Matemáticas Avanzadas:

de los espacios lineales al análisis vectorial, con aplicaciones en Maxima

$$\varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{kmn} a_j b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j b^m c^n$$
$$\left(\delta^i_m \delta^j_n - \delta^j_m \delta^i_n\right) a_j b^m c^n = \delta^i_m \delta^j_n a_j b^m c^n - \delta^j_m \delta^i_n a_j b^m c^n$$
$$\delta^i_m b^m \delta^j_n a_j c^n - \delta^i_n c^n \delta^j_m a_j b^m = b^i a_n c^n - c^i a_j b^j$$

Héctor Hernández

Luis. A. Núñez

19 de febrero de 2024

Borrador

Índice general

1. Los vectores de siempre **2**
1.1. Vectores geométricos 2
1.2. Vectores en componentes 15
1.3. Aplicaciones del álgebra vectorial 25
1.4. Álgebra vectorial con índices 33
1.5. Un comienzo a la derivación e integración de vectores 42
1.6. Vectores y números complejos 64

2. Espacios vectoriales lineales **81**
2.1. Grupos, campos y espacios vectoriales 81
2.2. Espacios métricos, normados y con producto interno 97
2.3. Variedades lineales 114
2.4. Aproximación de funciones 130

3. Vectores duales y tensores **148**
3.1. Funcionales lineales 148
3.2. Tensores y producto tensorial 162
3.3. Aplicaciones en Fisica: Esfuerzos, Inercia y Energía libre 189
3.4. Vectores, tensores y espacios pseudoeuclidianos 199
3.5. Funcionales lineales y Distribuciones 210
3.6. Bases continuas y de ondas planas 218

4. Operadores lineales **232**
4.1. Operadores lineales 232
4.2. Tipos de operadores 245
4.3. Representación matricial de operadores 254
4.4. Un zoológico de matrices cuadradas 273
4.5. Sistemas de ecuaciones lineales 281
4.6. Autovectores y autovalores 291
4.7. Autovalores y autovectores de matrices importantes 307

Borrador Preliminar

5. Coordenadas curvilíneas, campos y operadores diferenciales **329**
5.1. Coordenadas curvilíneas generalizadas y campos tensoriales 329
5.2. La fauna de los operadores diferenciales vectoriales 359
5.3. Integrales de campos vectoriales y teoremas integrales 390
5.4. Teoría de Potencial 415

A. Apéndice **431**
A.1. Introducción a los CAS 431
A.2. Maxima: Sintaxis básica 433
A.3. Cálculos elementales 435
A.4. Bibliotecas 443
A.5. Maxima en modo texto 446
A.6. Invocando la ayuda 447
A.7. Ejercicios 449

Borrador Preliminar

Introducción

Como toda obra, el contenido de este libro tuvo como motivación inicial la insatisfacción con lo que estaba disponible y esa necesidad de discutir un conjunto de conceptos con el matiz personal de los autores. A lo largo de casi 10 años se fue dibujando esa ruta, donde confluyen: una presentación abstracta, una herramienta de cálculo algebraico y variados ejemplos de aplicación proveniente de la más diversas áreas. Hemos tratado de mostrar que los conceptos abstractos son útiles porque engloban, bajo un mismo enfoque, una multiplicidad de aplicaciones que normalmente las percibimos aisladas.

Existe, desde hace mucho tiempo, cierta resistencia en los Departamentos de Física en incluir en sus programas de docencia cursos para la enseñanza de herramientas de computación científica y cálculo numérico, tal vez debido a los altos costos de la mayoría de estos programas, casi todos comerciales. Pensamos que la utilización de herramientas computacionales enriquece enormemente el aprendizaje de los estudiantes ya que los enseñan a abordar los problemas desde diferentes puntos de vista, les ayuda a familiarizarse con determinados lenguajes de programación y los incentiva a desarrollar sus propias técnicas de cálculo.

Hemos decidido utilizar un sistema de computación algebraico de domino público (o software libre) como **Maxima** porque estos programas tienen la capacidad de ofrecer al estudiante toda una gama de herramientas de cálculo simbólico, numérico y de visualización de muy alto rendimiento. **Maxima** es un programa que no requiere conocimientos previos de lenguajes de programación pero permitirá que el estudiante se familiarice con la sintaxis de programación y la transición a los lenguajes del tipo Fortran, C, o Python será mas sencilla.

Los contenidos que aquí presentamos han sido utilizados en cursos de Métodos Matemáticos para estudiantes de pregrado en Física de la Universidad de los Andes (Mérida-Venezuela) y más recientemente en los cursos de pregrado y posgrado para estudiantes en Física e Ingenierías en la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga-Colombia).

Borrador Preliminar

Capítulo 1

Los vectores de siempre

La ruta de este capítulo

Suponemos que los estudiantes que se acercan a estas notas, no solo conocen parte de los términos aquí expuestos, sino que son capaces de buscar muchos otros en la red. Por lo tanto, concebimos que este capítulo apunte a varios objetivos. Por un lado, buscamos refrescar un conjunto de conceptos básicos que seguramente son conocidos por el lector. Si no lo son, aprovechamos la oportunidad para presentarlos –en el marco de $\mathbb{R}^3$, es decir ejemplificando con vectores tridimensionales– utilizando el lenguaje abstracto al cual haremos referencia en los próximos capítulos.

Siguiendo esta lógica discutimos las propiedades de los vectores en la próxima sección 1.1; la independencia lineal, bases, producto interno (sección 1.1.3) y los sistemas de coordenadas (sección 1.2). Con la excusa del algebra vectorial en coordenadas, introducimos en la sección 1.4 algunos elementos de álgebra vectorial con índices. Muchos de estos términos no son cubiertos tan tempranamente en cursos de métodos matemáticos (sección 1.4). Adicionalmente, esta excusa nos sirve de puente para presentar nociones operativas de tensores y de análisis de vectorial que formalizaremos más adelante en los capítulos 3 y 5, respectivamente.

La representación de los número complejos como vectores, con "componentes" reales y complejas justifica la incorporación de este repaso en la última sección 1.6. Finalmente, este capítulo nos sirve para iniciar el uso de la herramienta de cálculo algebraico que nos acompañará en el resto del libro y que se detalla en el apéndice A.1.

1.1 Vectores geométricos

Desde los primeros cursos de Física en educación media, venimos hablando de vectores como cantidades que tienen que ser representadas con más de un número. Son varias las razones que obligan a introducir este (y otro) tipo de cantidades "multidimensionales".

Es común que tropecemos con: escalares, vectores, tensores y espinores, dependiendo del número de cantidades que necesitemos para representar determinado objeto matemático. Podremos constatar que las leyes de la Física vienen escritas en forma vectorial (o tensorial) y, por lo tanto, será la misma ley para la familia de observadores equivalentes.

Borrador Preliminar

1.1.1 Escalares y vectores

Dejaremos para más adelante caracterizar objetos como tensores y espinores, por ahora nos contentaremos con refrescar nuestros recuerdos con cantidades como:

- **Escalares:** Serán aquellas cantidades las cuales se representan con UN solo número, una magnitud: temperatura, volumen, masa, entre otras. Es costumbre no denotarlas de manera especial, así $T = 5°\mathrm{C}$ representará una temperatura de 5 grados centígrados.
- **Vectores:** Serán cantidades las cuales, para ser representadas por un objeto matemáticos, necesitan más de una cantidad: requieren de UN número, UNA dirección y UN sentido. Entre las cantidades que típicamente reconocemos como vectores están: la velocidad, la aceleración, la fuerza. En términos gráficos podremos decir que un vector será un segmento orientado, en el cual la dimensión del segmento representará su módulo y su orientación la dirección y el sentido. Para diferenciarlos de las cantidades escalares hay una variedad de representaciones, entre ellas: en negrita $\mathbf{a}$; con una flecha arriba de la cantidad $\vec{a}$; con una tilde arriba o abajo $\tilde{a}$; o explicitando el origen del segmento orientado $\overrightarrow{OP}$. El módulo del vector lo representaremos dentro de la función valor absoluto, o sencillamente sin la flecha arriba $a = |\mathbf{a}| = |\vec{a}|$.

Los vectores son "objetos geométricos" independientes del sistema de coordenadas. Sus características (módulo, dirección y sentido) se preservarán en todos los sistemas de coordenadas. Más aún, habrá vectores que podremos desplazar (conservando su módulo dirección y sentido) paralelos a ellos mismos, y seguirán representando las mismas cantidades. Por ello encontraremos el término de *vectores deslizantes*. Un ejemplo son las fuerzas que actúan en un determinado cuerpo, como se muestra en el cuadrante I en la figura 1.2.

Figura 1.1: Ejemplos de *vectores atados*

También habrá vectores atados a un punto en el espacio, por cuanto representan una de las propiedades de ese punto: la velocidad del viento, el campo eléctrico, o sus variaciones son ejemplos de *vectores atados* (observe la figura 1.1 como ejemplos ilustrativos). Esos vectores "atados" generarán el concepto de campo vectorial que discutiremos en el capítulo 5.

1.1.2 Álgebra de vectores

Enumeraremos rápidamente el álgebra de vectores sin hacer referencia a un sistema de coordenadas en particular. Desde los cursos básicos de matemáticas nos enseñaron a representar gráficamente este álgebra, así tenemos que:

1.1.2.0.1. Vector nulo. Es aquel que tiene por módulo cero y no se le pude asignar dirección ni sentido. El frecuente representar al vector nulo por $\mathbf{0}$.

1.1.2.0.2. Vector unitario. Es aquel que tiene por módulo la unidad, es muy útil por cuanto, para efectos algebraicos, "contiene" únicamente dirección y sentido. Lo denotaremos con un acento circunflejo: $\hat{\mathbf{u}}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, con lo cual todo vector se podrá expresar por un módulo en la dirección y sentido de un vector unitario: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\hat{\mathbf{u}}_a = a\,\hat{\mathbf{u}}_a$.

Borrador Preliminar

Figura 1.2: Vectores representados como segmentos de flechas orientados, vectores geométricos, y algunas de sus posibles operaciones.

1.1.2.0.3. Comparación de vectores. Dos vectores podrán ser comparados cuando tienen la misma dirección. Al comparar sus módulos diremos que pueden ser mayores, menores o iguales. Por lo tanto, tal y como mostramos en el cuadrante IIa de la figura 1.2, dos vectores serán iguales, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, si tienen la misma dirección y sentido.

1.1.2.0.4. Multiplicación por un número. Un vector multiplicado por un número, α, cambiará su módulo si $\alpha > 0$ y cambiará su sentido, y eventualmente su módulo, si $\alpha < 0$. Tal y como puede apreciarse en el cuadrante IIa de la figura 1.2. Claramente dos vectores proporcionales serán colineales. Diremos además, que el inverso del vector $\mathbf{a}$ será la multiplicación de $\mathbf{a}$ por (-1). Esto es: $(-1)\,\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

1.1.2.0.5. Suma de vectores. Para sumar vectores utilizamos la regla del paralelogramo. Es decir, desplazamos paralelamente uno de los vectores y lo colocamos a continuación del otro, de tal forma que la diagonal del paralelogramo, que tiene por lados los vectores sumandos, constituye el vector suma, (ver cuadrantes IIa y IIb de la figura 1.2).

Este esquema se puede generalizar para varios vectores tal y como lo mostramos en el cuadrante III de la figura 1.2. Allí construimos un polígono cuyos lados los constituyen los vectores sumandos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ y $\mathbf{n}$ con $\mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$.

Igualmente, podemos definir la resta de vectores al sumar el inverso. Esto es:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \quad \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) \ .$$

En términos gráficos la resta de dos vectores se representa colocando los vectores (minuendo y sustraendo) con el mismo origen y uniendo las cabezas de flecha. Dependiendo de cual vector es el minuendo y cual el sustraendo el vector resta apuntará del sustraendo hacia el minuendo, esto es: $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Claramente, el módulo del vector resta representa la distancia entre los dos extremos de los vectores minuendo y sustraendo.

Borrador Preliminar

1.1.2.0.6. Un resumen de propiedades. Las propiedades (obvias) del álgebra de vectores son:

- La suma de vectores:
  - es cerrada $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$,
  - es conmutativa $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$,
  - es asociativa $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$,
  - tiene un único elemento neutro $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}, \forall\, \mathbf{a}$,
  - existe un elemento simétrico $-\mathbf{a}$ (uno para cada vector) tal que $\mathbf{0}=\mathbf{a}-\mathbf{a}\equiv\mathbf{a}+(-\mathbf{a})$,
  - es distributiva respecto a la multiplicación por números: $\alpha\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$.
- La multiplicación de números por vectores:
  - es conmutativa $\mathbf{a}\alpha=\alpha\mathbf{a}$,
  - es asociativa $\alpha\,(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\,\mathbf{a}$,
  - es distributiva $(\alpha+\beta)\,\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.

Estas propiedades lucen obvias planteadas en este contexto de los vectores en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo en la sección 2.1.3 en la página 87 veremos que, son estas propiedades las que nos permitirán definir un espacio vectorial abstractos de manera rigurosa.

Ejemplo 1.1 En un segmento de recta AB ubicamos un punto D de manera que este punto divide al segmento en dos partes, es decir, en la proporción $\alpha:\beta$ ($\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=\alpha+\beta$). Ubiquemos el vector posición del punto D.

A los puntos A y B le hacemos corresponder el vector $\mathbf{a}$ y el vector $\mathbf{b}$, respectivamente, con un origen común O. De manera que $\mathbf{c}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ es un vector que va desde el punto A al punto B. Entonces, la distancia $\overline{OD}$, a la que le podemos asociar el vector $\mathbf{d}$, no es más que:

$$\mathbf{d}=\overline{OD}=\mathbf{a}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\mathbf{a}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathbf{b}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathbf{a}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathbf{b}\,.$$

◁

Ejemplo 1.2 Hemos definido la posición $\mathbf{r}$ del centro de masa, para un sistema de N partículas, al vector:

$$\mathbf{r}=\frac{\Sigma_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i}{\Sigma_{j=1}^{N}m_j}\,,$$

donde $\mathbf{r}_i$ corresponde con la posición de la $i-$ésima partícula. Determinemos la posición del centro de masa para un sistema de tres masas, $m_i=1{,}2{,}3$, ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $l=2$.

Colocando el origen de coordenadas en uno de los vértices y uno de los ejes de coordenadas sobre uno de los lados, entonces tenemos:

$$\mathbf{r}=\frac{\Sigma_{i=1}^{3}m_i\mathbf{r}_i}{\Sigma_{j=1}^{3}m_j}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_1\mathbf{r}_1}{M_T}=\frac{1\cdot 2\hat{\mathbf{\imath}}+3\cdot\left(\hat{\mathbf{\imath}}+\sqrt{3}\hat{\mathbf{\jmath}}\right)}{6}=\frac{5}{6}\hat{\mathbf{\imath}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{\jmath}}\,.$$

◁

1.1.3 Vectores linealmente independientes

Comencemos a construir la primera aproximación a uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal: la noción de *independencia* o *dependencia lineal*. Diremos que tres vectores $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ son *linealmente independientes* en $\mathbb{R}^3$ si se cumple que:

$$\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}+\gamma\,\mathbf{c}=\mathbf{0}\;\Rightarrow\;\alpha=\beta=\gamma=0\,. \tag{1.1}$$

Es decir, que la única manera que al sumar cualquier múltiplo de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ de modo que la suma se anule es obligando a que los escalares: α, β y γ, sean **necesariamente** nulos. En caso contrario, es decir, si no se cumple

Borrador Preliminar

lo anterior diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos. Si por ejemplo $\gamma \neq 0$, entonces:

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} = \bar{\alpha}\,\mathbf{a} + \bar{\beta}\,\mathbf{b}\,.$$

Es muy importante señalar que los vectores linealmente independientes formarán una *base* para el espacio donde estos vectores "viven" y el número máximo de vectores linealmente independientes será la dimensión de ese espacio de "residencia". Más adelante estudiaremos con más detalle el concepto de bases.

Tratemos de concretar algunas de estas afirmaciones.

- *Dos vectores linealmente dependientes son colineales*. Es decir, los vectores están contenidos en la misma línea y es claro que:

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{con alguno de} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\mathbf{b} \\ \\ \mathbf{b} = -\dfrac{\alpha}{\beta}\mathbf{a} \end{array} \right.$$

  el contrario también será cierto: *si dos vectores son colineales ellos serán linealmente dependientes.*

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \alpha\lambda\mathbf{b} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (\alpha\lambda + \beta)\,\mathbf{b} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{\beta}{\alpha}\,,$$

  con lo cual podremos afirmar que si dos vectores son linealmente independientes ellos **no** son colineales.

- *Tres vectores linealmente dependientes son coplanares*. Por ser los tres vectores *linealmente dependientes* al menos uno de los escalares tiene que ser distinto de cero, digamos γ, esto es:

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b} = \xi^1\mathbf{a} + \xi^2\mathbf{b}\,,$$

  pero como $\xi^1\mathbf{a} \propto \mathbf{a}$ y $\xi^2\,\mathbf{b} \propto \mathbf{b}$, esto significa que: $\xi^1\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}$ son colineales. De la misma manera que $\xi^2\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}$, y por lo tanto, la suma estará en el mismo plano.

- *Dos vectores linealmente independientes generan todos los vectores coplanares*. Dado dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ linealmente independientes, entonces cualquier vector $\mathbf{c}$, coplanar con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, podrá expresarse como una combinación lineal de éstos. Diremos que: $\mathbf{c}$ se expresa en términos de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como: $\mathbf{c} = \xi^1\mathbf{a} + \xi^2\mathbf{b}$, y esa expresión es única.

  La primera de las afirmaciones es directa por cuanto hemos visto que si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente independientes y $\mathbf{c}$ es coplanar con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces, necesariamente $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son linealmente dependientes. Esto es:

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b} = \xi^1\mathbf{a} + \xi^2\mathbf{b}\,.$$

  La demostración de que la expansión es única viene de suponer que existen dos maneras distintas de representar al mismo vector $\mathbf{c}$. Veamos:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{c} = \xi^1\mathbf{a} + \xi^2\mathbf{b} \\ \\ \mathbf{c} = \zeta^1\mathbf{a} + \zeta^2\mathbf{b} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \mathbf{0} = \left(\xi^1 - \zeta^1\right)\mathbf{a} + \left(\xi^2 - \zeta^2\right)\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lll} \xi^1 - \zeta^1 = 0 & \Rightarrow & \xi^1 = \zeta^1 \\ \\ \xi^2 - \zeta^2 = 0 & \Rightarrow & \xi^2 = \zeta^2 \end{array} \right.$$

  debido a que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente independientes.

  La demostración para el caso tridimensional es equivalente. Es decir tres vectores linealmente independientes $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ expanden, de manera unívoca, todos los vectores del espacio. Esta demostración queda para el lector.

- *Vectores Base*. Cuando un vector $\mathbf{c}$ se pueda expresar en términos de dos vectores linealmente independientes, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, por ejemplo: $\mathbf{c} = \xi^1\mathbf{a} + \xi^2\mathbf{b}$, diremos que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ forman una base para todos los vectores

Borrador Preliminar

coplanares a éstos. Igualmente para el caso tridimensional: tres vectores linealmente independientes $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ conformarán una base para los vectores del espacio. Los números ξ^1 y ξ^2 para el caso bidimensional se denominan las componentes de $\mathbf{c}$ a lo largo de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Equivalentemente, $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ serán las componentes de cualquier vector para el caso 3D a lo largo de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, respectivamente. Esta nomenclatura será más evidente luego de la próxima sección.

Mas adelante, en el próximo capítulo en el desarrollo de la sección 2.3 analizaremos de forma rigurosa el concepto de independencia lineal y de bases de espacios vectoriales abstractos.

Ejemplo 1.3 Dada una base ortonormal $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ y los siguientes vectores:

$$\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\,.$$

Queremos comprobar si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ forman una base.

Veamos, para que los vectores formen una base tienen que ser linealmente independientes. Esto es: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = 0$, con lo cual:

$$\alpha\left(3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) + \beta\left(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) + \gamma\left(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\right) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

es fácil ver que la solución de este sistema es: $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo tanto, se demuestra que los vectores son linealmente independientes y por consiguiente forman una base.

◁

Ejemplo 1.4 Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ del ejemplo anterior forman una base, podemos expresar otros vectores en términos de esta base. Tomemos, por ejemplo, los vectores: $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{e} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$, expresemos estos dos vectores en términos de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Entonces, para el vector $\mathbf{d}$ tenemos:

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} = \alpha\left(3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) + \beta\left(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) + \gamma\left(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\right) \;\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones anterior tendremos que: $\mathbf{d} = \frac{5}{8}\mathbf{a} - \frac{3}{8}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}$.

Seguidamente, para el vector $\mathbf{e}$ se tiene:

$$\mathbf{e} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} = \alpha\left(3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) + \beta\left(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) + \gamma\left(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\right) \;\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 3 \\ 2\alpha - 2\beta = -2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones resulta que: $\mathbf{e} = -\frac{1}{8}\mathbf{a} + \frac{7}{8}\mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{c}$.

◁

Ejemplo 1.5 Consideremos los siguientes tres vectores:

$$\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,, \mathbf{w}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} \text{ y } \mathbf{w}_3 = -\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,.$$

¿Formarán una base para $\mathbb{R}^3$?

Veamos entonces si son linealmente independientes:

$$\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 + \gamma\mathbf{w}_3 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = 0\,,$$

La comprobación es directa al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrrl} \alpha & +2\beta & & = 0 \\ & -3\beta & -\gamma & = 0 \\ 3\alpha & & +\gamma & = 0 \end{array}$$

Borrador Preliminar

Figura 1.3: Producto escalar y vectorial de vectores geométricos

cuya solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Por lo tanto, forman una base para $\mathbb{R}^3$.

Como forman base, podemos expresar otro vector, digamos: $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, en término de la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, esto es: $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 + \gamma\mathbf{w}_3$

Si procedemos como en los ejemplos anteriores, tenemos:

$$\mathbf{a} = \alpha(\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}) + \beta(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}) + \gamma(-\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{llll} \alpha & +2\beta & & = 1 \\ & -3\beta & -\gamma & = -3 \\ 3\alpha & & +\gamma & = 3 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3} \\ \\ \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = 2 \end{array}\right.$$

es decir:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3\,.$$

◁

1.1.4 Productos de vectores

Hemos sumado y restado vectores. El siguiente paso es multiplicarlos. Básicamente existen dos formas de multiplicar vectores: el producto escalar y el producto vectorial. Veremos a continuación de qué se trata y sin especificar un sistema de coordenadas para referirlos.

1.1.4.1 Producto escalar

Denominaremos producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ a un escalar cuyo valor será igual al producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman:

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}\,. \tag{1.2}$$

El significado geométrico del producto escalar es evidente, cuadrante I de la figura 1.3. El producto escalar representa la proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$ y equivalentemente la proyección de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.

De esta definición se derivan varias consecuencias las cuales por obvias no dejan de ser importantes:

Borrador Preliminar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, siempre es positivo*:
  $\zeta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si $\mathbf{a}$ es el vector nulo. Esto es, $\zeta = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Con esto podemos concluir que $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{\zeta}$.
- *El producto escalar es conmutativo*:
  $\zeta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, ya que el ángulo entre los vectores es el mismo y la multiplicación entre escalares es conmutativa.
- *El producto escalar es distributivo*:
  Esto es, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$. La demostración (gráfica) puede apreciarse en el cuadrante II de la figura 1.3.
- *La multiplicación por un número*:
  $\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha|\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b}) = |\alpha\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = |\mathbf{a}|\,|\alpha\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}$.
- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*
  A partir de la definición de producto interno es inmediata la comprobación de la siguiente desigualdad:
  $$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \left(|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}\right)^2 \;\Rightarrow\; (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2\,|\mathbf{b}|^2 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\;,$$
  ya que: $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} \leq 1$.
- *Del producto escalar surge el teorema del coseno.*
  Es inmediato calcular el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello vamos a suponer que $\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, con lo cual:
  $$\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \;\Rightarrow\; |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)\;,$$
  donde θ es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Esto no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la figura 1.3.
- *Dos vectores no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo.*
  Esta afirmación es inmediata:
  $$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \theta_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = 0\,.$$

El producto escalar lo hemos visto desde nuestras tempranas épocas de colegio. Quizá por eso no apreciamos las consecuencias que su definición nos trae. El producto escalar nos pemirte definir una geometría, vale decir el ángulo entre vectores. A partir de esta definición sabemos si dos vectores son o no ortogonales. Otra vez, en $\mathbb{R}^3$, no nos impactan mucho esa consecuencia. En la sección 2.2.3, veremos como la definición de un producto interno (en $\mathbb{R}^3$ lo llamamos escalar) nos permitirá definir distancia entre dos puntos, el tamaño de los vectores y el ángulo que ellos mantienen entre sí.

1.1.4.2 Producto vectorial

A diferencia del producto escalar que genera un escalar, el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (realmente un pseudovector o vector axial en contraposición a los vectores polares, pero eso lo veremos más adelante en la sección 1.4.4), con las siguientes características:

- El módulo de $\mathbf{c}$, será:
  $$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}\,. \tag{1.3}$$
  Es claro que el módulo de $\mathbf{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (ver el cuadrante V de la figura 1.3).
- Tal y como muestran los cuadrantes IV y V de la figura 1.3, $\mathbf{c}$ tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y como sentido la regla del pulgar derecho, regla de la mano derecha, o de

Borrador Preliminar

manera más elegante, será positiva cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponda al sentido antihorario.

Podemos deducir algunas consecuencias de esta definición.

- *El producto vectorial es anticonmutativo.*
  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, y se sigue de la definición que expresa el cuadrante IV de la figura 1.3.
- *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma.*
  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. La demostración de esto lo dejaremos para más adelante.
- *La multiplicación por un número.*
  $$|\mathbf{c}| = |\alpha|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b})| = |\alpha\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = |\mathbf{a}|\,|\alpha\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}\,.$$
- *Dos vectores serán colineales si su producto vectorial se anula.*
  Como en el caso cuando se anulaba el producto escalar identificábamos a dos vectores ortogonales, cuando se anula el producto vectorial tendremos dos vectores paralelos. Es claro que esto se cumple de inmediato:
  $$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \theta_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = 0 \;\Rightarrow\; |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = 0\,.$$
  Si el módulo del vector es cero, obvio que es el vector nulo. Ahora bien, también de aquí deducimos que:
  $$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0\,.$$

1.1.5 Producto triple o mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:

$$V = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |\mathbf{c}|\,|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle}\,. \tag{1.4}$$

Este producto también cumple con algunas propiedades que enunciaremos ahora y demostraremos más tarde.

- *El producto mixto representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.
  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ representa el área de la base y la altura está representada por la proyección del vector $\mathbf{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, precisamente $|\mathbf{c}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle}$.
- *El producto mixto es cíclico respecto a sus factores.*
  $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}\,. \tag{1.5}$$
  Esta afirmación se verá demostrada más adelante.
- *El producto mixto se anula cuando se repite alguno de sus factores.*
  $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0\,.$$
  Claramente, si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \;\Rightarrow\; (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$.
- *Si los tres vectores* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c}$ *son coplanares (linealmente dependientes) entonces:*
  $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0\,.$$
  Dicho de manera más elegante, útil e impactante: tres vectores que cumplen con:
  $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0\,,$$
  son linealmente independientes y forman una base para el espacio tridimensional. Esa base se denominará levógira (siguiendo el giro de las manecillas del reloj) si el producto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$ y dextrógira (la convencional base de la mano derecha) si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$.

Ejemplo 1.6 Resolvamos el problema del ejemplo 1.3 usando el producto mixto

Borrador Preliminar

Debemos calcular: $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\neq 0$, y efectivamente:

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=16\neq 0\,,$$

es decir, el conjunto de vectores son linealmente independientes.

◁

Ejemplo 1.7 Ahora bien, si $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ del ejemplo 1.3 forman una base, calculemos al vector $\mathbf{f}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ y expresémoslo en términos de $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$.

Procedemos a calcular $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(3\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(3\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right)=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 3 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=4\hat{\mathbf{i}}-12\hat{\mathbf{k}}\,,$$

con lo cual para el vector $\mathbf{f}$ resulta:

$$\mathbf{f}=4\hat{\mathbf{i}}-12\hat{\mathbf{k}}=\alpha\left(3\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right)+\beta\left(3\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right)+\gamma\left(\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{k}}\right)\Rightarrow\begin{cases}3\alpha+3\beta+\gamma=4\\ 2\alpha-2\beta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=-12\end{cases}$$

y finalmente, al resolver el sistema anterior, $\mathbf{f}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{a}-\mathbf{b}+10\mathbf{c}\,.$

◁

1.1.6 Ejercicios

1. Dado el triángulo cuyos vértices son los: $(2,3)$, $(6,9)$, $(8,1)$. Eencuentre:
   (a). el baricentro, es decir, el punto donde se interceptan las medianas del triángulo.
   (b). el circuncentro, es decir, el punto donde se interceptan las mediatrices del triángulo.
2. Utilice métodos vectoriales para probar que las líneas que unen los puntos medios con las aristas opuestas (bimedianas) de un tetraedro $OABC$ se interceptan en un punto, y que ese punto divide en dos partes cada una de las líneas.
3. Los vertices de un triángulo ABC tienen como vectores posición $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, respectivamente y relativos a un origen común O. Demuestre que el vector posición $\mathbf{g}$ del centróide G del triángulo viene dado por:
$$\mathbf{g}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\,.$$
4. Un paralelogramo tiene un ángulo agudo de $\pi/3$ y lados de longitud $a=1$ y $b=2$. Si pensamos que esos lados como vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ encuentre:
   (a). Los vectores: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.
   (b). Los vectores: $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ y $5\mathbf{a}-7\mathbf{b}$.
5. Con la definición de posición de centro de masa del ejemplo 1.2, encuentre el centro de masas para los siguientes sistemas:
   (a). Masas iguales a: $1,2,3,4$ en los vértices de un cuadrado de lados $a=2$.
   (b). Masas iguales a: $1,2,3,4$ en los vértices inferiores de un cubo cuyos lados son de longitud $a=2$ y masas iguales a: $5,6,7,8$ en la vértices superiores.
6. ¿Los siguientes vectores son linealmente independientes?
$$\mathbf{a}=(0,2,-1),\ \mathbf{b}=(0,1/2,-1/2),\ \mathbf{c}=(0,-2/3,-1/3)\,.$$
7. Las componentes de un vector y la regla para sumar vectores se combinan para introducir la forma

Borrador Preliminar

más simple de representar un vector como una combinación lineal de los vectores más elementales que podemos tener. Estos vectores forman lo que conocemos la base canónica: $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, vectores de longitud unitaria que apuntan en la dirección positiva de los ejes x, y y z.

Compruebe, entonces, si los siguientes vectores forman una base:

(a). $\mathbf{w}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{w}_2 = \hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{w}_3 = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$

(b). $\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{w}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{w}_3 = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$

8. Un paralelogramo tiene un ángulo agudo de $\pi/4$ y lados $a = 1, b = 2$. Si consideramos que los lados son vectores, encuentre:

   (a). El área del paralelogramo.

   (b). La proyección de cada lado sobre la dirección del otro.

9. Considere un triángulo cuyos lados están conformados por los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Con el producto vectorial entre ellos demuestre la ley del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\,.$$

   donde α, β, γ son los ángulos opuestos a los lados a, b, c respectivamente.

10. Demuestre que el volumen de un tetraedro formado a partir de tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ que coinciden en un mismo origen, puede representarse de la manera siguiente:

$$V = \frac{1}{6}\left|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\right|\,.$$

Practicando con Maxima

El programa de manipulación simbólica **Maxima** está diseñado para realizar cálculos algebraicos y numéricos que iremos descubriendo a medida que desarrollemos los diferentes temas de este curso. Es indispensable ir al apéndice A.1 para familiarizarnos con la sintaxis básica del programa.

Maxima es una potente calculadora y maneja números de diferentes tipos: enteros, racionales, irracionales, complejos y números con decimales (punto flotante).

Haremos algunos cálculos sencillos para ir familiarizándonos con la sintaxis, por ejemplo, pidamos al programa que nos diga cuánto vale $\ln(20)$. Para eso debemos escribir:

```
(%i1) log(20);
```

(%o1) $\log(20)$

Como podemos ver, el programa nos devuelve el valor exacto de $\ln(20)$, para obtener su valor numérico podemos escribir lo siguiente

```
(%i2) log(20),numer;
```

(%o2) 2.995732273553991

Si tenemos una fracción:

```
(%i3) 420/16000;
```

(%o3) $\frac{21}{800}$

```
(%i4) 420/16000,numer;
```

(%o4) 0.02625

Podemos utilizar la función **float** para el mismo resultado

```
(%i5) float(log(20)); float(420/16000);
```

Borrador Preliminar

(%o5) 2.995732273553991

(%o6) 0.02625

El programa contiene una gran cantidad de funciones matemáticas básicas internas, y por supuesto, entre ellas están las trigonométricas:

(%i7) sin(%pi/3);cos(%pi/3);tan(%pi/3);

(%o7) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(%o8) $\frac{1}{2}$

(%o9) $\sqrt{3}$

Ahora recurriremos a una de las facilidades de estructura de datos que nos ofrece el sistema para agrupar objetos matemáticos: las listas.

Las listas son un arreglo de cantidades que se escriben entre corchetes y los objetos deben separarse con comas.

(%i10) [sin(%pi/3),cos(%pi/3),tan(%pi/3)];

(%o10) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right]$

(%i11) [sin(%pi/3),cos(%pi/3),tan(%pi/3)],numer;

(%o11) $[0.8660254037844386, 0.5000000000000001, 1.732050807568877]$

Cuando necesitemos generar una lista por medio de alguna regla específica o fórmula usamos la función **makelist**. La sintaxis es la siguiente:

(%i12) makelist(exp(t*x),t,1,10);

(%o12) $\left[e^{x}, e^{2\,x}, e^{3\,x}, e^{4\,x}, e^{5\,x}, e^{6\,x}, e^{7\,x}, e^{8\,x}, e^{9\,x}, e^{10\,x}\right]$

Podemos también aplicar una función a cada elemento de la lista, en este caso a cada elemento le aplicaremos la función $\ln(x)$. Para tal fin utilizaremos el comando **map**.

(%i13) map(log,(makelist(exp(t*x),t,1,10)));

(%o13) $[x, 2\,x, 3\,x, 4\,x, 5\,x, 6\,x, 7\,x, 8\,x, 9\,x, 10\,x]$

Si queremos, por ejemplo, sumar todos los elementos de la lista anterior utilizamos la función **apply** con la operación que queremos realizar. Aquí aprovecharemos para utilizar un atajo muy práctico que consiste en el uso del símbolo %, que toma la última salida del programa para ser usado en la instrucción siguiente, de esta manera nos evitamos volver a escribir toda la instrucción anterior. La sintaxis para todo esto es:

(%i14) apply("+", %);

(%o14) $55\,x$

Otra cosa que podemos hacer es asignarle a una lista el nombre de una variable.

(%i15) L:[sin(%pi/3),log(3),sqrt(2),abs(x),exp(x^ 2)];

(%o15) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \log(3), \sqrt{2}, |x|, e^{x^2}\right]$

De manera que para aislar elementos de una lista escribimos:

(%i16) L[1]; L[4];

(%o16) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Borrador Preliminar

(%o17) $|x|$

Esto nos permite operar con sus elementos.

(%i18) L[2]*(L[1]+ L[4])/L[5];

(%o18) $\log(3)\, e^{-x^2} \left(|x| + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

La primera utilidad que le podemos dar a las listas es que nos permite definir vectores. Si queremos que el programa interprete los vectores

$$\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)\,,\ \mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3)\,,\ \mathbf{c} = (c^1, c^2, c^3)\,,\ \mathbf{v0} = (0, 0, 0)\,,$$

los podemos escribir como listas:

(%i19) a:[a1,a2,a3]; b:[b1,b2,b3];c:[c1,c2,c3]; v0:[0,0,0];

(%o19) $[a_1, a_2, a_3]$

(%o20) $[b_1, b_2, b_3]$

(%o21) $[c_1, c_2, c_3]$

(%o22) $[0, 0, 0]$

Ahora podemos hacer operaciones con los vectores

(%i23) a+b;

(%o23) $[b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3]$

(%i24) (a+b)+c;

(%o24) $[c_1 + b_1 + a_1, c_2 + b_2 + a_2, c_3 + b_3 + a_3]$

(%i25) a+v0;

(%o25) $[a_1, a_2, a_3]$

(%i26) a-a;

(%o26) $[0, 0, 0]$

(%i27) alpha*(a+b);

(%o27) $[\alpha\ (b_1 + a_1)\,, \alpha\ (b_2 + a_2)\,, \alpha\ (b_3 + a_3)]$

(%i28) (alpha+beta)*a;

(%o28) $[a_1\ (\beta + \alpha)\,, a_2\ (\beta + \alpha)\,, a_3\ (\beta + \alpha)]$

Borrador Preliminar

Figura 1.4: Bases vectoriales oblicuas I, bases cartesianas II, las bases orientadas del tipo levógiro y del tipo dextrógiro II y los cosenos directores IV.

1.2 Vectores en componentes

La formulación de las leyes físicas debe hacerse en término de cantidades vectoriales (tensoriales). Esto independiza su formulación de un sistema particular de coordenadas, pero llegado el momento de calcular valores y utilizar estas leyes, es mucho más conveniente referirla a un sistema de coordenadas particularmente adaptado a la geometría del problema. En ese caso, la ecuación vectorial se convertirá en tantas ecuaciones como componentes (referidas al sistema de coordenadas utilizado) tengan los vectores en ese sistema de coordenadas.

