Dos Problemas Sólidos

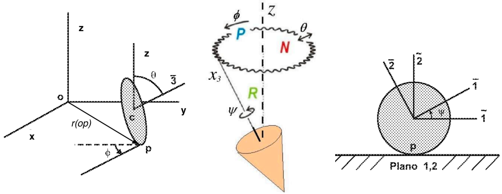
Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

31 de octubre de 2024

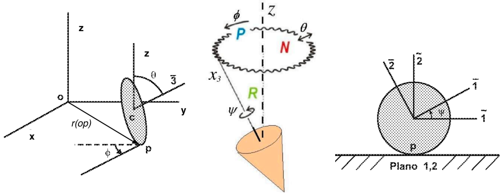
Agenda

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



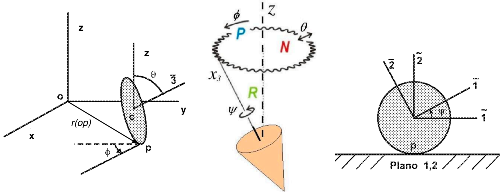
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



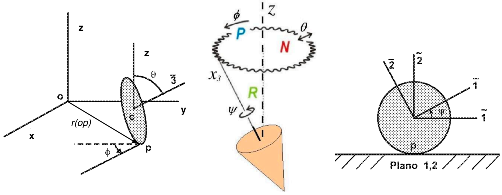
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\vec{r}(op) = \vec{R} + \vec{r}(cp) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(op)_p = 0 = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp)$

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos

$$\vec{r}(cp) = -a\mathbf{x}^2, \text{ y } \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^1 & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \Omega^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\Omega^3 \mathbf{x}_1 - \Omega^1 \mathbf{x}_3)$$

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos
$$\vec{r}(cp) = -a\mathbf{x}^2, \text{ y } \vec{\tilde{\Omega}} \times \vec{r}(cp) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^1 & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \Omega^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\Omega^3\,\mathbf{x}_1 - \Omega^1\,\mathbf{x}_3)$$
- Respecto al sistema centro de masa $\Omega_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\,\text{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
$\Omega_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\;\psi$ y $\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- Proyectamos la ecuación $0 = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp)$ al sistema S, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$
tendremos $\dot{x} + a(\Omega_3\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{x}_1 - \Omega_1\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{x}_3) = 0$
$\dot{y} + a(\Omega_3\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}_1 - \Omega_1\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}_3) = 0$
$\dot{z} + a(\Omega_3\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \Omega_1\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_3) = 0$

Título transparencia

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}\left[I_1(c)\left(\Omega_1\right)^2 + I_2(c)\left(\Omega_2\right)^2 + I_3(c)\Omega_3\right)^2\right].$$

Título transparencia

- La energía cinética será
$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}\left[I_1(c)\left(\Omega_1\right)^2 + I_2(c)\left(\Omega_2\right)^2 + I_3(c)\Omega_3\right)^2\right].$$
- $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Donde $I_1 = I_2 = Ma^2/4$ y $I_3 = Ma^2/2$.

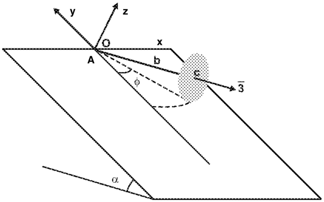
Título transparencia

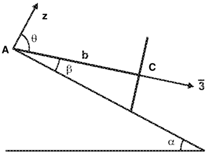
- La energía cinética será
$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}\left[I_1(c)\left(\Omega_1\right)^2+I_2(c)\left(\Omega_2\right)^2+I_3(c)\Omega_3\right)^2\right].$$
- $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+\dot{\theta}^2+2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2+\dot{\psi}\right)^2\right]$
- Donde $I_1 = I_2 = Ma^2/4$ y $I_3 = Ma^2/2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mga\,\mathrm{sen}\,\theta$

- La energía cinética será
$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}\left[I_1(c)\left(\Omega_1\right)^2+I_2(c)\left(\Omega_2\right)^2+I_3(c)\Omega_3\Big)^2\right].$$
- $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta+\dot{\theta}^2+2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2+\dot{\psi}\right)^2\right]$
- Donde $I_1 = I_2 = Ma^2/4$ y $I_3 = Ma^2/2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mga\operatorname{sen}\theta$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V$, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+ \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta+\dot{\theta}^2+2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2+\dot{\psi}\right)^2\right]-mga\operatorname{sen}\theta$

Planteamiento del problema

Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b. El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo α con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O, eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema $\tilde{S}$ origen también en O y eje $\tilde{3}$ en la direción AC. Encontrar las ecuaciones de movimiento.





Coordenadas y ligaduras