

Bases y componentes de vectores

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



8 de febrero de 2024

- 1 Bases y componentes
- 2 Sistemas coordenados
- 3 Álgebra vectorial en componentes
- 4 Productos de vectores en componentes
- 5 Recapitulando
- 6 Para la Discusión

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector \mathbf{a} a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector \mathbf{a} a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector \mathbf{a} a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.
- Utilizamos la convención dextrógira : $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y construimos el conjunto de vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector \mathbf{a} a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.
- Utilizamos la convención dextrógira : $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y construimos el conjunto de vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.
- Si a cada punto P del espacio asociamos un radio vector $\mathbf{r}(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P entonces los números $\{x^1, x^2, x^3\}$ son las componentes de $\mathbf{r}(P)$. Es decir $\mathbf{r}(P) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

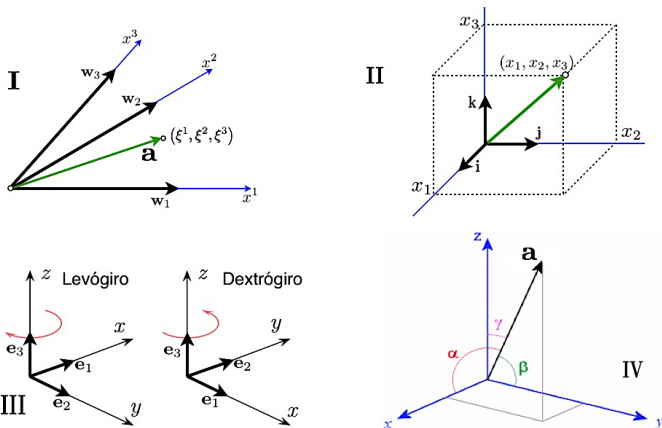


Figura: Sistemas coordenados

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como:
 $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices 1, 2, 3 para indicar las componentes del vector:
 $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{r}(P) = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$.

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como:
 $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices 1, 2, 3 para indicar las componentes del vector:
 $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{r}(P) = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$.
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir
 $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha \mathbf{a} = (\alpha a^1) \mathbf{e}_1 + (\alpha a^2) \mathbf{e}_2 + (\alpha a^3) \mathbf{e}_3 \Rightarrow$
 $|\alpha \mathbf{a}| = \alpha \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}.$

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como:
 $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices 1, 2, 3 para indicar las componentes del vector:
 $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{r}(P) = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$.
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir
 $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha \mathbf{a} = (\alpha a^1) \mathbf{e}_1 + (\alpha a^2) \mathbf{e}_2 + (\alpha a^3) \mathbf{e}_3 \Rightarrow$
 $|\alpha \mathbf{a}| = \alpha \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$.
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}$,

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como:
 $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices 1, 2, 3 para indicar las componentes del vector:
 $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{r}(P) = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$.
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir
 $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha \mathbf{a} = (\alpha a^1) \mathbf{e}_1 + (\alpha a^2) \mathbf{e}_2 + (\alpha a^3) \mathbf{e}_3 \Rightarrow$
 $|\alpha \mathbf{a}| = \alpha \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$.
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}$,

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como:
 $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices 1, 2, 3 para indicar las componentes del vector:
 $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{r}(P) = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$.
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir
 $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha \mathbf{a} = (\alpha a^1) \mathbf{e}_1 + (\alpha a^2) \mathbf{e}_2 + (\alpha a^3) \mathbf{e}_3 \Rightarrow$
 $|\alpha \mathbf{a}| = \alpha \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$.
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}$,
- Cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos(\alpha) \mathbf{i} + \cos(\beta) \mathbf{j} + \cos(\gamma) \mathbf{k}$.

