Ejemplos de Tensores

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

13 de marzo de 2024

Agenda

1. El Tensor de Esfuerzos 2D
   - Distribución de fuerzas
   - Equilibrio de fuerzas y torques
   - Distribución de fuerzas genéricas
   - El tensor σ_{ij} y su transformación
2. El Tensor de inercia
3. Recapitulando

Un punto P en cuerpo que se encuentra en equilibrio y está sometido a un conjunto de fuerzas externas:

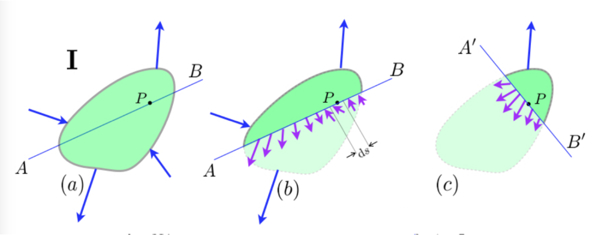
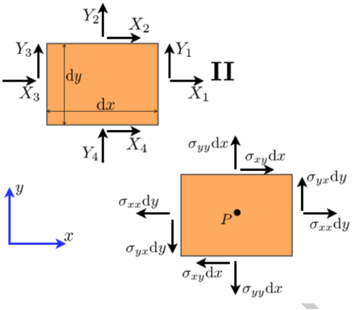


Figura: Cortes y fuerzas en un punto dentro de un cuerpo

Si cortamos la superficie en dos líneas (AB y $A'B'$) el efecto del conjunto de fuerzas externas es distinto sobre P. Al "cortar" la superficie, las fuerzas que aparecen sobre las líneas AB (y $A'B'$) eran fuerzas internas y ahora son externas al nuevo cuerpo "cortado".

Distribución de fuerzas



La distribución de fuerzas alrededor de P en un diferencial de área $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se puede esquematizar como:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \uparrow Y_2 = \sigma_2 \mathrm{d}x \quad \rightarrow X_2 = \tau_2 \mathrm{d}x & \\
 & \mathrm{d}x & \\
Y_3 = \tau_3 \mathrm{d}y \uparrow & & \uparrow Y_1 = \tau_1 \mathrm{d}y \\
 & \mathrm{d}y \quad \mathbf{P} \quad \mathrm{d}y & \\
X_3 = \sigma_3 \mathrm{d}y \rightarrow & & \rightarrow X_1 = \sigma_1 \mathrm{d}y \\
 & \mathrm{d}x & \\
 & \uparrow Y_4 = \sigma_4 \mathrm{d}x \quad \rightarrow X_4 = \tau_4 \mathrm{d}x &
\end{array}
$$

- $\sum \mathbf{F}_i^{ext} = \mathrm{d}m\ \mathbf{a} = 0$ aplicada a cada diferencial de masa $\mathrm{d}m$ es
$$\tau_1 \mathrm{d}y + \sigma_2 \mathrm{d}x + \tau_3 \mathrm{d}y + \sigma_4 \mathrm{d}x = 0 = (\sigma_2 \sigma_4)\, \mathrm{d}x + (\tau_1 + \tau_3)\, \mathrm{d}y$$
$$\sigma_1 \mathrm{d}y + \tau_2 \mathrm{d}x + \sigma_3 \mathrm{d}y + \tau_4 \mathrm{d}x = 0 = (\tau_2 \tau_4)\, \mathrm{d}x + (\sigma_1 + \sigma_3)\, \mathrm{d}y$$

Equilibrio de fuerzas y torques

- $\sum \mathbf{F}_i^{ext} = \mathrm{d}m\ \mathbf{a} = 0$ aplicada a cada diferencial de masa $\mathrm{d}m$ es
$$\tau_1 \mathrm{d}y + \sigma_2 \mathrm{d}x + \tau_3 \mathrm{d}y + \sigma_4 \mathrm{d}x = 0 = (\sigma_2 \sigma_4)\,\mathrm{d}x + (\tau_1 + \tau_3)\,\mathrm{d}y$$
$$\sigma_1 \mathrm{d}y + \tau_2 \mathrm{d}x + \sigma_3 \mathrm{d}y + \tau_4 \mathrm{d}x = 0 = (\tau_2 \tau_4)\,\mathrm{d}x + (\sigma_1 + \sigma_3)\,\mathrm{d}y$$
- El equilibrio de los torques implica
$$\left.\begin{array}{l} (\tau_1 \mathrm{d}y)\frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_2 \mathrm{d}x)\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \\ (\tau_3 \mathrm{d}y)\frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_4 \mathrm{d}x)\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4\,,$$

