Simetrías y cantidades conservadas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

21 de agosto de 2024

Agenda

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$, se define el momento conjugado, $p_j\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener $\dot{q}_i$ y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.

Variables conjugadas y cíclicas

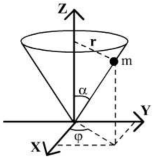
- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener $\dot{q}_i$ y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada cíclica, q_i, es constante. Luego, la cantidad $p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.

Variables conjugadas y cíclicas

- Dado un sistema caracterizado por un Lagrangiano $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, se define el momento conjugado, $p_j(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ asociado a la coordenada generalizada q_j. También llamado momento canónico.
- El p_j no necesariamente es el momento lineal. También puede corresponder al momento angular o a otra cantidad física.
- Si un Lagrangiano $\mathcal{L}$ de un sistema no contiene explícitamente una coordenada q_i (puede contener $\dot{q}_i$ y t), se dice que q_i es una coordenada cíclica o ignorable.
- Entonces, el momento conjugado p_i asociado a una coordenada cíclica, q_i, es constante. Luego, la cantidad $p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ es una cantidad conservada, i.e. una primera integral del movimiento.
- Si una coordenada q_i es cíclica, entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$, y la ecuación de Lagrange para esa coordenada cíclica q_i es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{dp_i}{dt} = 0 \Rightarrow p_i = \text{ cte}.$

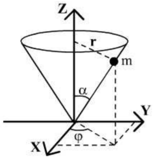
Partícula sobre un cono invertido

- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



Partícula sobre un cono invertido

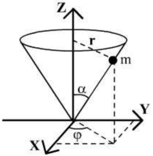
- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha$

Partícula sobre un cono invertido

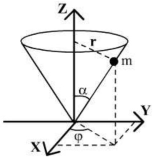
- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cot \alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_φ asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} =$ cte .

Partícula sobre un cono invertido

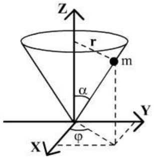
- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 \csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_φ asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{ cte }$.
- El momento angular de la partícula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$

Partícula sobre un cono invertido

- Consideremos una partícula que se mueve sobre una supreficie cónica



- Su Lagrangeano es $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 \csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cot\alpha$
- La coordenada φ es cíclica. El momento conjugado p_φ asociado con la coordenada angular φ es constante, $p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} =$ cte .
- El momento angular de la partícula, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$
- La componente z es $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} \equiv p_\varphi = \mathrm{cte},$

ya que $\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ y = r\sin\varphi, & \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{array}$

- El momento conjugado p_r asociado a r es $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha$.

Título transparencia

-

Título transparencia

-

Título transparencia

Título transparencia

-

Título transparencia

-

Título transparencia