1.2.1 Bases y componentes

Tal y como mencionamos anteriormente, tres vectores **no coplanares** cualesquiera son linealmente independientes y constituyen una base para el espacio tridimensional. Denominaremos a estos vectores base como $\{\mathbf{w}_i\}$, y por ser linealmente independientes podremos expresar cualquier vector $\mathbf{a}$ como una combinación lineal única, tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la figura 1.4.

Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general) de coordenadas al colocarlos con un mismo origen, esto es:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3\,,$$

donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Nótese que por costumbre (será evidente más adelante, en la sección 3.1.1) etiquetamos estos números con superíndices y la letra que identifica al vector.

Más aún, cada punto P del espacio viene definido por un radio vector $\mathbf{r}\,(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P y se le asocian tres números $\{x^1, x^2, x^3\}$, que son las proyecciones a lo largo de cada uno de los ejes coordenados $\left\{\overline{0x^1}, \overline{0x^2}, \overline{0x^3}\right\}$. Los números $\{x^1, x^2, x^3\}$ se denominan las componentes de $\mathbf{r}\,(P)$ en el sistema de referencia $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

Existe una familia de sistemas de coordenadas en la cual sus vectores base son ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si. Tal y como mostraremos

Borrador Preliminar

más adelante, siempre se puede construir un sistema ortogonal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ u ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ a partir de una base genérica de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Cuando el sistema es ortogonal sus componentes se denominarán rectangulares. Dependiendo del signo del triple producto mixto, el sistema de coordenadas será dextrógiro ($(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$) o levógiro ($(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 < 0$), tal y como se muestra en el cuadrante III de la figura 1.4.

Es costumbre ancestral[1] utilizar la convención dextrógira donde el producto: $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y en ese caso utilizamos el bien conocido conjunto de vectores unitarios $\left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ con los que ya hemos estado familiarizados:

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\,(P) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,.$$

También es costumbre representar este sistema de coordenadas cartesiano ortonormal como:

$$\hat{\mathbf{i}} \equiv \hat{\mathbf{i}}_1\,,\ \hat{\mathbf{j}} \equiv \hat{\mathbf{i}}_2 \text{ y } \hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{i}}_3\,, \tag{1.6}$$

para recordar que estamos en un sistema de coordenadas cartesianas y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector.

$$\mathbf{a} = a^1\hat{\mathbf{i}}_1 + a^2\hat{\mathbf{i}}_2 + a^3\hat{\mathbf{i}}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\,(P) = x^1\hat{\mathbf{i}}_1 + x^2\hat{\mathbf{i}}_2 + x^3\hat{\mathbf{i}}_3\,.$$

Obviamente el módulo del vector se podrá expresar con la utilización del teorema de Pitágoras:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \quad \text{y} \quad |\mathbf{r}\,(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,, \tag{1.7}$$

y la multiplicación por un número será:

$$\alpha\mathbf{a} = \alpha\left(a^1\hat{\mathbf{i}}_1 + a^2\hat{\mathbf{i}}_2 + a^3\hat{\mathbf{i}}_3\right) = \left(\alpha a^1\right)\hat{\mathbf{i}}_1 + \left(\alpha a^2\right)\hat{\mathbf{i}}_2 + \left(\alpha a^3\right)\hat{\mathbf{i}}_3 \;\Rightarrow\; |\alpha\mathbf{a}| = \alpha\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,.$$

Igualmente para un vector unitario:

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1\hat{\mathbf{i}}_1 + a^2\hat{\mathbf{i}}_2 + a^3\hat{\mathbf{i}}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}\,,$$

con lo cual todo vector:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\hat{\mathbf{u}}_a = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\;\hat{\mathbf{u}}_a\,.$$

1.2.2 Cosenos directores

Como se puede apreciar en el cuadrante IV de la figura 1.4, podemos construir tres triángulos rectángulos con el radio vector $\mathbf{a}\,(P)$ como hipotenusa de cada uno de ellos. Los ángulos que forma el radio vector $\mathbf{a}\,(P)$ con cada uno de los ejes coordenados $\{x, y, z\}$ son $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, respectivamente, con lo cual:

$$a_x = |\mathbf{a}|\cos\theta_1\,, \quad a_y = |\mathbf{a}|\cos\theta_2 \quad \text{y} \quad a_z = |\mathbf{a}|\cos\theta_3 \;\Rightarrow\; \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1\,, \tag{1.8}$$

pero además:

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos\theta_1\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta_2\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta_3\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

1.2.3 Una división fallida

Uno esperaría que para cada una de las definiciones de productos vectoriales, existiera el vector cociente, es decir, que pudiéramos "despejar" uno de los vectores multiplicados en términos del otro. La situación es que esta operación no está definida unívocamente y lo podemos intuir a partir de una de la definición del producto escalar. Supongamos que tenemos que: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, con lo cual, si pudiéramos "despejar", digamos, $\mathbf{b} = \zeta/\mathbf{a}$

[1] Quizá por las arraigadas relaciones de dominación de los derechos sobre los izquierdos (en latín e italiano los zurdos son siniestros), o quizá tal vez por conservar la definición de volumen como positivo.

Borrador Preliminar

¿Tendríamos entonces definido $\mathbf{b}$ de una manera unívoca? La respuesta es NO, ya que $\zeta = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\zeta}{\mathbf{a}} + \mathbf{d} \right)$, donde $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$, por lo cual existen infinitos $\mathbf{b} = \frac{\zeta}{\mathbf{a}} + \mathbf{d}$ que cumplen $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

1.2.4 Algebra vectorial en componentes

Es posible reescribir toda el álgebra vectorial que hemos visto mediante operaciones referidas a sistemas de coordenadas, como mostraremos a continuación. Por simplicidad, anclaremos nuestro sistema de coordenadas a una base ortonormal: $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$.

Para los vectores $\mathbf{a} = a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3$ y $\mathbf{b} = b^1\hat{\mathbf{e}}_1 + b^2\hat{\mathbf{e}}_2 + b^3\hat{\mathbf{e}}_3$, la suma será representada por:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \left(a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3\right) + \left(b^1\hat{\mathbf{e}}_1 + b^2\hat{\mathbf{e}}_2 + b^3\hat{\mathbf{e}}_3\right) = \left(a^1 + b^1\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\hat{\mathbf{e}}_3\,,$$

y obviamente, la resta:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \left(a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3\right) - \left(b^1\hat{\mathbf{e}}_1 + b^2\hat{\mathbf{e}}_2 + b^3\hat{\mathbf{e}}_3\right) = \left(a^1 - b^1\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(a^2 - b^2\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(a^3 - b^3\right)\hat{\mathbf{e}}_3\,,$$

con lo cual la distancia entre dos puntos P y M será:

$$d\left(P, M\right) = \left|\left(\mathbf{r}\left(P\right) = \mathbf{a}\right) - \left(\mathbf{r}\left(M\right) = \mathbf{b}\right)\right| = \sqrt{\left(x^1 - y^1\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 + \left(x^3 - y^3\right)^2}\,.$$

1.2.5 Dependencia e independencia lineal

Ahora es fácil estudiar la dependencia o independencia lineal en coordenadas. Otra vez, tres vectores: $\mathbf{a} = a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{b} = b^1\hat{\mathbf{e}}_1 + b^2\hat{\mathbf{e}}_2 + b^3\hat{\mathbf{e}}_3$ y $\mathbf{c} = c^1\hat{\mathbf{e}}_1 + c^2\hat{\mathbf{e}}_2 + c^3\hat{\mathbf{e}}_3$, serán *linealmente independientes* si se cumple que:

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$$

Por inspección podemos ver que base canónica: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}} \equiv (1,0,0)\,, \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}} \equiv (0,1,0)\,, \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}} \equiv (0,0,1)$ conforman un conjunto de vectores claramente linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base.

En general tendremos que:

$$\mathbf{0} = \alpha\left(a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3\right) + \beta\left(b^1\hat{\mathbf{e}}_1 + b^2\hat{\mathbf{e}}_2 + b^3\hat{\mathbf{e}}_3\right) + \gamma\left(c^1\hat{\mathbf{e}}_1 + c^2\hat{\mathbf{e}}_2 + c^3\hat{\mathbf{e}}_3\right)$$

$$\mathbf{0} = \left(\alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3\right)\hat{\mathbf{e}}_3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1 = 0 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0 \\ \alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 = 0 \end{cases}$$

Esto no es otra cosa que un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas: $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, y la solución que estamos buscando $\alpha = \beta = \gamma = 0$ se cumplirá si:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0\,.$$

1.2.6 Productos de vectores en componentes

Exploremos más sobre el álgebra vectorial y al producto de vectores si los tenemos anclados a algún sistema de coordenadas.

Borrador Preliminar

1.2.6.1 Producto escalar

Todo lo expresado en la sección 1.1.4.1 lo representaremos ahora en término de una base ortonormal: $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$. Dados los vectores $\mathbf{a} = a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3$ y $\mathbf{b} = b^1\hat{\mathbf{e}}_1 + b^2\hat{\mathbf{e}}_2 + b^3\hat{\mathbf{e}}_3$, el producto escalar entre ellos es:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \left(a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3\right)\cdot\left(b^1\hat{\mathbf{e}}_1 + b^2\hat{\mathbf{e}}_2 + b^3\hat{\mathbf{e}}_3\right) = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3\,,$$

por ser ortonormales se tiene que:

$$\hat{\mathbf{e}}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2\cdot\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3\cdot\hat{\mathbf{e}}_3 = 1\,, \quad \text{y} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_2\cdot\hat{\mathbf{e}}_1 = 0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1\cdot\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3\cdot\hat{\mathbf{e}}_1 = 0 \\ \hat{\mathbf{e}}_2\cdot\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3\cdot\hat{\mathbf{e}}_2 = 0 \end{cases}$$

Las propiedades del producto escalar en coordenadas cartesianas se comprueban fácilmente.

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, siempre es positivo.*

  $$\zeta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \geq 0\,,$$

  y

  $$(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 0 \;\Rightarrow\; a^1 = a^2 = a^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}\,.$$

  Adicionalmente: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$.

- *El producto escalar es conmutativo.*

  $$\zeta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 = b^1a^1 + b^2a^2 + b^3a^3\,.$$

- *El producto escalar es distributivo.*

  $$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \left[a^1\hat{\mathbf{e}}_1 + a^2\hat{\mathbf{e}}_2 + a^3\hat{\mathbf{e}}_3\right]\cdot\left[\left(b^1+c^1\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(b^2+c^2\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(b^3+c^3\right)\hat{\mathbf{e}}_2\right]\,,$$

  por lo tanto:

  $$\begin{aligned} a^1\left(b^1+c^1\right) + a^2\left(b^2+c^2\right) + a^3\left(b^3+c^3\right) &= \left(a^1b^1 + a^1c^1\right) + \left(a^2b^2 + a^2c^2\right) + \left(a^3b^3 + a^3c^3\right) \\ = \left(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3\right) + \left(a^1c^1 + a^2c^2 + a^3c^3\right) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,. \end{aligned}$$

- *La multiplicación por un escalar.*

  $$|\alpha|\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b}) = \left(\alpha a^1\right)b^1 + \left(\alpha a^2\right)b^2 + \left(\alpha a^3\right)b^3 = a^1\left(\alpha b^1\right) + a^2\left(\alpha b^2\right) + a^3\left(\alpha b^3\right)\,.$$

- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

  $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,.$$

- *Diremos que dos vectores, no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo.*
  Esta afirmación es inmediata:

  $$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \quad\Rightarrow\quad \theta_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = 0\,,$$

  por lo cual:

  $$a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} \;\Rightarrow\; \cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle} = \frac{a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2}}\,,$$

  de donde se deduce que para dos vectores perpendiculares:

  $$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \;\Rightarrow\; 0 = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3\,.$$

- *Del producto escalar surge el teorema del coseno.*
  Es inmediato generalizar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello suponemos que

Borrador Preliminar

$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, con lo cual:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \;\Rightarrow\; |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}\,,$$

que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la figura 1.3.

1.2.6.2 Producto vectorial

De igual manera, lo que aprendimos en la sección 1.1.4.2 ahora lo expresamos en términos de las componentes de los vectores en una base ortonormal de la forma:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(a^2b^3 - a^3b^2\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(a^3b^1 - a^1b^3\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(a^1b^2 - a^2b^1\right)\hat{\mathbf{e}}_3\,,$$

lo anterior se puede organizar como el determinante de la matriz:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}\,,$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}| &= \sqrt{\left(a^2b^3 - a^3b^2\right)^2 + \left(a^3b^1 - a^1b^3\right)^2 + \left(a^1b^2 - a^2b^1\right)^2} \\ &= \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2}\,\mathrm{sen}(\theta)_{\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}\,. \end{aligned}$$

1.2.6.3 Triple producto mixto

Finalmente, analicemos el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle} = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}\,.$$

Obviamente, el valor absoluto de este número, $V = |\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|$, representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por los vectores: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

Ejemplo 1.8 Si tenemos los vectores $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$, encontremos el ángulo que forman.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\left[\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\left[2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}\right]}{\sqrt{1^2+3^2+5^2}\sqrt{2^2+4^2+6^2}} = \frac{2+12+30}{\sqrt{35}\sqrt{56}} = \frac{44}{\sqrt{35}\sqrt{56}} = \frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{35}}\,.$$

Por lo tanto: $\theta = \arccos\left(\frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{35}}\right) = 0.11088$.

Notemos que de la ecuación (1.8) para los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y su componentes resulta que:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{35}}\,,\;\cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{\sqrt{35}}\,,\;\cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{5}{\sqrt{35}} \;\Rightarrow\; \left[\frac{1}{\sqrt{35}}\right]^2 + \left[\frac{3}{\sqrt{35}}\right]^2 + \left[\frac{5}{\sqrt{35}}\right]^2 = 1\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{b_x}{|\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{56}}\,,\;\cos\beta = \frac{b_y}{|\mathbf{b}|} = \frac{4}{\sqrt{56}}\,,\;\cos\gamma = \frac{b_z}{|\mathbf{b}|} = \frac{6}{\sqrt{56}} \;\Rightarrow\; \left[\frac{2}{\sqrt{56}}\right]^2 + \left[\frac{4}{\sqrt{56}}\right]^2 + \left[\frac{6}{\sqrt{56}}\right]^2 = 1\,.$$

Y además podemos ver claramente que el ángulo entre los vectores y los cosenos directores están relacionados, como se muestra a continuación:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{35}}\frac{2}{\sqrt{56}} + \frac{3}{\sqrt{35}}\frac{4}{\sqrt{56}} + \frac{5}{\sqrt{35}}\frac{6}{\sqrt{56}} = \frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{35}}\,.$$

◁

Ejemplo 1.9 Consideremos los vectores:

$$\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} = (1,0,0)\;,\;\mathbf{w}_2 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} = (1,1,0)\;,\;\mathbf{w}_3 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} = (1,1,1)\;.$$

Borrador Preliminar

¿Son linealmente independientes?

Tenemos entonces que:

$$\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,1)=(0,0,0)\,.$$

Al escribir el sistema de ecuaciones resulta:

$$\alpha+\beta+\gamma=0\,,\beta+\gamma=0\,,\gamma=0\,,\ \Rightarrow\ \alpha=0\,,\quad \beta=0\,,\quad \gamma=0\,,$$

con lo cual demostramos que son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base para los vectores tridimensionales. Notemos además que esta base: $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_2\}$, es una base que no es ortogonal.

◁

Ejemplo 1.10 Dados los vectores:

$$\mathbf{a}=\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}\,,\ \mathbf{b}=4\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}\,,\ \mathbf{c}=3\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Revisemos si forman una base.

Podemos ver que $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=\mathbf{0}$ implica que:

$$\alpha\left[\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}\right]+\beta\left[4\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}\right]+\gamma\left[3\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right]=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{r}\alpha+4\beta+3\gamma=0\\ 2\alpha+5\beta+2\gamma=0\\ 3\alpha+\gamma=0\end{array}\right.$$

Cuya solución es: $\alpha=\beta=\gamma=0$. Por lo tanto el conjunto $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ es linealmente independiente, forman una base no ortogonal.

Por otro lado, si queremos calcular el volumen recurrimos al triple producto vectorial:

$$\begin{aligned}V &= |\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]|=\left|\left[\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot[4\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}]\times\left[3\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\right]\right|\\ &= \left|\left[\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\left[5\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}-7\hat{\mathbf{k}}\right]\right|=|-24|=24\,.\end{aligned}$$

Analicemos el siguiente cálculo adicional: si tenemos un vector arbitrario, digamos, $\mathbf{d}=d^1\hat{\mathbf{i}}+d^2\hat{\mathbf{j}}+d^3\hat{\mathbf{k}}$, podemos construir las siguientes cantidades:

$$c^1=-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,,\quad c^2=-\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,,\quad c^3=-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,.$$

resultando:

$$c^1=\frac{d^1+2d^2+3d^3}{24}\,,\quad c^2=\frac{4d^1+5d^2}{24}\,,\quad c^3=\frac{3d^1+2d^2+d^3}{24}\,,$$

podemos ver que si calculamos la siguiente expresión: $c^1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+c^2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+c^3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mathbf{d}$, resulta que es igual a:

$$\begin{aligned}\frac{d^1+2d^2+3d^3}{24}(5\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}-7\hat{\mathbf{k}}) &+ \frac{4d^1+5d^2}{24}(4\hat{\mathbf{i}}-8\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}})+\frac{3d^1+2d^2+d^3}{24}(-15\hat{\mathbf{i}}+12\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}})\\ &+ d^1\hat{\mathbf{i}}+d^2\hat{\mathbf{j}}+d^3\hat{\mathbf{k}}=(0,0,0)\,.\end{aligned}$$

Es decir,

$$c^1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+c^2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+c^3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mathbf{d}=\mathbf{0}\,,$$

siempre y cuando el conjunto $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ sea linealmente independiente y $\mathbf{d}$ un vector arbitrario.

◁

Borrador Preliminar

1.2.7 Ejercicios

1. Con la definición del producto escalar entre vectores, demuestre que si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces:
$$\cos\theta = \frac{a^1b^1}{ab} + \frac{a^2b^2}{ab} + \frac{a^3b^3}{ab}\,.$$
Donde las cantidades a^i/a y b^i/b son los cosenos directores de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ respectivamente y $a = |\mathbf{a}|$ y $b = |\mathbf{b}|$.
2. Encuentre la distancia del punto P al origen, si P viene dado por el vector posición: $\mathbf{r} = 2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$. Y si para un punto arbitrario el vector posición es: $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ ¿Qué superficie describe éste vector cuando $|\mathbf{r}| = 3$?
3. Encuentre los cosenos directores y los correspondientes ángulos para los siguientes vectores:
   (a). $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$.
   (b). $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.
   (c). $\mathbf{c} = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.
4. Verifique que los vectores:
$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}\,, \quad \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,.$$
forman una base ¿Esta base será del tipo dextrógiro o levógiro?
5. ¿Son los siguientes conjuntos de vectores una base?
   (a). $\mathbf{a}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{a}_2 = \hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{a}_3 = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.
   (b). $\mathbf{b}_1 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{b}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{b}_3 = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.
6. Dados los vectores:
$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2 + 3\hat{\mathbf{e}}_3\,, \quad \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{e}}_1 + 5\hat{\mathbf{e}}_2 + 6\hat{\mathbf{e}}_3\,, \quad \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\,, \quad \mathbf{d} = 6\hat{\mathbf{e}}_1 + 5\hat{\mathbf{e}}_2 + 4\hat{\mathbf{e}}_3\,.$$
   (a). Encuentre:
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}\,, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}\,, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}\,, \quad -\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}\,.$$
   (b). El ángulo entre los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ y los vectores base $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.
   (c). La magnitud de los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$.
   (d). El ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y entre $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$.
   (e). La proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.
   (f). ¿Son los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ coplanares?
   (g). Encuentre $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})$.
   (h). Los productos $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ y los ángulos que estos forman con $\mathbf{d}$.
   (i). $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
7. Verifique la desigualdad triangular: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, para los siguientes vectores:
   (a). $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$.
   (b). $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.
8. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores arbitrarios y α y β números, demuestre que:
$$|\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}|^2 \leq \alpha^2|\mathbf{a}|^2 + 2\alpha\beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \beta^2|\mathbf{b}|^2\,.$$
9. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores arbitrarios y α, β, γ escalares que satisfacen:
$$\alpha(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{d} = \mathbf{0}\,,$$
demuestre que si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son linealmente independientes, entonces:
$$\alpha = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}\,, \quad \beta = -\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}\,, \quad \gamma = -\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}\,.$$

Borrador Preliminar

10. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores arbitrarios y α, β, γ escalares que satisfacen:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}\,,$$

demuestre que si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son linealmente independientes, entonces:

$$\alpha = -\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,, \quad \beta = -\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,, \quad \gamma = -\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}\,.$$

Ayuda: tome el producto escalar de la ecuación con $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

11. Demuestre que los vectores $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{c} = 4\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ son linealmente independientes. Escoja un vector $\mathbf{d}$ y verifique los resultados de los dos últimos ejercicios.

12. Utilizando **Maxima** realice todos los ejercicios anteriores y compare los resultados.

Practicando con Maxima

Con el programa de manipulación simbólica **Maxima** haremos algunos cálculos sencillos con vectores. Nuevamente recomendamos ver el apéndice A.1 como introducción al programa.

Dados los vectores, en coordenadas cartesianas: $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 7\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}}$.

```
(%i1) a:[1,2,3];
(%o1) [1, 2, 3]

(%i2) b:[7,8,9];
(%o2) [7, 8, 9]
```

La multiplicación por escalares y suma es simple, si queremos calcular $\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$, escribimos:

```
(%i3) alpha*a + beta*b;
(%o3) [7 β + α, 8 β + 2 α, 9 β + 3 α]
```

Para el producto escalar procedemos utilizando el operador punto, como se muestra a continuación.

```
(%i4) a.b;
(%o4) 50
```

El cálculo de producto vectorial no es tan obvio, debemos cargar previamente la biblioteca **vect**.

```
(%i5) load(vect)$
```

El operador para el producto vectorial es una tilde $\sim$ y además debemos utilizar la función **express**. Entonces, para calcular $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, ejecutamos los siguientes comandos:

```
(%i6) express(a~ b);
(%o6) [−6, 12, −6]
```

La norma de un vector, como ya vimos, es: $\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$

```
(%i7) sqrt(a.a);
(%o7) √14
```

Si tenemos otro vector, digamos $\mathbf{c} = -4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}$, el producto triple: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ se calcula así:

```
(%i8) c:[-4,5,-6];
(%o8) [−4, 5, −6]

(%i9) a.express(b~ c);
(%o9) 120
```

Borrador Preliminar

El ángulo entre los vectores **a** y **b**, es:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right).$$

En **Maxima** usamos la función **acos(x)** para el arcocoseno(x). Consultar el manual del programa para ver el resto de las funciones trigonométricas.

```
(%i10) acos((a.b)/(sqrt(a.a)*sqrt(b.b)));
```

(%o10) $\operatorname{acos}\left(\frac{50}{\sqrt{14}\sqrt{194}}\right)$

Seguramente lo queremos es el valor numérico, esto se hace agregando la función **float**. Con la siguiente sintaxis logramos el objetivo:

```
(%i11) acos((a.b)/(sqrt(a.a)*sqrt(b.b))),float;
```

(%o11) 0.2858867976945064

Para finalizar, podemos considerar el problema de la independencia lineal de vectores. Tomemos el conjunto de vectores del ejemplo **??**, es decir, los vectores: $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. El sistema de ecuaciones a resolver era:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Disponemos de un comando que permite resolver sistemas de ecuaciones lineales, este comando se llama **linsolve**. Podemos escribir el sistema de ecuaciones como una lista y luego resolver:

```
(%i12) ecus:[alpha+4*beta+3*gamma=0,2*alpha+5*beta+2*gamma=0,3*alpha+gamma=0];
```

(%o12) $[3\,\gamma + 4\,\beta + \alpha = 0, 2\,\gamma + 5\,\beta + 2\,\alpha = 0, \gamma + 3\,\alpha = 0]$

```
(%i13) linsolve(ecus,[alpha,beta,gamma]);
```

(%o13) $[\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0]$

Repasemos el ejemplo 1.10. Primero escribamos los vectores

```
(%i14) a:[1,2,3];b:[4,5,0];c:[3,2,1];
```

(%o14) $[1, 2, 3]$

(%o15) $[4, 5, 0]$

(%o16) $[3, 2, 1]$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

```
(%i17) ecus:[alpha+4*beta+3*gamma=0, 2*alpha+5*beta+2*gamma=0, 3*alpha+gamma=0];
```

(%o17) $[3\gamma + 4\beta + \alpha = 0, 2\gamma + 5\beta + 2\alpha = 0, \gamma + 3\alpha = 0]$

```
(%i18) linsolve(ecus,[alpha,beta,gamma]);
```

(%o18) $[\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0]$

El volumen

```
(%i19) V: abs(a.express(b~ c));
```

(%o19) 24

Ahora vamos a introducir un vector arbitrario

```
(%i20) d:[d1,d2,d3];
```

Borrador Preliminar

(%o20) $[d1, d2, d3]$

y calculamos las cantidades c^1, c^2, y c^3 del ejemplo

```
(%i21) c1:-(a.d)/(a.express(b~ c)); c2:-(b.d)/(a.express(b~ c)); c3:-(c.d)/(a.express(b~ c));
```

(%o21) $-\frac{-3\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-\mathrm{d1}}{24}$

(%o22) $-\frac{-5\mathrm{d2}-4\mathrm{d1}}{24}$

(%o23) $-\frac{-\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-3\mathrm{d1}}{24}$

y ahora la expresión: $c^1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+c^2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+c^3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mathbf{d}$:

```
(%i24) c1*express(b~ c)+c2*express(c~ a)+c3*express(a~ b)+d;
```

(%o24) $[\frac{5(-\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-3\mathrm{d1})}{8}-\frac{5(-3\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-\mathrm{d1})}{24}-\frac{-5\mathrm{d2}-4\mathrm{d1}}{6}+\mathrm{d1}, -\frac{-\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-3\mathrm{d1}}{2}+\frac{-3\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-\mathrm{d1}}{6}+\mathrm{d2}+\frac{-5\mathrm{d2}-4\mathrm{d1}}{3}, \mathrm{d3}+\frac{-\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-3\mathrm{d1}}{8}+\frac{7(-3\mathrm{d3}-2\mathrm{d2}-\mathrm{d1})}{24}-\frac{-5\mathrm{d2}-4\mathrm{d1}}{6}]$

Simplificamos

```
(%i25) ratsimp(%);
```

(%o25) $[0, 0, 0]$

Borrador Preliminar

Figura 1.5: Geometría analítica: representación de rectas y planos con vectores cartesianos.

1.3 Aplicaciones del álgebra vectorial

Uno de los terrenos más exitosos de las aplicaciones del álgebra vectorial es la geometría analítica. Esto se realiza en base a la definición que hiciéramos del radio vector: a cada punto P del espacio le asociamos un radio vector posición, tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la figura 1.4.

$$P \longleftrightarrow (x, y, z) \equiv \left(x^1, x^2, x^3\right) \;\Rightarrow\; \mathbf{r}\,(P) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = x^1\hat{\mathbf{i}}_1 + x^2\hat{\mathbf{i}}_2 + x^3\hat{\mathbf{i}}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i\hat{\mathbf{i}}_i\,.$$

A partir de esta definición todas las propiedades geométricas del espacio las podemos construir con vectores.

1.3.1 Rectas y vectores

La ecuación de la recta en término de vectores la definiremos fijando uno de sus puntos, digamos:

$$\mathbf{r}\,(P_1) \equiv \mathbf{x}\,(P_1) = \mathbf{x}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}} = x^1_{(1)}\hat{\mathbf{i}}_1 + x^2_{(1)}\hat{\mathbf{i}}_2 + x^3_{(1)}\hat{\mathbf{i}}_3\,,$$

y un vector que indique su dirección, digamos $\mathbf{a} = a^1\hat{\mathbf{i}} + a^2\hat{\mathbf{j}} + a^3\hat{\mathbf{k}}$ (ver cuadrante I de la figura 1.5) con lo cual la ecuación de una recta en lenguaje vectorial será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{a} \;\Rightarrow\; x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}} + \lambda\left(a^1\hat{\mathbf{i}} + a^2\hat{\mathbf{j}} + a^3\hat{\mathbf{k}}\right) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = x_1 + \lambda a^1 \\ y = y_1 + \lambda a^2 \\ z = z_1 + \lambda a^3 \end{cases}$$

donde $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ es el conjunto de puntos genéricos que cumple con la ecuación de la recta en 3D.

Existe una manera más elegante, como veremos en la sección siguiente, de reescribir las ecuaciones anteriores utilizando la notación de índices[2]. Las ecuaciones ahora son más evidentes:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{a} \;\Rightarrow\; x^i\hat{\mathbf{i}}_i = x^i_{(1)}\hat{\mathbf{i}}_i + \lambda a^i\hat{\mathbf{i}}_i \;\Rightarrow\; x^i = x^i_{(1)} + \lambda a^i\,, \qquad \text{para } i = 1, 2, 3\,.$$

donde: $(x, y, z) \equiv \left(x^1, x^2, x^3\right)$ y $\left(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right) \equiv (\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3)$.

Nótese que efectivamente se cumplen tres ecuaciones escalares y cada una de éstas tiene la forma de una recta. Además, tal y como se muestra la figura 1.5, el punto genérico (x, y, z) lo describe (sobre la recta) la variación del módulo de $\mathbf{a}$ mediante la constante de proporcionalidad λ. Si se requiere describir una recta

[2]Suprimimos aquí el símbolo de sumatoria, esta convención quedará clara en la siguiente sección, pero mantengamos en mente que tenemos una suma sobre el índice i.

Borrador Preliminar

que pase por dos puntos: (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) entonces una vez seleccionado uno de los puntos (digamos (x_1, y_1, z_1)) seleccionamos el vector $\mathbf{a} = \mathbf{r}(P_2) - \mathbf{r}(P_1)$ como la resta de los dos radio vectores a los puntos P_2 y P_1. Esto es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \ .$$

Al despejar λ de la ecuaciones de las rectas resulta:

$$x^i = x^i_{(1)} + \lambda a^i \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{x^i - x^i_{(1)}}{a^i} = \frac{x - x_1}{a^1} = \frac{y - y_1}{a^2} = \frac{z - z_1}{a^3} \, ,$$

y de manera equivalente:

$$x^i = x^i_{(1)} + \lambda\left(x^i_{(2)} - x^i_{(1)}\right) \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{x^i - x^i_{(1)}}{x^i_{(2)} - x^i_{(1)}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \, .$$

1.3.2 Planos y vectores

Ocurre exactamente lo mismo cuando construimos la ecuación vectorial para un plano. En general una superficie la define su vector normal (perpendicular). En el caso de una superficie plana (un plano) tendrá una única normal que lo define, por lo tanto, un plano vendrá definido por su vector perpendicular en un punto, digamos $Q = P_1 : (x_1, y_1, z_1)$. La ecuación vectorial del plano vendrá definida por todos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ tales que sean perpendiculares a un determinado vector $\mathbf{a}$ (ver cuadrante II de la figura 1.5). Donde el punto P es un punto genérico (x, y, z) que define un radio vector. La ecuación vectorial del plano será simplemente:

$$\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} \cdot \left[\mathbf{r}(P) - \underbrace{\mathbf{r}(P_1)}_{\mathbf{b}}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_1}_{b} \, .$$

Esto es, se tiene que cumplir la condición:

$$\begin{aligned}
\left(a^1\hat{\mathbf{i}} + a^2\hat{\mathbf{j}} + a^3\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left[\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right) - \left(x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}}\right)\right] &= 0 \\
\left(a^1\hat{\mathbf{i}} + a^2\hat{\mathbf{j}} + a^3\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left[(x - x_1)\,\hat{\mathbf{i}} + (y - y_1)\,\hat{\mathbf{j}} + (z - z_1)\,\hat{\mathbf{k}}\right] &= 0 \\
a^1(x - x_1) + a^2(y - y_1) + a^3(z - z_1) &= 0 \, ,
\end{aligned}$$

con lo cual, la ecuación del plano queda como siempre la hemos conocido:

$$a^1x + a^2y + a^3z - a^1x_1 - a^2y_1 - a^3z_1 = 0 \ \Rightarrow \ a^1x + a^2y + a^3z = b = a^1x_1 + a^2y_1 + a^3z_1 \, .$$

Nuevamente, de manera compacta[3]

$$a^ix_i - a^jx_{j(1)} = 0 \ \Rightarrow \ a_kx^k = b = a_lx^l_{(1)} \, .$$

Es claro que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_1 = b$ es la proyección del radio vector $\mathbf{r}(P_1)$ sobre la perpendicular que define al plano. Por lo tanto será la distancia entre el plano y el origen de coordenadas. Si $b = 0$ el plano pasa por el origen de coordenadas.

Consideremos ahora el cuadrante III de la figura 1.5. Allí están especificados tres puntos en el espacio caracterizados por sus correspondientes radio vectores posición: $\mathbf{r}(P_1) = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}(P_2) = \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}(P_3) = \mathbf{r}_3$. Estos tres puntos serán coplanares si:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{mnl}\,(x^m_1 - x^m_2)\,(x^n_2 - x^n_3)\left(x^l_3 - x^l_1\right) = 0 \, ,$$

y la ecuación vectorial del plano vendrá dada por:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0 \, .$$

[3]Los índices repetidos arriba y abajo indican suma

Borrador Preliminar

Ejemplo 1.11 Un plano viene determinado por los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (1,2,3)$ y $C = (0,0,0)$. Encuentre la ecuación del plano

Para encontrar la ecuación del plano podemos hacer lo siguiente: Encontremos el vector posición de los puntos A y B,

$$\mathbf{r}_{AB} = B - A = (0,1,2)\,, \quad \mathbf{r}_{AC} = C - A = (-1,-1,-1)\,,$$

un vector normal al plano es: $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC} = (1,-2,1)$.

Para la ecuación del plano, podemos escoger el vector $\mathbf{a} = (1,1,1)$ por lo que tenemos entonces que:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{a} \;\Rightarrow\; (1,-2,1)\cdot(x,y,z) = (1,-2,1)\cdot(1,1,1) \;\Rightarrow\; x - 2y + z = 0\,.$$

◁

Ejemplo 1.12 Dados los siguientes puntos en el espacio:

$$A = (1,0,3)\,, B = (2,-1,0)\,, C = (0,-1,1)\,, d = (-1,0,1)\,.$$

¿Estos puntos serán coplanares?

Consideremos los tres primeros puntos, que podemos considerar coplanares ya que bastan tres puntos para definir un plano. Estos tres puntos son los vértices de un triángulo cuya área podemos calcular de la siguiente manera:

Primero seleccionamos uno de los puntos como un vértice privilegiado (digamos $(2,-1,0)$) respecto al cual construiremos dos vectores que representan dos de los lados del triángulo. Esto es:

$$\mathbf{a} = (1,0,3) - (2,-1,0) \leftrightarrow \mathbf{a} = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{b} = (0,-1,1) - (2,-1,0) \leftrightarrow \mathbf{b} = -2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}\,,$$

con lo cual, el área del triángulo será la mitad del área del paralelogramo que tiene por lados estos dos vectores. Es decir:

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| \;\Rightarrow\; \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2}|\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}| = \frac{\sqrt{30}}{2}\,.$$

Por otro lado, la ecuación del plano que generan estos tres puntos se calcula con la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\cdot((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)) = 0\,,$$

donde:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{r}_3 = -\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}},$$

con lo cual la ecuación del plano queda como:

$$\begin{vmatrix} (x-1) & y & (z-3) \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -(x-1) + 5y - 2(z-3) = 0 \;\Rightarrow\; x - 5y + 2z = 7\,.$$

Podemos verificar si el cuarto punto, $(-1,0,1)$, se encuentra en el plano, es decir, debemos verificar que cumple la ecuación que lo define.

$$x - 5y + 2z = 7 \;\Rightarrow\; (-1) - 5(0) + 2(1) \neq 7\,,$$

por lo tanto, los cuatro puntos no son coplanares. Podemos entonces calcular la distancia del cuarto punto al plano construyendo un vector unitario normal al plano.

$$\hat{\mathbf{n}}_P = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\left(\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right)\,,$$

Borrador Preliminar

con lo cual la distancia al cuarto punto será:

$$d = |\hat{\mathbf{n}}_P \cdot \mathbf{c}| = \left| \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(-3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \right) \right| = \left| -\frac{6}{\sqrt{30}} \right| = \frac{6}{\sqrt{30}} \,.$$

◁

1.3.3 Ejercicios

1. Para las rectas dadas a continuación:
   (a). $L: \quad \frac{3x-1}{4} = \frac{2y+3}{2} = 2 - 3z.$
   (b). $L: \quad \frac{2x+1}{3} = \frac{3y+2}{3} = -2 + 4z.$
   Encuentre los vectores posición para dos puntos diferentes sobre la recta y un vector unitario paralelo a la recta L.
2. Dada una linea recta L_1 que pasa a través de los puntos $(-2, 3, 1)$ y $(1, 4, 6)$ encuentre:
   (a). El vector posición de un punto sobre la recta y un vector paralelo a ésta.
   (b). Una recta L_2 paralela a L_1 y que pase por el punto $(1, 2, 1)$.
3. Una linea recta tiene como ecuación vectorial: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, donde: $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre la ecuación cartesiana de la recta y las coordenadas de tres puntos sobre la recta.
4. Una linea recta pasa por el punto $(3, 2, -3)$ y paralela al vector $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre la ecuación cartesiana de la recta y las coordenadas de tres puntos sobre la recta.
5. Dado un plano que pasa por el punto $(2, 3, -5)$ y con vector normal $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$, encuentre la forma cartesiana de la ecuación del plano.
6. Encuentre la ecuación del plano con normal $\mathbf{a}$ y que contiene el punto P cuando:
   (a). $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $P = (1, 0, 1)$.
   (b). $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $P = (2, -3, 4)$.
7. El ángulo entre dos planos se define como el ángulo entre sus normales. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos:
   (a). $x + 3y + 2z = 4$ y $2x - 5y + z = 2$.
   (b). $3x + 2y - 2z = 4$ y $2x + y + 2z = 1$.
8. Demuestre que la ecuación de una esfera puede expresarse como:
   $$|\mathbf{r} - \mathbf{c}|^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{c}) = a^2 \,,$$
   donde $\mathbf{c}$ es el vector posición del centro de la esfera y a el radio.
9. Auguste Bravais[4] se dio cuenta que replicando un arreglo geométrico muy simple, se puede describir una estructura cristalina. Dicho de otro modo, que conociendo una celda simple, podemos conocer la estructura cristalina. Esto es, que las posiciones de los átomos en una red cristalina puede ser descrita por un vector:
   $$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = n^1\mathbf{a}_1 + n^2\mathbf{a}_2 + n^3\mathbf{a}_3 = n^i\mathbf{a}_i \,,$$
   donde los $\mathbf{a}_i$ son vectores no coplanares (vectores primitivos o, simplemente en nuestro lenguaje, vectores base). Los n^i son números enteros (negativos, cero o positivos). La posición de cada átomo de un cristal puede ser descrita como reescalamientos (discretos) de este vector genérico o, de manera más precisa, la traslación del origen de coordenadas por un vector. Ese concepto se conoce como redes de Bravais[5]. En

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Auguste_Bravais

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice

Borrador Preliminar

Figura 1.6: Las 5 redes de Bravais bidimensionales fundamentales: 1 Oblicuas, 2 rectangular, 3 rectangular centrada (rómbica), 4 hexagonal, y 5 cuadrada. Figura tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice.

cada red puede haber varios vectores primitivos[6]. Se puede definir la *celda primitiva* como la estructura mínima que replicada reproduce todo el cristal. Vale decir, la estructura cristalina es invariante bajo traslaciones espaciales del tipo:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{T}\,, \quad \text{con} \quad \mathbf{T} = m^i \mathbf{a}_i\,.$$

Uno también se puede plantear redes aperiódicas que no presentan simetrías de traslación pero sí de rotación y reflexión. Estas estructuras fueron estudiadas por R. Penrose[7] en los años 70 como meras curiosidades matemáticas. Existen varias herramientas en la red que les permite construir interesantes figuras de los embaldosados de Penrose.[8] Luego, a principio de la década de los 80, se descubren materiales cuasi-cristalinos (cuasi-cristales o cristales cuasiperiódicos) que pueden ser modelados con este tipo de estructuras. Este tipo de materiales y los modelos que los describen motivaron un premio Nobel[9].

