El problema de Sturm-Liuoville

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

10 de junio de 2021

1. Operadores diferenciales de segundo orden
2. Operadores diferenciales autoadjuntos
3. El Sistema Sturm-Liouville
   - Condiciones regulares puras
   - Oscilador armónico libre con $y(0) = 0 \ \wedge \ \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$
4. Sección
5. Sección
6. Recapitulando

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}\,|v_i\rangle = \lambda_i\;\; |v_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}}|v_i\rangle = \lambda_i\;\; |v_i\rangle$.

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}\left|v_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|v_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}}\left|v_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|v_i\right\rangle.$
- Entonces podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma $P(x)\frac{\mathrm{d}^2 y_i(x)}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \lambda_i w(x)\right) y_i(x) = 0.$

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}\,|v_i\rangle = \lambda_i \;\; |v_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}} |v_i\rangle = \lambda_i \;\; |v_i\rangle$.
- Entonces podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma $P(x)\frac{\mathrm{d}^2 y_i(x)}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \lambda_i w(x)\right) y_i(x) = 0$.
- Con un producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \;\, w(x)\, g^*(x) f(x)$.

Operadores diferenciales de segundo orden

- Una ecuación de autovalores para un operador $\mathbb{L}$ puede expresarse $\mathbb{L}\,|v_i\rangle = \lambda_i\ \ |v_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)\right)}_{\mathbb{L}} |v_i\rangle = \lambda_i\ \ |v_i\rangle.$
- Entonces podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma $P(x)\frac{\mathrm{d}^2 y_i(x)}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \lambda_i w(x)\right) y_i(x) = 0.$
- Con un producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ \ w(x)\,g^*(x)f(x).$
- Con una variedad de ejemplos de polinomios ortogonales $p(x)$
$$\underbrace{\left(P(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)}_{\mathbb{L}} p_n(x) = -\alpha_n p_n(x) = 0.$$

Polinomio	$P(x)$	$Q(x)$	α_n
P_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1-x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1-x$	n
L_n^{α}	x	$1-x+\alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^{\dagger}$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \ | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \ g^*(x) f(x) \ \Rightarrow \ \langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \ g^*(x) \, \mathbb{L} f(x).$

Operadores diferenciales autoadjuntos 1/2

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos $\langle g \,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)f(x) \;\Rightarrow\; \langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)\,\mathbb{L}f(x)$.
- es decir $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, R(x)f(x)$.

Operadores diferenciales autoadjuntos 1/2

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^{\dagger}$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \mid f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) f(x) \;\Rightarrow\; \langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) \, \mathbb{L} f(x)$.

- es decir $\langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, R(x) f(x)$.

- Integrando por partes

  $$\int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x) \, g^*(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) \frac{\mathrm{d}(P(x) \, g^*(x))}{\mathrm{d}x} \right) \Bigg|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) \frac{\mathrm{d}^2 (P(x) \, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)f(x) \;\Rightarrow\; \langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)\,\mathbb{L}f(x).$

- es decir $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\,P(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\,Q(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\,R(x)f(x).$

- Integrando por partes

  $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\,P(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x)\,g^*(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x)\frac{\mathrm{d}(P(x)\,g^*(x))}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}^2(P(x)\,g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$

- y $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\,Q(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)\,Q(x)\,g^*(x)\big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}(Q(x)\,g^*(x))}{\mathrm{d}x}$

Operadores diferenciales autoadjuntos 1/2

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) f(x) \;\Rightarrow\; \langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \; g^*(x) \, \mathbb{L} f(x).$

- es decir $\langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, R(x) f(x).$

- Integrando por partes

  $\int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x) \, g^*(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) \frac{\mathrm{d}(P(x) \, g^*(x))}{\mathrm{d}x} \right) \Bigg|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) \frac{\mathrm{d}^2 (P(x) \, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$

- y $\int_a^b \mathrm{d}x \, g^*(x) \, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \, Q(x) \, g^*(x) \big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) \frac{\mathrm{d}(Q(x) \, g^*(x))}{\mathrm{d}x}$

- Entonces $\langle g | \, \mathbb{L} \, | f \rangle = \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \underbrace{\left(P(x) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(2 \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x) \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) \right)}_{\mathbb{L}^\dagger} g^*(x)$

  $+ \left(f(x) \left(Q(x) - \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} \right) g^*(x) + P(x) \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x) \right) \right) \Bigg|_a^b$

Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces $Q(x) = \dfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$.

- Para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ con producto interno tendremos

  $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x) f(x) \;\Rightarrow\; \langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x)\,\mathbb{L}f(x).$

- es decir $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, R(x) f(x).$

- Integrando por partes

  $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x) \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x)\, g^*(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) \frac{\mathrm{d}(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x} \right)\Big|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}^2(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}$

- y $\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)\, Q(x)\, g^*(x)\big|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) \frac{\mathrm{d}(Q(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x}$

- Entonces $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \underbrace{\left(P(x) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(2\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x) \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) \right)}_{\mathbb{L}^\dagger} g^*(x)$

  $+ \left(f(x) \left(Q(x) - \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} \right) g^*(x) + P(x) \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x) \right) \right)\Big|_a^b$

- Finalmente $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x) = Q(x)$ y $-\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0.$

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir

$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x \, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir

$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$

- Con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$

Operadores diferenciales autoadjuntos 2/2

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir
$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$
- Con lo cual
$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$
- y es inmediato $\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\,.$

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir
$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$
- Con lo cual
$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$
- y es inmediato $\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\,.$
- por lo tanto $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle =$
$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f|\mathbb{L}^\dagger|g\rangle^*} + P(x)\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\Bigg|_a^b\,.$$

La restricción $Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$ es aparente. **Siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto para $Q(x)$ y $P(x)$ cualesquiera**

- Si $P(x)$ no se anula en $[a, b]$, podremos redefinir
$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases}$$
- Con lo cual
$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,,$$
- y es inmediato $\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\,.$
- por lo tanto $\langle g|\,\mathbb{L}\,|f\rangle =$
$$\underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\,\mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f|\mathbb{L}^\dagger|g\rangle^*} + P(x)\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\Bigg|_a^b\,.$$
- Si $\mathbb{L}$ es autoadjunto y $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones el segundo término se debe anular, por las condiciones de borde que se impongan.