- Sumas y restas de vectores

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3) + (b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3) = (a^1 + b^1)\mathbf{e}_1 + (a^2 + b^2)\mathbf{e}_2 + (a^3 + b^3)\mathbf{e}_3,$$

- tres vectores: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{c} = c^1\mathbf{e}_1 + c^2\mathbf{e}_2 + c^3\mathbf{e}_3$, serán *linealmente independientes* si se cumple que: $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. para la base canónica: $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 \equiv (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, 1)$

$$\mathbf{0} = \alpha (a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3) + \beta (b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3) + \gamma (c^1\mathbf{e}_1 + c^2\mathbf{e}_2 + c^3\mathbf{e}_3) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1 &= 0 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 &= 0 \\ \alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \neq 0. \Rightarrow$$
$$a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0$$

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
 - *Ortogonalidad:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
 - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:*
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| .$$
 - *El Teorema del coseno y Pitágoras:*
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} ,$$

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
 - *Ortogonalidad*: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
 - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$
 - *El Teorema del coseno y Pitágoras*:
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle},$$
- producto vectorial en componentes
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_3,$$

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
 - Ortogonalidad: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
 - Desigualdad de Cauchy-Schwarz:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$
 - El Teorema del coseno y Pitágoras:
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle},$$
- producto vectorial en componentes
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_3,$$
- Triple producto mixto:

$$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle} = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

- 1 Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

- 1 Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
- 2 Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo
 $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos(\alpha)\mathbf{i} + \cos(\beta)\mathbf{j} + \cos(\gamma)\mathbf{k}$

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

- 1 Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógiros
- 2 Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$, módulo
 $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos(\alpha) \mathbf{i} + \cos(\beta) \mathbf{j} + \cos(\gamma) \mathbf{k}$
- 3 Álgebra de vectores y componentes: Suma
 $(a^1 + b^1) \mathbf{e}_1 + (a^2 + b^2) \mathbf{e}_2 + (a^3 + b^3) \mathbf{e}_3$,
Independencia lineal
 $a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0$

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

- 1 Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
- 2 Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$, módulo
 $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos(\alpha) \mathbf{i} + \cos(\beta) \mathbf{j} + \cos(\gamma) \mathbf{k}$
- 3 Álgebra de vectores y componentes: Suma
 $(a^1 + b^1) \mathbf{e}_1 + (a^2 + b^2) \mathbf{e}_2 + (a^3 + b^3) \mathbf{e}_3$,
Independencia lineal
 $a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0$
- 4 Producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

- 1 Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
- 2 Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$, módulo
 $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos(\alpha) \mathbf{i} + \cos(\beta) \mathbf{j} + \cos(\gamma) \mathbf{k}$
- 3 Álgebra de vectores y componentes: Suma
 $(a^1 + b^1) \mathbf{e}_1 + (a^2 + b^2) \mathbf{e}_2 + (a^3 + b^3) \mathbf{e}_3$,
Independencia lineal
 $a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0$
- 4 Producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
- 5 Producto vectorial
 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_3$,

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

- 1 Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógiros
- 2 Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$, módulo
 $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos(\alpha) \mathbf{i} + \cos(\beta) \mathbf{j} + \cos(\gamma) \mathbf{k}$
- 3 Álgebra de vectores y componentes: Suma
 $(a^1 + b^1) \mathbf{e}_1 + (a^2 + b^2) \mathbf{e}_2 + (a^3 + b^3) \mathbf{e}_3$,
Independencia lineal
 $a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0$
- 4 Producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
- 5 Producto vectorial
 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_3$,
- 6 Triple producto mixto $V = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
 $a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0$

① Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}, \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Revisemos si forman una base.

- 1 Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}, \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Revisemos si forman una base.

- 2 Calculemos el volumen con el triple producto vectorial:

$$V = |\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]|$$

- ① Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}, \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

Revisemos si forman una base.

- ② Calculemos el volumen con el triple producto vectorial:

$$V = |\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]|$$

- ③ Para un vector arbitrario, $\mathbf{d} = d^1\hat{\mathbf{i}} + d^2\hat{\mathbf{j}} + d^3\hat{\mathbf{k}}$, construya las siguientes cantidades: $c^1 = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}$, $c^2 = -\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}$, $c^3 = -\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}$, y muestre que $c^1(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + c^2(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + c^3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{d} = \mathbf{0}$,