(a). **Redes de Bravais bidimensionales**. Tal y como muestra la figura 1.6 existen 5 tipos distintos de redes de Bravais bidimensionales.

I. Dada la red bidimensional de la figura 1.7 (Izquierda) encuentre todos los posibles vectores primitivos y celdas primitivas asociadas.

II. La humanidad ha estado seducida por la geometría desde que empezó a representar figuras. A partir de las cuatro imágenes que se ilustran en la figura 1.7 (Centro), encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.

III. Maurits Cornelis Escher[10] fue un fenomenal dibujante holandés, quien se interesó por las simetrías de los grupos de imágenes de papel tapiz. Berend, hermano de Maurits, era cristalógrafo y le mostró la belleza de las simetrías de la naturaleza.

[6] http://www.engr.sjsu.edu/rkwok/Phys175A/Chapter%201.pdf

[7] Roger Penrose (Premio Nobel 2020), por descubrir que la formación de agujeros negros es una predicción de la Relatividad General.

[8] https://misc.0o0o.org/penrose/

[9] El Premio Nobel de Química 2011 fue otorgado a Dan Shechtman por el descubrimiento de los cuasi-cristales.

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

Borrador Preliminar

Figura 1.7: A la izquierda red cristalina bidimensional. Al centro cuatro detalles geométricos: mural egipcio, mural asirio, tejido tahití e ilustración en pieza de porcelana china. Tomado de: http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group. Finalmente, a la derecha, teselados de M.C. Escher, tomados de: http://www.wikipaintings.org/en/paintings-by-genre/tessellation?firstArtist=m-c-escher#artist-m-c-escher.

En las cuatro obras del género de teselado[11] de M.C. Escher, presentadas en la figura 1.7 (Derecha) encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.

(b). **Redes de Bravais tridimensionales**. Este tipo de redes complica un poco más el escenario. Se puede demostrar que existen 14 de estas redes, tal y como se muestran en la figura 1.8. Muestre que los volúmenes de ocupación atómica, para los sistemas: monoclínico, triclínico, ortorómbico, tetragonal, romboédrico, hexagonal y cúbico, corresponden a las expresiones que se muestran en https://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice.

(c). El sistema cúbico, el más simple, corresponde a un sistema con un único parámetro de red $a = |\mathbf{a}|$, ya que $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Además, una posible descripción, para el caso más simple, es $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}\,, \mathbf{b} = \hat{\mathbf{j}}\,, \mathbf{c} = \hat{\mathbf{k}}$, los tres vectores cartesianos ortogonales. Existen otros sistemas que también están asociados al cúbico. Estos son el sistema cúbico cara centrada (*fcc* por sus siglas en inglés) y cúbico cuerpo centrado (*bcc*). En el primero existen átomos en el centro de cada una de las caras del cubo definido por la tríada, $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. En el sistema *fcc* se añade un átomo la centro del cubo simple.

I. Muestre que un sistema *bcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}\,, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}\,, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2\,.$$

Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

II. Muestre que un sistema *bcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{i}})/2\,, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})/2\,, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})/2\,.$$

Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

III. Muestre que un sistema *fcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2\,, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})/2\,, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})/2\,.$$

Otra vez, dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

(d). Se puede definir la red recíproca como:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}\,, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}\,.$$

De esta manera es claro que, por construcción, $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = 0$ y además $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = 1$. Con lo cual podemos generalizarlo como $\hat{\mathbf{e}}^{i'} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta^{i'}_j$. Exprese los vectores y las celdas recíprocas para los

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation

Borrador Preliminar

Figura 1.8: Las 14 Redes de Bravais tridimensionales y las estructuras cristalinas asociadas. Tomado de: `http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice`.

sistemas cúbico simple, y los distintos *bcc* y *fcc*. Calcule además el volumen de cada celda recíproca.

Practicando con Maxima

Consideremos el plano determinado por los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 4, 6)$ y $R = (2, 2, 2)$. Para construir la ecuación del plano primero ingresamos los vectores posición de cada punto. También incorporaremos las bibliotecas **vect** y **draw** que necesitaremos.

```
(%i1) load(vect)$ load(draw)$
(%i2) a:[1,1,1];
(%o2) [1, 1, 1]

(%i3) b:[2,4,6];
(%o3) [2, 4, 6]

(%i4) c:[2,2,2];
(%o4) [2, 2, 2]
```

Podemos verificar que los vectores estén en el mismo plano simplemente calculando el triple producto vectorial: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ entre ellos. Sabemos que si es nulo es porque los vectores son coplanares.

```
(%i5) a.express(b ~ c);
(%o5) 0
```

Necesitamos ahora calcular los vectores que van del punto P al punto Q y del punto P al punto R, es decir, los vectores: $\mathbf{ab} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{ac} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$

Borrador Preliminar

(%i6) ab:b-a;
(%o6) $[1, 3, 5]$

(%i7) ac:c-a;
(%o7) $[1, 1, 1]$

Un vector normal al plano será sencillamente el vector $\mathbf{n} = \mathbf{ab} \times \mathbf{ac}$:

(%i8) n:express(ab~ ac);
(%o8) $[-2, 4, -2]$

Podemos escoger cualquiera de los vectores originales, en este caso al vector $\mathbf{a}$, para escribir la ecuación del plano: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$.

(%i9) r:[x,y,z];
(%o9) $[x, y, z]$

(%i10) plano:n.r=n.a;
(%o10) $-2\,z + 4\,y - 2\,x = 0$

Probemos a graficar el plano. Para saber más sobre las diferentes opciones que incorpora **Maxima** para hacer gráficas, en dos o tres dimensiones, es recomendable consultar el manual de usuario.

Utilizaremos el comando **wxdraw3d** para hacer que la figura aparezca inmersa en nuestra hoja de trabajo. Es recomendable consultar también las funciones **draw** y **gr3d**.

(%i11) wxdraw3d(implicit(plano,x,-1,1,y,-1,1,z,-1,1));
(%o11)

Borrador Preliminar

1.4 Álgebra vectorial con índices

Antes de comenzar con la presentación de este esquema de cálculo cabe aclarar algunas costumbres y convenciones con la notación de índices, que estaremos utilizando durante el resto de este curso.

1.4.1 Convención de Einstein

El convenio de suma de Einstein, es una simplificación que se utiliza para abreviar la escritura de las sumatorias, en el que se suprime el símbolo de sumatoria y consiste en lo siguiente:

1. Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:
$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^{3} a^m\mathbf{e}_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = a^m\mathbf{e}_m = a^i\mathbf{e}_i\,.$$
2. Los índices repetidos son mudos (no importa las letras que los etiquete) y representan suma. Así:
$$k^j a_j = k^m a_m = k^1 a_1 + k^2 a_2 + k^3 a_3 = b.$$
En este punto del discurso, la posición de los índices (arriba y abajo) solo tiene sentido estético y solo así indican suma. Más adelante veremos que representan cantidades distintas.
3. Llamaremos contracción cuando sumamos respecto a un par de índices, vale decir:
$$A^j_i \;\Rightarrow\; \sum_i A^i_i = A^1_1 + A^2_2 + A^3_3 \;\Rightarrow\; A^i_i = A^1_1 + A^2_2 + A^3_3\,.$$

Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores, y deben entenderse como arreglos bidimensionales (tridimensionales, tetradimensionales, según el número de índices). Estas cantidades serán considerados en detalle posteriormente pero por ahora, contentémonos con saber qué cosas son cantidades con dos índices. Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \to 1$, en un sólo número.

Los índices libres (aquellos que no están sumados) indican el número de objetos disponibles y deben mantenerse a ambos lados de la ecuación. Por ejemplo:
$$B_i = K^k_i A_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K^1_1 A_1 + K^2_1 A_2 + K^3_1 A_3 = B_1 \\ K^1_2 A_1 + K^2_2 A_2 + K^3_2 A_3 = B_2 \\ K^1_3 A_1 + K^2_3 A_2 + K^3_3 A_3 = B_1 \end{cases}$$
con lo cual $B_i = K^k_i A_k$ representa 3 ecuaciones. La operación $B_{ij} = K^k_i A_{kj}$ representa 9.

La delta de Kronecker[12] es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta^k_i = 1$ si $i = k$, y es nula en los otros casos. Por ejemplo:
$$K^k_{ij}\,\delta^i_k = K^1_{1j}\underbrace{\delta^1_1}_{=1} + K^1_{2j}\overbrace{\delta^2_1}^{=0} + K^1_{3j}\overbrace{\delta^3_1}^{=0} + K^2_{1j}\overbrace{\delta^1_2}^{=0} + K^2_{2j}\underbrace{\delta^2_2}_{=1} + K^2_{3j}\overbrace{\delta^3_2}^{=0} + K^3_{1j}\overbrace{\delta^1_3}^{=0} + K^3_{2j}\overbrace{\delta^2_3}^{=0} + K^3_{3j}\underbrace{\delta^3_3}_{=1},$$
es decir:
$$K^k_{ij}\,\delta^i_k = K^k_{kj} = K^i_{ij} = K^1_{1j} + K^2_{2j} + K^3_{3j}\,.$$

[12] Leopold Kronecker (1823-1891, Berlin, Alemania) Matemático polaco con importantes contribuciones en teoría de números, funciones elípticas y álgebra, así como la interrelación entre estas disciplinas. https://es.wikipedia.org/wiki/Leopold_Kronecker

Borrador Preliminar

Además de la delta de Kronecker introduciremos el símbolo de permutación de Levi-Civita[13], ε^{ijk}, para el caso de tres dimensiones: $i, j, k = 1, 2, 3$.

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{cuando} \quad \{(i,j,k) = (1,2,3)\,;(3,1,2)\,;(2,3,1)\} \text{ permutación cíclica} \\ -1 & \text{cuando} \quad \{(i,j,k) = (1,3,2)\,;(3,2,1)\,;(2,1,3)\} \text{ permutación impar o anticíclica} \\ 0 & \text{cuando} \quad \{i = j\,, \quad i = k \quad \wedge \quad j = k\} \end{cases}$$

Por lo tanto, es distinto de cero cuando todos los índices son diferentes. Toma el valor 1 si la permutación de índices es cíclica (o par), y toma el valor -1 si la permutación es anticíclica (o impar).

Si queremos calcular, por ejemplo: $c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k$, entonces resulta:

$$c^1 = \varepsilon^{111} a_1 b_1 + \varepsilon^{112} a_1 b_2 + \varepsilon^{113} a_1 b_3 + \varepsilon^{121} a_2 b_1 + \varepsilon^{122} a_2 b_2 + \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{131} a_3 b_1 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 + \varepsilon^{133} a_3 b_3\,,$$
$$c^2 = \varepsilon^{211} a_1 b_1 + \varepsilon^{212} a_1 b_2 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 + \varepsilon^{221} a_2 b_1 + \varepsilon^{222} a_2 b_2 + \varepsilon^{223} a_2 b_3 + \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{232} a_3 b_2 + \varepsilon^{233} a_3 b_3\,,$$
$$c^3 = \varepsilon^{311} a_1 b_1 + \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{313} a_1 b_3 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 + \varepsilon^{322} a_2 b_2 + \varepsilon^{323} a_2 b_3 + \varepsilon^{331} a_3 b_1 + \varepsilon^{332} a_3 b_2 + \varepsilon^{333} a_3 b_3\,,$$

con lo cual:

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \;\Rightarrow\; \begin{cases} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

A continuación enumeramos algunas propiedades de la delta de Kronecker y del símbolo de permutación de Levi-Civita, dejamos al lector su demostración. Ellas son:

$$\begin{aligned} \delta^j_j &= 3\,, \\ \varepsilon_{jkm}\varepsilon^{ilm} &= \delta^i_j \delta^l_k - \delta^i_k \delta^l_j = \delta^i_j \delta^l_k - \delta^l_j \delta^i_k\,, \\ \varepsilon_{jmn}\varepsilon^{imn} &= 2\delta^i_j\,, \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} &= 6\,. \end{aligned}$$

1.4.2 Vectores e índices

Disponemos ahora de una manera más elegante para escribir ecuaciones que involucren vectores. Veamos qué forma toma el álgebra vectorial con esta nueva notación. Recordemos que con la notación de índices podemos escribir un vector como: $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$, donde las cantidades a^i son las componentes del vector en la base $\{\mathbf{e}_i\}$.

1.4.2.1 Sumas de vectores

La suma de vectores será expresada de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = \left(a^i + b^i\right) \mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i \;\Rightarrow\; c^i = a^i + b^i\,, \quad \text{con } i = 1, 2, 3\,. \tag{1.9}$$

1.4.2.2 Producto escalar

A partir da ahora y de forma equivalente, expresaremos el producto escalar en término de los índices. De forma y manera que:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\mathbf{ab}} = a^i b_i\,, \quad \text{con } i = 1, 2, 3\,. \tag{1.10}$$

[13] Tullio Levi-Civita (1873-1941, Roma, Italia) Geómetra italiano y uno de los desarrolladores del cálculo tensorial que más tarde sería utilizado por Einstein y Weyl como el lenguaje de la Relatividad General. https://es.wikipedia.org/wiki/Tullio_Levi-Civita

Borrador Preliminar

En este momento no explicaremos la razón por la que hemos escrito b_i, pero más adelante aclararemos esta situación. Por ahora seamos consistentes con la convención de índices de Einstein.

1.4.2.3 Producto vectorial

En términos de índices, la componente i del producto vectorial se puede expresar como:

$$c^i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \,, \quad \text{con } i, j, k = 1, 2, 3 \,. \tag{1.11}$$

De esta manera, todas las particularidades de producto vectorial ahora descansan en las propiedades del símbolo de Levi-Civita.

1.4.2.4 Triple producto mixto

Para finalizar, analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación mixta:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\, |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle} = c^i \varepsilon_{ijk}\, a^j b^k = \varepsilon_{ijk}\, c^i a^j b^k = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} \,. \tag{1.12}$$

Ejemplo 1.13 Mostraremos a continuación dos casos de identidades vectoriales que pueden ser fácilmente demostradas mediante la utilización de índices.

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$

  El resultado será un vector, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^i = \varepsilon^{ijk} a_j\, (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k &= \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{kmn} a_j b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j b^m c^n \\
&= \left(\delta^i_m \delta^j_n - \delta^j_m \delta^i_n\right) a_j b^m c^n = \delta^i_m \delta^j_n a_j b^m c^n - \delta^j_m \delta^i_n a_j b^m c^n \\
&= \delta^i_m b^m \delta^j_n a_j c^n - \delta^i_n c^n \delta^j_m a_j b^m = b^i \underbrace{a_n c^n}_{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})} - c^i \underbrace{a_j b^j}_{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} \\
&= b^i\, (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - c^i\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b}\, (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \,.
\end{aligned}$$

  En la segunda línea hemos hecho uso de la identidad: $\varepsilon_{jkm} \varepsilon^{ilm} = \delta^i_j \delta^l_k - \delta^i_k \delta^l_j = \delta^i_j \delta^l_k - \delta^l_j \delta^i_k$.

- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

  El lado derecho es un escalar, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^l\, (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_l \\
&= \varepsilon^{ljk} a_j b_k\, \varepsilon_{lmn} c^m d^n = \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{lmn}\, a_j b_k c^m d^n \\
&= \varepsilon^{jkl} \varepsilon_{mnl}\, a_j b_k c^m d^n = \left(\delta^j_m \delta^k_n - \delta^k_m \delta^j_n\right) a_j b_k c^m d^n \\
&= \delta^j_m \delta^k_n a_j b_k c^m d^n - \delta^k_m \delta^j_n a_j b_k c^m d^n \\
&= \underbrace{\delta^j_m a_j c^m}_{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})} \underbrace{\delta^k_n b_k d^n}_{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})} - \underbrace{\delta^k_m b_k c^m}_{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})} \underbrace{\delta^j_n a_j d^n}_{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})} \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \,.
\end{aligned}$$

◁

Ejemplo 1.14 Si tenemos tres vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ queremos ver si se cumple:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} \,.$$

En notación de índices resulta:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \epsilon^{lmi} a_m \epsilon_{ijk} b^j c^k + \epsilon^{lmi} b_m \epsilon_{ijk} c^j a^k + \epsilon^{lmi} c_m \epsilon_{ijk} a^j b^k \,,$$

Borrador Preliminar

con lo cual, arreglando:

$$\begin{aligned}\epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}a_m b^j c^k + \epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}b_m c^j a^k + \epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}c_m a^j b^k &= \left(\delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k\right) a_m b^j c^k + \left(\delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k\right) b_m c^j a^k \\ &+ \left(\delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k\right) c_m a^j b^k\,,\end{aligned}$$

y ahora desarrollando los productos de las δ's, e identificando término a término, notamos que se anulan:

$$\underbrace{a_k b^l c^k}_{I} - \underbrace{a_k b^k c^l}_{II} + \underbrace{b_k c^l a^k}_{II} - \underbrace{b_k c^k a^l}_{III} + \underbrace{c_k a^l b^k}_{III} - \underbrace{c_k a^k b^l}_{I} = 0\,.$$

◁

1.4.3 Rotación de coordenadas

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y su base canónica $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, si rotamos el sistema de coordenadas un ángulo ϕ alrededor del eje z tendremos un nuevo sistema de coordenadas (x', y', z') y una nueva base $\{\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}}', \hat{\mathbf{k}}'\}$. La regla de transformación que relaciona ambos sistemas de coordenadas es:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x'\cos\phi - y'\,\text{sen}\phi \\ y &=& x'\,\text{sen}\phi + y'\cos\phi \\ z &=& z' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\cos\phi + y\,\text{sen}\phi \\ y' &=& -x\,\text{sen}\phi + y\cos\phi \\ z' &=& z \end{array}\right. \tag{1.13}$$

Mientras que las bases transformarán, como veremos más adelante, como:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{i}}' &=& \hat{\mathbf{i}}\cos\phi + \hat{\mathbf{j}}\,\text{sen}\phi \\ \hat{\mathbf{j}}' &=& -\hat{\mathbf{i}}\,\text{sen}\phi + \hat{\mathbf{j}}\cos\phi \\ \hat{\mathbf{k}}' &=& \hat{\mathbf{k}} \end{array}\right. \tag{1.14}$$

Diremos que un triplete de números $\left(a^1, a^2, a^3\right)$ definen las componente de un vector $\mathbf{a} = a^1\hat{\mathbf{i}} + a^2\hat{\mathbf{j}} + a^3\hat{\mathbf{k}}$ si estas cantidades transforman bajo rotación de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^{1'} &=& a^1\cos\phi + a^2\,\text{sen}\phi \\ a^{2'} &=& -a^1\,\text{sen}\phi + a^2\cos\phi \\ a^{3'} &=& a^3 \end{array}\right. \tag{1.15}$$

Notemos también lo siguiente, al usar la notación de índices podemos escribir las ecuaciones de transformación de coordenadas de una manera compacta:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\cos\phi + y\,\text{sen}\phi \\ y' &=& -x\,\text{sen}\phi + y\cos\phi \\ z' &=& z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^{1'} &=& A^{1'}_1 x^1 + A^{1'}_2 x^2 + A^{1'}_3 x^3 \\ x^{2'} &=& A^{2'}_1 x^1 + A^{2'}_2 x^2 + A^{2'}_3 x^3 \\ x^{3'} &=& A^{3'}_1 x^1 + A^{3'}_2 x^2 + A^{3'}_3 x^3 \end{array}\right. \Rightarrow x^{i'} = A^{i'}_j x^j\,, \tag{1.16}$$

con: $i', j = 1, 2, 3$.

Se puede ver fácilmente que las cantidades $A^{i'}_j$, en coordenadas cartesianas, vienen dadas por:

$$A^{i'}_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\,. \tag{1.17}$$

Por ejemplo:

$$A^{1'}_1 = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \cos\phi\,,\ A^{1'}_2 = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = \frac{\partial x'}{\partial y} = \text{sen}\phi\,,\ A^{1'}_3 = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} = \frac{\partial x'}{\partial z} = 0\ldots$$

Como la transformación de coordenadas es invertible, se tiene que:

$$x^j = A^j_{i'} x^{i'}\,, \quad \text{con:} \quad A^j_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,, \tag{1.18}$$

y se cumple la siguiente condición de ortogonalidad:

$$A^{i'}_k A^j_{i'} = \delta^j_k\,. \tag{1.19}$$

Borrador Preliminar

Por lo tanto, en general, diremos que las componentes de un vector transformarán de la manera siguiente:

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} a^j \equiv A^{i'}_j a^j \quad \Leftrightarrow \quad a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} a^{j'} \equiv A^i_{j'} a^{j'} \ . \tag{1.20}$$

$$\begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{pmatrix} .$$

En esta ecuación hemos recurrido a la notación de matrices para representar la transformación de coordenadas.

Por lo tanto, el vector $\mathbf{a}$ se podrá escribir en ambos sistemas de coordenadas:

$$\mathbf{a} = a^1\hat{\mathbf{i}} + a^2\hat{\mathbf{j}} + a^3\hat{\mathbf{k}} = a^{1'}\hat{\mathbf{i}}' + a^{2'}\hat{\mathbf{j}}' + a^{3'}\hat{\mathbf{k}}' \ \Leftrightarrow \ \mathbf{a} = a^i\hat{\mathbf{i}}_i = a^i\hat{\mathbf{i}}'_i \, .$$

1.4.4 Escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores

Además de las rotaciones podemos considerar otra clase de transformaciones: las reflexiones. Estas transformaciones, como por ejemplo: $(x^1, x^2, x^3) \to (-x^1, x^2, x^3)$, muestran una sutil diferencia entre dos tipos de cantidades vectoriales: los vectores polares y los axiales, diferencia que no se puede apreciar en las rotaciones.

Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector:

$$(a_x, a_y, a_z) \to (-a_x, a_y, a_z) \, , \tag{1.21}$$

o también, en nuestra notación de índices:

$$a^1\hat{\mathbf{i}}_1 + a^2\hat{\mathbf{i}}_2 + a^3\hat{\mathbf{i}}_3 \to a^1(-\hat{\mathbf{i}}_1) + a^2\hat{\mathbf{i}}_2 + a^3\hat{\mathbf{i}}_3 \equiv (-a^1)\hat{\mathbf{i}}_1 + a^2\hat{\mathbf{i}}_2 + a^3\hat{\mathbf{i}}_3 \, .$$

Diremos que los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores. Nótese que esa transformación de coordenadas es equivalente a invertir el vector base: $\hat{\mathbf{i}}_1 \to -\hat{\mathbf{i}}_1$.

Ahora bien, si dos vectores polares $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, son transformados bajo reflexión como en (1.21), entonces un vector axial $\mathbf{c}$ transformará como:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \to \tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{c}} \, .$$

Es decir, los vectores axiales o pseudovectores cambian de signo bajo reflexión de los vectores que los generan[14].

De igual manera notamos que $d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ queda invariante bajo la transformación (1.21), mientras que $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ cambia de signo. Siguiendo el ejemplo de vectores y pseudovectores, llamaremos escalar a d y pseudoescalar a V.

Existen importantes cantidades físicas que vienen representadas por pseudovectores, entre ellas mencionamos: la cantidad de momento angular, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$; el torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ y la variación del campo de inducción magnética, $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$.

Pseudovectores y vectores representan distintos objetos geométricos. Los primeros se asocian a orientaciones de superficies, mientras que los segundos lo están con segmentos de rectas orientadas. El vector velocidad angular, $\boldsymbol{\omega}$, es un pseudovector por cuanto $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son vectores polares y $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Algo equivalente ocurre con la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, donde $\mathbf{B}$ es el campo magnético.

En general, podemos representar la reflexión (1.21) bajo el esquema que presentamos en (1.20), es decir, como transformaciones del tipo:

$$a^{i'} = A^{i'}_j a^j \, ,$$

[14] Esta inversión de vector axial puede comprobarse fácilmente utilizando la definición de productor vectorial (1.2.6.2) en la cual se aprecia que un cambio en el signo en a_x y b_x induce un cambio de signo en c_y y c_z.

Borrador Preliminar

O en forma de matrices:

$$\begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} .$$

donde:

$$A^{i'}_j = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

es la matriz de transformación de coordenadas[15].

Notemos que aquí el determinante de la matriz de transformación tiene como valor -1 ($\det|A^{i'}_j| = -1$) ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz que podemos asociar a las rotaciones (1.16)?

El hecho de que el $\det|A^{i'}_j| = 1$ o $\det|A^{i'}_j| = -1$, permite clasificar a las transformaciones de coordenadas en *transformaciones propias* o *transformaciones impropias*, respectivamente.

Entonces, en general, diremos que las componentes de vectores y pseudovectores transformarán bajo reflexión de la siguiente manera:

$$\text{si:} \quad A^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a^{i'} = A^{i'}_j a^j , & \text{vectores polares o simplemente vectores,} \\ \\ p^{i'} = \det|A^{i'}_j| A^{i'}_j p^j , & \text{pseudovectores o vectores axiales.} \end{cases}$$

En el ejercicio 6 de la sección 2.2.4 de la página 104 mostraremos como estos conceptos de: escalares, vectores, pseudo-vectores y pseudo-escalares, se aplican en computación gráfica.

Ejemplo 1.15 Vimos que los vectores polares transforman bajo una reflexión respecto al plano yz de la forma:

$$\hat{\mathbf{i}}_1 \to -\hat{\mathbf{i}}_1 \;\Rightarrow\; (a^{1'}, a^{2'}, a^{3'}) = (-a^1, a^2, a^3) .$$

Para saber que pasa con el vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, cuando lo sometemos a esta reflexión, estudiemos como se transforman sus componentes directamente de la definición del producto vectorial, miremos con respecto a la componente x de $\mathbf{c}$.

Entonces, para $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores polares se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' &= \left[\left(a^{2'}b^{3'} - a^{3'}b^{2'}\right), \left(a^{3'}b^{1'} - a^{1'}b^{3'}\right), \left(a^{1'}b^{2'} - a^{2'}b^{1'}\right)\right] \\ &= \left[\left(a^2b^3 - a^3b^2\right), \left(a^3(-b^1) - (-a^1)b^3\right), \left((-a^1)b^2 - a^2(-b^1)\right)\right] \\ &= \left[\left(a^2b^3 - a^3b^2\right), -\left(a^3b^1 - a^1b^3\right), -\left(a^1b^2 - a^2b^1\right)\right] , \end{aligned}$$

es decir, $\mathbf{c}'$ es un vector axial por el hecho de obedecer a una ley de transformación diferente:

$$\hat{\mathbf{i}}_1 \to -\hat{\mathbf{i}}_1 \;\Rightarrow\; (c^{1'}, c^{2'}, c^{3'}) = (c^1, -c^2, -c^3) .$$

Supongamos que ahora queremos aplicar una reflexion al vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pero con $\mathbf{a}$ axial y $\mathbf{b}$ polar. Veamos lo que sucede:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}' = \tilde{\mathbf{a}}' \times \tilde{\mathbf{b}}' &= \left[\left(a^{2'}b^{3'} - a^{3'}b^{2'}\right), \left(a^{3'}b^{1'} - a^{1'}b^{3'}\right), \left(a^{1'}b^{2'} - a^{2'}b^{1'}\right)\right] \\ &= \left[\left((-a^2)b^3 - (-a^3)b^2\right), \left((-a^3)(-b^1) - a^1b^3\right), \left(a^1b^2 - (-a^2)(-b^1)\right)\right] \\ &= \left[-\left(a^2b^3 - a^3b^2\right), \left(a^3b^1 - a^1b^3\right), \left(a^1b^2 - a^2b^1\right)\right] . \end{aligned}$$

[15] Una discusión de vectores y pseudovectores puede consultarse en la nota de Quigley, Robert J. "Pseudovectors and Reflections" American Journal of Physics 41, no. 3 (1973): 428-430; y en el capítulo 52 del Vol. 1 de Feynman, R.P., Leighton, R.B. and Sands, M., 2013. The Feynman Lectures on Physics, Desktop Edition. Basic Books. Para algunas de las consecuencias que se presentan cuando se consideran cantidades físicas y transformaciones de reflexión.

Borrador Preliminar

Esto es:

$$\hat{\mathbf{i}}_1 \to -\hat{\mathbf{i}}_1 \;\Rightarrow\; (c^{1'}, c^{2'}, c^{3'}) = (-c^1, c^2, c^3)\,,$$

por lo tanto, en este caso $\mathbf{c}$ es un vector polar.

◁

1.4.5 Ejercicios

1. Verifique las siguientes identidades:
   (a). $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$.
   (b). $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{b}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]-\mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]$.
   (c). $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{d})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d})=0$.
   (d). $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=0$.
   (e). $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=a^2b^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$.
   (f). $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}$
2. Demuestre la siguiente tabla de relaciones:

vector	$\cdot$	vector	$=$	escalar
vector	$\cdot$	pseudovector	$=$	pseudoescalar
pseudovector	$\cdot$	pseudovector	$=$	escalar
vector	$\times$	vector	$=$	pseudovector
vector	$\times$	pseudovector	$=$	vector
pseudovector	$\times$	pseudovector	$=$	pseudovector

3. Considere lo expuesto en la sección 1.4.3 y demuestre que:

$$A^{i'}_k A^j_{i'} = \delta^j_k\,,$$

   y además, como un caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2+\cos(\beta)^2+\cos(\gamma)^2=1\,.$$

4. Considere el radio vector posición $\mathbf{r}=x^i\hat{\mathbf{i}}_i\equiv x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}$ en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuales casos las componentes de $\mathbf{r}$ transforman como verdaderas componentes de vectores.

$$(x,y)\to(-y,x)\,,\quad (x,y)\to(x,-y)\,,\quad (x,y)\to(x-y,x+y)\,,\quad (x,y)\to(x+y,x-y)\,.$$

Practicando con Maxima

A fines prácticos, las transformaciones de coordenadas del tipo rotaciones o reflexiones es de utilidad representarlas por matrices. Por ejemplo, las rotaciones alrededor del eje z se puede representar como:

```
(%i1) Rz:matrix([cos(theta),sin(theta),0],[-sin(theta),cos(theta),0],[0,0,1]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

De manera que un vector $\mathbf{a}$ transformará bajo esta rotación en un nuevo vector $\mathbf{a}'$.

