Vector Laplace-Runge-Lenz

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

16 de septiembre de 2024

Agenda

El vector $\mathbf{A}$

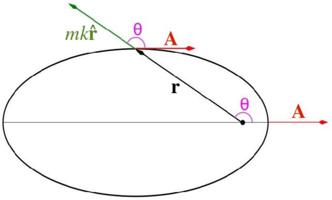
- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.

El vector $\mathbf{A}$

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e =$ cte.

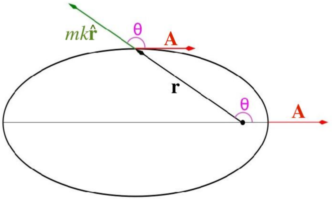
El vector $\mathbf{A}$

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \text{cte}$.
- $\mathbf{A}$ es un vector de magnitud es constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x, $\mathbf{A} = \mu k e\hat{\mathbf{i}}$.



El vector $\mathbf{A}$

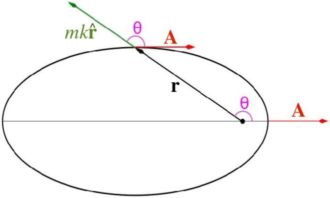
- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e =$ cte.
- $\mathbf{A}$ es un vector de magnitud es constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x, $\mathbf{A} = \mu k e \hat{\mathbf{i}}$.



- Como $L^2 = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{l}) \Rightarrow \mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{r}\cdot[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - \mu k\hat{\mathbf{r}}]$

El vector $\mathbf{A}$

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e =$ cte.
- $\mathbf{A}$ es un vector de magnitud es constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x, $\mathbf{A} = \mu k e \hat{\mathbf{i}}$.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \hat{\mathbf{r}}]$
- Donde $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$ y también $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$

Título transparencia

Título transparencia

-

Título transparencia

Título transparencia

-