El problema de Kepler

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

9 de septiembre de 2024

Agenda

- El módulo de la fuerza gravitacional entre dos partículas con masas m_1 y m_2, separadas por una distancia r es $f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, donde G es la constante universal gravitacional.

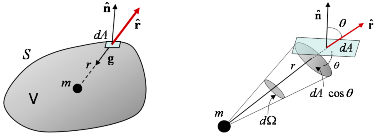
- El módulo de la fuerza gravitacional entre dos partículas con masas m_1 y m_2, separadas por una distancia r es $f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, donde G es la constante universal gravitacional.
- La fuerza gravitacional que una partícula de masa m_1 ejerce sobre otra partícula de masa m_2 es $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, con $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

El Campo gravitacional: problema de dos cuerpos

- El módulo de la fuerza gravitacional entre dos partículas con masas m_1 y m_2, separadas por una distancia r es $f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, donde G es la constante universal gravitacional.
- La fuerza gravitacional que una partícula de masa m_1 ejerce sobre otra partícula de masa m_2 es $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, con $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
- Entonces la intensidad del campo gravitacional de m_1 en la posición $\mathbf{r}$ sobre la partícula m_2 es $mathbfg(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m_2} = -\frac{Gm_1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, donde definimos el potencial gravitacional $\varphi(\mathbf{r})$ producido por m_1 como $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \frac{V(r)}{m_2} = -\frac{Gm_1}{r}$

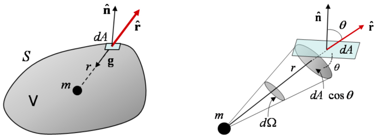
Flujo del campo gravitacional

- Consideremos una partícula de masa m dentro de una superficie arbitraria y cerrada S que contiene un volumen V.



Flujo del campo gravitacional

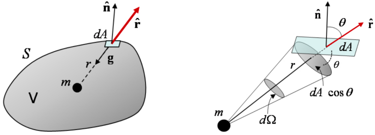
- Consideremos una partícula de masa m dentro de una superficie arbitraria y cerrada S que contiene un volumen V.



- El flujo del campo gravitacional a través de la superficie S es $\Phi = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -Gm \oint_S \frac{1}{r^2} dA\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ donde g se evalúa sobre S y $d\mathbf{A} = dA\, \hat{\mathbf{n}}$ es el diferencial de área de S con un vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$.

Flujo del campo gravitacional

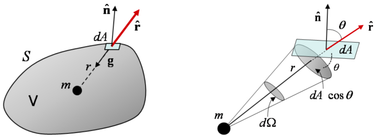
- Consideremos una partícula de masa m dentro de una superficie arbitraria y cerrada S que contiene un volumen V.



- El flujo del campo gravitacional a través de la superficie S es $\Phi = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -Gm \oint_S \frac{1}{r^2} dA\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ donde g se evalúa sobre S y $d\mathbf{A} = dA\, \hat{\mathbf{n}}$ es el diferencial de área de S con un vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$.
- Entonces, $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -Gm \oint_S d\Omega = -4\pi Gm$ con $d\Omega = \frac{dA \cos\theta}{r^2} = \frac{dA\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ el diferencial de ángulo sólido, con origen en m encierra un área $dA \cos\theta$ a la distancia r

Flujo del campo gravitacional

- Consideremos una partícula de masa m dentro de una superficie arbitraria y cerrada S que contiene un volumen V.



- El flujo del campo gravitacional a través de la superficie S es $\Phi = \oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -Gm \oint_S \frac{1}{r^2} dA\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ donde g se evalúa sobre S y $d\mathbf{A} = dA\, \hat{\mathbf{n}}$ es el diferencial de área de S con un vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$.
- Entonces, $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -Gm \oint_S d\Omega = -4\pi Gm$ con $d\Omega = \frac{dA \cos\theta}{r^2} = \frac{dA \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ el diferencial de ángulo sólido, con origen en m encierra un área $dA \cos\theta$ a la distancia r
- El flujo del campo gravitacional a través de S es proporcional a la masa de la partícula encerrada por S, independientemente de la ubicación de la partícula dentro de la superficie S.

La ecuación de Poisson

- El flujo total para un sistema de partículas con masas $m_i, i = 1, \ldots, N$, encerradas por la superficie S, es $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G \sum_{i=1}^{N} m_i = -4\pi G M_{\text{enc}}$ donde M_{enc} es la masa total encerrada por S.