```
(%i2) a:[a1,a2,a3];
```

Borrador Preliminar

(%o2) $[a_1, a_2, a_3]$

(%i3) Rz.a;

(%o3) $$\begin{pmatrix} a_2\,\sin(\theta) + a_1\,\cos(\theta) \\ a_2\,\cos(\theta) - a_1\,\sin(\theta) \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Si la rotación se hace alrededor del eje x o y las matrices correspondientes son las siguientes:

(%i4) Rx:matrix([1,0,0],[0,cos(theta),-sin(theta)],[0,sin(theta),cos(theta)]);

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(%i5) Ry:matrix([cos(theta),0,sin(theta)],[0,1,0],[-sin(theta),0,cos(theta)]);

(%o5) $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Notemos que el determinante de éstas matrices es:

(%i6) determinant(Rx),trigsimp;

(%o6) $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$

(%i7) trigrat(%);

(%o7) 1

Si la rotación es en un ángulo de $\theta = 60°$ entonces:

(%i8) sublis([theta= %pi/3], Rx);

(%o8) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Si el eje de rotación se define a través de un vector unitario, digamos, $\hat{\mathbf{u}} = u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}} + u_z\hat{\mathbf{k}}$, la matriz de rotación para un ángulo θ es:

(%i9) t:1-cos(theta)$

(%i10) R:matrix([cos(theta)+ux^ 2*t, ux*uy*t-uz*sin(theta), ux*uz*t+uy*sin(theta)],
[uy*ux*t+uz*sin(theta),cos(theta)+uy^ 2*t,uy*uz*t-ux*sin(theta)],
[uz*ux*t*uy*sin(theta),uz*uy*t+ux*sin(theta),cos(theta)+uz^ 2*t]);

(%o10) $$\begin{pmatrix} (1-\cos(\theta))\,ux^2 + \cos(\theta) & (1-\cos(\theta))\,ux\,uy - \sin(\theta)\,uz & (1-\cos(\theta))\,ux\,uz + \sin(\theta)\,uy \\ \sin(\theta)\,uz + (1-\cos(\theta))\,ux\,uy & (1-\cos(\theta))\,uy^2 + \cos(\theta) & (1-\cos(\theta))\,uy\,uz - \sin(\theta)\,ux \\ (1-\cos(\theta))\,ux\,uz - \sin(\theta)\,uy & (1-\cos(\theta))\,uy\,uz + \sin(\theta)\,ux & (1-\cos(\theta))\,uz^2 + \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si el eje de rotación coincide con el vector $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{3}}$ y la rotación es en un ángulo de $\theta = 60°$, entonces:

(%i11) [ux,uy,uz]:1/sqrt(3)*[1,1,1]; theta: %pi/3$

(%o11) $$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

Al evaluar con el comando **ev** podemos ver como queda la matriz R con estos valores definidos

(%i13) Ru:ev(R);

Borrador Preliminar

(%o13) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

De manera que un vector, por ejemplo, $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ transformará bajo esta rotación de la manera siguiente:

```
(%i14) a:[1,2,3];
```
(%o14) $[1, 2, 3]$

```
(%i15) Ru.a;
```
(%o15) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Por otro lado, una reflexión en el plano zy es más sencilla de representar porque es la matriz:

```
(%i16) Re:matrix([-1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
```
(%o16) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si tenemos los siguientes vectores polares

```
(%i17) a:[1,2,3]; b:[4,5,6];
```
(%o17) $[1, 2, 3]$

(%o18) $[4, 5, 6]$

Bajo la reflexión estos vectores transforman así:

```
(%i19) Re.a; Re.b;
```
(%o19) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(%o20) $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Veamos ahora cómo transforma el vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

```
(%i21) c:express(a~ b);
```
(%o21) $[-3, 6, -3]$

```
(%i22) Re.c;
```
(%o22) $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Es decir, $\mathbf{c}$ es un pseudovector.

Borrador Preliminar

1.5 Un comienzo a la derivación e integración de vectores

En esta penúltima sección de este capítulo abordaremos una introducción somera a las consecuencias que imponen la variación de un vector. Mostraremos, de manera funcional y como una ejercitación a los conceptos de derivación e integración de vectores y campos vectoriales[16].

1.5.1 Vectores variables

Los vectores podrán ser constantes o variables. Ahora bien, esta característica se verificará tanto en las componentes como en la base. Esto quiere decir que cuando un vector cambia podrá variar su módulo, su dirección, su sentido, o todo junto o por separado. Obviamente esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese. Por lo cual un vector podrá tener una componente constante en una base y variable en otra, vale decir:

$$\mathbf{a}(t) = a^i(t)\mathbf{e}_i(t) = \tilde{a}^k\tilde{\mathbf{e}}_k(t) = \bar{a}^m(t)\bar{\mathbf{e}}_m\,.$$

Nótese que hemos utilizado una base $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ de vectores variables a diferencia de la tradicional base de vectores cartesianos $\{\hat{\mathbf{i}}_i\}$, los cuales **son constantes** en módulo, dirección y sentido (ver los cuadrantes I y II de la figura 1.9). Más aún, tal y como se muestra en cuadrante II de la figura 1.9, todo vector variable podrá ser expresado como la suma de uno variable, $\boldsymbol{\alpha}(t)$, más otro constante $\mathbf{c}$.

$$\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathbf{c}\,.$$

1.5.2 Derivación

De esta manera, cuando uno piensa en un vector variable $\mathbf{a}(t)$ uno rápidamente intenta establecer un cociente incremental:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{a}\left(t+\Delta t\right)-\mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

El cuadrante IV de la figura 1.9 ilustra gráficamente este cociente incremental.

Como siempre, las propiedades de esta operación derivación serán:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}(t)\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lambda(t)\mathbf{a}(t)\right] &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)\right]\mathbf{a}(t)+\lambda(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}(t)\right]\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\right] &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}(t)\right]\cdot\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\cdot\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}(t)\right]\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)\right] &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}(t)\right]\times\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\times\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{b}(t)\right]\,.
\end{aligned}$$

Ahora bien, esto implica que:

$$\mathbf{a}(t) = a^i(t)\mathbf{e}_i(t) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[a^i(t)\mathbf{e}_i(t)\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a^i(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_i(t)+a^i(t)\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i(t)}{\mathrm{d}t}\,, \tag{1.22}$$

con lo cual hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de la base y componentes.

Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que serán constantes y otros en los cuales sus vectores bases cambiarán en su dirección. El primer término de (1.22) representa la variación del módulo, y el segundo muestra la contribución de los cambios en dirección del vector. Más aún, mostraremos apoyándonos en la

[16] Un análisis más detallado lo presentaremos en el último capítulo 5

Borrador Preliminar

Figura 1.9: Diferentes representaciones para vectores que varían respecto a algún parámetro.

ilustración de el cuadrante III de la figura 1.9 que, independientemente del sistema de coordenadas, el cambio en el módulo apunta en la dirección del vector, mientras que las contribuciones en dirección apuntan en la dirección perpendicular al vector. Esto es:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,|\mathbf{a}(t)|}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + |\mathbf{a}(t)|\,\hat{\mathbf{u}}_{\perp}\,, \quad \text{con } \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}\cdot\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = 0\,.$$

Es fácil convencernos de la forma del primer término. Siempre podemos representar un vector como su módulo y un vector unitario en la dirección apropiada. Esto es, si:

$$\mathbf{a}(t) = |\mathbf{a}(t)|\,\hat{\mathbf{u}}(t)\,, \tag{1.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,[|\mathbf{a}(t)|\,\hat{\mathbf{u}}(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,|\mathbf{a}(t)|}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{a}(t)|\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.24}$$

Como podemos ver a continuación cuando multiplicamos 1.24 por $\hat{\mathbf{u}}(t)$ resulta:

$$\hat{\mathbf{u}}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathbf{u}}(t)\cdot\left[\frac{\mathrm{d}\,|\mathbf{a}(t)|}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{a}(t)|\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t}\right] \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}(t)\cdot\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\,|\mathbf{a}(t)|}{\mathrm{d}t} \\[2ex] \hat{\mathbf{u}}(t)\cdot\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

Es decir que el cambio en el módulo de un vector se manifiesta en la dirección del mismo vector, tal y como era intuitivo suponer. Adicionalmente, vemos que el vector $\hat{\mathbf{u}}$ siempre será perpendicular a su derivada. Gráficamente podemos apreciarlo en el cuadrante IV de la figura 1.9, pero también surge analíticamente si derivamos el vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,[\hat{\mathbf{u}}(t)\cdot\hat{\mathbf{u}}(t)]}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\left(|\hat{\mathbf{u}}(t)|^2\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(1)}{\mathrm{d}t} \equiv 0 = \hat{\mathbf{u}}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \hat{\mathbf{u}}(t)\perp\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

es decir:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,[|\mathbf{a}(t)|\,\hat{\mathbf{u}}(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,|\mathbf{a}(t)|}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{a}(t)|\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,|\mathbf{a}(t)|}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + |\mathbf{a}(t)|\,\hat{\mathbf{u}}_{\perp}\,.$$

Borrador Preliminar

Supongamos que ahora definimos un vector $\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\theta\,\hat{\mathbf{v}}$, con:

$$\left.\begin{array}{r}\hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \\ \\ \hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{u}}_{\perp}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{v}}\end{array}\right.$$

donde $\Delta\theta$ es el ángulo de rotación del vector $\mathbf{a}(t)$ (ver cuadrante V de la figura 1.9). Claramente:

$$\Delta\mathbf{a}_{\perp} = [a\,(t+\Delta t)\,\mathrm{sen}\,(\Delta\theta)]\,\hat{\mathbf{u}}_{\perp} \approx [a\,(t+\Delta t)\,\Delta\theta]\,\hat{\mathbf{u}}_{\perp} \;\Rightarrow\; \Delta\mathbf{a}_{\perp} = \Delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}(t)\,,$$

entonces:

$$\frac{\Delta\mathbf{a}_{\perp}}{\Delta t} \equiv \left[\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t}\cdot\mathbf{a}_{\perp}\right]\mathbf{a}_{\perp} = \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}\times\mathbf{a}(t) \;\Rightarrow\; \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\hat{\mathbf{u}}_{\perp}\right]\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{v}}\times\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}(t)\,,$$

donde hemos identificado $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{v}}$.

Podemos ir más allá observando el cuadrante V de la figura 1.9, vemos que si suponemos que el módulo del vector $\mathbf{a}$ es constante, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\,|\mathbf{a}(t)|}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = |\mathbf{a}(t)|\,\hat{\mathbf{u}}_{\perp} \;\Rightarrow\; \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}\,(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\hat{\mathbf{u}}_{\perp}\right]\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}(t)\,.$$

1.5.3 Velocidades y aceleraciones

El radio vector posición de una partícula genera, como sabemos, los vectores velocidad y aceleración:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \;\Rightarrow\; \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

ahora bien:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \text{con: } \hat{\mathbf{u}}_r = \cos(\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Si suponemos que la partícula describe una trayectoria, entonces:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \text{con: } \hat{\mathbf{u}}_r(t) = \cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(\theta(t))\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Es muy común denotar a la derivada temporal sobre funciones de una variable con un punto, es decir, podemos utilizar la siguiente notación:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

con lo cual, y en el caso de que $z = z(t) =$ constante, se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,[\cos(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t)\underbrace{[-\,\mathrm{sen}(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]}_{\hat{\mathbf{u}}_\theta} = \dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta\,.$$

Podemos ver que:

$$|\hat{\mathbf{u}}_r| = \sqrt{\hat{\mathbf{u}}_r\cdot\hat{\mathbf{u}}_r} = \sqrt{[\cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(\theta(t))\,\hat{\mathbf{j}}]\cdot[\cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(\theta(t))\,\hat{\mathbf{j}}]} = 1\,,$$

$$|\hat{\mathbf{u}}_\theta| = \sqrt{\hat{\mathbf{u}}_\theta\cdot\hat{\mathbf{u}}_\theta} = \sqrt{[-\,\mathrm{sen}(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{j}}]\cdot[-\,(\mathrm{sen}(\theta(t)))\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]} = 1\,,$$

además:

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta\cdot\hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_r\cdot\hat{\mathbf{u}}_\theta = [-\,\mathrm{sen}(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{j}}]\cdot[\cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(\theta\,(t))\,\hat{\mathbf{j}}] = 0\,.$$

También podemos calcular:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,[-\mathrm{sen}(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{j}}]}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\,[\cos(\theta(t))\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(\theta(t))\,\hat{\mathbf{j}}] = -\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_r\,.$$

Para una partícula que sigue un movimiento arbitrario, su trayectoria vendrá descrita, en coordenadas

Borrador Preliminar

cartesianas, por:

$$\mathbf{r} = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

- Su velocidad será:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}\right]}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}(t)\hat{\mathbf{k}} = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

- Y su aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v}_x(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{v}_y(t)\hat{\mathbf{j}} + \dot{v}_z(t)\hat{\mathbf{k}} = a_x(t)\hat{\mathbf{i}} + a_y(t)\hat{\mathbf{j}} + a_z(t)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Mientras que en coordenadas polares las ecuaciones son:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t)\,.$$

- Velocidad:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left[r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t)\right]}{\mathrm{d}t} = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\,,$$

- Aceleración:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\left[\dot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\dot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t)\right]}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left[r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\right]}{\mathrm{d}t}\\ &= \ddot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + \dot{r}(t)\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{\mathrm{d}t} + \dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)}{\mathrm{d}t}\\ &= \left[\ddot{r}(t) - r(t)\left(\dot{\theta}(t)\right)^2\right]\hat{\mathbf{u}}_r(t) + \left[2\,\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\right]\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\,.\end{aligned}$$

Claramente para el caso de un movimiento circular, donde $r = R =$ const, resulta:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\mathbf{r}(t) = R\,\hat{\mathbf{u}}_r(t)\\ \mathbf{v}(t) = R\,\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta\\ \mathbf{a}(t) = -R\,\dot{\theta}(t)^2\hat{\mathbf{u}}_r(t) + R\,\ddot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)\end{cases}$$

De aquí podemos ver que el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ y el vector posición $\mathbf{r}(t)$ son ortogonales. La velocidad, $\mathbf{v}(t)$, siempre es tangente a la trayectoria $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ y en este caso la trayectoria es una circunferencia.

En general el vector:

$$\mathbf{r}_{med} = \sum_i \Delta\mathbf{r}(t_i) = \sum_i \left(\mathbf{r}\left(t_i + \Delta t_i\right) - \mathbf{r}(t_i)\right) \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta t\to 0}\sum_i \Delta\mathbf{r}(t_i) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t)\,,$$

es decir, $\mathrm{d}\mathbf{r}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_i \Delta\,\mathbf{r}(t_i)$ es tangente a la trayectoria. Es claro que:

$$\mathrm{d}\mathbf{r}(t) = \mathrm{d}\left[x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}\right] \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Tal y como mencionamos arriba, para el sistema de coordenadas cartesiano podemos definir un vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ tal que:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}\times\hat{\mathbf{u}}_r &= \hat{\mathbf{u}}_v\\ \hat{\mathbf{u}}_v\times\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} &= \hat{\mathbf{u}}_r\\ \hat{\mathbf{u}}_r\times\hat{\mathbf{u}}_v &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}(t)\,.$$

Supongamos por simplicidad que elegimos el sistema de coordenadas cartesiano, donde $\mathbf{r}$ está en el plano xy. En este caso es inmediato comprobar que $v^i = \varepsilon^{ijk}\omega_j x_k$, y dado que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ tienen únicamente componentes

Borrador Preliminar

1 y 2 entonces, necesariamente $\boldsymbol{\omega}$ tiene únicamente componente 3, Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r} = r^i \mathbf{e}_i \\ \\ \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v^1 = \varepsilon^{1j2}\omega_j x_2 \\ \\ v^2 = \varepsilon^{2j1}\omega_j x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}|\, \mathsf{e}_3 = \omega\hat{\mathbf{k}}\,,$$

como $\mathbf{r} = x(t)\hat{\mathbf{\imath}} + y(t)\hat{\mathbf{\jmath}}$, entonces:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = v_x(t)\hat{\mathbf{\imath}} + v_y(t)\hat{\mathbf{\jmath}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) = \dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{k}} \times [x(t)\hat{\mathbf{\imath}} + y(t)\hat{\mathbf{\jmath}}]\ .$$

Se verá más claro en coordenadas polares, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} &= r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) = [|\boldsymbol{\omega}|\, \hat{\mathbf{u}}_n(t)] \times [r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t)]\ , \qquad |\mathbf{r}(t)| = \text{const} \\ &= \underbrace{r(t)\dot{\theta}(t)}_{\mathbf{v}_\perp}\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) = |\boldsymbol{\omega}|\, r(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \ \Rightarrow\ \dot{\theta}(t) \equiv |\boldsymbol{\omega}|\ . \end{aligned}$$

Ejemplo 1.16 Si una partícula se mueve a lo largo de una curva descrita por:

$$x(t) = 3t^2\,, \quad y(t) = 4t^3 - t\,, \quad z(t) = t\,.$$

Calcular las expresiones para los vectores: posición, velocidad y aceleración de esa partícula.

Podemos ver que:

$$\mathbf{r}(t) = 3t^2\hat{\mathbf{\imath}} + (4t^3 - t)\hat{\mathbf{\jmath}} + t\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{v} = 6t\hat{\mathbf{\imath}} + (12t^2 - 1)\hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{a} = 6\hat{\mathbf{\imath}} + 24t\hat{\mathbf{\jmath}}\,.$$

Si nos proponemos encontrar las expresiones, más generales, de los vectores tangentes y perpendiculares a todo punto de la trayectoria de la partícula podemos ver que el vector tangente a todo punto de la trayectoria es el vector velocidad

$$\mathbf{v} = 6t\hat{\mathbf{\imath}} + (12t^2 - 1)\hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}\,,$$

El vector perpendicular a todo punto, será un vector $\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{\imath}} + b_y\hat{\mathbf{\jmath}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$, tal que:

$$(6t\hat{\mathbf{\imath}} + (12t^2 - 1)\hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathbf{\imath}} + b_y\hat{\mathbf{\jmath}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) = 6tb_x + (12t^2 - 1)b_y + b_z = 0\,,$$

con lo cual:

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{\imath}} + b_y\hat{\mathbf{\jmath}} - (6tb_x + (12t^2 - 1)b_y)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

◁

Ejemplo 1.17 La trayectoria de un punto en el plano vista por un observador (1) es la siguiente:

$$\mathbf{r}_1(t) = 5\cos(3t^2)\,\hat{\mathbf{\imath}} + 5\,\mathrm{sen}(3t^2)\,\hat{\mathbf{\jmath}}\,.$$

Calculemos las expresiones para las radiales y tangenciales de esta partícula.

Para ésta partícula ya que es claro que la partícula describe un movimiento circular, donde $\theta(t) = 3t^2$. Entonces:

$$\mathbf{r}(t) = 5\hat{\mathbf{u}}_r \ \Rightarrow\ \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = 5\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}_\theta = 30t\ \hat{\mathbf{u}}_\theta \ \Rightarrow\ \mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(t)}{\mathrm{d}t} = 30\ \hat{\mathbf{u}}_\theta - 30t\ \hat{\mathbf{u}}_r\,.$$

Consideremos ahora un segundo observador (2), el cual describe una trayectoria respecto al primero representada por:

$$\mathbf{r}_{21}(t) = (t^3 - 4t)\hat{\mathbf{\imath}} + (t^2 + 4t)\,\hat{\mathbf{\jmath}}\,.$$

Y queremos encontrar las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula medidos respecto al segundo observador.

Por lo tanto, la trayectoria de la partícula respecto al segundo observador será:

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_{21}(t) = 5\cos(3t^2)\,\hat{\mathbf{\imath}} + 5\,\mathrm{sen}(3t^2)\,\hat{\mathbf{\jmath}} - ((t^3 - 4t)\hat{\mathbf{\imath}} + (t^2 + 4t)\,\hat{\mathbf{\jmath}})\,,$$

Borrador Preliminar

con lo cual:

$$\mathbf{r}_2(t) = \left[5\cos(3t^2) - t^3 + 4t\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[5\,\mathrm{sen}(3t^2) - t^2 - 4t\right]\hat{\mathbf{j}}\,,$$

entonces:

$$\mathbf{v}_2(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\left[30\ \mathrm{sen}\left(3\,t^2\right)t + 3\,t^2 - 4\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[30\ \cos\left(3\,t^2\right)t - 2\,t - 4\right]\hat{\mathbf{j}}\,,$$

y

$$\mathbf{a}_2(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2(t)}{\mathrm{d}t} = -6\left[30\cos\left(3t^2\right)t^2 + 5\,\mathrm{sen}\left(3t^2\right) + t\right]\hat{\mathbf{i}} - 2\left[90\,\mathrm{sen}\left(3t^2\right)t^2 - 15\cos\left(3t^2\right) + 1\right]\hat{\mathbf{j}}\,.$$

◁

1.5.4 Vectores y funciones

Antes de continuar con la integración repensemos algunas funciones de tipo $\phi\left(x^i\right)$ y $\mathbf{A}(x^i)$. Estas funciones son sin duda funciones de varias variables, en el caso cartesiano:

$$\phi = \phi(x,y,z)\,, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z) = \hat{\mathbf{i}}A_x(x,y,z) + \hat{\mathbf{j}}A_y(x,y,z) + \hat{\mathbf{k}}A_z(x,y,z)\,.$$

Un par de reflexiones se pueden hacer en este punto, primeramente, dado que hemos relacionado un punto del espacio con el radio vector posición, entonces:

$$P_{(x,y,z)} \leftrightarrow (x,y,z) \leftrightarrow \mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \phi = \phi(x,y,z) \equiv \phi\left(\mathbf{r}\right) \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z) \equiv \mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) \end{cases}$$

La primera función, $\phi\left(\mathbf{r}\right)$, será una función escalar de argumento vectorial o, simplemente un campo escalar y la segunda, $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)$, se conoce como una función vectorial de argumento vectorial o campo vectorial. Como hemos dicho, este tipo de funciones y las operaciones que pueden ser realizadas con ellas, y su significado, serán analizadas en detalle más adelante durante el desarrollo de este curso.

En segundo lugar, siempre podremos parametrizar las coordenadas y tendremos

$$\phi = \phi(t) = \phi\left(x(t), y(t), z(t)\right)\,,$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}\left(x(t), y(t), z(t)\right) = A_x\left(x(t), y(t), z(t)\right)\hat{\mathbf{i}} + A_y\left(x(t), y(t), z(t)\right)\hat{\mathbf{j}} + A_z\left(x(t), y(t), z(t)\right)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Este caso lo hemos encontrado en montones de situaciones, por ejemplo, el movimiento parabólico viene descrito por vectores velocidad y posición dados por:

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_0 = -gt\,\hat{\mathbf{k}} + \left(v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}}\right) \;\Rightarrow\; \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} \\ v_z = v_{0z} - gt \end{cases}$$

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2\,\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_0 t = -\frac{g}{2}t^2\,\hat{\mathbf{k}} + \left(v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}}\right)t \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t \\ z = v_{0z}t - \frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

1.5.4.1 Derivada de funciones del tipo: $\phi\left(\mathbf{r}(t)\right)$

Al derivar una función de argumento vectorial también se aplica la "regla de la cadena". Esto es, si

$$\phi\left(\mathbf{r}(t)\right) = \phi\left(x(t), y(t), z(t)\right)\,,$$

Borrador Preliminar

entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\phi\left(\mathbf{r}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi\left(x(t),y(t),z(t)\right)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi\left(x(t),y(t),z(t)\right)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi(x(t),y(t),z(t))}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \left[\frac{\partial\phi\left(x,y,z\right)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$= \boldsymbol{\nabla}\phi\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

donde hemos representado:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi\left(\mathbf{r}(t)\right) \equiv \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \partial^i\phi(x^j)\hat{\mathbf{i}}_i = \phi^{,i}(x^j)\hat{\mathbf{i}}_i\,,$$

y lo llamaremos el **gradiente** de la función $\phi\left(\mathbf{r}(t)\right)$.

El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles que encontraremos en el estudio de problemas de Física-Matemática, el cual lo utilizaremos por ahora de manera operacional. Es bueno recordar que emerge como consecuencia de una derivación contra un parámetro. El gradiente mide el cambio de la función $\phi\left(x,y,z\right)$.

La idea de gradiente nos lleva a considerar a $\boldsymbol{\nabla}$ como un operador vectorial (el operador nabla) que actúa sobre la función escalar de variable vectorial $\phi\left(\mathbf{r}(t)\right)$.

$$\boldsymbol{\nabla}\phi\left(\mathbf{r}(t)\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\phi(x,y,z) = \hat{\mathbf{i}}_i\,\partial^i\phi(x,y,z)\,.$$

Es decir, y con un poquito de imaginación:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\circ\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\left(\circ\right) = \hat{\mathbf{i}}_i\partial^i\left(\circ\right)\,.$$

1.5.4.2 Derivada de funciones del tipo: $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}(t)\right)$

De modo que inspirados en la regla de la cadena de una función escalar de variable vectorial podemos comprobar que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x(x,y,z)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}A_y(x,y,z)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}A_z(x,y,z)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathrm{d}A^i\left(x^j\right)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{i}}_i\,,$$

por consiguiente, si $\mathbf{A}$, tiene por componentes cartesianas (A_x, A_y, A_z) las componentes del vector derivado serán: $\left(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\right)$. Con lo cual, para cada componente:

$$\frac{\mathrm{d}\left(A^i(x(t),y(t),z(t))\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(A^i\left(x^j(t)\right)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\left(A^i\left(x^j\right)\right)}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^k(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)A^i(x,y,z)\,.$$

En términos vectoriales es:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A} \equiv \left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\left(\circ\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\left(\circ\right) \equiv v^i\partial_i\left(\circ\right)\,,$$

con $\mathbf{v}$ la derivada del radio vector posición $\mathbf{r}(t)$, es decir, la velocidad. Entonces, estamos viendo que el cambio del vector $\mathbf{A}$ respecto al tiempo es el cambio de sus componentes en la dirección de la velocidad.

Si se nos ocurre calcular la derivada del vector velocidad para encontrar la aceleración tendremos que nos quedará expresada como:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} \;\Rightarrow\; a^i = \left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)v^i\,,$$

donde las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración son: $v^i = v^i\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ y

Borrador Preliminar

$a^i = a^i(x(t), y(t), z(t))$, respectivamente.

1.5.5 El operador ∇

El operador vectorial $\boldsymbol{\nabla}(\circ)$ merece un poco de atención en este nivel. Tal y como hemos visto cuando construimos:

El Gradiente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z) &= \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \partial^1\phi(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}_1 + \partial^2\phi(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}_2 + \partial^3\phi(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}_3 = \partial^i\phi(x^j)\hat{\mathbf{i}}_i\,. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Podemos ver ahora que existen otras posibilidades:

El Rotacional: Se puede construir la siguiente operación: $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, que denominaremos **rotacional** de $\mathbf{A}$, y vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\times\left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}} = \varepsilon^{ijk}\partial_j A_k\,\hat{\mathbf{i}}_i\,. \end{aligned} \tag{1.26}$$

La Divergencia: También podemos hablar del "producto escalar" de $\boldsymbol{\nabla}$ por un vector $\mathbf{A}$. A esta operación la llamaremos **divergencia** de $\mathbf{A}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A^i(x^j)}{\partial x^i} \equiv \partial_i A^i(x^j) \equiv \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}\,, \tag{1.27}$$

Por ahora consideremos $\boldsymbol{\nabla}$ como un vector.

Existe una gran cantidad de relaciones vectoriales que involucran a $\boldsymbol{\nabla}$, las cuales se podrán demostrar.

Ejemplo 1.18 Demostrar que:

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\,.$$

El resultado es un gradiente, es decir un vector. El lado izquierdo será:

$$(\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}))^i = \partial^i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \partial^i\left(a_j b^j\right) = \left(\partial^i a_j\right)b^j + \left(\partial^i b_j\right)a^j\,.$$

Mientras que el lado derecho:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}))^i &= \left(a_j\partial^j\right)b^i + \left(b_j\partial^j\right)a^i + \varepsilon^{ijk}a_j\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}\right)_k + \varepsilon^{ijk}b_j\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}\right)_k \\ &= \left(a_j\partial^j\right)b^i + \left(b_j\partial^j\right)a^i + \varepsilon^{ijk}a_j\varepsilon_{kmn}\partial^m b^n + \varepsilon^{ijk}b_j\varepsilon_{kmn}\partial^m a^n \\ &= \left(a_j\partial^j\right)b^i + \left(b_j\partial^j\right)a^i + \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mnk}a_j\partial^m b^n + \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mnk}b_j\partial^m a^n \\ &= \left(a_j\partial^j\right)b^i + \left(b_j\partial^j\right)a^i + \left(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n\right)a_j\partial^m b^n + \left(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n\right)b_j\partial^m a^n \\ &= a_j\partial^j b^i + b_j\partial^j a^i + \delta^i_m\delta^j_n a_j\partial^m b^n - \delta^j_m\delta^i_n a_j\partial^m b^n + \delta^i_m\delta^j_n b_j\partial^m a^n - \delta^j_m\delta^i_n b_j\partial^m a^n \\ &= a_j\partial^j b^i + b_j\partial^j a^i + a_n\partial^i b^n - a_m\partial^m b^i + b_n\partial^i a^n - b_m\partial^m a^i \\ &= \underbrace{a_j\partial^j b^i - a_m\partial^m b^i}_{=0} + \underbrace{b_j\partial^j a^i - b_m\partial^m a^i}_{=0} + a_n\partial^i b^n + b_n\partial^i a^n \\ &= a_n\partial^i b^n + b_n\partial^i a^n = \partial^i\left(a_j b^j\right) = \partial^i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,. \end{aligned}$$

◁

Ejemplo 1.19 Demostrar la siguiente identidad:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) - [\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})]\,\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) - [(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\nabla}]\,\mathbf{a}\,.$$

Borrador Preliminar

Iniciamos la traducción a índices por el lado izquierdo de la ecuación, así:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} &= \epsilon^{ijk}\partial_j\left(a_m\partial^m\right)a_k = \epsilon^{ijk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k + \epsilon^{ijk}a_m\partial_j\partial^m a_k\\ &= \epsilon^{ijk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k + a_m\partial^m\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right).\end{aligned}$$

El lado derecho lo traduciremos término por término:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) &= \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right)\\ -\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\right]\mathbf{a} &= -\left[\partial_m\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right]a^i = -\left[\epsilon^{mjk}\partial_m\partial_j a_k\right]a^i = 0\\ (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) &= a_m\partial^m\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right)\\ -\left[(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\nabla}\right]\mathbf{a} &= -\left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right]a^i.\end{aligned}$$

El segundo término se anula por cuanto ϵ^{mjk} es antisimétrico respecto a los índices m, j, mientras que $\partial_m\partial_j$ es simétrico. El tercer término del desarrollo del lado derecho corresponde con el segundo del desarrollo del lado izquierdo. Por lo tanto, llegamos a la siguiente igualdad:

$$\epsilon^{ijk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k = \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right) - \left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right]a^i. \tag{1.28}$$

Para verificar la igualdad tendremos que evaluar componente a componente, esto es, para $i = 1$, el lado izquierdo de (1.28) resulta en:

$$\begin{aligned}\epsilon^{1jk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k &= \epsilon^{123}\left(\partial_2 a_m\right)\partial^m a_3 + \epsilon^{132}\left(\partial_3 a_m\right)\partial^m a_2 = \left(\partial_2 a_m\right)\partial^m a_3 - \left(\partial_3 a_m\right)\partial^m a_2\\ &= \left(\partial_2 a_1\right)\partial^1 a_3 + \left(\partial_2 a_2\right)\partial^2 a_3 + \left(\partial_2 a_3\right)\partial^3 a_3 - \left(\partial_3 a_1\right)\partial^1 a_2 - \left(\partial_3 a_2\right)\partial^2 a_2 - \left(\partial_3 a_3\right)\partial^3 a_2.\end{aligned}$$

Para el primer término del lado derecho de (1.28) :

$$\begin{aligned}\left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right) &= \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{123}\partial_2 a_3\right) + \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{132}\partial_3 a_2\right)\\ &= \underbrace{\partial_2 a_3\partial^1 a_1}_{\alpha} + \partial_2 a_3\partial^2 a_2 + \partial_2 a_3\partial^3 a_3 - \underbrace{\partial_3 a_2\partial^1 a_1}_{\beta} - \partial_3 a_2\partial^2 a_2 - \partial_3 a_2\partial^3 a_3,\end{aligned}$$

y el segundo término de (1.28) se escribe como:

$$\begin{aligned}-\left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right]a^i &= -\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right)\partial_1 a^1 - \left(\epsilon^{2jk}\partial_j a_k\right)\partial_2 a^1 - \left(\epsilon^{3jk}\partial_j a_k\right)\partial_3 a^1\\ &= -\left(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2\right)\partial_1 a^1 - \left(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3\right)\partial_2 a^1 - \left(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1\right)\partial_3 a^1\\ &= \underbrace{\partial_3 a_2\partial_1 a^1}_{\beta} - \underbrace{\partial_2 a_3\partial_1 a^1}_{\alpha} + \partial_1 a_3\partial_2 a^1 - \underbrace{\partial_3 a_1\partial_2 a^1}_{\gamma} + \underbrace{\partial_2 a_1\partial_3 a^1}_{\gamma} - \partial_1 a_2\partial_3 a^1.\end{aligned}$$

Al sumar ambos términos se eliminan los sumandos indicados con letras griegas, y queda como:

$$\begin{aligned}\left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right) - \left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right]a^i &= \partial_2 a_3\underset{\Xi}{\partial_2 a_2} + \partial_2 a_3\underset{\Upsilon}{\partial_3 a_3}\\ &\quad -\partial_3 a_2\underset{\Omega}{\partial_2 a_2} - \partial_2 a_2\underset{\Psi}{\partial_3 a_3} + \partial_1 a_3\underset{\Lambda}{\partial_2 a_1} - \partial_1 a_2\underset{\Sigma}{\partial_3 a_1},\end{aligned}$$

y al compararlo con el desarrollo del lado derecho de (1.28) e identificar término a término queda demostrada la igualdad:

$$\epsilon^{1jk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k = \left(\partial_2 a_1\right)\underset{\Lambda}{\partial_1 a_3} + \left(\partial_2 a_2\right)\underset{\Xi}{\partial_2 a_3} + \left(\partial_2 a_3\right)\underset{\Upsilon}{\partial_3 a_3} - \left(\partial_3 a_1\right)\underset{\Sigma}{\partial_1 a_2} - \left(\partial_3 a_2\right)\underset{\Omega}{\partial_2 a_2} - \left(\partial_3 a_3\right)\underset{\Psi}{\partial_3 a_2}.$$

De igual manera se procede con $i = 2$ e $i = 3$. ◁

Ejemplo 1.20 Utilizando la notación de índices muestre si se cumple la siguiente identidad:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b}.$$

Borrador Preliminar

Desarrollemos en índices el lado izquierdo:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \epsilon^{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}a^l b^m) = (\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l)\partial_j(a^l b^m) = \partial_m(a^i b^m) - \partial_l(a^l b^i)\,,$$

expandiendo la derivada:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = b^m\partial_m(a^i) + a^i\partial_m(b^m) - b^i\partial_l(a^l) - a^l\partial_l(b^i) \equiv (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b}\,.$$

◁

Ejemplo 1.21 Tal vez, uno de los problemas que ilustra mejor el uso del álgebra vectorial y la derivación de vectores es el movimiento bajo fuerzas centrales. La ley de gravitación de Newton nos dice que para un sistema de dos masas, m y M se tiene:

$$\sum \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \;\Rightarrow\; mG\frac{M}{r^2_{mM}}\hat{\mathbf{u}}_r = m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{GM}{r^2_{mM}}\hat{\mathbf{u}}_r\,.$$

Es costumbre definir la *velocidad areolar*, $\mathbf{v}_a$, como el área barrida por el radio vector posición, $\mathbf{r}(t)$, que describe la trayectoria de la partícula:

$$2\mathbf{v}_a \equiv \mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = r\,\hat{\mathbf{u}}_r\times\frac{\mathrm{d}\,(r\,\hat{\mathbf{u}}_r)}{\mathrm{d}t} = r\hat{\mathbf{u}}_r\times\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}_r + r\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right) = r\,\hat{\mathbf{u}}_r\times r\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = r^2\hat{\mathbf{u}}_r\times\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\,.$$

Nótese que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{\mathbf{u}}_r\times\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\mathbf{u}}_r\times\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = \mathbf{c} \;\Rightarrow\; 2\mathbf{v}_a = r^2\hat{\mathbf{u}}_r\times\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = \text{const}\,,$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante, con lo cual:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\times\mathbf{v}_a) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{v}_a = \frac{GM}{r^2_{mM}}\hat{\mathbf{u}}_r\times\mathbf{v}_a = \frac{GM}{2}\left\{\hat{\mathbf{u}}_r\times\left(\hat{\mathbf{u}}_r\times\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right)\right\}\\ &= \frac{GM}{2}\left\{\left(\hat{\mathbf{u}}_r\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\mathbf{u}}_r - (\hat{\mathbf{u}}_r\cdot\hat{\mathbf{u}}_r)\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{GM}{2}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\,.\end{aligned}$$

Integrando:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{v}_a = \frac{GM}{2}\hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{p}\,,$$

donde $\mathbf{p}$ es un vector arbitrario que aparece como constante de integración.

Finalmente nos damos cuenta que:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{v}_a) &= r\,\hat{\mathbf{u}}_r\cdot\left(\frac{GM}{2}\hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{p}\right) = \frac{GM}{2}r + rp\cos(\theta)\\ &= \varepsilon^{ijk}r_i v_j v_{ak} \equiv \mathbf{v}_a\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_a = v_a^2\,,\end{aligned}$$

y entonces:

$$v_a^2 = \frac{GM}{2}r + rp\cos(\theta) \;\Rightarrow\; r = \frac{v_a^2}{\frac{GM}{2} + p\cos(\theta)} \equiv \frac{\frac{2v_a^2}{GM}}{1 + \frac{2p}{GM}\cos(\theta)}\,,$$

que constituye la ecuación de una curva cónica ¿Cuál curva?

◁

1.5.6 Integración

Después de haber diferenciado campos escalares y vectoriales, el siguiente paso es integrarlos. Encontraremos algunos objetos vectoriales a integrar y serán:

- Integración de un vector por un escalar:

$$\int \mathbf{A}(u)\,\mathrm{d}u$$

Borrador Preliminar

- Integración de un escalar a lo largo de un vector:

$$\int_c \phi(x,y,z)\ \mathrm{d}\mathbf{r}$$

- Integración de un vector a lo largo de otro vector:

$$\int_c \mathbf{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

El primero de los casos es el tipo de integral que siempre hemos utilizado para encontrar la posición a partir de la velocidad. Los siguientes tres casos se conocen con el nombre de integrales de línea por cuanto es importante la "ruta" o trayectoria que sigamos al integrar. Esto aparece indicado por la letra C en la integral y será evidente más adelante. En general la integral de línea dependerá de la trayectoria.

1.5.6.1 Un vector por un escalar: $\int \mathbf{A}(u)\ \mathrm{d}u$

El primer caso de este tipo integrales es el trivial que ya sabemos calcular:

$$\int \mathbf{A}(u)\ \mathrm{d}u = \hat{\mathbf{i}}\int A_x(u)\mathrm{d}u + \hat{\mathbf{j}}\int A_y(u)\mathrm{d}u + \hat{\mathbf{k}}\int A_z(u)\mathrm{d}u = \left(\int A^i(u)\mathrm{d}u\right)\hat{\mathbf{i}}_i\,.$$

La integral de un vector (en un sistema de coordenadas cartesianas) por un escalar se convierte en la suma de tres integrales, cada una a lo largo de las componentes cartesianas del vector.

Recordemos que así integramos la aceleración en un movimiento parabólico:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{k}} \ \Rightarrow\ \mathbf{v} = \int \mathbf{a}\ \mathrm{d}t = \hat{\mathbf{k}}\int -g\ \mathrm{d}t = -\hat{\mathbf{k}}gt + \mathbf{v}_0 = -\hat{\mathbf{k}}gt + \hat{\mathbf{i}}v_{0x} + \hat{\mathbf{j}}v_{0y} + \hat{\mathbf{k}}v_{0z}\,.$$

Ahora bien, existen sutilezas en este caso que debemos tener en cuenta. Por ejemplo, considere la integral:

$$\int \mathrm{d}t\ \left(\mathbf{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \int \mathrm{d}t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{a}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\right) = \int \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{a}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathbf{a}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{c}\,.$$

Pero en general los casos quedan resueltos integrando componente a componente con la ayuda de la notación de índices:

$$\int \mathrm{d}t\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \left[\int \mathrm{d}t\ \left(\varepsilon^{ijk}a_j b_k\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_i\,.$$

1.5.6.2 Un escalar a lo largo de un vector: $\int_C \phi\,(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}$

El segundo objeto que "tropezaremos" es la integración de funciones de varias variables a lo largo de una curva determinada. Esto es:

$$\int_C \phi(x,y,z)\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x^i)\left(\mathrm{d}x\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{d}y\hat{\mathbf{j}} + \mathrm{d}z\hat{\mathbf{k}}\right) = \hat{\mathbf{i}}\int_C \phi(x^i)\mathrm{d}x + \hat{\mathbf{j}}\int_C \phi(x^i)\mathrm{d}y + \hat{\mathbf{k}}\int_C \phi(x^i)\mathrm{d}z\,.$$

La integral se nos ha convertido en tres integrales, las cuales son ahora componentes de un vector. Esto es posible dado que la base $\{\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}\}$ es una base constante. Ahora bien, cada una de estas integrales son interdependientes, dado que hay que seguir la misma curva C.

1.5.6.3 Un vector a lo largo de otro vector: $\int_C \mathbf{F}\,(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$

Quizá la integral de línea más conocida sea una del tipo $\int_C \mathbf{F}\,(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ por cuanto nos la hemos "tropezado" en el cálculo del trabajo que realiza una fuerza. Todo lo que hemos considerado al parametrizar la curva en el caso anterior, sigue siendo válido.

$$\int_C \mathbf{F}\,(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C F_x(x,y,z)\ \mathrm{d}x + \int_C F_y(x,y,z)\ \mathrm{d}y + \int_C F_z(x,y,z)\ \mathrm{d}z = \int_C F^i(x^j)\ \mathrm{d}x_i\,.$$

Borrador Preliminar

Ejemplo 1.22 Consideremos la siguiente función:

$$\phi\left(x,y\right)=3x^2+2y\,.$$

Queremos calcular la siguiente integral de línea:

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}\mathbf{r}=\hat{\mathbf{i}}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}x+\hat{\mathbf{j}}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}y\,.$$

Se requiere especificar la curva C a lo largo de la cual integraremos, en este caso, desde el punto $P_1\to(0,0)$ al punto $P_2\to(1,2)$. Podemos ir por diferentes recorridos:

- Si recorremos la ruta C_1: $(0,0)\to(1,0)\to(1,2)$ podemos hacerlo de la manera más sencilla:

$$(0,0)\to(1,0)\;\Rightarrow\;y=\text{cte}=0\;\Rightarrow\;\int_{(0,0)}^{(1,0)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}\mathbf{r}=\hat{\mathbf{i}}\int_{(0,0)}^{(1,0)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}x=\hat{\mathbf{i}}\int_0^1\left(3x^2\right)\mathrm{d}x=\hat{\mathbf{i}}$$

$$(1,0)\to(1,2)\;\Rightarrow\;x=\text{cte}=1\;\Rightarrow\;\int_{(0,0)}^{(1,0)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}\mathbf{r}=\hat{\mathbf{j}}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}y=\hat{\mathbf{j}}\int_0^2\left(3+2y\right)\mathrm{d}y=10\hat{\mathbf{j}}$$

con lo cual:

$$C_1\longleftrightarrow\underbrace{(0,0)\to}_{C_1^A}(1,0)\underbrace{\to(1,2)}_{C_1^B}\;\Rightarrow\;\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\hat{\mathbf{i}}+10\hat{\mathbf{j}}\,.$$

- Si hubiéramos seleccionado la recta que une a estos dos puntos como la curva C_2 entonces:

$$C_2:\quad y=2x\;\Rightarrow\;\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x\,,$$

esto es:

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}\mathbf{r}&=\hat{\mathbf{i}}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}x+\hat{\mathbf{j}}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}y\\&=\hat{\mathbf{i}}\int_0^1\left(3x^2+2\left(2x\right)\right)\mathrm{d}x+\hat{\mathbf{j}}\int_0^1\left(3x^2+2\left(2x\right)\right)2\mathrm{d}x=3\hat{\mathbf{i}}+6\hat{\mathbf{j}}\,.\end{aligned}$$

En general la curva C se puede parametrizar y las integrales en varias variables se convertirán en integrales a lo largo del parámetro que caracteriza la curva.

$$C:\{x=x\left(\tau\right),y=y\left(\tau\right),z=z\left(\tau\right)\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_C\phi(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{r}&=\int_C\phi\left(x\left(\tau\right),y\left(\tau\right),z\left(\tau\right)\right)\left(\frac{\partial x\left(\tau\right)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau\,\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial y\left(\tau\right)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau\,\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial z\left(\tau\right)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau\,\hat{\mathbf{k}}\right)\\&=\hat{\mathbf{i}}\int_C\phi\left(x\left(\tau\right),y\left(\tau\right),z\left(\tau\right)\right)\frac{\partial x\left(\tau\right)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau+\hat{\mathbf{j}}\int_C\phi\left(x\left(\tau\right),y\left(\tau\right),z\left(\tau\right)\right)\frac{\partial y\left(\tau\right)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau\\&\quad+\hat{\mathbf{k}}\int_C\phi\left(x\left(\tau\right),y\left(\tau\right),z\left(\tau\right)\right)\frac{\partial z\left(\tau\right)}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Las parametrización de las curvas anteriores es muy simple:

$$C_1^A=\begin{cases}x=\tau\\y=0\end{cases};\quad C_1^B=\begin{cases}x=2\\y=\tau\end{cases};\quad C_2=\begin{cases}x=\tau\\y=2\tau\end{cases}$$

Con esta manera de parametrizar, la integral que resolvimos anteriormente tomando el camino C_2:

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}\mathbf{r}=\hat{\mathbf{i}}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}x+\hat{\mathbf{j}}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2+2y\right)\mathrm{d}y\,.$$

Borrador Preliminar

Queda ahora como:

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2+2y\right) \mathrm{d}\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} \int_0^1 \left(3\tau^2+4\tau\right) \mathrm{d}\tau + \hat{\mathbf{j}} \int_0^1 \left(3\tau^2+4\tau\right) 2\mathrm{d}\tau = 3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Ya que: $0 \leq \tau \leq 1$

◁

Ejemplo 1.23 Consideramos el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right) = \left(3x^2+2xy^3\right)\hat{\mathbf{i}} + 6xy\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Queremos evaluar la siguiente integral:

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} \left(\left(3x^2+2xy^3\right)\hat{\mathbf{i}} + 6xy\,\hat{\mathbf{j}}\right)\left(\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{j}}\right)\\ &= \int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} \left(3x^2+2xy^3\right)\mathrm{d}x + \int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Consideremos que la curva que une esos puntos viene parametrizada por:

$$x = 2\tau^2\,,\ y = \tau^3+\tau \ \Rightarrow\ \frac{\partial x\left(\tau\right)}{\partial \tau} = 4\tau\,,\ \frac{\partial y\left(\tau\right)}{\partial \tau} = 3\tau^2+1\,,$$

entonces, la primera de las integrales resulta:

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} \left(3x^2+2xy^3\right)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(3\left(2\tau^2\right)^2 + 2\left(2\tau^2\right)\left(\tau^3+\tau\right)^3\right)\left(4\tau\right)\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(16\,\tau^{12}+48\,\tau^{10}+48\,\tau^8+16\,\tau^6+48\,\tau^5\right)\mathrm{d}\tau = 1+\frac{9305}{24024}\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Y la segunda:

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 6\left(2\tau^2\right)\left(\tau^3+\tau\right)\left(3\tau^2+1\right)\mathrm{d}\tau\,, = \frac{65}{32}\,,$$

con lo cual:

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} \left(3x^2+2xy^3\right)\ \mathrm{d}x + \int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy\,\mathrm{d}y = \frac{97}{32}+\frac{9305}{24024}\sqrt{2}\,.$$

◁

Ejemplo 1.24 El campo de fuerzas de un oscilador anisótropo bidimensional se escribe como:

$$\mathbf{F} = -k_1x^2\hat{\mathbf{i}} + k_2y\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Encontremos el trabajo realizado

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

a lo largo de las siguientes trayectorias:

1. $(1,1) \to (4,1) \to (4,4)$

$$\int_{(1,1)}^{(4,1)} (\hat{\mathbf{i}}\mathrm{d}x)\cdot(-k_1x^2\hat{\mathbf{i}}+k_2\hat{\mathbf{j}}) + \int_{(4,1)}^{(4,4)} (\hat{\mathbf{j}}\mathrm{d}y)\cdot(-k_1 16\hat{\mathbf{i}}+k_2y\hat{\mathbf{j}}) = -21k_1+\frac{15k_2}{2}\,.$$

2. $(1,1) \to (1,4) \to (4,4)$

$$\int_{(1,1)}^{(1,4)} (\hat{\mathbf{j}}\mathrm{d}y)\cdot(-k_1\hat{\mathbf{i}}+k_2y\hat{\mathbf{j}}) + \int_{(1,4)}^{(4,4)} (\hat{\mathbf{i}}\mathrm{d}x)\cdot(-k_1x^2\hat{\mathbf{i}}+k_2 4\hat{\mathbf{j}}) = -21k_1+\frac{15k_2}{2}\,.$$

3. $(1,1) \to (4,4)$ siguiendo la recta $x = y$

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} (\hat{\mathbf{i}}\mathrm{d}x+\hat{\mathbf{j}}\mathrm{d}x)\cdot(-k_1x^2\hat{\mathbf{i}}+k_2x\hat{\mathbf{j}}) = \int_{(1,1)}^{(4,4)} (-k_1x^2+k_2x)\mathrm{d}x = -21k_1+\frac{15k_2}{2}\,.$$

Borrador Preliminar

Dejamos al lector que calcule el trabajo para la trayectoria $y = x^2$.

◁

1.5.7 Ejercicios

1. Demuestre que:
   (a). $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\right] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{c}\right) + \mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t}\right)$
   (b). $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] = \mathbf{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{a}}{\mathrm{d}t^3}\right)$
   (c). $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{a}$
   (d). $\boldsymbol{\nabla}\times(\phi\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0$
   (e). $\boldsymbol{\nabla}\times[\mathbf{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})] = 0$, si $\mathbf{a} = a_x(y,z)\hat{\mathbf{i}}$.
2. Considere que:
   - $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} = x^i\hat{\mathbf{i}}_i$,
   - $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}_i$ y $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(x,y,z) = b^i(x,y,z)\mathbf{i}_i$,
   - $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x,y,z)$ y $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x,y,z)$.

   Utilizando la notación de índices, e inspirándose en el ejemplo: 1.13 demuestre las siguientes identidades vectoriales:
   (a). $\boldsymbol{\nabla}(\phi\psi) = \phi\boldsymbol{\nabla}\psi + \psi\boldsymbol{\nabla}\phi$.
   (b). $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\mathbf{a}) = \phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} + (\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\mathbf{a}$.
   (c). $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$.
   (d). $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})$ ¿Qué puede decir de $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a})$?
   (e). $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b})$.
   (f). $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{a}$.
3. Para los vectores dados a continuación, encuentre $d\mathbf{r}/ds$
   (a). $\mathbf{r} = t\hat{\mathbf{i}} + 3t^2\hat{\mathbf{j}} - (t-1)\hat{\mathbf{k}}$, y $t = \ln(1+s^2)$.
   (b). $\mathbf{r} = \mathrm{sen}(t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(t)\hat{\mathbf{j}} + \tan(t)\hat{\mathbf{k}}$, y $t = 2 + s^2$.
4. Una partícula describe un movimiento dado por el vector posición $\mathbf{r}$. Encuentre la componente de su velocidad en la dirección del vector indicado:
   (a). $\mathbf{r} = t^2\hat{\mathbf{i}} + 4\cos(2t)\hat{\mathbf{j}} + 3\mathrm{sen}(2t)\hat{\mathbf{k}}$, $\quad 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.
   (b). $\mathbf{r} = 3\cos(t)\hat{\mathbf{i}} + 3\mathrm{sen}(t)\hat{\mathbf{j}} + (t^2-2)\hat{\mathbf{k}}$, $\quad \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.
5. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son funciones que dependen del parámetro t, demuestre que:
   (a). $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})] = \mathbf{u}\cdot\left(\mathbf{v}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right) + \mathbf{u}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{w}\right) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$.
   (b). $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})] = \mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right) + \mathbf{u}\times\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{w}\right) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$.
6. Si $\mathbf{u} = 2t\hat{\mathbf{i}} - t^2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3t\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{w} = t\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} - t\hat{\mathbf{k}}$. Utilice el resultado del ejercicio (a) anterior para encontrar: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})]$.
7. Si $\mathbf{u} = t\hat{\mathbf{i}} - t\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{v} = -t\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} - t^2\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{w} = 2t\hat{\mathbf{i}} - 2t\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$. Utilice el resultado del ejercicio (b) anterior para encontrar: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})]$.
8. Encuentre el gradiente de los siguientes campos:
   (a). $\phi(x,y,z) = x^2 + 3xyz - yz^2$.
   (b). $\phi(x,y,z) = \left(x^2 + 2y^2 + 4z^2\right)^{-1}$.
9. Encuentre la divergencia de los siguientes campos:
   (a). $\mathbf{A}(x,y,z) = x^2y\hat{\mathbf{i}} + y^2z^2\hat{\mathbf{j}} + xz^3\hat{\mathbf{k}}$.
   (b). $\mathbf{A}(x,y,z) = (1-x^2)\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}(yz)\hat{\mathbf{j}} + e^{xyz}\hat{\mathbf{k}}$.

Borrador Preliminar

10. Encuentre el rotacional de los siguientes campos:
    (a). $\mathbf{A}(x,y,z) = xyz^2\hat{\mathbf{i}} + x^2yz\hat{\mathbf{j}} + xy^2\hat{\mathbf{k}}$.
    (b). $\mathbf{A}(x,y,z) = \operatorname{senh}(xy)\hat{\mathbf{i}} + \cosh(yz)\hat{\mathbf{j}} + xyz\hat{\mathbf{k}}$.
11. Evalúe las siguientes integrales:
    (a). $\int \left(t\operatorname{sen}(t)\hat{\mathbf{i}} + 2t^2\hat{\mathbf{j}} - 7t\hat{\mathbf{k}}\right) \mathrm{d}t$.
    (b). $\int \left(\cosh^2(t)\hat{\mathbf{i}} + 2\operatorname{sen}^2(2t)\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\right) \mathrm{d}t$.
12. Un campo de fuerza:
$$\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{i}} - ky\hat{\mathbf{j}}\,,$$
    actúa sobre un oscilador. Compare el trabajo hecho al moverse en contra de este campo al ir desde el punto $(1,1)$ al punto $(4,4)$, siguiendo los siguientes caminos:
    $a)$ $(1,1) \to (4,1) \to (4,4)$. $b)$ $(1,1) \to (1,4) \to (4,4)$. $c)$ $(1,1) \to (4,4)$, siguiendo el camino: $x = y$.
13. Dado el campo de fuerza:
$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}}\,.$$
    Calcule el trabajo hecho en contra de este campo de fuerza al moverse alrededor de un circulo de radio uno y en el plano $x - y$.
    (a). desde 0 a π en sentido contrario a la agujas del reloj.
    (b). desde 0 a $-\pi$ en sentido de las agujas del reloj.
14. Evaluar la siguiente integral:
$$\oint \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$
15. Una partícula se mueve bajo la ley $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$, con:
$$x(t) = 2t^2; \quad y(t) = t^2 - 4t; \quad z(t) = 3t - 5.$$
    El parámetro t representa el tiempo.
    Encuentre las expresiones para la aceleración y la velocidad de la partícula, para $t = 1$ y en la dirección del vector $\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.
16. Suponga ahora el caso general de una partícula que se mueve en una curva descrita por:
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}\,.$$
    Muestre que el vector velocidad es tangente a la trayectoria descrita.
17. Encuentre la ecuación vectorial para una trayectoria recta que pasa por los puntos $P \to (1,2,3)$ y $Q \to (1,1,1)$.
18. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos: $x + y + z = 9$ y $x + y - z = 3$.
19. Un fluido se considera irrotacional si su campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x,y,z)$ cumple con la ecuación: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = 0$. Suponga, ahora que: $\mathbf{v} = (x + 2y + az)\hat{\mathbf{i}} + (bx - 3y - z)\hat{\mathbf{j}} + (4x + cy + 2z)\hat{\mathbf{k}}$.
    (a). Encuentre el valor de a, b y c para que este campo de velocidades sea irrotacional.
    (b). Es intuitivo convencerse que si $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\psi$. Encuentre la expresión para la función potencial $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x,y,z)$.
    (c). Considere la siguiente integral: $I = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$. Donde $\mathcal{C}$ es el circuito a recorrer.
        I. Calcule el valor de la integral I a lo largo del trayecto: $(0,0,0) \to (1,1,0)$ mediante una segmento de recta. Luego, de $(1,1,0) \to (2,0,0)$ a lo largo de otro segmento de recta. Finalmente regresando $(2,0,0) \to (0,0,0)$ también siguiendo una recta.

Borrador Preliminar

II. Calcule el valor de la integral I de $(0,0,0) \to (2,0,0)$ a lo largo de un arco de circunferencia que cumple con la ecuación: $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Ahora regresando de $(2,0,0) \to (0,0,0)$ también a través de una recta.

III. ¿Qué puede concluir del campo $\mathbf{v}$?

Practicando con Maxima

1. **Maxima** nos permite hacer cálculos con el operador ∇ en coordenadas cartesianas, más adelante veremos que también es posible en otros sistemas de coordenadas. Los operadores que se pueden expresar son: **grad**(gradiente), **div** (divergencia), **curl** (rotacional), **laplacian** (laplaciano). Debemos hacer uso de la biblioteca **vect** para poder utilizar los operadores diferenciales.
Por otro lado, se debe usar también de función **express**(expr) para transformar los nombres de los operadores diferenciales en expresiones que contienen derivadas parciales y con la función **ev** evaluamos la expresión. Veamos como se hace si queremos calcular el gradiente de la siguiente función:

$$f = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$$

