left(\mathbf{r}\right)$

$$\Rightarrow \partial^i\partial_i\ A^k = -J^k\left(\mathbf{r}\right) \;\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla^2 A_x = -J_x\left(\mathbf{r}\right) \\ \\ \nabla^2 A_y = -J_y\left(\mathbf{r}\right) \\ \\ \nabla^2 A_z = -J_z\left(\mathbf{r}\right) \end{array}\right.$$

Recapitulando

- LZZZZZZ