Autovalores de Matrices importantes

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

9 de octubre de 2025

- Consideremos la transformación $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S}$, donde $\mathbb{D}\text{iag}$ es un operador diagonal cuya representación matricial será
$\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \iff \text{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) \equiv \lambda_j \delta^i_j = \left(S^{-1}\right)^i_k A^k_m S^m_j,.$
Debe haber restricciones sobre $\mathbb{A}$ para que sea diagonalizable

Autovectores como matrices de transformación

- Consideremos la transformación $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S}$, donde $\mathbb{D}\text{iag}$ es un operador diagonal cuya representación matricial será $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \iff \text{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) \equiv \lambda_j \delta^i_j = \left(S^{-1}\right)^i_k A^k_m S^m_j,.$ Debe haber restricciones sobre $\mathbb{A}$ para que sea diagonalizable
- Supondremos que $\mathbb{A}$ es diagonalizable, entonces $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \Rightarrow \mathbb{S}\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{A}\mathbb{S} \iff S^i_m \lambda_j \delta^m_j = A^i_m S^m_j \Rightarrow A^i_m S^m_j = \lambda_j S^i_j$ (j no suma)

Autovectores como matrices de transformación

- Consideremos la transformación $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S}$, donde $\mathbb{D}\text{iag}$ es un operador diagonal cuya representación matricial será $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \iff \text{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) \equiv \lambda_j \delta^i_j = \left(S^{-1}\right)^i_k A^k_m S^m_j$,.
  Debe haber restricciones sobre $\mathbb{A}$ para que sea diagonalizable
- Supondremos que $\mathbb{A}$ es diagonalizable, entonces $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \Rightarrow \mathbb{S}\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{A}\mathbb{S} \iff S^i_m \lambda_j \delta^m_j = A^i_m S^m_j \Rightarrow A^i_m S^m_j = \lambda_j S^i_j$ (j no suma)
- Esto es:
  $A^i_m S^m_1 = \lambda_1 S^i_1;\ A^i_m S^m_2 = \lambda_2 S^i_2;\ A^i_m S^m_3 = \lambda_3 S^i_3;\ \cdots A^i_m S^m_n = \lambda_n S^i_n.$

Autovectores como matrices de transformación

- Consideremos la transformación $\mathbb{D}\mathrm{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S}$, donde $\mathbb{D}\mathrm{iag}$ es un operador diagonal cuya representación matricial será
$\mathbb{D}\mathrm{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \iff \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) \equiv \lambda_j \delta^i_j = \left(S^{-1}\right)^i_k A^k_m S^m_j,.$
Debe haber restricciones sobre $\mathbb{A}$ para que sea diagonalizable
- Supondremos que $\mathbb{A}$ es diagonalizable, entonces $\mathbb{D}\mathrm{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \Rightarrow$ $\mathbb{S}\mathbb{D}\mathrm{iag} = \mathbb{A}\mathbb{S} \iff S^i_m \lambda_j \delta^m_j = A^i_m S^m_j \Rightarrow A^i_m S^m_j = \lambda_j S^i_j$ (j no suma)
- Esto es:
$A^i_m S^m_1 = \lambda_1 S^i_1;\ A^i_m S^m_2 = \lambda_2 S^i_2;\ A^i_m S^m_3 = \lambda_3 S^i_3;\ \cdots A^i_m S^m_n = \lambda_n S^i_n.$
- Cada una de estas ecuaciones es una ecuación de autovalores para autovectores $S^i_1, S^i_2, S^i_3, \cdots S^i_n$.

Autovectores como matrices de transformación

- Consideremos la transformación $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S}$, donde $\mathbb{D}\text{iag}$ es un operador diagonal cuya representación matricial será
$\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \iff \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \equiv \lambda_j \delta^i_j = \left(S^{-1}\right)^i_k A^k_m S^m_j,.$
Debe haber restricciones sobre $\mathbb{A}$ para que sea diagonalizable
- Supondremos que $\mathbb{A}$ es diagonalizable, entonces $\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \Rightarrow \mathbb{S}\mathbb{D}\text{iag} = \mathbb{A}\mathbb{S} \iff S^i_m \lambda_j \delta^m_j = A^i_m S^m_j \Rightarrow A^i_m S^m_j = \lambda_j S^i_j$ (j no suma)
- Esto es:
$A^i_m S^m_1 = \lambda_1 S^i_1;\ A^i_m S^m_2 = \lambda_2 S^i_2;\ A^i_m S^m_3 = \lambda_3 S^i_3;\ \cdots A^i_m S^m_n = \lambda_n S^i_n.$
- Cada una de estas ecuaciones es una ecuación de autovalores para autovectores $S^i_1, S^i_2, S^i_3, \cdots S^i_n$.
- La matriz de transformación S^m_j está construida por columnas de autovectores