```
(%i1) load(vect)$
(%i2) f:(x^ 2+y^ 2)/(x^ 2+y^ 2+z^ 2)^ (1/2);
```

(%o2) $\dfrac{y^2+x^2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$

```
(%i3) grad(f);
```

(%o3) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{y^2+x^2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}\right)$

Estaremos haciendo uso del símbolo % que representa la última expresión de salida, de esta manera nos ahorramos estar escribiendo nuevamente el último resultado en la nueva linea de entrada.

```
(%i4) express(%);
```

(%o4) $\left[\dfrac{d}{d\,x}\left(\dfrac{y^2+x^2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}\right), \dfrac{d}{d\,y}\left(\dfrac{y^2+x^2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}\right), \dfrac{d}{d\,z}\left(\dfrac{y^2+x^2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}\right)\right]$

Notemos que el resultado anterior es una lista del tipo $[x, y, z]$, que es la manera como el programa maneja los vectores. En este caso, el primer elemento de la lista es la componente x del vector gradiente. De la misma manera para las componentes y y z. Evaluamos las derivadas de la última salida:

```
(%i5) ev(%, diff);
```

(%o5) $\left[\dfrac{2x}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}} - \dfrac{x\left(y^2+x^2\right)}{\left(z^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{2y}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}} - \dfrac{y\left(y^2+x^2\right)}{\left(z^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}, -\dfrac{\left(y^2+x^2\right)z}{\left(z^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$

En este punto podemos intentar simplificar las expresiones anteriores, esto lo hacemos con el comando **ratsimp** y así obtener finalmente el vector gradiente:

```
(%i6) ratsimp(%);
```

(%o6) $\left[\dfrac{\sqrt{z^2+y^2+x^2}\left(2xz^2+xy^2+x^3\right)}{z^4+\left(2y^2+2x^2\right)z^2+y^4+2x^2y^2+x^4}, \dfrac{\sqrt{z^2+y^2+x^2}\left(2yz^2+y^3+x^2y\right)}{z^4+\left(2y^2+2x^2\right)z^2+y^4+2x^2y^2+x^4}, -\dfrac{\left(y^2+x^2\right)z}{\left(z^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$

Borrador Preliminar

Hagamos uso de los otros operadores. Por ejemplo, dado el vector:

$$\mathbf{a} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z^2}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{k}}\,,$$

calculemos la divergencia, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}$. Esta vez combinaremos algunos comandos en una misma linea.

```
(%i7) a:[x^ 2/(x^ 2+y^ 2),y^ 2/(x^ 2+y^ 2),z^ 2/(x^ 2+y^ 2)];
```

(%o7) $\left[\frac{x^2}{y^2+x^2}, \frac{y^2}{y^2+x^2}, \frac{z^2}{y^2+x^2}\right]$

```
(%i8) express(div (a));
```

(%o8) $\frac{d}{d\,z}\left(\frac{z^2}{y^2+x^2}\right) + \frac{d}{d\,y}\left(\frac{y^2}{y^2+x^2}\right) + \frac{d}{d\,x}\left(\frac{x^2}{y^2+x^2}\right)$

```
(%i9) ev ( %, diff),ratsimp;
```

(%o9) $\frac{\left(2\,y^2+2\,x^2\right)\,z + 2\,x\,y^2 + 2\,x^2\,y}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}$

Calculemos ahora el rotacional de $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}$, pero combinado más comandos en una sola instrucción:

```
(%i10) ev(express(curl(a)),diff);
```

(%o10) $\left[-\frac{2\,y\,z^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}, \frac{2\,x\,z^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}, \frac{2\,x^2\,y}{\left(y^2+x^2\right)^2} - \frac{2\,x\,y^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}\right]$

Intentemos simplificar nuevamente para ver lo que ocurre:

```
(%i11) ratsimp( %);
```

(%o11) $\left[-\frac{2\,y\,z^2}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}, \frac{2\,x\,z^2}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}, \frac{2\,x\,y^2-2\,x^2\,y}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}\right]$

Finalmente, calculemos el laplaciano de f, $\boldsymbol{\nabla}^2 f$, todo en una sola instrucción

```
(%i12) ratsimp(ev(express(laplacian(f)),diff));
```

(%o12) $\frac{4\,z^2}{\left(z^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Podemos verificar rápidamente que: $\boldsymbol{\nabla}^2 f = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f$

```
(%i13) div(grad(f));
```

(%o13) $\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(\frac{y^2+x^2}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}\right)\right)$

```
(%i14) ratsimp(ev(express(( %)),diff));
```

(%o14) $\frac{4\,z^2}{\left(z^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

2. **Maxima** integra simbólicamente funciones por medio del comando **integrate**$(expr, x, a, b)$. Esto es, calcula la integral definida de la $expr$ respecto de x con los límites de integración a y b. Si se omiten los límites de integración se calcula la integral indefinida.
Por ejemplo, si queremos calcular la integral:

$$\int a\,\mathrm{sen}(x+b)^3\mathrm{d}x\,.$$

Escribimos:

```
(%i15) integrate(a*sin(x+b)^ 3,x);
```

Borrador Preliminar

(%o15) $a\left(\frac{\cos^3(x+b)}{3}-\cos(x+b)\right)$

Calculemos ahora el área de la región comprendida entre las funciones:

$$f(x)=x^3-3x^2+1 \quad \text{y} \quad g(x)=-x+1\,.$$

Es decir, vamos a calcular la integral:

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\,.$$

Aprovecharemos este ejercicio para aprender, entre otras cosas, a graficar y definir funciones. Primero que todo, debemos introducir al programa las dos funciones y a diferencia de los cálculos anteriores, usaremos := para definirlas.

```
(%i16) f(x):=x^ 3-3*x^ 2+1; g(x):=-x+1;
```

(%o16) $f(x):=x^3-3*x^2+1$

(%o17) $g(x):=-x+1$

La diferencia de estas dos funciones la podemos llamar la función $d(x)$.

```
(%i18) d(x):=f(x)-g(x);
```

(%o18) $d(x):=f(x)-g(x)$

Para encontrar los puntos donde las funciones se interceptan utilizaremos el comando **solve**, que resuelve la ecuación algebraica y devuelve una lista de igualdades con las variables despejadas. Si la expresión a resolver no es una igualdad, se supone que se quiere resolver la ecuación ya igualada a cero.
Calculemos los puntos donde se interceptan las curvas:

```
(%i20) solve(f(x)-g(x),x);
```

(%o20) $\left[x=-\frac{\sqrt{5}-3}{2}, x=\frac{\sqrt{5}+3}{2}, x=0\right]$

Los valores numéricos son:

```
(%i21) float(%);
```

(%o21) $[x=0.3819660112501051, x=2.618033988749895, x=0.0]$

Haremos la gráfica de las dos funciones. **Maxima** permite hacer gráficos en 2D con el comando **plot2d**. Pero aquí utilizaremos una variante y haremos el gráfico con el comando **wxplot2d** para que la figura aparezca dentro de nuestra hoja de cálculo y no nos aparezca una ventana emergente con la gráfica. Se recomienda revisar el Manual del programa para ver las múltiples opciones adicionales que se pueden agregar a los comandos de hacer las gráficas.
En **Maxima** necesario introducir las funciones como una lista, es decir, dentro de corchetes. Por otra parte, le pediremos al programa que grafique para los valores comprendidos de: $-1 \leq x \leq 3$.
Entonces, para graficar las funciones $f(x)$ y $g(x)$ entre $[-1,3]$ escribimos el siguiente comando:

```
(%i19) wxplot2d([f(x),g(x)],[x,-1,3]);
```

(%o19)

Procedemos ahora sí a integrar la función diferencia para encontrar el área contenida dentro de las dos

Borrador Preliminar

funciones. En este caso será la integral:

$$A = \int_0^{-\frac{\sqrt{5}-3}{2}} d(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\sqrt{5}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}} (-d(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

```
(%i22) integrate(d(x),x,0,-(sqrt(5)-3)/2)+integrate(-d(x),x,-(sqrt(5)-3)/2,(sqrt(5)+3)/2);
```

(%o22) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}+11}{8} + \dfrac{5^{\frac{3}{2}}-11}{4}$

```
(%i23) float(%);
```

(%o23) 2.817627457812107

3. Calculemos ahora las dos integrales que aparecen en el ejemplo 1.23. Es decir las integrales:

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} \left(3x^2+2xy^3\right)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy\,\mathrm{d}y\,.$$

donde hicimos los cambio de variables: $x = 2\tau^2\,,\ y = \tau^3+\tau \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = 4\tau\mathrm{d}\tau\,,\ \mathrm{d}y = (3\tau^2+1)\mathrm{d}\tau\,.$
Escribiremos primero los dos integrandos:

```
(%i24) int1:(3*x^2+2*x*y^3)*dx; int2:6*x*y*dy;
```

(%o24) $dx\,\left(2\,x\,y^3+3\,x^2\right)$

(%o25) $6\,dy\,x\,y$

Realizaremos el cambio de variable a través de comando **subst** que nos permite sustituir expresiones dentro de otras:

```
(%i26) e1:subst([x=2*t^2,dx=4*t,y=t^3+t,dy=3*t^2+1],int1);
```

(%o26) $4\,t\,\left(4\,t^2\,\left(t^3+t\right)^3+12\,t^4\right)$

```
(%i27) e2:subst([x=2*t^2,dx=4*t,y=t^3+t,dy=3*t^2+1],int2);
```

(%o27) $12\,t^2\,\left(3\,t^2+1\right)\,\left(t^3+t\right)$

Podemos introducir las integrales sin evaluarlas en el momento, esto se consigue mediante el operador de comilla simple. En este caso la función no es evaluada y devuelve una expresión simbólica o imagen pictórica.

Borrador Preliminar

(%i28) int1:'integrate(e1,t,0,sqrt(2)/2);

(%o28) $4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t\left(4\,t^2\,\left(t^3+t\right)^3+12\,t^4\right)\,dt$

Ahora si evaluamos la integral:

(%i29) ev(int1,integrate),expand;

(%o29) $\frac{9305}{3003\,2^{\frac{5}{2}}}+1$

Y para la segunda integral:

(%i30) int2:'integrate(e2,t,0,sqrt(2)/2);

(%o30) $12\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^2\,\left(3\,t^2+1\right)\,\left(t^3+t\right)\,dt$

(%i31) ev(int2,integrate),expand;

(%o31) $\frac{65}{32}$

(%i32) kill(all)$

4. Aclaremos la diferencia entre asignar una expresión a una variable y la definición de funciones. Consideremos el movimiento de una partícula que sigue la trayectoria:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,.$$

Primero escribiremos la expresión y se la asignamos a una variable que llamaremos x.
Note que usaremos : para asignar el lado derecho a la variable.

(%i1) x: x0+v0*t+a*t^ 2/2;

(%o1) $x_0+t\,v_0+\frac{a\,t^2}{2}$

Si queremos evaluarla para algún valor de la variable t, digamos $t=1$, entonces podemos escribir:

(%i2) subst(t=1,x);

(%o2) $x_0+v_0+\frac{a}{2}$

Si queremos evaluar la expresión con el resto de parámetros, entonces:

(%i3) subst([t=1,a=-9.8,x0=0,v0=10],x);

(%o3) 5.1

Las sustituciones se realizan pero no se asignan a las variables. Podemos ver que x sigue siendo lo que le asignamos originalmente.

(%i4) x;

(%o4) $x_0+t\,v_0+\frac{a\,t^2}{2}$

Ahora definamos la expresión anterior pero como la función $x(t)$. Ahora utilizaremos := para definir la función,

Borrador Preliminar

```
(%i5) x(t):= x0+v0*t+a*t^ 2/2;
```
(%o5) $x(t) := x_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}$

Evaluarla es ahora más sencillo:

```
(%i6) x(1);
```
(%o6) $x_0 + v_0 + \frac{a}{2}$

También podemos escribir:

```
(%i7) subst([a=-9.8,x0=0,v0=10],x(1));
```
(%o7) 5.1

Si queremos asignarle los valores a los parámetros de manera global, entonces escribimos:

```
(%i8) a:-9.8$ x0:0$ v0:10$
```

De manera que:

```
(%i11) x(1);
```
(%o11) 5.1

Para limpiar los parámetros que acabamos de asignar hacemos lo siguiente:

```
(%i12) kill(a,v0,x0)$
```

Por lo tanto:

```
(%i13) x(1);
```
(%o13) $x_0 + v_0 + \frac{a}{2}$

La velocidad y la aceleración son funciones fáciles de calcular:

```
(%i14) 'diff(x(t),t)=diff(x(t),t);
```
(%o14) $\frac{d}{d\,t}\left(x_0 + t\,v_0 + \frac{a\,t^2}{2}\right) = v_0 + a\,t$

```
(%i15) 'diff(x(t),t,2)=diff(x(t),t,2);
```
(%o15) $\frac{d^2}{d\,t^2}\left(x_0 + t\,v_0 + \frac{a\,t^2}{2}\right) = a$

En el caso de que estemos interesados en definir una nueva función a partir de algún cálculo anterior podemos utilizar la función **define**.
Entonces, lo que vamos a hacer, en las siguientes lineas de comandos, es definir la función velocidad a partir de la derivada de la posición.

```
(%i16) diff(x(t),t);
```
(%o16) $v_0 + a\,t$

```
(%i17) define(v(t), %);
```
(%o17) $v(t) := v0 + at$

Borrador Preliminar

```
(%i18) v(1);
```
(%o18) $v0 + a$

```
(%i19) subst([a=-9.8,x0=0,v0=10],v(1));
```
(%o19) 0.1999999999999993

5. Cuando necesitemos manejar campo vectoriales podemos utilizar las listas. Veamos el primer ejemplo de 1.16 donde:

$$\mathbf{r} = 3t^2\hat{\mathbf{i}} + (4t^3 - t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Escribamos el vector posición:

```
(%i20) [x,y,z]:[3*t^ 2,4*t^ 3-t,t];
```
(%o20) $\left[3\,t^2, 4\,t^3 - t, t\right]$

La velocidad:

```
(%i21) v:diff([x,y,z],t);
```
(%o21) $\left[6\,t, 12\,t^2 - 1, 1\right]$

La aceleración:

```
(%i22) a:diff([x,y,z],t,2);
```
(%o22) $[6, 24\,t, 0]$

Podemos fácilmente calcular:

```
(%i23) v.[bx,by,bz];
```
(%o23) $by\,\left(12\,t^2 - 1\right) + 6\,bx\,t + bz$