La ecuación de Poisson

- El flujo total para un sistema de partículas con masas $m_i, i = 1, \ldots, N$, encerradas por la superficie S, es $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G \sum_{i=1}^{N} m_i = -4\pi G M_{\mathrm{enc}}$ donde M_{enc} es la masa total encerrada por S.
- El teorema de la divergencia para el campo $\mathbf{g}$ nos dice $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \mathbf{g} d\, \mathrm{V} = -4\pi G \int_{\mathrm{V}} \rho d\, \mathrm{V}$ donde $M_{\mathrm{enc}} = \int_{\mathrm{V}} \rho d\, \mathrm{V}$

La ecuación de Poisson

- El flujo total para un sistema de partículas con masas $m_i, i = 1, \ldots, N$, encerradas por la superficie S, es $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G \sum_{i=1}^{N} m_i = -4\pi G M_{\mathrm{enc}}$ donde M_{enc} es la masa total encerrada por S.
- El teorema de la divergencia para el campo $\mathbf{g}$ nos dice $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \mathbf{g} d\ \mathrm{V} = -4\pi G \int_{\mathrm{V}} \rho d\ \mathrm{V}$ donde $M_{\mathrm{enc}} = \int_{\mathrm{V}} \rho d\ \mathrm{V}$
- Puesto que el volumen V es arbitrario tendremos $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho$

La ecuación de Poisson

- El flujo total para un sistema de partículas con masas $m_i, i = 1, \ldots, N$, encerradas por la superficie S, es $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G \sum_{i=1}^{N} m_i = -4\pi G M_{\text{enc}}$ donde M_{enc} es la masa total encerrada por S.
- El teorema de la divergencia para el campo $\mathbf{g}$ nos dice $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \mathbf{g} d\ \mathrm{V} = -4\pi G \int_{\mathrm{V}} \rho d\ \mathrm{V}$ donde $M_{\text{enc}} = \int_{\mathrm{V}} \rho d\ \mathrm{V}$
- Puesto que el volumen V es arbitrario tendremos $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho$
- Que se traduce en la ecuación de Poisson $\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- La derivada temporal de $r(t)$ se puede expresar, usando $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, como $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- La derivada temporal de $r(t)$ se puede expresar, usando $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, como $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$
- En general, la derivada temporal se puede escribir como $\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- La derivada temporal de $r(t)$ se puede expresar, usando $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, como $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$
- En general, la derivada temporal se puede escribir como $\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$
- Con lo cual $\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- La derivada temporal de $r(t)$ se puede expresar, usando $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, como $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$
- En general, la derivada temporal se puede escribir como $\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$
- Con lo cual $\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$
- Es decir $\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- La derivada temporal de $r(t)$ se puede expresar, usando $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, como $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$
- En general, la derivada temporal se puede escribir como $\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$
- Con lo cual $\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$
- Es decir $\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- Si $u = 1/r$, tenemos $\frac{L^2}{\mu}u^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \frac{L^2}{\mu}u^3 = -u^2\frac{\partial V}{\partial u}$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- La derivada temporal de $r(t)$ se puede expresar, usando $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, como $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$
- En general, la derivada temporal se puede escribir como $\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$
- Con lo cual $\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$
- Es decir $\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- Si $u = 1/r$, tenemos $\frac{L^2}{\mu}u^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \frac{L^2}{\mu}u^3 = -u^2\frac{\partial V}{\partial u}$
- es decir, $\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = -\frac{\partial V}{\partial u}$

El problema inverso

- Consideremos el problema inverso: dada una órbita $r(\theta)$, determinar el potencial $V(r)$, o la fuerza central $f(r)$, que causa ésta órbita.
- La ecuación de movimiento para $r(t)$ es $\mu\ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- La derivada temporal de $r(t)$ se puede expresar, usando $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$, como $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$
- En general, la derivada temporal se puede escribir como $\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$
- Con lo cual $\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$
- Es decir $\frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{L^2}{\mu r^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$
- Si $u = 1/r$, tenemos $\frac{L^2}{\mu}u^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \frac{L^2}{\mu}u^3 = -u^2\frac{\partial V}{\partial u}$
- es decir, $\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = -\frac{\partial V}{\partial u}$
- Constituye la ecuación diferencial de la órbita para $r(\theta) = 1/u(\theta)$ en términos del potencial $V(r) = V(1/u)$. Se conoce como la ecuación de Binet.

El problema de Kepler

- El problema de Kepler se refiere al cálculo de la órbita de una partícula sobre la cual actúa fuerza gravitacional $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, con $k = Gm_1 m_2$.

El problema de Kepler

- El problema de Kepler se refiere al cálculo de la órbita de una partícula sobre la cual actúa fuerza gravitacional $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, con $k = Gm_1 m_2$.
- La órbita $r(\theta)$ correspondiente la fuerza gravitacional puede ser determinada a partir de la ecuación de Binet $\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{\partial V}{\partial u}$

- El problema de Kepler se refiere al cálculo de la órbita de una partícula sobre la cual actúa fuerza gravitacional $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, con $k = Gm_1 m_2$.
- La órbita $r(\theta)$ correspondiente la fuerza gravitacional puede ser determinada a partir de la ecuación de Binet $\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{\partial V}{\partial u}$
- Como el potencial gravitacional es $V(r) = -\frac{k}{r} = -ku$, obtenemos $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = k\frac{\mu}{L^2}$. Una ecuación diferencial ordinaria inhomogénea de segundo orden