Operadores Hermíticos y Unitarios

- Si un operador $\mathbb{U}$ es unitario
  $\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \Rightarrow \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1; \lambda_j^*\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda_j^*\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$

Operadores Hermíticos y Unitarios

- Si un operador $\mathbb{U}$ es unitario
  $\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \Rightarrow \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1; \lambda_j^*\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda_j^*\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$
- Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados con $[\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$

Operadores Hermíticos y Unitarios

- Si un operador $\mathbb{U}$ es unitario
  $\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \Rightarrow \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1; \lambda_j^*\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda_j^*\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$
- Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados con $[\mathbb{B},\mathbb{A}] = 0$
- Si $\{|u_i\rangle\}$ son autovectores de $\mathbb{A}$ también son autovectores de $\mathbb{B}$.

Operadores Hermíticos y Unitarios

- Si un operador $\mathbb{U}$ es unitario
  $\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \Rightarrow \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1; \lambda_j^*\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda_j^*\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$
- Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados con $[\mathbb{B},\mathbb{A}] = 0$
- Si $\{|u_i\rangle\}$ son autovectores de $\mathbb{A}$ también son autovectores de $\mathbb{B}$.
- $\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle$, como $[\mathbb{B},\mathbb{A}] = 0$, entonces $\mathbb{A}\mathbb{B}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle$. Por lo tanto, $\mathbb{B}|u_i\rangle$ es un autovector de $\mathbb{A}$.

Operadores Hermíticos y Unitarios

- Si un operador $\mathbb{U}$ es unitario
$\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \Rightarrow \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1; \lambda_j^*\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda_j^*\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$
- Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados con $[\mathbb{B},\mathbb{A}] = 0$
- Si $\{|u_i\rangle\}$ son autovectores de $\mathbb{A}$ también son autovectores de $\mathbb{B}$.
- $\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \;\Rightarrow\; \mathbb{B}\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle$, como $[\mathbb{B},\mathbb{A}] = 0$, entonces $\mathbb{A}\mathbb{B}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle$. Por lo tanto, $\mathbb{B}|u_i\rangle$ es un autovector de $\mathbb{A}$.
- Pero la solución para la ecuación de autovectores $(\mathbb{A} - \lambda_i\mathbb{I})\,|u_i\rangle = 0$ es única, por lo cual todos los autovectores de $\mathbb{A}$ son proporcionales.

Operadores Hermíticos y Unitarios

- Si un operador $\mathbb{U}$ es unitario
  $\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \Rightarrow \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1; \lambda_j^*\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda_j^*\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = \mathrm{e}^{i\varphi_j}$
- Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados con $[\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$
- Si $\{|u_i\rangle\}$ son autovectores de $\mathbb{A}$ también son autovectores de $\mathbb{B}$.
- $\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \ \Rightarrow \ \mathbb{B}\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle$, como $[\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$, entonces $\mathbb{A}\mathbb{B}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle$. Por lo tanto, $\mathbb{B}|u_i\rangle$ es un autovector de $\mathbb{A}$.
- Pero la solución para la ecuación de autovectores $(\mathbb{A} - \lambda_i\mathbb{I})\,|u_i\rangle = 0$ es única, por lo cual todos los autovectores de $\mathbb{A}$ son proporcionales.
- Esto es: $\mathbb{B}|u_j\rangle = \mu_j|u_j\rangle$, con lo cual queda demostrado que los autovectores de $\mathbb{A}$ son autovectores de $\mathbb{B}$.

Título transparencia

-

Título transparencia

-
-

Título transparencia

-
-
-

Título transparencia

Título transparencia

-
-

Título transparencia

-
-
-

Título transparencia

Título transparencia

-
-

Título transparencia

Recapitulando

En presentación consideramos

1.

Autoevaluación

-

Para la discusión

-