```
(%i24) solve( %,bz);
```
(%o24) $\left[bz = -12\,by\,t^2 - 6\,bx\,t + by\right]$

Borrador Preliminar

1.6 Vectores y números complejos

Desde los primeros cursos de matemática nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios. La solución a un polinomio cúbico:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \\ x = 3 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; (x+2i)\,(x-2i)\,(x-3) = 0\,,$$

o cuadrático:

$$x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; (x+2i)\,(x-2i) = 0\,.$$

nos lleva a definir un número $i^2 \equiv -1$.

De lo anterior podemos ver que al multiplicar el número imaginario i por cualquier número real obtendremos el número imaginario puro ib, con $b \in \mathbb{R}$. La nomenclatura de números imaginarios surgió de la idea de que estas cantidades no representaban mediciones físicas. Esa idea ha sido abandonada pero el nombre quedó[17].

Es importante señalar aquí, que suele tomarse de la definición $i^2 \equiv -1$ el hecho de que $i = \sqrt{-1}$. Pero si hacemos esto, sin pensarlo bien, llegamos a que: $-1 = i^2 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$. La contradicción surge por el hecho de que aquí el -1 no es un número real sino un número complejo y será evidente más adelante cuando desarrollemos el álgebra de los números complejos.

1.6.1 Los números complejos y su álgebra

Un número complejo, z, es la generalización de los números imaginarios (puros), ib. Esto es:

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right. \tag{1.29}$$

Obviamente los números reales serán $a + i0$ números complejos con su parte imaginaria nula. Los números imaginarios puros serán números complejos con su parte real nula, esto es, $0 + ib$. Por ello, en general diremos que:

$$z = a + ib \;\Rightarrow\; a = \mathrm{Re}\,(z) \quad \wedge \quad b = \mathrm{Im}\,(z)\;, \tag{1.30}$$

es decir, a corresponde a la parte real de z y b a su parte imaginaria.

Cada número complejo, z tendrá asociado un número complejo conjugado, z^* tal que:

$$z = a + ib \quad \rightleftharpoons \quad z^* = a - ib\,,$$

$$\Downarrow$$

$$(z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2\,,$$

claramente:

$$z \cdot z^* \geq 0 \;\Rightarrow\; |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2\,.$$

Es importante señalar que, en general, no existe relación de orden entre los números complejos. Vale decir,

[17] Los números complejos comienzan a aparecer en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) mientras estudiaban las raíces de la ecuación cúbica . Pero es a René Descartes (1596-1650) a quién se le atribuye la afirmación: "ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación" y utilizó el término "números imaginarios". Caspar Wessel en 1799 y Jean-Robert Argand en 1806 proponen la estructura del plano complejo y la representación de la unidad imaginaria como el punto $(0, 1)$ del eje vertical de dicho plano. Pero el término, hoy usado de "números complejos" se debe a Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Borrador Preliminar

que no sabremos si un número complejo es mayor que otro. No está definida esta operación.

$$z_1 \not> z_2 \quad \vee \quad z_1 \not< z_2 \,.$$

Las relaciones de orden sólo se podrán establecer entre módulos de números complejos y no números complejos en general.

Rápidamente recordamos el álgebra de los números complejos:

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son:

$$z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 \,.$$

- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 \,,$$

- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria

$$(a_1 + ib_1)^* = (a_1 + ib_1) \,,$$

  y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\, z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.

- Se multiplican números complejos por escalares multiplicando el escalar por sus partes reales e imaginarias:

$$z_3 = \alpha z_1 \;\Rightarrow\; \alpha\,(a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i\,(\alpha b_1) \,.$$

- Se multiplican números complejos entre si, multiplicando los dos binomios y teniendo cuidado que $i^2 = -1$:

$$z_3 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \,,$$

  también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales. Esto es:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \;\Rightarrow\; \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)}\frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \,,$$

  es claro que el divisor será cualquier número complejo excepto el cero complejo: $0 + i0$.

1.6.2 Vectores y el plano complejo

Mirando con cuidado el álgebra de números complejos nos damos cuenta que un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números, es decir:

$$z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b) \,. \tag{1.31}$$

Las propiedades entre números complejos de igualdad, suma y multiplicación por un escalar arriba expuestas se cumplen de forma inmediata con esta nueva representación. Hay que definir las operaciones de multiplicación y división entre números complejos de forma que:

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad \wedge \quad \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) \,.$$

Con está definición para la multiplicación de números complejos podemos ver que si la unidad compleja viene representa por el par $i = (0, 1)$, entonces ahora si:

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \,.$$

Borrador Preliminar

La asociación de un número complejo con una pareja de números inmediatamente nos lleva a imaginar un punto (x, y) en un plano (complejo), la primera componente (horizontal) representa la parte real y la segunda componente (vertical) representa la parte imaginaria.
De esta forma asociamos un número complejo a un vector que une ese punto (x, y) con el origen del plano complejo.
Como mencionamos con anterioridad, todo número complejo z tiene asociado su complejo conjugado z^*. La representación geométrica de z^* no es otra cosa que la reflexión de z respecto al eje real. Como puede verse en la figura 1.10.

Figura 1.10: Representación del plano complejo. El eje horizontal recibe el nombre de eje real, y el eje vertical el nombre de eje imaginario.

Por otro lado, $|z| = \sqrt{zz^*}$ viene a ser la distancia del punto $(0, 0)$ al punto (x, y), es decir, la longitud o norma del vector (x, y). Esta representación de números complejos como vectores en el plano (complejo) se conoce con el nombre de Diagrama de Argand[18] a pesar que no fue Jean Argand, sino Caspar Wessel[19] el primero en proponerlo. Por cierto, esta interpretación fue tres veces redescubierta, primero por Caspar Wessel en 1799, luego por Jean Argand en 1806 y finalmente por Gauss[20] en 1831.

De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right), \quad \text{con:} \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = Re\, z & \leftrightharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = Im\, z & \leftrightharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte imaginaria de } z \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \leftrightharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \leftrightharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

La interpretación vectorial de números complejos permite que la suma de números complejos: $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ sea representada por la "regla del paralelogramo", es decir, en la representación gráfica de la suma es fácil ver que z_1 y z_2 limitan un paralelogramo cuya diagonal es $z_1 + z_2$.

Mientras que los productos escalar y vectorial nos llevan a:

$$z_1 \cdot z_2 = Re\left(z_1 z_2^*\right) = Re\left(z_1^* z_2\right) \quad \wedge \quad z_1 \times z_2 = Im\left(z_1^* z_2\right) = -Im\left(z_1 z_2^*\right) .$$

Volviendo nuevamente a la relación $|z| = \sqrt{zz^*}$, observemos que:

- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

[18] Jean Robert Argand (1768-1822). Contador pero matemático aficionado, propuso esta interpretación de números complejos como vectors en un plano complejo en un libro autoeditado con sus reflexiones que se perdió y fue rescatado 7 años después, fecha a partir de la cual Argand comenzó a publicar en Matemáticas. https://es.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert_Argand

[19] Caspar Wessel (1745-1818) Matemático que se dedicó principalmente al levantamiento topográfico de Noruega. Su trabajo sobre los números complejos permaneció desconocido por casi 100 años. https://es.wikipedia.org/wiki/Caspar_Wessel

[20] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Uno de los matemáticos más geniales y precoces de la Historia. Desde los 7 años comenzó a mostrar sus condiciones de genialidad. Sus contribuciones en Astronomía y Matemáticas son múltiples y diversas. https://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Borrador Preliminar

Ya que si $|z_1 z_2|$, $|z_1|$ y $|z_2|$ son cantidades positivas, entonces:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(z_1 z_2)^* = z_1 z_2 z_1^* z_2^* = z_1 z_1^* z_2 z_2^* = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2 \ .$$

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

  Veamos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_1 z_2^* + z_1^* z_2 = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 z_2^*) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|Re(z_1 z_2^*)| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2^*| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2^*| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \ . \end{aligned}$$

  Notemos que la igualdad $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ se satisface si, y sólo si, $Re(z_1 z_2^*) = |z_1 z_2^*|$.

1.6.3 Producto escalar

El producto escalar definido con anterioridad para vectores puede ser redefinido al caso de vectores con componentes complejas.

Definición 1.1 (Producto escalar complejo)

Dados los vectores: $\mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{i}}_i$ y $\mathbf{b} = b^i \hat{\mathbf{i}}_i$, con $\{a^i\}$ y $\{b^i\} \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i)^* \, b^i \ . \tag{1.32}$$

Notemos que con esta definición, el producto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \left(a^i\right)^* a_i$ siempre será un número real. Por lo tanto:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \in \mathbb{R} \ . \tag{1.33}$$

Esta definición hace que ahora cambien algunas de las propiedades del producto escalar.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \ , \tag{1.34}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda^* \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \ , \tag{1.35}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \ . \tag{1.36}$$

1.6.4 Fórmulas de Euler y De Moivre

En cursos anteriores, nos hemos tropezado con la expansión en Taylor[21] de funciones, esta serie permite expresar cualquier función analítica[22] alrededor de un punto x_0 como una serie infinita de potencias del argumento de la función, esto es:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left.\frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \cdots\cdots$$

O de manera equivalente:

$$f(x) = C_n (x - x_0)^n \qquad \text{con} \ \ C_n = \frac{1}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}\, x^n}\right|_{x=x_0} \qquad \text{y} \ \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

[21] Brook Taylor (1685-1731) Físico y Matemático inglés contemporáneo de Newton y Leibniz y junto con ellos participó profundamente en el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Además de sus aportes al estudio del magnetismo, capilaridad y termometría, desarrolló el área de diferencias finitas que hasta hoy utilizamos para cálculos en computación. Inventó la integración por partes y descubrió la serie que lleva su nombre. https://es.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

[22] Básicamente, una función analítica es una función que puede expresarse como una serie de potencias convergente.

Borrador Preliminar

Si consideramos que $x_0 = 0$, podremos ver a continuación algunos desarrollos en series de funciones elementales:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\cdots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\cdots \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Es fácil convencerse que para la serie de e^x se tiene:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{6}i\theta^3 + \frac{1}{24}\theta^4 + \frac{1}{120}i\theta^5 - \frac{1}{720}\theta^6 - \frac{1}{5040}i\theta^7 + \cdots$$

y que puede arreglarse como:

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6 + \cdots\cdots\right)}_{\cos(\theta)} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \cdots\cdots\right)}_{\operatorname{sen}(\theta)}$$

obteniéndose la importante relación:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\,, \tag{1.37}$$

conocida como la relación de Euler[23].

La fórmula de Euler, para $-\pi < \theta < \pi$ resulta en los siguientes simpáticos resultados:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}\,, \quad -1 = e^{i\pi}\,, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,, \quad 1 = e^{i2k\pi} \quad \text{con } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$$

Entonces, tenemos tres formas de representar un número complejo:

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|\left(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right) \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|e^{i\theta}\,.$$

La expresión $z = x + iy$ se conoce como forma cartesiana de representación de un número complejo, la forma $z = r\left(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right)$ será la forma trigonométrica o polar y la expresión $z = re^{i\theta}$ será la forma de Euler.

Es importante notar una sutileza implícita en esta notación. La forma cartesiana representa unívocamente a un número complejo, mientras que la forma polar (y la de Euler), es ambigua, ya que:

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right) = r\left(\cos(\theta + 2n\pi) + i\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)\right)\,, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

Es decir, existen varios valores del argumento que definen el mismo número complejo.

Ejemplo 1.25 El número $z = 1 + \sqrt{3}i$ lo podemos representar de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned} z = 1 + \sqrt{3}i &= 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2e^{\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)i} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)\right]\,. \end{aligned}$$

◁

Analicemos estas situaciones con más detalle. Primero es importante notar que r es siempre positivo, mientas que el ángulo θ puede tomar infinitos valores incluyendo valores negativos. Como ya vimos, θ se relaciona con las coordenadas cartesianas por la ecuación $\tan(\theta) = y/x$, y donde es necesario especificar el cuadrante para su cálculo. A cada valor del ángulo se le denomina el *argumento de* z.

Por lo tanto, si tenemos un número complejo z denotaremos por $\arg(z)$ a:

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \ / \ |z|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))\}\,.$$

[23] Leonhard Euler (1707-1783). Uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Desarrolló inmensamente campos como la geometría analítica y trigonometría, siendo el primero que consideró el coseno y el seno como funciones. Hizo aportes significativos en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, astronomía, elasticidad y mecánica de medios continuos. https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Borrador Preliminar

Esto significa que dos números complejos z_1 y z_2 serán iguales si: $|z_1| = |z_2|$ y $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

Dado un número complejo, $z \neq 0$, existe un único argumento Θ que se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y lo representaremos por $\mathrm{Arg}(z)$, el *argumento principal* o *valor principal*, de manera que:

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2n\pi\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Otro aspecto a rescatar de la forma de Euler o exponencial, es que la ecuación:

$$z = re^{i\theta}\,, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,$$

no es más que una representación paramétrica del círculo $|z| = r$, es decir, de un círculo de radio r y centrado en el origen.
Por lo tanto, un círculo centrado en z_0 y de radio R tendrá como ecuación paramétrica:

$$|z - z_0| = R \;\Rightarrow\; z = z_0 + Re^{i\theta}\,,$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como podemos apreciar en la figura 1.11.

Figura 1.11: Representación en el plano complejo del círculo $|z - z_0| = R$.

Ejemplo 1.26 Un número complejo, digamos $z = -1 - i$ (tercer cuadrante) tendrá como valor principal:

$$\tan(\Theta) = \frac{y}{x} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}\,.$$

Nota: no debe tomarse el valor $-\frac{5\pi}{4}$, ya que $-\pi \leq \Theta \leq \pi$.

Lo que si es cierto es que:

$$\arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

◁

Es claro que las sumas de números complejos se plantean más fácilmente en su forma cartesiana. Mientras la multiplicación y división serán directas en la forma de Euler. Si $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, entonces:

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1 z_2|\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)\,. \tag{1.38}$$

Esto significa que para multiplicar dos números complejos se debe, por un lado, multiplicar sus módulos y por el otro, sumar sus argumentos. Geométricamente, al sumarse los argumentos, la multiplicación es en realidad un giro en el plano complejo por el producto de sus módulos, es decir, si multiplicamos un número por i, el resultado es un giro de un cuarto de vuelta hacia la izquierda, es por eso, que $i^2 = -1 = e^{i\pi}$.

Mientras que para la división:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\right)\,.$$

Podemos notar de esta última expresión que el inverso de un número complejo diferente se cero es:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}\,. \tag{1.39}$$

Se puede mostrar que a partir de (1.38) y de (1.39) resulta que:

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2)\,, \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2)\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Ejemplo 1.27 Vimos en el ejemplo 1.26 que para el número complejo $z = -1 - i$, resultaba que

$$\arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Si lo queremos escribir en la forma exponencial tenemos que hacer lo siguiente:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; -1 - i = \sqrt{2}e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\,.$$

Pero en realidad hay infinitas posibilidades para la forma exponencial de $z = -1 - i$:

$$-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)}\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

◁

Ejemplo 1.28 Consideremos los números $z = 2 + 2i$ y $z = -\sqrt{3} + i$ y representémoslo en la forma polar.

Para representar $z = 2 + 2i$ en la forma polar debemos calcular primeramente su módulo:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,.$$

y luego el argumento:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} \;\Rightarrow\; \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Por lo tanto, $z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(\pi/4))$, es un punto ubicado en el primer cuadrante cuyo radio vector hace un ángulo de $45°$ con respecto al eje x.

En cambio, para el número complejo $z = -\sqrt{3} + i$, resulta:

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2\,, \quad \theta = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}\,.$$

Aquí debemos tener cuidado, pues el argumento principal en realidad es:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\,.$$

$z = -\sqrt{3} + i = 2\,(\cos(5\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(5\pi/6))$, es un punto ubicado en el segundo cuadrante cuyo radio vector hace un ángulo de $150°$ con respecto al eje x.

◁

Por otro lado, notemos lo siguiente: si $z = x + iy$, entonces

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x\,(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y))\;,$$

y a partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar

$$z^n = |z|^n \left(e^{i\theta}\right)^n = |z|^n e^{in\theta} \;\Rightarrow\; |z|^n\,(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}\,(n\theta))\;,$$

con n entero. De manera que llegamos a la fórmula de De Moivre[24]

$$[\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\mathrm{sen}\,(n\theta)\;, \quad \text{con } n \text{ entero.} \tag{1.40}$$

1.6.5 Algunas aplicaciones inmediatas

Presentaremos algunas aplicaciones inmediatas la fórmula de De Moivre en diferentes ámbitos, algunas de estas aplicaciones seguramente las recordamos de nuestra educación media.

1. **Identidades trigonométricas**

   La primera de las aplicaciones de la fórmula de De Moivre es para construir identidades trigonométricas en las cuales se expresa el coseno, o el seno, de factores de un ángulo. Veamos las siguientes (nada

[24] Abraham De Moivre (1667-1754) Matemático francés que tuvo que emigrar a Inglaterra por razones religiosas. Contemporáneo de Newton, Leibniz y Halley, fue pionero con sus contribuciones en geometría analítica y teoría de probabilidades. https://es.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre

Borrador Preliminar

triviales) identidades trigonométricas:

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}(3\theta) = 3\operatorname{sen}(\theta) - 4\operatorname{sen}^3(\theta)\,.$$

Para demostrar estas (y otras) identidades utilizamos la fórmula de De Moivre, es decir:

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\operatorname{sen}(3\theta) &= [\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)]^3 \\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta) + i\left[3\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta)\right]\,.\end{aligned}$$

Igualando ahora parte real e imaginaria tendremos:

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\left[1-\cos^2(\theta)\right] = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\,, \\ \operatorname{sen}(3\theta) &= 3\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta) = 3\left[1-\operatorname{sen}^2(\theta)\right]\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta) = 3\operatorname{sen}(\theta) - 4\operatorname{sen}^3(\theta)\,.\end{aligned}$$

El método puede extenderse a expresiones de senos y cosenos de $n\theta$.

Igualmente podemos desarrollar un método para encontrar expresiones de potencias de funciones trigonométricas en término de funciones de factores de ángulo del tipo $(\cos(\theta))^n = F(\cos(n\theta), \operatorname{sen}(n\theta))$.

Para empezar, supongamos que tenemos un número complejo de módulo 1, de tal forma que

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta) \;\Rightarrow\; \begin{cases} z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta) \\[2ex] z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$

Estas identidades surgen de manera inmediata a partir de lo siguiente

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= [\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)]^n + [\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)]^{-n} \\ &= [\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)] + [\cos(-n\theta) + i\operatorname{sen}(-n\theta)] \\ &= \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta) + \cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta) = 2\cos(n\theta)\,,\end{aligned}$$

igualmente puede demostrarse la segunda de las afirmaciones anteriores.

Supongamos además que $n = 1$, con lo cual se cumple que:

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\operatorname{sen}(\theta)\,,$$

que también lo sabíamos desde la más temprana edad de nuestros cursos de bachillerato.

Ahora bien, lo que quizá no sabíamos en ese entonces (y quizá ahora tampoco) es que a partir de aquí podemos construir, expresiones como:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5}\left(z + \frac{1}{z}\right)^5 = \frac{1}{2^5}\left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + \left(5z^3 + \frac{5}{z^3}\right) + \left(10z + \frac{10}{z}\right)\right]\,,$$

es decir:

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5}\left[2\cos(5\theta) + 10\cos(3\theta) + 20\cos(\theta)\right]\,.$$

De la misma manera se puede proceder con otras potencias y con potencias de la función seno.

2. **Raíces de polinomios**

Las raíces de un número complejo se obtienen de la relación:

$$z^{1/n} = [|z|(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))]^{1/n} = |z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]\,,$$

donde $k = 0, 1, \ldots n-1$. De manera que la fórmula de De Moivre nos puede ayudar para encontrar raíces de polinomios.

Supongamos, para empezar, que queremos encontrar las n raíces de la ecuación:

$$z^n = 1\,.$$

Borrador Preliminar

Para ello procedemos con el siguiente artificio:

$$z^n = 1 = e^{i(2\pi k)} = \cos(2\pi k) + i\text{sen}(2\pi k)\ , \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, ...$$

con lo cual las n raíces de la ecuación $z^n = 1$ serán:

$$z^n = 1 = e^{i(2\pi k)} \ \Rightarrow\ z = e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}\,, \tag{1.41}$$

esto es:

$$z_0 = 1; \quad z_1 = e^{2\pi i\left(\frac{1}{n}\right)}; \quad z_2 = e^{2\pi i\left(\frac{2}{n}\right)}; \quad z_3 = e^{2\pi i\left(\frac{3}{n}\right)}; \cdots \quad z_{n-2} = e^{2\pi i\left(\frac{n-2}{n}\right)}; \quad z_{n-1} = e^{2\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)}\,,$$

es decir, n raíces corresponderán a los n valores de $k = 0, 1, 2, \cdots n-2, n-1$. Mayores valores de k no proveen nuevas raíces.

Las raíces de la ecuación $z^3 = 1$ serán entonces:

$$z = e^{i\left(\frac{2\pi k}{3}\right)} \ \Rightarrow\ z_0 = 1\,,\ z_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\,,\ z_2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}\,.$$

Como veremos más adelante, estas propiedades pueden extenderse a raíces de polinomios que contengan más términos.

Una afirmación que nos han dicho, y que quizá no sepamos de dónde viene, es que *si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces complejas, ellas serán complejas conjugadas unas de otras*. Vale decir, si $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$ tiene como raíz $(1 + i)$, también tendrá como raíz $(1 - i)$.

Esta afirmación se prueba de forma general si suponemos que tenemos la siguiente ecuación:

$$a_k\, z^k = 0\,, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \cdots n-1, n \ \Rightarrow\ a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 \cdots + a_{n-1}\, z^{n-1} + a_n\, z^n = 0\,,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ los suponemos reales, esto es: $a_k = a_k^*$ para todos los valores del índice k.

Al tomar el complejo conjugado nos queda:

$$a_0^* + a_1^*\, z^* + a_2^*\,(z^*)^2 \cdots + a_{n-1}^*\,(z^*)^{n-1} + a_n^*\,(z^*)^n = 0\,,$$

y como los coeficientes son reales tenemos que:

$$a_0 + a_1 z^* + a_2\,(z^*)^2 \cdots + a_{n-1}\,(z^*)^{n-1} + a_n\,(z^*)^n = 0\,,$$

esto nos dice que si z es solución también lo será z^* ya que la ecuación es la misma por tener los mismos coeficientes (reales).

Ejemplo 1.29 Supongamos la siguiente ecuación polinómica con sus raíces:

$$z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0 \ \Rightarrow\ \left(z^4 + 2\right)(z - 1) = 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} z^4 + 2 = 0 \ \Rightarrow\ z^4 = -2 \\ \\ z - 1 = 0 \ \Rightarrow\ z = 1 \end{cases}$$

De la ecuación (1.41) podemos ver que:

$$z^4 = -2(1) = -2\left(e^{i(2\pi k)}\right) \ \Rightarrow\ z = \left[-2\left(e^{i(2\pi k)}\right)\right]^{1/4} = (-2)^{1/4} e^{i\left(\frac{2\pi k}{4}\right)} = \frac{2^{3/4}}{2}\,(1 + i)\, e^{i\left(\frac{2\pi k}{4}\right)}\,,$$

donde hemos utilizado el hecho de que: $(-1)^{1/4} = i^{1/2} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\,.$

Borrador Preliminar

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2^{1/4}}\,(1+i) \\ z_1 &= \frac{1}{2^{1/4}}\,(1+i)\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{i}{2^{1/4}}\,(1+i) \\ z_2 &= \frac{1}{2^{1/4}}\,(1+i)\,e^{i(\pi)} = -\frac{1}{2^{1/4}}\,(1+i) \\ z_3 &= \frac{1}{2^{1/4}}\,(1+i)\,e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -\frac{i}{2^{1/4}}\,(1+i)\,. \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$, tendrá las siguientes cinco raíces:

$$z_0 = \frac{1}{2^{1/4}}\,(1+i)\,, \quad z_1 = -\frac{1}{2^{1/4}}\,(1-i)\,, \quad z_2 = -\frac{1}{2^{1/4}}\,(1+i)\,, \quad z_3 = \frac{1}{2^{1/4}}\,(1-i)\,, \quad z_4 = 1\,.$$

◁

Ejemplo 1.30 Ahora consideremos el siguiente polinomio complejo:

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0\,.$$

Encontremos sus raíces.

Sí por algún método comprobamos que $(z^3 - 2)$ es uno de sus factores, entonces podremos encontrar las raíces del polinomio $P(z)$.

Veamos, claramente si $(z^3 - 2)$ es un factor, entonces podemos expresar:

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = (z^3 - 2)(z^3 - z^2 + 4z - 4) = (z^3 - 2)(z - 1)(z^2 + 4)\,,$$

con lo cual, como z es complejo, hay que tener cuidado con las raíces encubiertas. Entonces, la raíces son:

$$z^3 = 2\,, \quad z = 1\,, \quad z^2 = -4\,.$$

- Para $z^2 = -4 \;\Rightarrow\; z = \pm 2i\,.$
- Para $z^3 = 2 \;\Rightarrow\; z^3 = 2\left(e^{i(2\pi k)}\right) \;\Rightarrow\; z = \left[2\left(e^{i(2\pi k)}\right)\right]^{1/3} = 2^{1/3}e^{i\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}.$

  Por lo tanto:

$$z_0 = 2^{1/3}\,, \quad z_1 = 2^{1/3}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{2^{1/3}}{2}\left[1 - \sqrt{3}i\right]\,, \quad z_2 = 2^{1/3}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = -\frac{2^{1/3}}{2}\left[1 + \sqrt{3}i\right]\,.$$

La ecuación: $z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$, tendrá las siguientes seis raíces:

$$z = \sqrt[3]{2}\,, \quad z = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left[1 \pm \sqrt{3}\,i\right]\,, \quad z = 1\,, \quad z = \pm 2i\,.$$

◁

1.6.5.1 Logaritmos y potencias de números complejos

La motivación surge cuando queremos resolver la ecuación:

$$e^w = z = re^{i\Theta}\,, \quad \text{con} \quad w, z \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad -\pi < \Theta < \pi\,. \tag{1.42}$$

Notemos que al despejar w en realidad lo que tenemos es la función logarítmica, que como veremos en su debido tiempo puede escribirse de la forma $w = u + iv$. Por lo tanto:

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i\Theta} \;\Rightarrow\; e^u = r \;\wedge\; v = \Theta + 2\pi n\,.$$

donde n es un entero. Por lo tanto, es claro que:

$$e^u = r \;\Rightarrow\; u = \ln(r)\,,$$

y que la ecuación (1.42) se satisface si y sólo si:

$$w = \ln(r) + i\,(\Theta + 2\pi n)\,, \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Borrador Preliminar

Por lo tanto, si definimos la función multivaluada:

$$\mathrm{Log}(z) \equiv \ln|r| + i\,(\Theta + 2\pi n)\ , \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{1.43}$$

podemos escribir la relación:

$$e^{\mathrm{Log}(z)} = z \quad \text{con} \quad z \neq 0\,.$$

Llamaremos *valor principal* de $\mathrm{Log}(z)$ al valor que se obtiene cuando $n = 0$ en la ecuación (1.43) y lo denotaremos con $\mathrm{Ln}(z)$.

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln|r| + i\Theta\,. \tag{1.44}$$

Notemos que ésta es una función univaluada cuando $z \neq 0$, y además, si combinamos (1.43) y (1.44) obtenemos:

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Ln}(z) + i\,2\pi n\,, \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Podemos ver que cuando z es un número real positivo, es decir, $z = re^{i0}$, entonces recobramos la función logarítmica usual:

$$\mathrm{Ln}(z) = \mathrm{Ln}(r) = \ln(r)\,.$$

En consecuencia, podemos ver que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(1) &= \ln(1) + i\,(0 + 2\pi n) \quad \wedge \quad \mathrm{Ln}(1) = 0 \\ \mathrm{Log}(-1) &= \ln(1) + i\,(\pi + 2\pi n) \quad \wedge \quad \mathrm{Ln}(-1) = i\pi \end{aligned}$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Por otro lado, podemos ver también:

$$\begin{aligned} \ln(z^n) &= \ln\left[\{|z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))\}^n\right] = n\ln\left[|z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))\right] = n\ln\left[|z|\,e^{i\theta}\right] \\ &= n\ln(|z|) + n(\theta + 2k\pi)i = n\ln(|z|) + (n\theta)i + (2nk\pi)i\,, \quad \text{con } k \text{ entero}\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.31 Consideremos algunos ejemplos puntuales:

1. $z = \mathrm{Log}\,(-3i)$

$$\mathrm{Log}\,(-3i) = \mathrm{Log}\left[3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right] = \ln(3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots$$

   Decimos que el valor principal de $\mathrm{Log}\,(-3i)$ será $\mathrm{Ln} = \ln(3) - i\frac{\pi}{2}$.

2. $z = i^{-5i}$

$$i^{-5i} \Rightarrow \mathrm{Log}\,(z) = \mathrm{Log}\left(i^{-5i}\right) = -5i\mathrm{Log}\,(i) = -5i\mathrm{Log}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right] = 5\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

   Con lo cual $z = i^{-5i}$ ¡es un número real!

3. $z = i^i$

$$i^i = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^i = e^{i^2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\,.$$

4. $z = \mathrm{Log}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\left[\left(\sqrt{3} + i\right)^3\right] &= 3\mathrm{Log}\left[2e^{i\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}\right] = 3\left[\ln(2) + i\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2n\pi\right)\right] \\ &= \ln(8) + i\left(\frac{\pi}{2} + 6n\pi\right)\,. \end{aligned}$$

◁

Borrador Preliminar

1.6.6 Ejercicios

1. Si los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se pueden representar como vectores en el plano $\mathbf{z}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{z}_2 = x_2\hat{\mathbf{i}} + y_2\hat{\mathbf{j}}$, muestre que:
$$z_1^* z_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + i\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2)\,.$$
2. Demuestre:
   (a). $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\text{sen}^2(\alpha)\,.$
   (b). $\text{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\text{sen}(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha)\,.$
3. Demuestre:
   (a). $\cos^4(\alpha) = \frac{1}{8}\left(3 + 4\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha)\right)\,.$
   (b). $\cos^3(\alpha) + \text{sen}^3(\alpha) = \frac{1}{4}\left(\cos(3\alpha) + 3\cos(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha) + 3\text{sen}(\alpha)\right)\,.$
4. Demuestre:
$$\left(\frac{ix-1}{ix+1}\right)^{iy} = e^{(-2y\cot^{-1}(x))}\,,$$
donde x y y son números reales.
5. Encuentre las raíces de:
$$a)\quad (2i)^{1/2} \qquad b)\quad \left(1-\sqrt{3}i\right)^{1/2} \qquad c)\quad (-1)^{1/3} \qquad d)\quad 8^{1/6} \qquad e)\quad (-8-8\sqrt{3}i)^{1/4}\,.$$
6. Demuestre que:
   (a). $\text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i\,.$
   (b). $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}i\,.$
   (c). $\text{Log}(e) = 1 + 2n\pi i\,.$
   (d). $\text{Log}(i) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i\,.$
7. Dos funciones complejas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ cumplen con las siguientes ecuaciones:
$$\frac{\mathrm{d}f_1^*}{\mathrm{d}t} = \frac{-i}{f_1 - f_2} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}f_2^*}{\mathrm{d}t} = \frac{-i}{f_2 - f_1}$$
Muestre que las siguientes cantidades son constantes:
   (a). $f_1 + f_2$
   (b). $|f_1 - f_2|$
   (c). $|f_1|^2 + |f_2|^2$
8. Considere la siguiente ecuación:
$$z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = 0\,.$$
Encuentre sus raíces sabiendo que $z^3 = 2$.
9. Muestre que la expansión binomial puede ser escrita como:
$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} A_m(n)\, x^m\,, \quad \text{con} \quad A_m(n) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,.$$
Si está convencido de la expansión anterior, considere ahora una parecida: $\left(1 + e^{i\theta}\right)^n$ y muestre que:
$$\sum_{m=0}^{n} A_m(n)\ \cos(n\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\,,$$
y
$$\sum_{m=0}^{n} A_m(n)\ \text{sen}(n\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{n\theta}{2}\right)\,.$$

Borrador Preliminar

10. Las funciones hiperbólicas se definen como:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

y de manera análoga a las funciones trigonométricas tendremos el resto de funciones:

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}; \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}; \quad \operatorname{csech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}; \quad \operatorname{ctanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)};$$

(a). Muestre las siguientes equivalencias:

$$\cosh(x) = \cos(ix), \quad i\operatorname{senh}(x) = \operatorname{sen}(ix), \quad \cos(x) = \cosh(ix) \quad \text{y} \quad i\operatorname{sen}(x) = \operatorname{senh}(x).$$

(b). Muestre las siguientes identidades:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1; \quad \operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x); \quad \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x).$$

(c). Resuelva las siguientes ecuaciones hiperbólicas:

$$\cosh(x) - 5\operatorname{senh}(x) - 5 = 0, \quad 2\cosh(4x) - 8\cosh(2x) + 5 = 0 \quad \text{y} \quad \cosh(x) = \operatorname{senh}(x) + 2\operatorname{sech}(x).$$

11. Utilizando un programa de manipulación simbólica (ver Apéndice A.1) realice las siguientes tareas.

(a). Calcule la función $f(z) = e^z$ a partir de su expansión en serie que la define. Calcule también $f(z)$ cuando $z = e^{\frac{in\pi}{6}}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Para los diferentes valores de n haga una tabla con los valores de: $\theta = \frac{n\pi}{6}$, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(e^z)$, $\operatorname{Im}(e^z)$, $|z|$ y la fase de e^z.

(b). Calcule y haga una tabla para los valores de $(x; y) = (0,0; 0,0)(0,1; 0,1)(0,5; 0,5)(1,0; 1,0)$ de: $\operatorname{Re}(\operatorname{senh}(z))$, $\operatorname{Im}(\operatorname{senh}(z))$, $|\operatorname{senh}(z)|$ y la fase de $\operatorname{senh}(z)$.

(c). Calcule y haga una tabla para los valores de $(x; y) = (0,0; 0,0)(0,1; 0,1)(0,5; 0,5)(1,0; 1,0)$ de: $\operatorname{Re}(\cosh(z))$, $\operatorname{Im}(\cosh(z))$, $|\cosh(z)|$ y la fase de $\cosh(z)$.

Practicando con Maxima

Maxima maneja números complejos escritos en la forma: $a+bi$. Donde la unidad imaginaria es interpretada por el programa como $i = \%i$. Si no queremos que las salidas del programa mantenga la notación del $\%i$ podemos is a la parte superior de la ventana del programa y hacer click en:

```
wxMaxima > Preferencias > Worksheet
y desactivar el botón que dice
[] Mantener signo porcentual en símbolos especiales: \%e, \%i, etc.
```

1. Algunos cálculos básicos.

Los números imaginarios aparecen si queremos calcular la raíz cuadrada de un número negativo, por ejemplo, $\sqrt{-7}$

```
(%i1) sqrt(-7);
```

(%o1) $\sqrt{7}\,i$

El programa nos permite desarrollar toda el álgebra en variable compleja. Si queremos sumar $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 + 4i$, escribimos:

```
(%i2) z1:1+2* %i; z2:3+4* %i;
```

(%o2) $2\,i + 1$

(%o3) $4\,i + 3$

```
(%i4) z1+z2;
```

(%o4) $6\,i + 4$

La multiplicación:

Borrador Preliminar

(%i5) z1*z2,expand;
(%o5) $10\,i-5$

Y la división:

(%i6) z1/z2;
(%o6) $\dfrac{2\,i+1}{4\,i+3}$

(%i7) rectform(%);
(%o7) $\dfrac{2\,i}{25}+\dfrac{11}{25}$

Este último comando pertenece a una lista de funciones de **Maxima** para el cálculo de números complejos:

- rectform(expresión) expresión en forma cartesiana o binómica
- realpart(expresión) parte real de expresión
- imagpart(expresión) parte imaginaria de expresión
- polarform(expresión) forma polar de expresión
- abs(expresión) módulo o valor absoluto de expresión
- cabs(expresión) módulo de expresión compleja
- carg(expresión) argumento de expresión
- conjugate(expresión) conjugado de expresión
- demoivre(expresión) expresa el número complejo utilizando senos y cosenos
- exponentialize(expresión) expresa el número complejo utilizando exponenciales

Veamos como funcionan algunas de estos comandos:

(%i8) realpart(z1); imagpart(z1);
(%o8) 1
(%o9) 2

(%i10) abs(z1);
(%o10) $\sqrt{5}$

(%i11) polarform(z1);
(%o11) $\sqrt{5}\,e^{i\,\arctan(2)}$

(%i12) cabs(z1);carg(z1);
(%o12) $\sqrt{5}$
(%o13) $\arctan(2)$

(%i14) conjugate(z1);
(%o14) $1-2\,i$

2. Para una función, digamos $\tan(x+iy)$, la podemos escribir como exponenciales o funciones senos y cosenos.

(%i15) tan(x+%i*y);
(%o15) $\tan\left(i\,y+x\right)$

(%i16) exponentialize(%),factor;
(%o16) $\dfrac{i\,\left(e^{y}-e^{i\,x}\right)\,\left(e^{y}+e^{i\,x}\right)}{e^{2\,y}+e^{2\,i\,x}}$

Borrador Preliminar

(%i17) demoivre(%),factor;

(%o17) $\dfrac{i\,(e^{y}-i\,\sin(x)-\cos(x))\,(e^{y}+i\,\sin(x)+\cos(x))}{e^{2\,y}+i\,\sin(2\,x)+\cos(2\,x)}$

(%i18) log(3+%i*2);

(%o18) $\log(2\,i+3)$

(%i19) cabs(%);

(%o19) $\sqrt{\dfrac{\log^2 13}{4}+\arctan^2\left(\dfrac{2}{3}\right)}$

(%i20) float(%);

(%o20) 1.410846683153171

3. Tomemos dos números complejos, o vectores del plano complejo:

(%i21) z:a+b* %i; w:c+d* %i;

(%o21) $i\,b+a$

(%o22) $i\,d+c$

Revisemos la llamada igualdad del paralelogramo: la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados de un paralelogramo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales de éste. Es decir:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)\,.$$

Pero sabemos que $|z|^2=zz^*$, y por lo tanto:

$$(w+z)(w+z)^*+(w-z)(w-z)^*=2\left(|z|^2+|w|^2\right)\,.$$

Calculemos el lado izquierdo de la ecuación anterior:

(%i23) (w+z)*conjugate(w+z)+(w-z)*conjugate(w-z),expand;

(%o23) $2\,d^2+2\,c^2+2\,b^2+2\,a^2$

Ahora el lado derecho, es decir, la suma de las longitudes al cuadrado de los cuatro lados:

(%i24) 2*cabs(z)^ 2+2*cabs(w)^ 2,expand;

(%o24) $2\,d^2+2\,c^2+2\,b^2+2\,a^2$

4. Para encontrar las raíces de un número complejo, debemos declarar a la variable como compleja.

(%i25) declare(z,complex)$

De manera que si queremos encontrar las raíces de $z^3=1$

(%i26) ec1:z^ 3=1;

(%o26) $z^3=1$

(%i27) solve(ec1,z);

(%o27) $\left[z=\dfrac{\sqrt{3}\,i-1}{2},z=-\dfrac{\sqrt{3}\,i+1}{2},z=1\right]$

5. En otro de los ejemplo que discutimos anteriormente teníamos la ecuación:

$$z^6-z^5+4z^4-6z^3+2z^2-8z+8=0\,,$$

por lo tanto:

Borrador Preliminar

(%i28) ec2:z^ 6-z^ 5+4*z^ 4-6*z^ 3+2*z^ 2-8*z+8=0;

(%o28) $z^6 - z^5 + 4\,z^4 - 6\,z^3 + 2\,z^2 - 8\,z + 8 = 0$

(%i29) factor(ec2);

(%o29) $(z-1)\,\left(z^2+4\right)\,\left(z^3-2\right) = 0$

(%i30) solve(ec2,z),factor;

(%o30) $\left[z = \frac{\sqrt{3}\,i - 1}{2^{\frac{2}{3}}}, z = -\frac{\sqrt{3}\,i + 1}{2^{\frac{2}{3}}}, z = 2^{\frac{1}{3}}, z = 1, z = -2\,i, z = 2\,i\right]$

Borrador Preliminar

Bibliografía

[1] Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2011). **Mathematical methods for physicists**. Academic press.

[2] Riley, K. F., Hobson, M. P., & Bence, S. J. (2006). **Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide.** Cambridge University Press.

[3] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores**. Editorial Universitaria, Buenos Aires).

[4] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaums Outline Series, McGraw Hill New York*).

[5] Brown, J. W., Churchill, R. V. (2004) **Complex Variables and Applications** (*McGraw Hill*).

Borrador Preliminar

Capítulo 2

Espacios vectoriales lineales

La ruta de este capítulo

Este es el capítulo central de esta obra, en el cual discutiremos los conceptos fundamentales sobre espacios vectoriales abstractos, sus propiedades y sus múltiples expresiones: vectores de $\mathbb{R}^n$, matrices, polinomios, funciones continuas (entre otras). Además, introduciremos la notación de *bra* y *ket* que facilita mucho la organización de los conceptos y, que nos acompañará por el resto de este libro. Haremos una constante referencia a los conceptos que fueron discutidos en el capítulo anterior en el marco de los vectores en $\mathbb{R}^3$. Como en el capítulo 1, cada una de las secciones presenta ejemplos con la utilización de la herramienta de cómputo algebraico **Maxima**, que consideramos parte fundamental de estas notas y nos permite mostrar el alcance de los conceptos abstractos.

Para empezar, en la próxima sección, iniciamos con una discusión somera sobre grupos y sus propiedades. Seguimos con la sección 2.1.3, en la cúal presentamos el concepto de espacio vectorial lineal para describir varios de sus escenarios que usualmente se presentan desconectados. Hacemos un esfuerzo por ilustrar, bajo un mismo enfoque, su aplicación desde $\mathbb{R}^n$ hasta los espacios vectoriales de funciones continuas $\mathcal{C}_{[a,b]}$. Luego, en la sección 2.2.3.1, abordamos los conceptos de distancia (métrica), norma y, finalmente el de producto interno. Esta última definición nos permite equipar los espacios vectoriales, no solo con norma y distancia, sino también dotarlos de geometría, definiendo ángulos entre vectores abstractos. Nos detenemos un momento para discutir el significado de ángulo entre vectores pertenecientes a espacios vectoriales reales y complejos. En la sección 2.3 mostramos el concepto de variedades lineales, discutimos el criterio de independencia lineal y, a partir de éste definimos las bases para los espacios vectoriales. Apoyándonos en el criterio de ortogonalidad construimos bases ortogonales para varios espacios vectoriales, discutimos los subespacios vectoriales ortogonales y las proyecciones ortogonales. El capítulo lo finalizamos mostrando la utilidad de expresar funciones como combinación lineal de vectores ortogonales y, cómo este tipo de expansiones constituye la mejor aproximación a la función.

2.1 Grupos, campos y espacios vectoriales

En los cursos básicos de matemáticas nos enseñaron el concepto de conjunto: una colección de elementos de una misma naturaleza, y aprendimos una variedad de operaciones aplicadas a los elementos que conforman los conjuntos y a los conjuntos mismos. Es probable que en esos tiempos nos quedara la sensación de la poca

Borrador Preliminar

utilidad de todos esos conceptos de la teoría de conjuntos, pero como veremos en esta sección, la noción de conjuntos es fundamental para desarrollar todas las ideas que conforman lo que se conoce como el *álgebra abstracta*. En el estudio de las estructuras algebraicas se incluyen las teorías sobre: grupos, anillos, campos, espacios vectoriales, redes, álgebras; que merecen ahora nuestra atención. Comenzaremos con la estructura de grupo, y nos daremos cuenta de que una buena cantidad de objetos matemáticos, en apariencia muy diferentes, tienen incorporadas la estructura de grupo. La noción de grupo no llevará entonces al importante concepto de espacios vectoriales abstractos que discutiremos en la sección 2.1.3 y a la definición de los espacios métricos, sección 2.2.1.

2.1.1 Grupos

Considere el siguiente conjunto no vacio $\boldsymbol{G} = \{g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n, \cdots\}$ y la operación interna $\square$ (la ley del grupo). Entonces los elementos del conjunto forman un grupo respecto a la operación $\square$ si $\forall\, g_i \in \boldsymbol{G}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. Cerrada respecto a la operación $\square$: $\{g_i \in \boldsymbol{G}, g_j \in \boldsymbol{G}\} \;\Rightarrow\; \exists\, g_k = g_i \,\square\, g_j \in \boldsymbol{G}$.
2. Asociativa respecto a la operación $\square$: $g_k \,\square\, (g_i \,\square\, g_j) = (g_k \,\square\, g_i) \,\square\, g_j$.
3. Existencia de un elemento neutro: $\exists\; \hat{\mathrm{g}} \in \boldsymbol{G} \;\Rightarrow\; g_i \,\square\, \hat{\mathrm{g}} = g_i = \hat{\mathrm{g}} \,\square\, g_i$.
4. Existencia de un elemento inverso: $g_i \in \boldsymbol{G} \;\Rightarrow\; \exists\, g_i^{-1} \in \boldsymbol{G} \;\Rightarrow\; g_i \,\square\, g_i^{-1} = g_i^{-1} \,\square\, g_i = \hat{\mathrm{g}}$.

   Si adicionalmente se cumple que:
5. Conmutativa respecto a la operación $\square$: $g_i \,\square\, g_j \equiv g_j \,\square\, g_i$; el grupo se denomina *grupo abeliano*[1]

   Suele denotarse al grupo $\boldsymbol{G}$ como $(\boldsymbol{G}, \square)$ para indicar el tipo de operación.

2.1.1.1 Algunos grupos:

- Los enteros $\mathbb{Z} = \{\cdots - 3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ respecto a la suma.
- Los racionales $\mathbb{Q} = \{a/b\}$ respecto a la suma y a la multiplicación.
- Los números complejos $\mathbb{C} = \{e^{i\theta}\}$ respecto a la multiplicación.
- Las rotaciones en 2 dimensiones (2D), y las rotaciones en 3D (grupo no-abeliano).
- Las matrices de dimensión $n \times m$ respecto a la suma (grupo abeliano).

Consideremos el siguiente grupo de tres elementos: $\boldsymbol{G} = \{\mathbf{1}, a, b\}$, con $\hat{\mathrm{g}} \equiv \mathbf{1}$ y la operación $\square$. Por construcción, si queremos que la operación de dos de los elementos provea un tercero distinto, entonces la ÚNICA "tabla de multiplicación" posible será:

$\square$	$\mathbf{1}$	a	b
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	a	b
a	a	b	$\mathbf{1}$
b	b	$\mathbf{1}$	a

Notemos que el grupo más simple será aquel conformado únicamente por el elemento neutro: $\boldsymbol{G} = \{\mathbf{1}\}$ y, como veremos más adelante, se puede definir subgrupos si un subconjunto de los elementos de un grupo $g_i \in \boldsymbol{G}$ también forman un grupo.

Podemos resumir, sin demostración, las principales propiedades que presenta un grupo $(\boldsymbol{G}, \square)$.

1. El elemento identidad o neutro es único.

[1]Niels Henrik Abe (1802-1829) Pionero en el desarrollo de diferentes ramas de la matemática moderna, la teoría de las integrales de funciones algebraicas. https://es.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Borrador Preliminar

2. Para todo $g \in \boldsymbol{G}$ existe un inverso único $g^{-1} \in \boldsymbol{G}$.
3. Para todo elemento $g \in \boldsymbol{G}$ se cumple que: $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$.
4. Para cualesquiera g_1 y $g_2 \in \boldsymbol{G}$, se cumple que: $(g_1 \square g_2)^{-1} = g_1^{-1} \square g_2^{-1}$.

El número de los elementos de un grupo puede ser finito o infinito. En el primer caso se denominan *grupos finitos* y el número de elementos que contenga, el cardinal del conjunto, se conoce como el *orden del grupo*. Un grupo finito que se construye a partir de una operación con un único miembro se denomina *grupo cíclico*, y el caso más elemental es $\boldsymbol{G} = \left\{\mathbf{1}, g, g^2, g^3, \cdots, g^{n-1}\right\}$. Obviamente hemos definido aquí: $g^2 = g \square g$ y $g^3 = g^2 \square g = g \square g \square g$ y así consecutivamente hasta ejecutarse $n-1$ veces, entonces se retoma el elemento identidad, esto es: $g^{n-1} \square\, g = g^n = \mathbf{1}$.

2.1.1.2 Subgrupos

Dado un grupo $(\boldsymbol{G}, \square)$ y $\boldsymbol{H}$ un subconjunto de $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$. Si $\boldsymbol{H}$ es un grupo bajo la operación $\square$, definida para $\boldsymbol{G}$, entonces diremos que $\boldsymbol{H}$ es un subgrupo. De manera equivalente: si $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{G}$ entonces $\boldsymbol{H}$ es un subgrupo si para cualesquiera h_1 y $h_2 \in \boldsymbol{H}$ se cumple:

1. $h_1 \square h_2 \in \boldsymbol{H}$.
2. $h^{-1} \in \boldsymbol{H}\ \forall\ h \in \boldsymbol{H}$.

Es decir, $\mathbf{1} \in \boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{H}$ es cerrado para la misma operación que define $\boldsymbol{G}$ y para sus inversos.

Existe una condición necesaria para que un subconjunto de un grupo finito $\boldsymbol{G}$ sea un subgrupo, esta condición se conoce como el teorema de Lagrange, que dice lo siguiente:

Teorema 2.1 (Teorema de Lagrange)

Si $(\boldsymbol{G}, \square)$ es un grupo finito y $\boldsymbol{H}$ un subgrupo de $\boldsymbol{G}$, entonces el orden de $\boldsymbol{H}$ divide al orden de $\boldsymbol{G}$.

Por otro lado, sea $(\boldsymbol{G}, \square)$ un grupo y $g \in \boldsymbol{G}$, se puede demostrar que el conjunto $\boldsymbol{H} = \{g^n\}$, con n perteneciente al conjunto de los números enteros, es un subgrupo de $\boldsymbol{G}$. Con la propiedad adicional de que $\boldsymbol{H}$ es el subgrupo, que contiene a g, más pequeño de $\boldsymbol{G}$.

Como mencionamos con anterioridad, un grupo finito que se construye a partir de operar con un único miembro se le denomina *grupo cíclico*, en este caso de dice que $\boldsymbol{H}$ es un subgrupo cíclico generado por g. A este elemento se le llama el generador de $\boldsymbol{H}$ y se acostumbra a denotarlo con $\boldsymbol{H} =< g >$.

Para finalizar, definiremos el *orden de un elemento* de un grupo. Sea un elemento $g \in \boldsymbol{G}$, el orden de g es el menor entro positivo n tal que: $g^n = \mathbf{1}$. Cuando este entero positivo no existe se dice que g tiene un orden infinito.

Ejemplo 2.1 El conjunto de la rotaciones del espacio ordinario cuando rotamos un ángulo ϕ alrededor del eje z, ecuación (1.13), forman un grupo.

Denominaremos a este grupo por $\mathbf{R}_{z\phi} = \{\mathcal{G}_{\phi_i}\}$, con $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Donde con $\mathcal{G}_\phi$ esteremos indicando un giro alrededor del eje z y la operación que nos define las rotaciones la definiremos de la siguiente forma:

$$\mathcal{G}_{\phi_1} \square\ \mathcal{G}_{\phi_2} = \mathcal{G}_{\phi_1+\phi_2}\,.$$

Entonces podemos ver que:

1. $\square$ es una operación cerrada ya que dos rotaciones resulta en otro rotación:

$$\mathcal{G}_{\phi_1} \square\, \mathcal{G}_{\phi_2} = \mathcal{G}_{\phi_1+\phi_2} = \mathcal{G}_{\phi_3} \in \mathbf{R}_{z\phi}\,.$$

2. $\square$ es asociativa:

$$\left(\mathcal{G}_{\phi_1} \square\, \mathcal{G}_{\phi_2}\right) \square\, \mathcal{G}_{\phi_3} = \mathcal{G}_{\phi_1} \square\, \left(\mathcal{G}_{\phi_2} \square\, \mathcal{G}_{\phi_3}\right)\,.$$

Borrador Preliminar

3. Existe el elemento neutro, $\mathcal{G}_{\phi_0}$, que no hace ninguna rotación:
$$\mathcal{G}_{\phi_1} \,\square\, \mathcal{G}_{\phi_0} = \mathcal{G}_{\phi_0} \,\square\, \mathcal{G}_{\phi_1} = \mathcal{G}_{\phi_1}\,.$$
4. Existe el elemento inverso, $\mathcal{G}_{\phi_-}$, ya que podemos rotar en un sentido y en sentido inverso:
$$\mathcal{G}_{\phi_1} \,\square\, \mathcal{G}_{\phi_{-1}} = \mathcal{G}_{\phi_{-1}} \,\square\, \mathcal{G}_{\phi_1} = \mathcal{G}_{\phi_0}\,.$$
5. Es conmutativa ya que las rotaciones no se afectan por el orden en que son producidas:
$$\mathcal{G}_{\phi_1} \,\square\, \mathcal{G}_{\phi_2} = \mathcal{G}_{\phi_2} \,\square\, G_{\phi_1}\,.$$

◁

Ejemplo 2.2 Consideremos el grupo $\boldsymbol{G} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, es decir, el conjunto de duplas (x_i, y_i) de números enteros, y la operación:
$$(x_1, y_1)\square(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,.$$
Aquí el símbolo $+$ es la suma convencional de números enteros.

Probemos que tenemos un grupo.

1. La operación $\square$ es cerrada para la suma:
$$(x_1, y_1)\square(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3) \in \boldsymbol{G}\,.$$
2. La operación $\square$ es asociativa:
$$\begin{aligned}((x_1, y_1)\square(x_2, y_2))\,\square(x_3, y_3) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\square(x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)\\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = (x_1, y_1)\square\,((x_2, y_2)\square(x_3, y_3))\,.\end{aligned}$$
3. Existe el elemento neutro, $(0, 0)$:
$$(x_1, y_1)\square(0, 0) = (0, 0)\,\square(x_1, y_1) = (x_1, y_1)\,.$$
4. Existe el elemento inverso, $(-x_1, -y_1)$:
$$(x_1, y_1)\square(-x_1, -y_1) = (-x_1, -y_1)\square(x_1, y_1) = (0, 0)\,.$$
5. La operación $\square$ es conmutativa:
$$(x_1, y_1)\square(x_2, y_2) = (x_2, y_2)\square(x_1, y_1)\,.$$

◁

Ejemplo 2.3 Consideremos el conjunto de las permutaciones de 3 objetos, cuyos elementos pueden ser representados como se muestra a continuación:
$$\mathbb{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};\ \mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix};\ \mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$
$$\mathbb{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ \mathbb{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};\ \mathbb{P}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$
y la operación de composición de permutaciones:
$$\mathbb{P}_1 \bigodot \mathbb{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \bigodot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{P}_4,$$
es decir, luego de intercambiar las primera y segunda posición, intercambio la segunda y la tercera. La tabla de multiplicación del grupo quedará:

Borrador Preliminar

$\odot$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_5$
$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_2$
$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3$
$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_1$
$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_4$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_0$
$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_5$	$\mathbb{P}_3$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_4$

Ver el ejercicio 3 de 2.1.6.

◁

2.1.1.3 Grupos Isomorfos

Muchas veces podemos comparar la estructura entre grupos buscando relaciones entre ellos, esto lo podemos hacer estudiando, por ejemplo, cómo "se multiplican". La búsqueda de estas relaciones no llevan al concepto de *isomorfismo* de grupos. Podemos decir que dos grupos son isomorfos porque tienen aspectos en común dentro de sus estructuras algebraicas, es decir, tienen las mismas propiedades. De esta manera, los isomorfismo permiten clasificar los grupos por sus relaciones de equivalencia.

A continuación, veremos algunos ejemplos de grupos y sus tablas de "multiplicación".

Ejemplo 2.4 Consideremos el siguiente conjunto y una operación que define la "multiplicación"[2] módulo $\times$, es decir, $(a \cdot b)_{\text{mod}\times}$

1. $\boldsymbol{G}_{\text{mod}8} = \{1, 3, 5, 7\}$. Tenemos la operación multiplicación módulo 8 y la tabla de multiplicación del grupo es

$\times$mod8	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

   Pare entender como funciona la tabla anterior, recordemos la regla que estamos utilizando. Por ejemplo, para los elementos 3 y 7, tenemos lo siguiente: $3 \cdot 7 = 21$ y el residuo de dividir 21 entre 8 es 5, por lo tanto

$$(3 \cdot 7)_{\text{mod}8} = (21)_{\text{mod}8} = 5 \;\Leftarrow\; 21 \div 8 = 2 \times 8 + \mathbf{5}\,.$$

   y se denota: 21 mod $8 = \mathbf{5}$.

2. $\boldsymbol{G}_{\text{mod}24} = \{1, 5, 7, 11\}$, con la operación multiplicación módulo 24:

[2] Vamos a considerar lo que se conoce como *Arimética Modular*. Sabemos que para la división de dos enteros a y b ($b \neq 0$) existe un único entero c tal que $a = cb + r$ con $0 \leq r \leq |b|$. Y como es conocido: a, b, c y r son: el dividendo, el divisor, el cociente y el resto, respectivamente. Cuando $r = 0$ se dice que a es divisible por b. En esta "arimética" tan particular se establece una relación de congruencia sobre los enteros: para un entero positivo n, dos enteros a y b se llaman congruentes módulo n (mod n) si a y b tienen el mismos resto r cuando se dividen entre n, y se denota $a \equiv b$ mod n.

Borrador Preliminar

$\times$mod24	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Diremos que los grupos $\boldsymbol{G}_{\text{mod8}}$ y $\boldsymbol{G}_{\text{mod24}}$ son *isomorfos* porque tienen tablas equivalentes de multiplicación. Esto es, dado un grupo genérico $\boldsymbol{G} = \{1, A, B, C\}$ o de manera equivalente $\{1, \bigcirc, \square, \triangle\}$ sus tablas de multiplicación serán las que se muestran a continuación:

$\times$	1	A	B	C
1	1	A	B	C
A	A	1	C	B
B	B	C	1	A
C	C	B	A	1

$\Leftrightarrow$

$\times$	1	$\bigcirc$	$\square$	$\triangle$
1	1	$\bigcirc$	$\square$	$\triangle$
$\bigcirc$	$\bigcirc$	1	$\triangle$	$\square$
$\square$	$\square$	$\triangle$	1	$\bigcirc$
$\triangle$	$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$	1

Note que $A^{-1} = A$, de la misma manera $\triangle = \triangle^{-1}$, es decir, que siempre la operación de dos elementos da uno distinto a los operados. Esto último también se puede representar de la manera siguiente: $A \times A^{-1} = 1$, es decir, el resultado es el elemento neutro del grupo. Tenemos entonces una operación sobre los elementos del grupo que es biyectiva.

$\triangleleft$

Consideremos ahora el siguiente ejemplo con otros dos grupos isomorfos

Ejemplo 2.5

1. $\boldsymbol{G}_{\text{mod5}} = \{1, 2, 3, 4\}$, y la operación multiplicación módulo 5:

$\times$mod5	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\Leftrightarrow$

$\times$mod5	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

Note que las tablas anteriores se diferencian por el hecho de que se cambió el orden de los elementos, por lo tanto, son dos tablas de multiplicación diferentes porque los elementos de los grupos están dispuestos de manera diferente.

2. $\boldsymbol{G}_{\times} = \{1, i, -1, -i\}$, y la siguiente operación multiplicación:

$\times$	1.	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Por lo tanto, los grupos $\boldsymbol{G}_{\times}$ y $\boldsymbol{G}_{\text{mod5}}$ son isomorfos con una tabla de multiplicación como la que se muestra a continuación:

Borrador Preliminar

$\times$	1	A	B	C
1	1	A	B	C
A	A	B	C	1
B	B	C	1	A
C	C	1	A	B

◁

2.1.2 Campo

Definiremos como un campo (o cuerpo) el conjunto $\boldsymbol{K} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$ sobre el cual están definidas dos operaciones: suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ y que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Forman un grupo abeliano respecto a la suma $(+)$ con el elemento neutro representado por el cero: 0.
2. Forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación $(\cdot)$. Se excluye el cero y se denota el elemento neutro de la multiplicación como $\mathbf{1}$.
3. Es distributiva respecto a la suma $(+)$. Dados α_i, α_j y α_k, se tiene que: $\alpha_i \cdot (\alpha_j + \alpha_k) = \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot \alpha_k$.

Ejemplos típicos de campos lo constituyen el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, los números reales $\mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbb{C}$. Normalmente se refiere estos campos como *campos escalares*.

La noción de campo nos permite introducir el importante concepto de espacio vectorial.

2.1.3 Espacios vectoriales lineales

Sea el conjunto de objetos $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_i\rangle, \cdots\}$. Se denominará $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial lineal y sus elementos $|v_i\rangle$ vectores, si existe una operación suma, $\boxplus$, respecto a la cual los elementos $|v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ forman un grupo abeliano y una operación multiplicación por un elemento de un campo, $\boldsymbol{K} = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma \cdots\}$, tal que[3]:

1. $\boldsymbol{V}$ es cerrado bajo la operación $\boxplus$: $|v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}\ \ \forall\ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
2. La operación $\boxplus$ es conmutativa: $|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle\ \ \forall\ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
3. La operación $\boxplus$ es asociativa: $(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus (|v_j\rangle \boxplus |v_k\rangle)\ \ \forall\ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \boldsymbol{V}$.
4. Existe un único elemento neutro $|0\rangle$: $|0\rangle \boxplus |v_i\rangle = |v_i\rangle \boxplus |0\rangle = |v_i\rangle\ \ \forall\ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$.
5. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\boldsymbol{V}$: $\exists\ |-v_i\rangle\ \ /\ \ |v_i\rangle \boxplus |-v_i\rangle = |0\rangle\ \ \forall\ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$.
6. $\boldsymbol{V}$ es cerrado bajo el producto por un número: $\alpha\,|v_i\rangle \in \boldsymbol{V}\ \ \forall\, \alpha \in \boldsymbol{K}$ y cualquier $|v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$,
7. $\alpha\,(\beta\,|v_i\rangle) = (\alpha\beta)\,|v_i\rangle\ \ \forall\ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$.
8. $(\alpha + \beta)\,|v_i\rangle = \alpha\,|v_i\rangle \boxplus \beta\,|v_i\rangle\ \ \forall\ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$.
9. $\alpha\,(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha\,|v_i\rangle \boxplus \alpha\,|v_j\rangle\ \ \forall\ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\alpha \in \boldsymbol{K}$.
10. $\mathbf{1}\,|v_i\rangle = |v_i\rangle\ \ \forall\ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ y $\mathbf{1} \in \boldsymbol{K}$.

Es importante resaltar lo siguiente: existen dos objetos neutros, el vector $|0\rangle \in \boldsymbol{V}$ y el elemento $0 \in \boldsymbol{K}$ y también dos operaciones producto diferentes, el producto de dos números dentro de $\boldsymbol{K}$ y el producto de un $\alpha \in \boldsymbol{K}$ por un vector $|v\rangle \in \boldsymbol{V}$.

Notemos también que podemos definir subespacios $\boldsymbol{S}$ vectoriales dentro de los espacios vectoriales. Ellos serán aquellos conjuntos de vectores que cumplan con los requisitos anteriores pero además cerrados dentro de los mismos conjuntos de vectores. Se puede ver entonces que la condición necesaria y suficiente para que

[3]También suele decirse: un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ sobre $\boldsymbol{K}$.

Borrador Preliminar

$\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{V}$ sea un subespacio vectorial de $\boldsymbol{V}$ es que para cualesquier $|u_i\rangle$ y $|v_i\rangle$ de $\boldsymbol{S}$ y para cualesquier α y β de $\boldsymbol{K}$ se tiene que: $\alpha\,|u_i\rangle + \beta\,|v_i\rangle \in \boldsymbol{S}$.

2.1.4 Algunos espacios vectoriales

1. Los conjunto de los números reales $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}$ y el conjunto de los números complejos $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}$ con el campo $\boldsymbol{K}$ de reales o complejos y definidas las operaciones ordinarias de suma y multiplicación.
   Cuando el campo $\boldsymbol{K}$ es el conjunto de los números reales se dirá que es *un espacio vectorial real de números reales* si $\boldsymbol{V} \equiv \mathbb{R}$, pero si $\boldsymbol{V} \equiv \mathbb{C}$ se dirá *un espacio vectorial real de números complejos*. Por su parte, si $\boldsymbol{K} \equiv \mathbb{C}$ diremos que es un espacio vectorial complejo. Siempre se asociará el campo de escalares al espacio vectorial: se dirá que es un espacio vectorial sobre el campo de los escalares. Es decir, si el campo es real (complejo) se dirá que el espacio vectorial es real (complejo).
2. El conjunto $\boldsymbol{V} \equiv \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, vale decir el producto cartesiano de $\mathbb{R}$, cuyos elementos son $n-$uplas de números, con la operación suma ordinaria de vectores en $n-$dimensionales y la multiplicación por números.
$$\begin{aligned} |x\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)\ , \\ |x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots x_n + y_n)\ , \\ \alpha\,|x\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots \alpha x_n)\ . \end{aligned}$$
   Este espacio vectorial es de dimensión finita.
   Igualmente, será un espacio vectorial $\boldsymbol{V} \equiv \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$, en donde los elementos $x_i \in \mathbb{C}$. Si para este caso el campo, sobre el cual se define el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ es real, tendremos un espacio vectorial real de números complejos.
   Es obvio que en el caso $\boldsymbol{V} \equiv \mathbb{R}$, para el cual $|x\rangle_1 = (x_1, 0, 0, \cdots, 0)$ y $|y\rangle_1 = (y_1, 0, 0, \cdots, 0)$ o cualquier espacio de vectores formados por las componentes, i.e. $|x\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, x_i, \cdots 0)$ y $|y\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, y_i, \cdots 0)$ formarán subespacios vectoriales dentro de $\mathbb{R}^n$.
   En el caso específico de $\mathbb{R}^3$, y en donde hemos desarrollado todo un conjunto de conceptos matemáticos, es bueno comentar sobre la equivalencia que hemos tomado como obvia entre dos definiciones diferentes:
   - Los vectores $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$ y $\mathbf{b} = (b^1, b^2, b^3)$ con sus respectivas operaciones para la suma $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3)$ y multiplicación por un escalar $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a^1, \lambda a^2, \lambda a^3)$, con $\{a^i\}$, $\{b^i\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Los vectores geométricos, es decir, segmentos orientados en el espacio con un origen común y donde la suma se definió mediante la regla del paralelogramo y el producto por un escalar como el alargamiento o acortamiento de los segmentos o flechas con el posible cambio de dirección.

   Aunque ambos son vectores de $\mathbb{R}^3$ es bueno tener claro que se trata de objetos diferentes que viven en espacios vectoriales diferentes. Se puede decir también que son dos representaciones diferentes para los vectores. Es buena la ocasión para señalar que existe una manera de pasar de una representación a otra, esto se hace por medio de una función que asigne a una tríada (x^1, x^2, x^3) una y sólo una flecha (y viceversa), conservando por supuesto las operaciones de suma y multiplicación por números. A este tipo de funciones se les denomina un *isomorfismo*.
   Para finalizar, también es posible ver $\mathbb{R}^3$ simplemente como un conjunto de puntos donde se pueden definir superficies inmersas, como por ejemplo una esfera, $\mathbb{S}^2$, centrada en el origen y de radio R. En un punto q sobre la esfera es posible generar un plano tangente a la esfera y en ese punto construir un espacio vectorial con todos los vectores cuyo origen está en q, y por lo tanto, son tangentes a la esfera.

Borrador Preliminar

En el lenguaje de la geometría diferencial y las variedades a este conjunto de vectores se le denota con: $T_q\mathbb{S}^2$. Lo anteriormente dicho se puede generalizar para $\mathbb{R}^n$.

3. El espacio $\boldsymbol{E}^\infty$ constituido por vectores $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots)$ contables pero con infinitas componentes.

$$\begin{aligned} |x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots)\,, \\ |x\rangle \boxplus |y\rangle \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots) \\ \alpha\,|x\rangle = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n, \cdots)\,, \end{aligned}$$

con la siguiente restricción:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = L\,, \quad \text{con } L \text{ finito}\,.$$

4. El conjunto de las matrices $n \times n$, reales o complejas, con el campo $\boldsymbol{K}$ real o complejo.

$$\begin{aligned} |u\rangle = M_{ab} \quad \wedge \quad |v\rangle = N_{ab}\,, \\ |u\rangle \boxplus |v\rangle \equiv M_{ab} + N_{ab} = (M+N)_{ab}\,, \\ \alpha\,|u\rangle = \alpha M_{ab} = (\alpha M)_{ab}\,. \end{aligned}$$

Es también obvio que se podrán formar subespacios vectoriales cuyos elementos sean matrices de dimensión menor a $n \times n$.

5. El conjunto de los vectores geométricos, o vectores cartesianos, en 2 y 3 dimensiones, con las propiedades habituales de suma vectorial y multiplicación por un escalar.
6. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales: $\mathcal{P} = \{a_0, a_1x, a_2x^2, \cdots, a_nx^n, \cdots\}$, con $\boxplus$ la suma ordinaria entre polinomios y la multiplicación ordinaria de polinomios con números.
7. Espacios Funcionales (de los cuales los polinomios son un caso particular). En estos espacios los vectores serán funciones, la suma será la suma ordinaria entre funciones y la multiplicación por un escalar también será la multiplicación ordinaria de una función por un elemento de un campo:

$$\begin{aligned} |f\rangle = f(x) \quad \wedge \quad |g\rangle = g(x)\,, \\ |f\rangle \boxplus |g\rangle \equiv f(x) + g(x) \equiv (f+g)\,(x)\,, \\ \alpha\,|f\rangle = (\alpha f)\,(x) \equiv \alpha f(x)\,. \end{aligned}$$

8. El conjunto de todas las funciones continuas e infinitamente diferenciables, definidas en el intervalo $[a,b]$: $\mathcal{C}^\infty_{[a,b]}$.
9. El conjunto de todas las funciones complejas de variable real, $\psi(x)$, definidas en $[a,b]$, de cuadrado integrable (es decir para las cuales $\int_a^b \mathrm{d}x\,|\psi\,(x)|^2$ sea finita). Este espacio se denomina comúnmente $\mathcal{L}^2$ y puede ser definido dentro de un rango $[a,b]$, finito o infinito, y para más de una variable.
10. El conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y homogéneas, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 0 \\ 4a + 2b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene como solución al conjunto: $\{a, b = a/2, c = -5a/2\}$. La suma de estos elementos y la multiplicación por un número conforman un espacio vectorial en el sentido de que son soluciones del sistema de ecuaciones.

Borrador Preliminar

2.1.4.1 Subespacios

Supongamos que tenemos un conjunto $\boldsymbol{S}$ de elementos de un espacio vectorial lineal $\boldsymbol{V}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. El vector neutro de $\boldsymbol{V}$ está en $\boldsymbol{S}$.
2. Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in \boldsymbol{S}$, entonces $|s_1\rangle \boxplus |s_2\rangle \in \boldsymbol{S}$.
3. Si $|s\rangle \in \boldsymbol{S}$ y α es un elemento del campo $\boldsymbol{K}$, entonces $\alpha\,|s\rangle \in \boldsymbol{S}$.

De esta manera, las operaciones que hacen de $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial también están definidas para $\boldsymbol{S}$. Se puede demostrar que $\boldsymbol{S}$ es también un espacio vectorial lineal, es decir, satisface el conjunto de axiomas 2.1.3. Al conjunto $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ que satisface las propiedades 1 y 2 más los axiomas 2.1.3 se le denomina un subespacio vectorial lineal (o simplemente subespacio) del espacio vectorial lineal $\boldsymbol{V}$.

Notemos que el conjunto conformado con el vector neutro como único elemento: $\boldsymbol{S} = \{|0\rangle\} \in \boldsymbol{V}$ es el subespacio vectorial más pequeño de $\boldsymbol{V}$. Por otro lado, el espacio completo $\boldsymbol{V}$ es el subespacio más grande posible de $\boldsymbol{V}$. Se acostumbra llamar a estos dos subespacios los subespacios triviales de $\boldsymbol{V}$.

Notemos que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ porque $\mathbb{R}^2$ ni siquiera es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. De la misma manera, un plano en $\mathbb{R}^3$ que no contenga el origen no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, porque el plano no contiene el vector cero de $\mathbb{R}^3$.

2.1.5 La importancia de la notación

En los ejemplos antes mencionados hemos utilizado para representar un vector abstracto la notación de $|v\rangle$ y con éstos construimos un espacio vectorial abstracto $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$. Un espacio vectorial abstracto será un conjunto de elementos genéricos que satisfacen ciertos axiomas. Dependiendo del conjunto de axiomas tendremos distintos tipos de espacios abstractos, la teoría desarrolla las consecuencias lógicas que resultan de esos axiomas. En matemática el concepto de espacios abstractos es reciente (1928) y, aparentemente, se le debe a Maurice Fréchet[4].

Los elementos de esos espacios se dejan sin especificar a propósito. Ese vector abstracto puede representar, vectores en $\mathbb{R}^n$, matrices $n \times n$ o funciones continuas. La notación $|v\rangle$, que se denomina un *ket* y al cual le corresponde un *bra* $\langle u|$ proviene del vocablo inglés *braket* que significa corchete y será evidente más adelante cuando construyamos escalares *braket* $\langle u\,|v\rangle$. Esta útil notación la ideó Paul Dirac[5], uno de los físicos más influyentes en el desarrollo de la Física del siglo XX. En Mecánica Cuántica un estado cuántico particular suele representarse por una función de onda $\psi(x)$, que depende de la variable posición x o de una función alternativa que puede depender de la variable momentum p. En la notación de Dirac, el símbolo $|\psi\rangle$ denota el estado cuántico sin referirse a la función en particular y también sirve para distinguir a los vectores de los escalares (números complejos) que vienen a ser los elementos fundamentales en el espacio de Hilbert de la Mecánica Cuántica.

[4]Maurice Fréchet (1878-1973). Versátil matemático francés, con importantes contribuciones en espacios métricos, topología y creador del concepto de espacios abstractos. https://es.wikipedia.org/wiki/Maurice_Fr\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\let\begingroup\let\typeout\protect\begingroup\def\MessageBreak{Ω(Font)}\let\protect\immediate\write\m@ne{LaTeXFontInfo:\def{}oninputline571.}\endgroup\endgroup\relax\let\ignorespaces\relax\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\futurelet\@let@token\protect\penalty\@M\hskip\z@skipchet

[5]Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984). Además de contribuir de manera determinante en la comprensión de la Mecánica Cuántica, es uno de los creadores de la Mecánica Cuántica Relativista la cual ayudó a comprender el papel que juega el espín en las partículas subatómicas. https://es.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

Borrador Preliminar

Figura 2.1: Transformaciones que dejan invariante un triángulo equilátero. Concatenación de una rotación, $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ con una reflexión, $\mathcal{X}_A$, respecto a un plano que pasa por A

2.1.6 Ejercicios

1. Diga cuales de los siguientes grupos son abelianos: $\{\mathbb{Z},+\}$; $\{\mathbb{Z}_n,+\ \forall\,,n\in\mathbb{N}\}$; $\{\mathbb{N},+\}$ y el grupo $\{\mathbb{Z},\cdot\}$.
2. Sea $\boldsymbol{S}$ el conjunto de todos los números reales excluyendo -1 y defina la operación $\square$ tal que:
$$a\,\square\,b=a+b+ab\,.$$
Donde $+$ es la suma estándar entre números reales. Entonces:
   (a). Muestre si $[\boldsymbol{S},\square]$ forman grupo.
   (b). Encuentre la solución en $\boldsymbol{S}$ para la ecuación $2\,\square\,x\,\square\,3=7$.
3. Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro $\star$ y, reflexiones respecto a planos, $\mathcal{X}_A$, $\mathcal{X}_B$ y $\mathcal{X}_C$, que dejan invariante la figura del triángulo. El lector puede consultar los ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3 para fijar ideas.
Ahora bien, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como mostramos en la mencionada figura 2.1. Note que lo ilustrado en la figura, puede esquematizarse como:
$$(A\,\alpha,B\,\beta,C\,\gamma)\qquad\overrightarrow{\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}}\qquad(A\,\gamma,B\,\alpha,C\,\beta)\qquad\overrightarrow{\mathcal{X}_A}\qquad(A\,\gamma,B\,\beta,C\,\alpha)\,.$$
   (a). Construya la tabla de multiplicación para $\boldsymbol{G}_\triangle$, vale decir $\boldsymbol{G}_\triangle=\left\{\mathcal{I},\{\mathcal{R}_i\},\{\bar{\mathcal{R}}_j\},\{\mathcal{X}_k\}\right\}$ y la operación es concatenación tal y como mostramos en la figura 2.1. Donde $\mathcal{I}$ es la operación identidad, $\{\mathcal{R}_i\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que $\{\bar{\mathcal{R}}_j\}$ es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y $\{\mathcal{X}_k\}$ el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.
   (b). Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo: $\boldsymbol{G}_\triangle$.
   (c). Identifique cada una de las $\mathcal{R}_i$ y $\bar{\mathcal{R}}_j$, y muestre además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, $\{\mathcal{I},\mathcal{X}_i\}$, forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.
   (d). Considere las siguientes matrices:
$$\mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\mathbb{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad\mathbb{B}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

Borrador Preliminar

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a $\boldsymbol{G}_\triangle$.

(e). Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.3 ¿Es ese grupo isomorfo a $\boldsymbol{G}_\triangle$? Justifique su respuesta.

(f). ¿Qué puede decir de las operaciones simetrías que dejan invariante un triángulo isósceles? ¿formarán grupo? ¿y si el triángulo es escaleno, cuales son las operaciones de simetría que lo dejan invariante?

4. Considere las siguientes funciones:

$$f_1(x) = x\,, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{1-x}\,, \quad f_4(x) = \frac{x-1}{x}\,, \quad f_5(x) = 1-x\,, \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}\,.$$

Muestre que forman grupo bajo la operación: $f_i(x) \odot f_j(x) = f_i(f_j(x))$, y que ese grupo es isomorfo a $\boldsymbol{G}_\triangle$, del ejercicio anterior.

5. Definamos una operación binaria $\blacksquare$ como:

$$x \blacksquare y = x + y + \alpha x y\,,$$

con $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ y además $\alpha \neq 0$.

(a). Demuestre que $\blacksquare$ es asociativa.

(b). Muestre que $\blacksquare$ genera un grupo en $\left\{\mathbb{R} - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\right\}$. Es decir, $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \;\wedge\; x \neq \frac{-1}{\alpha}, y \neq \frac{-1}{\alpha}$, entonces: $x \blacksquare y$ forma un grupo.

6. Muestre que el siguiente conjunto de transformaciones en el plano xy forman un grupo y construya su tabla de multiplicación.

(a). $I = \{x \to x \;\wedge\; y \to y\}$.

(b). $I = \{x \to -x \;\wedge\; y \to -y\}$.

(c). $I_x = \{x \to -x \;\wedge\; y \to y\}$.

(d). $I_y = \{x \to x \;\wedge\; y \to -y\}$.

7. Considere un conjunto $\boldsymbol{S}$ conformado únicamente por números reales positivos. Consideremos las siguientes reglas sobre $\boldsymbol{S}$: Por "suma" de dos números entenderemos su producto en el sentido usual, y el "producto" de un elemento $r \in \boldsymbol{S}$ y un número real λ entenderemos r elevado a la potencia de λ, en el sentido usual ¿$\boldsymbol{S}$ es un espacio vectorial?

8. Considere el conjunto de vectores en el plano conformado por vectores localizados en el origen y cuyos puntos finales permanecen siempre en el primer cuadrante ¿Este conjunto es un espacio vectorial?

9. Muestre que también serán espacios vectoriales:

(a). El conjunto de todas las funciones $f = f(x)$ definidas en $x = 1$ con $f(1) = 0$. Si $f(1) = c$ ¿Tendremos igual un espacio vectorial? ¿Por qué?

(b). Los vectores $(x, y, z) \in \boldsymbol{V}^3$ tal que sus componentes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

10. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \,.$$

    (a). Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).
    (b). Si los coeficientes a_i son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?
    (c). ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?
        I. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.
        II. El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
        III. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
        IV. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.
11. Un subespacio $\mathcal{P}$ es generado por: $|x_1\rangle = x^3 + 2x + 1\,,\ |x_2\rangle = x^2 - 2\,,\ |x_3\rangle = x^3 + x$ ¿Cuál(es) de los siguientes polinomios pertenece al subespacio $\mathcal{P}$?
    (a). $x^2 - 2x + 1$.
    (b). $x^4 + 1$.
    (c). $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$.
    (d). $x - 5$.
12. Resuelva los ejercicios anteriores utilizando **Maxima**.

Practicando con Maxima

En este módulo utilizaremos algunas de las herramientas disponibles para incorporar el álgebra discreta. Comenzaremos con la introducción a los conjuntos. Podemos operar con conjuntos pero primero debemos definirlos. Existen varias posibilidades, como mostramos a continuación:

```
(%i1) A:{1,2,3,4,5,6,7,8,9};
```
(%o1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

```
(%i2) B:set(1,3,5,7,9);
```
(%o2) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

```
(%i3) C:set(2,4,6,8);
```
(%o3) $\{2, 4, 6, 8\}$

```
(%i4) D:makeset(i/j, [i,j], [[1,3], [2,3], [3,3], [4,3]]);
```
(%o4) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right\}$

Notemos que es igual definir los conjuntos con llaves, con la función **set** o **makeset**. Podemos preguntar si determinado elemento perteneces, o no, a un conjunto.