El problema de Kepler

- El problema de Kepler se refiere al cálculo de la órbita de una partícula sobre la cual actúa fuerza gravitacional $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, con $k = Gm_1 m_2$.
- La órbita $r(\theta)$ correspondiente la fuerza gravitacional puede ser determinada a partir de la ecuación de Binet $\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{\partial V}{\partial u}$
- Como el potencial gravitacional es $V(r) = -\frac{k}{r} = -ku$, obtenemos $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = k\frac{\mu}{L^2}$. Una ecuación diferencial ordinaria inhomogénea de segundo orden
- La solución de la ecuación homogénea es $u_h'' + u_h = 0 \Rightarrow u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ con A y θ_0 constantes

El problema de Kepler

- El problema de Kepler se refiere al cálculo de la órbita de una partícula sobre la cual actúa fuerza gravitacional $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, con $k = Gm_1 m_2$.
- La órbita $r(\theta)$ correspondiente la fuerza gravitacional puede ser determinada a partir de la ecuación de Binet $\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{\partial V}{\partial u}$
- Como el potencial gravitacional es $V(r) = -\frac{k}{r} = -ku$, obtenemos $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = k\frac{\mu}{L^2}$. Una ecuación diferencial ordinaria inhomogénea de segundo orden
- La solución de la ecuación homogénea es $u_h'' + u_h = 0 \Rightarrow u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ con A y θ_0 constantes
- Una solución particular de la inhomogénea es $u_p = k\frac{\mu}{L^2}$.

El problema de Kepler

- El problema de Kepler se refiere al cálculo de la órbita de una partícula sobre la cual actúa fuerza gravitacional $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, con $k = Gm_1m_2$.
- La órbita $r(\theta)$ correspondiente la fuerza gravitacional puede ser determinada a partir de la ecuación de Binet $\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{\partial V}{\partial u}$
- Como el potencial gravitacional es $V(r) = -\frac{k}{r} = -ku$, obtenemos $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = k\frac{\mu}{L^2}$. Una ecuación diferencial ordinaria inhomogénea de segundo orden
- La solución de la ecuación homogénea es $u_h'' + u_h = 0 \Rightarrow u_h = A\cos(\theta - \theta_0)$ con A y θ_0 constantes
- Una solución particular de la inhomogénea es $u_p = k\frac{\mu}{L^2}$.
- la solución general $u(\theta) = u_h + u_p$ es $u(\theta) = \frac{k\mu}{L^2} + A\cos(\theta - \theta_0) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{k\mu}{L^2}\left[1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right]$, y e const.

- La forma general de la ecuación es una cónica con el origen en uno de los focos $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\cos\theta\right)$, para $\theta_0 = 0$ para $t = 0$

Las cónicas

- La forma general de la ecuación es una cónica con el origen en uno de los focos $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\cos\theta\right)$, para $\theta_0 = 0$ para $t = 0$
- El movimiento de la partícula con masa reducida μ en el potencial $V = -k/r$ sigue la trayectoria de una sección cónica

Las cónicas

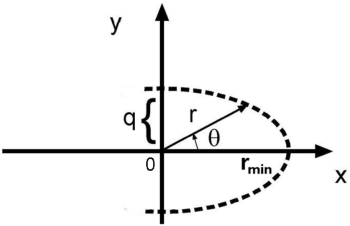
- La forma general de la ecuación es una cónica con el origen en uno de los focos $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\cos\theta\right)$, para $\theta_0 = 0$ para $t = 0$
- El movimiento de la partícula con masa reducida μ en el potencial $V = -k/r$ sigue la trayectoria de una sección cónica
- El tipo de cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) depende del valor de la excentricidad e, i.e. de la energía total E.

Las cónicas

- La forma general de la ecuación es una cónica con el origen en uno de los focos $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\cos\theta\right)$, para $\theta_0 = 0$ para $t = 0$
- El movimiento de la partícula con masa reducida μ en el potencial $V = -k/r$ sigue la trayectoria de una sección cónica
- El tipo de cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) depende del valor de la excentricidad e, i.e. de la energía total E.
- La excentricidad de la órbita es $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$

Las cónicas

- La forma general de la ecuación es una cónica con el origen en uno de los focos $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\cos\theta\right)$, para $\theta_0 = 0$ para $t = 0$
- El movimiento de la partícula con masa reducida μ en el potencial $V = -k/r$ sigue la trayectoria de una sección cónica
- El tipo de cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) depende del valor de la excentricidad e, i.e. de la energía total E.
- La excentricidad de la órbita es $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$
- El latus q es $r\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv q = \frac{L^2}{\mu k}$ y el $r_{\text{mín}} = r(0) = \frac{q}{1+e}$



- El movimiento radial en el problema de Kepler ocurre para un potencial efectivo $V_{\mathrm{ef}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$