

Integrales complejas

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



5 de agosto de 2021

- 1 Integrales complejas
- 2 Teorema integral de Cauchy
- 3 Fórmula integral de Cauchy
- 4 Recapitulando

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z).$$

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z).$$

- Es una integral de línea, ya que z tiene “dos dimensiones”

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [dx + i dy] [u(x, y) + i v(x, y)] =$$
$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y) dx + u(x, y) dy],$$

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z).$$

- Es una integral de línea, ya que z tiene “dos dimensiones”

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [dx + i dy] [u(x, y) + i v(x, y)] =$$
$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y) dx + u(x, y) dy],$$

- Con las siguientes propiedades

- $\int_C dz (f(z) + g(z)) = \int_C dz f(z) + \int_C dz g(z).$
- $\int_C dz Kf(z) = K \int_C dz f(z)$ con K una constante real o compleja.
- $\int_a^b dz f(z) = - \int_b^a dz f(z).$
- $\int_a^b dz f(z) = \int_a^m dz f(z) + \int_m^b dz f(z).$
- $\int_C dz |f(z)| \leq ML$, donde $M = \max |f(z)|$ y L la longitud de C .
- Esta última propiedad permite establecer cotas a las integrales complejas sin evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demostración $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z) \Rightarrow$

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\zeta_j)| |\Delta z_j| \leq M \sum_{j=1}^n |\Delta z_j| \leq ML.$$

El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, \mathcal{R} , en su contorno \mathcal{C} y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado \mathcal{C} se anula: $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$.

El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

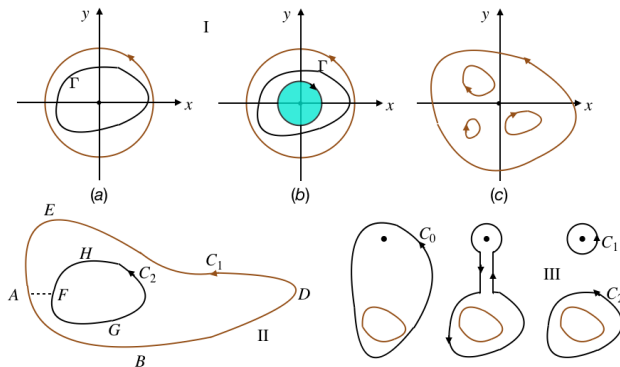
- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, \mathcal{R} , en su contorno \mathcal{C} y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado \mathcal{C} se anula: $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$.
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]$.

El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

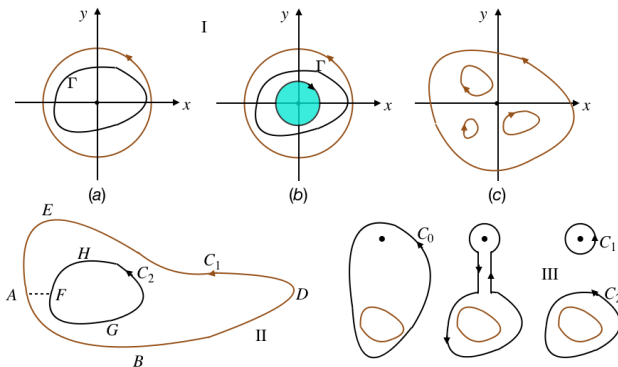
- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, \mathcal{R} , en su contorno \mathcal{C} y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado \mathcal{C} se anula: $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$.
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]$.
- El Teorema de Stokes nos dice que
$$\int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \oint_{\mathcal{C}} (p dy - q dx),$$

El Teorema integral de Cauchy dice que si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, \mathcal{R} , en su contorno \mathcal{C} y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado \mathcal{C} se anula: $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$.
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]$.
- El Teorema de Stokes nos dice que $\int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \oint_{\mathcal{C}} (pdy - qdx)$,
- Si suponemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $dz = dx + idy$, entonces tendremos que $\oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i \oint_{\mathcal{C}} (vdx + udy) = \int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y} \right) + i \int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y} \right) = 0$,



- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene** “huecos”



- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene** “huecos”
- Una región **Multiplemente conexa** es aquella que **tiene** “huecos”

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_C dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv$
 $\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0,$

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_C dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv \int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0,$
- como $\int_{AF} dz f(z) = -\int_{FA} dz f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) = 0,$

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_C dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv \int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0$,
- como $\int_{AF} dz f(z) = -\int_{FA} dz f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) = 0$,
- Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} , da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.
 $\oint_{C_1} dz f(z) - \oint_{C_2} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) = \oint_{C_2} dz f(z)$.

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_C dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv \int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0$,
- como $\int_{AF} dz f(z) = -\int_{FA} dz f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) = 0$,
- Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} , da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.
 $\oint_{C_1} dz f(z) - \oint_{C_2} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) = \oint_{C_2} dz f(z)$.
- Este resultado puede extenderse a regiones con n huecos
 $\oint_{C_1} dz f(z) = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} dz f(z)$.

- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. $\oint_C dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv \int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0$,
- como $\int_{AF} dz f(z) = -\int_{FA} dz f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) = 0$,
- Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} , da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.
 $\oint_{C_1} dz f(z) - \oint_{C_2} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) = \oint_{C_2} dz f(z)$.
- Este resultado puede extenderse a regiones con n huecos
 $\oint_{C_1} dz f(z) = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} dz f(z)$.
- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**
Si una función $f(z)$ es continua en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno \mathcal{C} y $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en \mathcal{R} .

Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno \mathcal{C} y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0).$$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno \mathcal{C} y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0).$$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \rightarrow 0$ tendremos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = f(z_0).$$

Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno \mathcal{C} y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0).$$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \rightarrow 0$ tendremos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = f(z_0).$$

- Es válida para todo z : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$

Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno \mathcal{C} y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0).$$

- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \rightarrow 0$ tendremos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = f(z_0).$$

- Es válida para todo z : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$

En presentación consideramos

1