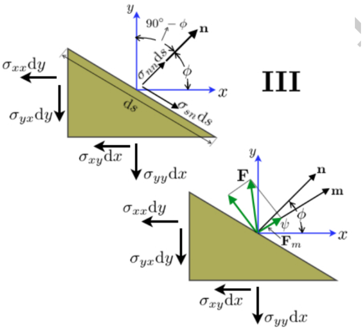
Equilibrio de fuerzas y torques

- $\sum \mathbf{F}_i^{ext} = \mathrm{d}m\ \mathbf{a} = 0$ aplicada a cada diferencial de masa $\mathrm{d}m$ es
$$\tau_1 \mathrm{d}y + \sigma_2 \mathrm{d}x + \tau_3 \mathrm{d}y + \sigma_4 \mathrm{d}x = 0 = (\sigma_2 \sigma_4)\, \mathrm{d}x + (\tau_1 + \tau_3)\, \mathrm{d}y$$
$$\sigma_1 \mathrm{d}y + \tau_2 \mathrm{d}x + \sigma_3 \mathrm{d}y + \tau_4 \mathrm{d}x = 0 = (\tau_2 \tau_4)\, \mathrm{d}x + (\sigma_1 + \sigma_3)\, \mathrm{d}y$$
- El equilibrio de los torques implica
$$\left.\begin{array}{l} (\tau_1 \mathrm{d}y)\,\frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_2 \mathrm{d}x)\,\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \\ (\tau_3 \mathrm{d}y)\,\frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_4 \mathrm{d}x)\,\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4\,,$$
- Existen sólo tres cantidades independientes: dos esfuerzos normales σ_1 y σ_2; y un esfuerzo tangencial τ_1.

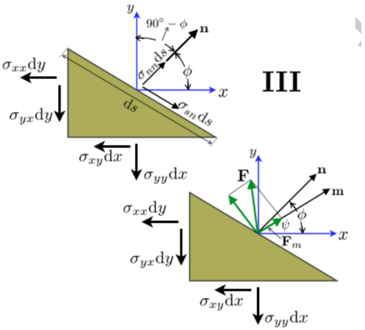
Equilibrio de fuerzas y torques

- $\sum \mathbf{F}_i^{ext} = \mathrm{d}m\ \mathbf{a} = 0$ aplicada a cada diferencial de masa $\mathrm{d}m$ es
$$\tau_1 \mathrm{d}y + \sigma_2 \mathrm{d}x + \tau_3 \mathrm{d}y + \sigma_4 \mathrm{d}x = 0 = (\sigma_2 \sigma_4)\, \mathrm{d}x + (\tau_1 + \tau_3)\, \mathrm{d}y$$
$$\sigma_1 \mathrm{d}y + \tau_2 \mathrm{d}x + \sigma_3 \mathrm{d}y + \tau_4 \mathrm{d}x = 0 = (\tau_2 \tau_4)\, \mathrm{d}x + (\sigma_1 + \sigma_3)\, \mathrm{d}y$$
- El equilibrio de los torques implica
$$\left.\begin{array}{l} (\tau_1 \mathrm{d}y)\, \frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_2 \mathrm{d}x)\, \frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \\ (\tau_3 \mathrm{d}y)\, \frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_4 \mathrm{d}x)\, \frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4\,,$$
- Existen sólo tres cantidades independientes: dos esfuerzos normales σ_1 y σ_2; y un esfuerzo tangencial τ_1.
- Los esfuerzos se denotan σ_{ij}. El primer índice indica la dirección de la fuerza y el segundo la dirección de la normal de la superficie donde está aplicada.