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i \left|u_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$

El Sistema Sturm-Liouville

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\,|u_i\rangle = -\lambda_i\,|u_i\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i, j\,.$

El Sistema Sturm-Liouville

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i \left|u_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x) u_j^*(x) \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\left\langle g\,\middle|f\right\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i \left|u_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$
- Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas $\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$

El Sistema Sturm-Liouville

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\,|u_i\rangle = -\lambda_i\,|u_i\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x) u_j^*(x) \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$
- Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas $\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$
- Condiciones de frontera **periódicas**: Iguales valores de la función y su derivada en los extremos $u_i(a) = u_i(b)$ y $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a = \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_b$.

- Las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial autoadjunta representada por un operador $\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i \left|u_i\right\rangle \quad \Leftrightarrow$ $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right) u_i(x) = -\lambda_i\, w(x) u_i(x)\,.$
- Con las condiciones de frontera $P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b = 0 \quad \forall\ i,j\,.$
- Donde los λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ la función peso del producto interno $\langle g\,|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)\, g^*(x) f(x)\,.$
- Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas $\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$
- Condiciones de frontera **periódicas**: Iguales valores de la función y su derivada en los extremos $u_i(a) = u_i(b)$ y $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a = \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_b$.
- **Condiciones Singulares:** Valores singulares en la frontera para las funciones y sus derivadas.

Condiciones regulares puras

Condiciones de frontera **regulares** sobre funciones y derivadas
$\beta_1 \, u_i(x) + \gamma_1 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2 \, u_i(x) + \gamma_2 \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2 \,,$

- **Condiciones Regulares Puras:** Para este caso se especifican los valores para la combinación lineal completa, con $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$.
- **Condiciones de Dirichlet:** Para este caso se especifican los valores de la función $u_i(x)$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.
- **Condiciones de Neumann:** Para este caso se especifican los valores de las derivadas $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\beta_1 = \beta_2 = 0$.
- **Condiciones Mixtas:** Cuando se especifican los valores de un tipo de condiciones de frontera en un extremo y otro en el otro. Esto es para $\beta_1 = \gamma_2 = 0$ o $\gamma_1 = \beta_2 = 0$.

Consideremos el caso del oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0$.

$\lambda = 0$ Tendrá solución de la forma $y(x) = C_1 x + C_2$. Si $y(0) = 0$. Entonces $C_2 = 0$ y como $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$.
La única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor.

Consideremos el caso del oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0$.

$\lambda = 0$ Tendrá solución de la forma $y(x) = C_1 x + C_2$. Si $y(0) = 0$. Entonces $C_2 = 0$ y como $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$.
La única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor.

$\lambda < 0$ Si $\lambda = -\mu^2$. Entonces la solución general es $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu x}$.
Las condiciones de frontera imponen
$0 = C_1 + C_2 \qquad \wedge \qquad 0 = \mu \left(C_1 \mathrm{e}^{\mu \pi} + -C_2 \mathrm{e}^{-\mu \pi} \right)$. Tendremos como única solución $0 = C_1 = C_2$ y λ no será un autovalor.

Consideremos el caso del oscilador armónico libre $\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+\lambda y(x)=0$.

$\lambda = 0$ Tendrá solución de la forma $y(x)=C_1x+C_2$. Si $y(0)=0$. Entonces $C_2=0$ y como $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi}=0$ necesariamente $C_1=0$.
La única solución es $y(x)=0$ y λ no será un autovalor.

$\lambda < 0$ Si $\lambda=-\mu^2$. Entonces la solución general es $y(x)=C_1\mathrm{e}^{\mu x}+C_2\mathrm{e}^{-\mu x}$.
Las condiciones de frontera imponen
$0=C_1+C_2 \qquad \wedge \qquad 0=\mu\left(C_1\mathrm{e}^{\mu\pi}+-C_2\mathrm{e}^{-\mu\pi}\right)$. Tendremos como única solución $0=C_1=C_2$ y λ no será un autovalor.

$\lambda > 0$ Si $\lambda=\mu^2$. La solución será del tipo $y(x)=C_1\cos(\mu x)+C_2\,\mathrm{sen}(\mu x)$.
Las condiciones de frontera imponen: $y(0)=0 \;\Rightarrow C_1=0$ y
$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi}=C_2\mu\cos(\mu\pi)=0 \;\Rightarrow \mu_n=\pm\frac{2n+1}{2} \;\Rightarrow \lambda_n=\frac{(2n+1)^2}{4}$
para $n=0,1,2,3,\cdots$

- $\mathbb{L}$ es hermítico y sus autovalores son reales y $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3\cdots$.
- Las infinitas autofunciones forman una base ortogonal.
  Entonces $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$. Es la solución general.

Título transparencia

Título transparencia

-

Recapitulando

En presentación consideramos

1.