Distribución de fuerzas genéricas 1/2



- Los esfuerzos medidos en el punto P y en la dirección $\mathbf{n}$, son
$x \to \sigma_{xx}\mathrm{d}y + \sigma_{xy}\mathrm{d}x = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\cos(\phi) + \sigma_{sn}\mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi)$
$y \to \sigma_{yy}\mathrm{d}x + \sigma_{yx}\mathrm{d}y = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi) - \sigma_{sn}\mathrm{d}s\cos(\phi)$



- Los esfuerzos medidos en el punto P y en la dirección **n**, son
  $x \to \sigma_{xx}\mathrm{d}y + \sigma_{xy}\mathrm{d}x = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\cos(\phi) + \sigma_{sn}\mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi)$
  $y \to \sigma_{yy}\mathrm{d}x + \sigma_{yx}\mathrm{d}y = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi) - \sigma_{sn}\mathrm{d}s\cos(\phi)$
- Dado que $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\cos(\phi)$ y $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi)$, entonces:
  $\sigma_{nn} = \sigma_{xx}\cos^2(\phi) + \sigma_{xy}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + \sigma_{yx}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + \sigma_{yy}\mathrm{sen}^2(\phi)$
  $\sigma_{sn} = \sigma_{xx}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + \sigma_{xy}\mathrm{sen}^2(\phi) - \sigma_{yx}\cos^2(\phi) - \sigma_{yy}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi)$

- Si construimos una matriz:
$$A^i_j = \begin{pmatrix} A^x_n & A^x_s \\ A^y_n & A^y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix},$$

El tensor σ_{ij} y su transformación

- Si construimos una matriz:
$$A^i_j = \begin{pmatrix} A^x_n & A^x_s \\ A^y_n & A^y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix},$$
- tendremos $\sigma_{nn} = A^x_n A^x_n \sigma_{xx} + A^x_n A^y_n \sigma_{xy} + A^y_n A^x_n \sigma_{yx} + A^y_n A^y_n \sigma_{yy} \Rightarrow$
$\sigma_{nn} = A^i_n A^j_n \sigma_{ij}$ con $i, j = x, y$; y también
$\sigma_{sn} = A^x_s A^x_n \sigma_{xx} + A^x_s A^y_n \sigma_{xy} + A^y_s A^x_n \sigma_{yx} + A^y_s A^y_n \sigma_{yy} \Rightarrow$
$\sigma_{sn} = A^i_s A^j_n \sigma_{ij}$ con $i, j = x, y$

- Si construimos una matriz:
$$A^i_j = \begin{pmatrix} A^x_n & A^x_s \\ A^y_n & A^y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \mathrm{sen}(\phi) \\ \mathrm{sen}(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix},$$
- tendremos $\sigma_{nn} = A^x_n A^x_n \sigma_{xx} + A^x_n A^y_n \sigma_{xy} + A^y_n A^x_n \sigma_{yx} + A^y_n A^y_n \sigma_{yy} \Rightarrow$
$\sigma_{nn} = A^i_n A^j_n \sigma_{ij}$ con $i, j = x, y$; y también
$\sigma_{sn} = A^x_s A^x_n \sigma_{xx} + A^x_s A^y_n \sigma_{xy} + A^y_s A^x_n \sigma_{yx} + A^y_s A^y_n \sigma_{yy} \Rightarrow$
$\sigma_{sn} = A^i_s A^j_n \sigma_{ij}$ con $i, j = x, y$
- es decir: $\sigma_{kl} = A^i_k A^j_l \sigma_{ij}$, con $i, j = x, y;\ k, l = n, s$.
Por lo tanto $\sigma_{kl} = A^i_k A^j_l \sigma_{ij}$ transforma como un tensor de segundo orden.

El Tensor de inercia 1/2

- La cantidad de movimiento angular para un sistema de n partículas es: $\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left(\mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{v}_{(i)}\right)$, donde la $i-$ésima partícula en la posición $\mathbf{r}_{(\mathbf{i})}$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_{(i)}$.

El Tensor de inercia 1/2

- La cantidad de movimiento angular para un sistema de n partículas es: $\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left(\mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{v}_{(i)}\right)$, donde la $i-$ésima partícula en la posición $\mathbf{r_{(i)}}$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_{(i)}$.
- Si las distancias entre las partículas, (y partículas con el origen de coordenadas), son constantes, podremos expresar la velocidad de como: $\mathbf{v}_{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)}$. Donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del sistema.

- La cantidad de movimiento angular para un sistema de n partículas es: $\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left(\mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{v}_{(i)} \right)$, donde la $i-$ésima partícula en la posición $\mathbf{r}_{(\mathbf{i})}$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_{(i)}$.
- Si las distancias entre las partículas, (y partículas con el origen de coordenadas), son constantes, podremos expresar la velocidad de como: $\mathbf{v}_{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)}$. Donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del sistema.
- Entonces tendremos que:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left[\mathbf{r}_{(i)} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)} \right) \right] = \sum_i m_{(i)} \left[\boldsymbol{\omega} \left(\mathbf{r}_{(i)} \cdot \mathbf{r}_{(i)} \right) - \mathbf{r}_{(i)} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{(i)} \right) \right]$$

El Tensor de inercia 1/2

- La cantidad de movimiento angular para un sistema de n partículas es: $\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left(\mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{v}_{(i)}\right)$, donde la $i-$ésima partícula en la posición $\mathbf{r_{(i)}}$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_{(i)}$.
- Si las distancias entre las partículas, (y partículas con el origen de coordenadas), son constantes, podremos expresar la velocidad de como: $\mathbf{v}_{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)}$. Donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del sistema.
- Entonces tendremos que:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left[\mathbf{r}_{(i)} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)}\right)\right] = \sum_i m_{(i)} \left[\boldsymbol{\omega} \left(\mathbf{r}_{(i)} \cdot \mathbf{r}_{(i)}\right) - \mathbf{r}_{(i)} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{(i)}\right)\right]$$

- y las componentes de la cantidad de movimiento angular serán:

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\omega^k \left(r_{(i)}^m r_{(i)m}\right) - r_{(i)}^k \left(\omega^m r_{(i)m}\right)\right] .$$

El Tensor de inercia 2/2

- Como $\omega^k_{(i)} = \delta^k_l \omega^l_{(i)}$ entonces:
  $L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\delta^k_l \omega^l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(\omega^m r_{(i)m}\right)\right]$, por lo cual
  $$L^k = \omega^l_{(i)} \underbrace{\left[\sum_i m_{(i)} \left(\delta^k_l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(r_{(i)l}\right)\right)\right]}_{I^k_l}$$

- Como $\omega^k_{(i)} = \delta^k_l \omega^l_{(i)}$ entonces:
  $L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\delta^k_l \omega^l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m} \right) - r^k_{(i)} \left(\omega^m r_{(i)m} \right) \right]$, por lo cual
  $$L^k = \omega^l_{(i)} \underbrace{\left[\sum_i m_{(i)} \left(\delta^k_l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m} \right) - r^k_{(i)} \left(r_{(i)l} \right) \right) \right]}_{I^k_l}$$
- Entonces $I^k_l =$
  $$\begin{pmatrix} \sum_i m_{(i)} \left(y^2_{(i)} + z^2_{(i)} \right) & -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)} \right) & -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} z_{(i)} \right) \\ -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)} \right) & \sum_i m_{(i)} \left(x^2_{(i)} + z^2_{(i)} \right) & -\sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)} \right) \\ -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} z_{(i)} \right) & -\sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)} \right) & \sum_i m_{(i)} \left(x^2_{(i)} + y^2_{(i)} \right) \end{pmatrix}$$

Recapitulando

1. Construimos del tensor de esfuerzos 2D σ_{ij} de un cuerpo extendido a partir del equilibrio de fuerzas y torques.

Recapitulando

1. Construimos del tensor de esfuerzos 2D σ_{ij} de un cuerpo extendido a partir del equilibrio de fuerzas y torques.
2. Mostramos como el tensor de esfuerzos 2D σ_{ij} transforma como un tensor.

Recapitulando

1. Construimos del tensor de esfuerzos 2D σ_{ij} de un cuerpo extendido a partir del equilibrio de fuerzas y torques.
2. Mostramos como el tensor de esfuerzos 2D σ_{ij} transforma como un tensor.
3. Construimos el tensor de inercia a partir de un sistema de partículas que rotan rígidamente.