```
(%i5) elementp(7,A);
```
(%o5) true

```
(%i6) elementp(7,C);
```
(%o6) false

Operaciones elementales con conjuntos:

Borrador Preliminar

```
(%i7) UBC:union(B,C);
```
(%o7) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

```
(%i8) is (A=UBC);
```
(%o8) true

```
(%i9) Cv:intersection(B,C);
```
(%o9) $\{\}$

Para **Maxima** el conjunto vacío es $\{\}$.

```
(%i10) setdifference(A,C);
```
(%o10) $\{1,3,5,7,9\}$

Esto es, el conjunto con los elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto C.

Si queremos el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto $\{a,b,c\}$ le podemos pedir al programa que nos lo muestre:

```
(%i11) powerset(a,b,c);
```
(%o11) $\{\{\},\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,c\},\{b\},\{b,c\},\{c\}\}$

El producto cartesiano de los conjuntos A y B es el conjunto conformado por los pares (a,b):

$$A \text{ x } B = \{(a,b)/a \in A, b \in B\}.$$

```
(%i12) cartesian_ product(B,C);
```
(%o12) $\{[1,2],[1,4],[1,6],[1,8],[3,2],[3,4],[3,6],[3,8],[5,2],[5,4],[5,6],[5,8],[7,2],$
$,[7,4],[7,6],[7,8],[9,2],[9,4],[9,6],[9,8]\}$

Le podemos pedir al programa la suma de los pares del producto cartesiano anterior:

```
(%i13) makeset(a+b, [a,b], cartesian_ product(B,C));
```
(%o13) $\{3,5,7,9,11,13,15,17\}$

Maxima trata a los conjuntos y a las listas como objetos de distinta naturaleza, lo que permite trabajar con conjuntos cuyos elementos puedan ser también conjuntos o listas, es decir, subconjuntos.

```
(%i14) lista:makelist(i,i,1,25);
```
(%o14) $[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25]$

La lista anterior la convertiremos en un conjunto, para este fin debemos utilizar el comando **setify**.

```
(%i15) E:setify(lista);
```
(%o15) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25\}$

De este último conjunto podemos construir el subconjunto conformado por los números primos:

```
(%i16) Primos:subset(E,primep);
```
(%o16) $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$

Con **cardinality** podemos saber cuantos elementos contiene un conjunto:

Borrador Preliminar

```
(%i17) cardinality(%);
(%o17) 9
```

La función de **Maxima** que nos permite calcular las tablas que utilizamos en la sección 2.1 es la función **mod**. Veamos el siguiente ejemplo:

```
(%i18) Gm8:1,3,5,7;
```
(%o18) $\{1, 3, 5, 7\}$

Todos los productos posibles entre los elementos de este conjunto son:

```
(%i19) makeset(a.b, [a,b], cartesian_product(Gm8,Gm8));
```
(%o19) $\{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 25, 35, 49\}$

Los modulo 8 para algunos de los números anteriores son:

```
(%i20) mod(21,8); mod(35,8); mod(49,8);
```
(%o20) 5

(%o21) 3

(%o22) 1

Para generar el grupo $\boldsymbol{G}_{\mathrm{mod}5}$ escribimos:

```
(%i23) setify(makelist(mod(i,5),i,1,4));
```
(%o23) $\{1, 2, 3, 4\}$

En la sección 2.1.1.2, definimos el orden de un elemento $g \in \boldsymbol{G}$. Consideremos el siguiente conjunto de números enteros:

$$\mathbb{Z}_{15} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}.$$

Se podría demostrar que el orden de $g \in \boldsymbol{G}$ es igual al número de elementos de $< g >$ y lo dejaremos como ejercicio.

Vamos a calcular el orden de todos los elementos de $\mathbb{Z}_{15}$, sabiendo que el orden de cada uno de esos elementos divide a 15, que es el cardinal de $\mathbb{Z}_{15}$.

Probemos primero con el número $6 \in \mathbb{Z}_{15}$.

```
(%i24) setify(makelist(mod(6*i,15),i,0,14));
```
(%o24) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$

El orden de $6 \in \mathbb{Z}_{15}$ es:

```
(%i25) length(%);
```
(%o25) 5

En la siguiente instrucción lo haremos para todos los elementos de Z_{15}.

```
(%i26) makelist([j,length(setify(makelist(mod(j*i,15),i,0,14)))],j,0,14);
```
(%o26) $[[0, 1], [1, 15], [2, 15], [3, 5], [4, 15], [5, 3], [6, 5], [7, 15], [8, 15], [9, 5], [10, 3], [11, 15], [12, 5], [13, 15], [14, 15]]$

Borrador Preliminar

La salida no es más que una lista $[x, y]$ con cada elemento $x \in \mathbb{Z}_{15}$ y su orden y. Por lo tanto, el conjunto de órdenes es: $\{1, 3, 5, 15\}$, todos divisores de 15, como estipula el teorema de Lagrange.

Borrador Preliminar

2.2 Espacios métricos, normados y con producto interno

En está sección vamos a introducir una función de distancia, de manera que sí tenemos un par de puntos o elementos de un espacio vectorial podemos hablar de que existe una cierta distancia entre ellos. Se dice que la función distancia induce una topología sobre el espacio vectorial. Comenzaremos definiendo el concepto de métrica sobre espacios vectoriales y con esta estructura llegar a la noción de norma.

2.2.1 Métricas y espacios métricos

El concepto de métrica surge de la generalización de la idea de distancia entre dos puntos de la recta real. Un espacio vectorial será métrico si podemos definir una función:

$$d : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathbb{R} \ / \ \forall \left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle, \left|z\right\rangle \in \boldsymbol{V},$$

tal que se cumple lo siguiente:

1. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \geq 0, \quad \text{si} \quad d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) = 0 \ \Rightarrow \ \left|x\right\rangle \equiv \left|y\right\rangle.$
2. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv d\left(\left|y\right\rangle, \left|x\right\rangle\right).$
3. $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \leq d\left(\left|x\right\rangle, \left|z\right\rangle\right) + d\left(\left|y\right\rangle, \left|z\right\rangle\right)$ (La desigualdad triangular).

Así, diremos que $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{K}, \boxplus, d)$ es un espacio vectorial lineal, métrico.

Podemos enumerar algunos ejemplos de espacios métricos:

1. Espacios reales $\mathbb{R}^n$.
   (a). Para $\mathbb{R}$, es decir la recta real, la definición de métrica es: $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \left|x - y\right|$.
   (b). Para $\mathbb{R}^2$, es decir el plano, una definición de métrica es: $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}$. También podemos construir otra definición de métrica como: $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \left|x_1 - y_1\right| + \left|x_2 - y_2\right|$. La primera de estas métricas se conoce como métrica euclídea y la segunda como métrica Manhattan o métrica de taxistas. Es claro como el mismo espacio vectorial genera varios espacios métricos, dependiendo de la definición de métrica. Para estos casos particulares, las métricas "miden" el desplazamiento entre dos puntos de forma distinta: en drones (métrica euclídea) o vehículos terrestre en ciudades.
   (c). En general para espacios reales $\mathbb{R}^n$ una posible definición de métrica será:
   $$d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2 + \left(x_3 - y_3\right)^2 + \cdots + \left(x_n - y_n\right)^2}.$$
   Esta definición de métrica no es más que una generalización del teorema de Pitágoras y se denomina "distancia euclidiana".
2. Espacios unitarios $n-$dimensionales, o espacios complejos, $\mathbb{C}^n$. La definición de distancia puede construirse como:
   $$d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \sqrt{\left|x_1 - y_1\right|^2 + \left|x_2 - y_2\right|^2 + \left|x_3 - y_3\right|^2 + \cdots + \left|x_n - y_n\right|^2},$$
   y es claro que se recobra la idea de distancia en el plano complejo: $d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) \equiv \left|x - y\right|$.
3. Para los espacios de funciones $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ una posible definición de distancia sería:
   $$d\left(\left|f\right\rangle, \left|g\right\rangle\right) \equiv \operatorname*{máx}_{t \in [a,b]} \left|f(t) - g(t)\right|.$$
4. La métrica trivial o discreta
   $$d\left(\left|x\right\rangle, \left|y\right\rangle\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Ejemplo 2.6 Como vimos en la sección anterior, en el campo de los números complejos el valor absoluto de

Borrador Preliminar

$z = x + iy$ es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La métrica que podemos asociar a este espacio vectorial viene dada por:

$$d\left(|z_1\rangle, |z_2\rangle\right) \equiv \left\||z_1\rangle - |z_2\rangle\right\| = \sqrt{\langle z_1 - z_2 | \, z_1 - z_2\rangle} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,,$$

con: $|z_1\rangle = x_1 + iy_1$ y $|z_2\rangle = x_2 + iy_2$.

◁

2.2.2 Normas y espacios normados

El concepto de distancia (o métrica) es la propiedad más elemental que se le puede exigir a un espacio vectorial. Mucho más interesante son aquellos espacios vectoriales que están equipados con la idea de norma y, a partir de allí, se obtiene la distancia. La norma tiene que ver con el "tamaño" del vector y la métrica con la distancia entre vectores.

La norma, $\mathcal{N}\left(|v_i\rangle\right) \equiv \left\||v_i\rangle\right\|$, de un espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ será una función:

$$\mathcal{N} : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R} \;/\; \forall \; |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}\,,$$

que cumple con:

1. $\left\||v_i\rangle\right\| \geq 0\,, \quad \text{si} \quad \left\||v_i\rangle\right\| = 0 \;\Rightarrow\; |v_i\rangle \equiv |0\rangle$.
2. $\left\|\alpha\,|v_i\rangle\right\| = |\alpha| \; \left\||v_i\rangle\right\|$.
3. $\left\||v_i\rangle + |v_j\rangle\right\| \leq \left\||v_i\rangle\right\| + \left\||v_j\rangle\right\|$ (Desigualdad triangular).

La definición de norma induce una métrica de la forma:

$$d\left(|v_i\rangle, |v_j\rangle\right) \equiv \left\||v_i\rangle - |v_j\rangle\right\|\,. \tag{2.1}$$

Denotaremos un espacio vectorial normado[6] como $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{K}, \boxplus; \|\cdot\|)$, espacio que también es conocido como un espacio de Banach[7]. Esto significa que todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pero no todo espacio métrico es normado.

De la definición de distancia (2.1) resulta que la métrica así definida es invariante bajo traslaciones de vectores. Esto es, si; $|\tilde{x}\rangle = |x\rangle + |a\rangle \;\wedge\; |\tilde{y}\rangle = |y\rangle + |a\rangle$, entonces, $d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv d\left(|\tilde{x}\rangle, |\tilde{y}\rangle\right)$. Y además es homogénea: $d\left(\lambda\,|x\rangle, \lambda\,|y\rangle\right) = |\lambda| d\left(|x\rangle, |y\rangle\right)$.

Como ejemplos de espacios normados podemos mostrar los siguientes:

1. Los espacios reales, $\mathbb{R}^n$ y los espacios complejos $\mathbb{C}^n$. Para estos espacios de Banach, la norma se define como:

$$\left\||x\rangle\right\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

   Para un espacio en $\mathbb{R}^3$ se cumple que $\left\||x\rangle\right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, por lo tanto, la idea de norma generaliza la noción de "tamaño" del vector $|x\rangle$. Es claro que la definición de distancia se construye a partir de la norma de la forma:

$$d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv \left\||x\rangle - |y\rangle\right\| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}\,.$$

   Este espacio se llama espacio normado euclidiano de dimensión n.

2. Para el espacio lineal de matrices $n \times n$, reales o complejas, con el campo $\boldsymbol{K}$ real o complejo, una definición

[6] El concepto de espacio normado fue formulado en 1922 de manera independiente por: S. Banach, H. Hahn y N. Wiener.

[7] Stefan Banach (1892-1945) Matemático polaco, uno de los fundadores del análisis funcional moderno, con sus mayores contribuciones a la teoría de espacios topológicos. https://es.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach

Borrador Preliminar

de norma es:

$$\|M\| = \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n} |M_{ab}| \ ,$$

y la correspondiente definición de distancia:

$$d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv \|M - N\| = \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n} |M_{ab} - N_{ab}| \ .$$

3. Para los espacios funcionales $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ una posible definición de norma sería:

$$\||f\rangle\| = \operatorname*{máx}_{t\in[a,b]} |f(t)| \ ,$$

otra posible definición puede ser:

$$\||f\rangle\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \, .$$

2.2.3 Espacios euclidianos

El siguiente paso en la construcción de espacios vectoriales más ricos es equiparlo con la definición de producto interno, y a partir de esta definición, construir el concepto de norma y con éste el de distancia. La idea de producto interno generaliza el concepto de producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$ e incorpora a los espacios vectoriales abstractos el concepto de ortogonalidad y descomposición ortogonal. Históricamente, la teoría de espacios vectoriales con producto interno es anterior a la teoría de espacios métricos y espacios de Banach y se le debe a D. Hilbert[8]. Adicionalmente, la semejanza entre la geometría euclidiana y la geométrica de $\mathbb{R}^n$ ha hecho que espacios en los cuales se puedan definir, distancia, ángulos, a partir de una definición de producto interno, se denominen también espacios euclidianos.

2.2.3.1 Producto interno

En un espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$, la definición del producto interno de dos vectores la denotaremos como $\langle v_i|\, v_j\rangle$ y es una aplicación:

$$\mathcal{I}\left(|v_i\rangle, |v_j\rangle\right) : \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{K}, \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}.$$

Es decir, asocia a ese par de vectores con un elemento del campo $\boldsymbol{K}$.

Las propiedades que definen el producto interno son:

1. $\langle v_i|\, v_i\rangle \equiv \||v_i\rangle\|^2 \in \boldsymbol{K} \ \wedge \ \langle v_i|\, v_i\rangle \geq 0 \quad \forall \ |v_i\rangle \in \boldsymbol{V}, \quad \text{si} \quad \langle v_i|\, v_i\rangle = 0 \ \Rightarrow \ |v_i\rangle \equiv |0\rangle.$
2. $\langle v_i|\, v_j\rangle = \langle v_j|\, v_i\rangle^* \quad \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}.$
3. $\langle v_i|\, \alpha v_j + \beta v_k\rangle = \alpha\,\langle v_i|\, v_j\rangle + \beta\,\langle v_i|\, v_k\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \boldsymbol{V} \ \wedge \ \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}.$
4. $\langle \alpha v_i + \beta v_j|\, v_k\rangle = \alpha^*\,\langle v_i|\, v_k\rangle + \beta^*\,\langle v_j|\, v_k\rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \boldsymbol{V} \ \wedge \ \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}.$
5. $\langle v_i|\, 0\rangle = \langle 0|\, v_i\rangle = 0.$

La segunda y cuarta propiedad resultan del hecho de que si el campo es complejo $\boldsymbol{K} = \mathbb{C}$, entonces:

$$\langle \alpha v_i|\, \alpha v_i\rangle = \alpha^2\,\langle v_i|\, v_i\rangle = i^2\,\langle v_i|\, v_i\rangle = -\,\langle v_i|\, v_i\rangle \ ,$$

lo cual contradice el hecho de que la norma tiene que ser positiva. Por eso la necesidad de tomar el complejo conjugado. Se dice entonces, que el producto escalar es *antilineal* respecto al primer factor y *lineal* respecto al segundo.

[8]David Hilbert(1862-1943) Matemático alemán defensor de la axiomática como enfoque primordial de los problemas científicos. Hizo importantes contribuciones en distintas áreas de la matemática, como: Invariantes, Campos de Números Algebraicos, Análisis Funcional, Ecuaciones Integrales, Física-Matemática y Cálculo en Variaciones. https://es.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

Borrador Preliminar

A partir de la definición de producto interno se construyen los conceptos de norma y distancia:

$$\|\|v_i\rangle\| = \sqrt{\langle v_i|\, v_i\rangle} \quad \text{y} \quad d\left(|v_i\rangle, |v_j\rangle\right) \equiv \|\,|v_i\rangle - |v_j\rangle\| = \sqrt{\langle v_i - v_j|\, v_i - v_j\rangle}\,.$$

2.2.3.2 La desigualdad de Cauchy-Schwarz: los ángulos entre vectores reales y complejos

Todo producto interno $\langle v_i|\, v_j\rangle$ definido en un espacio vectorial normado $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ cumple con la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle v_i|\, v_j\rangle|^2 \leq \langle v_i|\, v_i\rangle \langle v_j|\, v_j\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad |\langle v_i|\, v_j\rangle| \leq \|\,|v_i\rangle\| \;\; \|\,|v_j\rangle\|\,. \tag{2.2}$$

Es claro que si $|v_i\rangle = |0\rangle \;\wedge\; |v_j\rangle = |0\rangle$ se cumple la igualdad y es trivial la afirmación.

Para demostrar la desigualdad, tomemos dos vectores $|v_i\rangle \;\wedge\; |v_j\rangle$ cualesquiera, entonces podemos construir un tercero: $|v_k\rangle = \alpha\,|v_i\rangle + \beta\,|v_j\rangle$ (α y β tendrán valores particulares), por lo tanto:

$$\langle v_k|\, v_k\rangle \equiv \langle \alpha v_i + \beta v_j|\, \alpha v_i + \beta v_j\rangle \geq 0\,,$$

esto significa que:

$$\begin{aligned}\langle \alpha v_i + \beta v_j|\, \alpha v_i + \beta v_j\rangle &= \langle \alpha v_i|\, \alpha v_i\rangle + \langle \alpha v_i|\, \beta v_j\rangle + \langle \beta v_j|\, \alpha v_i\rangle + \langle \beta v_j|\, \beta v_j\rangle \geq 0 \\ &= |\alpha|^2 \langle v_i|\, v_i\rangle + \alpha^* \beta \langle v_i|\, v_j\rangle + \beta^* \alpha \langle v_j|\, v_i\rangle + |\beta|^2 \langle v_j|\, v_j\rangle \geq 0\,.\end{aligned}$$

Si $\alpha = \langle v_j|\, v_j\rangle$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\langle v_j|\, v_j\rangle \langle v_i|\, v_i\rangle \quad &+ \quad \beta \langle v_i|\, v_j\rangle + \beta^* \langle v_j|\, v_i\rangle + |\beta|^2 \geq 0 \\ \langle v_j|\, v_j\rangle \langle v_i|\, v_i\rangle \quad &\geq \quad -\beta \langle v_i|\, v_j\rangle - \beta^* \langle v_j|\, v_i\rangle - |\beta|^2\,,\end{aligned}$$

seguidamente seleccionamos: $\beta = -\langle v_j|\, v_i\rangle$, y por lo tanto: $\beta^* = -\langle v_i|\, v_j\rangle$, consecuentemente:

$$\begin{aligned}\langle v_j|\, v_j\rangle \langle v_i|\, v_i\rangle \quad &\geq \quad \langle v_j|\, v_i\rangle \langle v_i|\, v_j\rangle + \langle v_i|\, v_j\rangle \langle v_j|\, v_i\rangle - \langle v_j|\, v_i\rangle \langle v_i|\, v_j\rangle \\ \langle v_j|\, v_j\rangle \langle v_i|\, v_i\rangle \quad &\geq \quad \langle v_i|\, v_j\rangle \langle v_j|\, v_i\rangle = |\langle v_i|\, v_j\rangle|^2\,. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Ahora consideremos lo siguiente, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de norma se desprende que:

$$\frac{|\langle v_i|\, v_j\rangle|^2}{\|\,|v_i\rangle\|^2 \; \|\,|v_j\rangle\|^2} \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 \leq \frac{|\langle v_i|\, v_j\rangle|}{\|\,|v_i\rangle\| \; \|\,|v_j\rangle\|} \leq 1\,,$$

por lo tanto podemos definir el "ángulo" entre los vectores abstractos $|v_i\rangle \;\wedge\; |v_j\rangle$ como:

$$\cos(\Theta_{\mathbb{G}}) = \frac{|\langle v_i|\, v_j\rangle|}{\|\,|v_i\rangle\| \; \|\,|v_j\rangle\|}\,, \tag{2.3}$$

donde hemos denotado como $\Theta_{\mathbb{G}}$ el ángulo genérico que forman los vectores reales o complejos.

Si estamos considerando espacios vectoriales reales -en los cuales el campo corresponde a los números reales- entonces el ángulo definido entre vectores abstractos reales corresponde al que intuitivamente siempre hemos considerado para los vectores cartesianos y que discutimos en la sección 1.1.4.1,

$$\cos(\Theta_{\mathbb{R}}) = \frac{|\langle v_i|\, v_j\rangle|}{\|\,|v_i\rangle\| \; \|\,|v_j\rangle\|}\,, \quad \text{con} \quad 0 \leq \Theta_{\mathbb{R}} \leq \pi\,,$$

donde se toma $\Theta_{\mathbb{R}} = 0$ para vectores colineales y $\Theta_{\mathbb{R}} = \pi$ para vectores opuestos (antilineales). Si bien es cierto que esta definición coincide con la de los vectores cartesianos, hay que resaltar que la estamos extendiendo para cualquier vector abstracto, vale decir: funciones reales, matrices, y todos los objetos matemáticos que cumplan con las reglas para los espacios vectoriales expuestas en 2.1.3.

Para el caso de espacios vectoriales complejos la situación es más sutil y significa definir un ángulo entre dos vectores abstractos y complejos, sin embargo podemos abordar el problema suponiendo:

Borrador Preliminar

1. un espacio complejo $n-$dimensional de $n-$uplas de números complejos $|z\rangle \leftrightarrow (z_1, z_2, \cdots z_n)$ asociado (isomorfo) a un espacio vectorial real de $2n$ dimensiones, con vectores representados por $2n-$uplas de números reales $|w\rangle \leftrightarrow (\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2), \cdots \mathrm{Re}(z_n), \mathrm{Im}(z_1), \mathrm{Im}(z_2), \cdots \mathrm{Im}(z_n))$, donde hemos representado $\mathrm{Re}(z_j)$ y $\mathrm{Im}(z_j)$ como las partes reales e imaginarias de z_j, respectivamente o,
2. directamente a partir de una definición de producto interno entre vectores complejos implementado por: $\langle w_i|\, v_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} w_j^* v_j$.

Ambas aproximaciones no son del todo independientes pero igualmente justificadas[9].

Consideremos el segundo caso, esto es: directamente a partir de una definición de producto interno entre vectores complejos. Para este caso consideramos un ángulo complejo, y $\cos(\Theta_{\mathbb{C}})$ una función de variable compleja, que puede ser expresada en su forma polar como:

$$\cos(\Theta_{\mathbb{C}}) = \frac{|\langle v_i|\, v_j\rangle|}{\||v_i\rangle\|\, \||v_j\rangle\|} \;\Rightarrow\; \cos(\Theta_{\mathbb{C}}) = \rho\, \mathrm{e}^{\phi}\,, \quad \text{con} \quad \rho = |\cos(\Theta_{\mathbb{C}})| < 1\,.$$

Entonces podemos asociar $\rho = \cos(\Theta_H)$ y definir Θ_H, en el rango $0 \leq \Theta_H \leq \pi/2$, como el *ángulo hermítico* entre los vectores complejos $|v_i\rangle$ y $|v_j\rangle$. Mientras que ϕ, definido en $-\pi \leq \phi \leq \pi$, corresponde al pseudo ángulo de Kasner, que representa la orientación o rotación del ángulo hermítico y no tiene mayor significado al cuantificar el ángulo entre esos dos vectores. Esta diferencia de significados puede intuirse cuando multiplicamos $|v_i\rangle$ y $|v_j\rangle$, por una constante compleja: $|\tilde{v}_i\rangle \to \alpha_i\, |v_i\rangle$ y comprobamos que el ángulo Θ_H permanece inalterado y no así el ángulo de Kasner[10].

2.2.3.3 Teoremas del coseno y de Pitágoras

A partir de la definición de norma se obtiene:

$$\begin{aligned} \||v_i\rangle - |v_j\rangle\|^2 &= \langle v_i - v_j|\, v_i - v_j\rangle = \langle v_i|\, v_i\rangle - \langle v_i|\, v_j\rangle - \langle v_i|\, v_j\rangle^* + \langle v_j|\, v_j\rangle \\ &= \langle v_i|\, v_i\rangle + \langle v_j|\, v_j\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left(\langle v_i|\, v_j\rangle\right)\,, \end{aligned}$$

con lo cual hemos generalizado el teorema del coseno para un espacio vectorial abstracto:

$$\||v_i\rangle - |v_j\rangle\|^2 = \||v_i\rangle\|^2 + \||v_j\rangle\|^2 - 2\,\||v_i\rangle\|\,\||v_j\rangle\|\cos(\Theta_{\mathbb{G}})\,. \tag{2.4}$$

De tal forma que para espacios vectoriales reales tendremos:

$$\||v_i\rangle - |v_j\rangle\|^2 = \||v_i\rangle\|^2 + \||v_j\rangle\|^2 - 2\,\||v_i\rangle\|\,\||v_j\rangle\|\cos(\Theta)\,, \quad \text{con} \quad 0 \leq \Theta \leq \pi\,,$$

y para espacios vectoriales complejos:

$$\||v_i\rangle - |v_j\rangle\|^2 = \||v_i\rangle\|^2 + \||v_j\rangle\|^2 - 2\,\||v_i\rangle\|\,\||v_j\rangle\|\cos(\Theta_H)\cos(\phi)\,, \quad \text{con} \quad 0 \leq \Theta_H \leq \pi/2\,.$$

Para el caso que los vectores $|v_i\rangle \;\wedge\; |v_j\rangle$ sean ortogonales, esto es $\langle v_i|\, v_j\rangle = 0$, tendremos el teorema de Pitágoras generalizado:

$$\||v_i\rangle - |v_j\rangle\|^2 \equiv \||v_i\rangle + |v_j\rangle\|^2 = \||v_i\rangle\|^2 + \||v_j\rangle\|^2\,. \tag{2.5}$$

Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales con producto interno.

1. Espacios euclidianos reales, $\mathbb{R}^n$ y espacios euclidianos complejos $\mathbb{C}^n$.

   Los vectores en estos espacios euclidianos pueden ser representados por

$$|x\rangle = (x_1, x_2, \cdots x_n) \;\wedge\; |y\rangle = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\,,$$

[9] Scharnhorst, K. (2001). Angles in complex vector spaces. *Acta Applicandae Mathematica*, **69** (1), 95-103.

[10] Puede consultarse Reju, V. G., Koh, S. N., y Soon, Y. (2009). An algorithm for mixing matrix estimation in instantaneous blind source separation. *Signal Processing*, **89** (9), 1762-1773.

Borrador Preliminar

y **el producto interno** queda definido por:

$$\langle x|\ y\rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + x_3^* y_3, \cdots x_n^* y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i\,, \tag{2.6}$$

es claro que esta definición de producto interno coincide, para $\mathbb{R}^2$ (y $\mathbb{R}^3$) con la idea de producto escalar convencional que consideramos en las secciones 1.1.4.1 y 1.2.6.1, vale decir:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} \\ \\ \mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y\,.$$

Ahora bien, el lector puede comprobar que para vectores en $\mathbb{R}^2$ también se puede proveer una definición de producto interno diferente:

$$\mathbf{a} \circledast \mathbf{b} = 2a_x b_x + a_x b_y + a_y b_x + a_y b_y\,,$$

igualmente válida, con lo cual es claro que en un mismo espacio vectorial pueden coexistir diferentes productos internos.

Por su parte, la **norma** es:

$$\|\,|x\rangle\,\| = \sqrt{\langle x|\ x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

La **distancia** también recupera la idea intuitiva de distancia euclidiana:

$$d\left(|x\rangle\,, |y\rangle\right) \equiv \|\,|x\rangle - |y\rangle\,\| = \sqrt{\langle x-y|\ x-y\rangle}$$

$$d\left(|x\rangle\,, |y\rangle\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}\,.$$

El teorema del coseno queda como:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\ \cos(\Theta)\,,$$

mientras que el teorema de Pitágoras es:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,,$$

es obvio que para $\mathbb{R}^2$ tanto el teorema del coseno como el teorema de Pitágoras retoman su forma tradicional.

Finalmente la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa de la siguiente manera:

$$|\langle x|\ y\rangle| \leq \|\,|x\rangle\|\ \ \|\,|y\rangle\|\ \ \Rightarrow\ \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,.$$

2. Para los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ una posible definición de **producto interno** sería:

$$\langle f|\ g\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ f^*(x)\ g(x)\ ,$$

de la cual se deriva la siguiente expresión para la **norma**:

$$\|\,|f\rangle\,\|^2 = \langle f|\ f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)|^2\ .$$

Borrador Preliminar

La **distancia** entre funciones quedará definida como:

$$d\left(|f\rangle, |g\rangle\right) \equiv \left\| |f\rangle - |g\rangle \right\| \equiv \sqrt{\langle f-g|\, f-g\rangle} = \sqrt{\langle f|\, f\rangle - \langle f|\, g\rangle - \langle f|\, g\rangle^* + \langle g|\, g\rangle}$$

$$\begin{aligned} d\left(|f\rangle, |g\rangle\right) &= \sqrt{\int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)-g(x)|^2} \\ &= \sqrt{\int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\int_a^b \mathrm{d}x\ f^*(x)\, g(x)\right) + \int_a^b \mathrm{d}x\ |g(x)|^2}\,. \end{aligned}$$

El teorema del coseno puede ser escritos como:

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)+g(x)|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 + \int_a^b \mathrm{d}x\ |g(x)|^2 \\ + 2\left(\int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mathrm{d}x\ |g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\Theta)\,, \end{aligned}$$

donde:

$$\cos(\Theta) = \frac{\int_a^b \mathrm{d}x\ f^*(x)\ g(x)}{\left(\int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mathrm{d}x\ |g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Y como era de esperarse el teorema de Pitágoras queda:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)+g(x)|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 + \int_a^b \mathrm{d}x\ |g(x)|^2\ ,$$

para funciones $f(x)$ y $g(x)$ ortogonales, mientras que para este caso, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa:

$$\left|\int_a^b \mathrm{d}x\ f^*(x)\, g(x)\right|^2 \leq \int_a^b \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 \int_a^b \mathrm{d}x\ |g(x)|^2\ .$$

Ejemplo 2.7 Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[-1,1]$ según el caso. Suponiendo las siguientes definiciones de producto interno en $\mathcal{P}^n$:

$$\langle q_n\ |p_n\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \langle q_n\ |p_n\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x\,.$$

Vamos a encontrar la distancia y el ángulo entre los vectores: $|x_1\rangle = x(x-1)$ y $|x_2\rangle = x$.

En general, la definición de distancia es:

$$d\left(|x_1\rangle, |x_2\rangle\right) = \sqrt{\langle x_2 - x_1\ |x_2 - x_1\rangle}\,,$$

por lo tanto para $\langle q_n\ |p_n\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$ la distancia será:

$$\sqrt{\langle x_2 - x_1\ |x_2 - x_1\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left[x(x-1) - x\right]^2 \mathrm{d}x} = \frac{1}{15}\sqrt{690}\,,$$

y para $\langle q_n\ |p_n\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, será:

$$\sqrt{\langle x_2 - x_1\ |x_2 - x_1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 \left(x(x-1) - x\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{2}{15}\sqrt{30}\,.$$

Con respecto a los ángulos:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x_1\ |x_2\rangle}{\sqrt{\langle x_1\ |x_1\rangle}\sqrt{\langle x_2\ |x_2\rangle}}\right)\,.$$

Para $\langle q_n\ |p_n\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$ tenemos:

Borrador Preliminar

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x_1 \,|x_2\rangle}{\sqrt{\langle x_1 \,|x_1\rangle}\sqrt{\langle x_2 \,|x_2\rangle}}\right) = \arccos\left(\frac{\int_{-1}^{1}(x(x-1))\,x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(x(x-1))^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x}}\right)$$

$$= \arccos\left(-\frac{1}{12}\sqrt{15}\sqrt{6}\right) = 2.4825 \text{ rad}\,.$$

Para $\langle q_n \,|p_n\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x_1 \,|x_2\rangle}{\sqrt{\langle x_1 \,|x_1\rangle}\sqrt{\langle x_2 \,|x_2\rangle}}\right) = \arccos\left(\frac{\int_0^1(x(x-1))\,(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_0^1(x(x-1))^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x}}\right)$$

$$= \arccos\left(-\frac{1}{12}\sqrt{15}\sqrt{2}\right) = 2.4825 \text{ rad} \qquad \text{¡El mismo ángulo!}$$

◁

2.2.4 Ejercicios

1. Consideremos el espacio vectorial conformado por los vectores geométricos en $\mathbb{R}^3$ ¿Serán espacios euclidianos para las siguientes definiciones de producto interno?
   (a). El producto de las longitudes de los vectores.
   (b). El producto de las longitudes por el cubo del coseno del ángulo entre ellos.
   (c). El producto como dos veces el producto escalar usual entre vectores.
2. Considerando estas definiciones de producto interno en $\mathcal{P}_n$:
$$a) \quad \langle q_n \,|p_n\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x\,, \qquad b) \quad \langle q_n \,|p_n\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x\,.$$
   (a). Encuentre los ángulos en el "triángulo" formado por los vectores: $|x_1\rangle = 1, |x_2\rangle = t, |x_3\rangle = 1-t$.
   (b). Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en $\mathcal{P}_3$:
      I. $|x_1\rangle = 1; \quad |x_2\rangle = x$.
      II. $|x_1\rangle = 2x; \quad |x_2\rangle = x^2$.
3. Sea $\boldsymbol{E}'$ un subespacio euclidiano de dimensión k, $\boldsymbol{E}' \subset \boldsymbol{E}$, y sea $|v\rangle$ un vector que no necesariamente es un elemento $\boldsymbol{E}'$. Podemos plantearnos el problema de representar $|v\rangle$ de la forma: $|v\rangle = |g\rangle + |h\rangle$; donde $|g\rangle \in \boldsymbol{E}'$ y $|h\rangle$ es ortogonal a $|g\rangle$. La existencia de la expansión anterior nos muestra que el espacio total $\boldsymbol{E}$, de dimensión n, es la suma directa de los subespacios $\boldsymbol{E}'$ y su complemento ortogonal $\boldsymbol{E}^{\perp}$ de dimensión $n-k$.
   Nota: El conjunto de los vectores de $\boldsymbol{E}$ que son ortogonales a todos los de $\boldsymbol{E}'$:
$$\boldsymbol{E}^{\perp} = \{|v\rangle \in \boldsymbol{E} \;\;|\;\; \langle v \,|g\rangle = 0 \;\forall\, |g\rangle \in \boldsymbol{E}'\}$$
   será un subespacio de $\boldsymbol{E}$ y se denomina complemento ortogonal de $\boldsymbol{E}'$.
   Encuentre el vector $|v\rangle$, como la suma del vector $|g\rangle$, expandido por los vectores $|g_i\rangle$, y el vector perpendicular $|h\rangle$ cuando:
   (a). $|h\rangle = (5, 2, -2, 2)\,,\ |g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha)\,,\ |g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)$.
   (b). $|h\rangle = (-3, 5, 9, 3)\,,\ |g_1\rangle = (1, 1, 1, \gamma)\,,\ |g_2\rangle = (2\eta, -1, 1, 1)\,,\ |g_3\rangle = (2, -7\delta, -1, -1)$.
4. Las matrices complejas 2×2 están conformadas por cuatro números complejos, $z_1 = x_1 + iy_1$,

Borrador Preliminar

$z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$, y $z_4 = x_4 + iy_4$. Entonces, hemos denotado por $(A^\dagger)^i_j$ la matriz adjunta de A^i_j. Vale decir, una matriz adjunta de otra será su traspuesta conjugada. Por traspuesta entendemos cambiar filas por columnas manteniendo intacta la diagonal, $A^i_j \to A^j_i$ (ver sección 4.4.3). Por otro lado, hemos definido como $\mathrm{Tr}(\mathbb{A})$ la traza de una matriz como la suma de los elementos de la diagonal, $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = A^i_i$. A continuación ejemplificamos estas dos definiciones:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbb{A}^\dagger \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = z_1 + z_2\,.$$

Ambas definiciones serán discutidas con rigor en las secciones 4.2.3 y 4.3.4, respectivamente. Sin embargo, este par de definiciones funcionales –la adjunta de una matriz es su traspuesta conjugada y su traza será la suma de los elementos de la diagonal– serán suficiente para desarrollar este ejercicio.

Considere el espacio vectorial de matrices complejas 2×2 con la siguiente definición

$$\langle a\,|b\rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger\mathbb{B}) \equiv (A^\dagger)^i_j B^j_i \equiv (A^*)^j_i B^j_i\,.$$

de producto interno

(a). Compruebe si ésta es una buena definición de producto interno.

(b). A partir de esa definición de producto interno construya la definición de norma asociada [11].

(c). A partir de la definición de norma de Frobenious, encuentra la expresión para la definición de distancia entre dos matrices 2×2

(d). Considere las Matrices de Pauli que definimos en la página 107 y compruebe si esas matrices son ortogonales bajo la definición de producto interno de Frobenious

(e). Cuál es la distancia entre las Matrices de Pauli

5. Sean $|p_n\rangle = p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$; $\quad |q_n\rangle = q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in \mathcal{P}_n$ y considere la siguiente definición:

$$\langle q_n\,|p_n\rangle \rightleftharpoons a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{n-1}b_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i$$

(a). Muestre que ésta es una buena definición de producto interno.

(b). Con esta definición de producto interior ¿Se puede considerar $\mathcal{P}_n$ un subespacio de $\mathcal{C}_{[a,b]}$? ¿Por qué?

6. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas los definimos como $\mathbf{a} = a^i\,|e_i\rangle = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$ y definimos una "tabla de multiplicación" entre ellos de la forma $\langle e^i\,|e_j\rangle = \delta^i_j$ con $i, j = 1, 2, 3$, esto es:

$\langle e^i\,\|e_j\rangle$	$\hat{\mathbf{i}}$	$\hat{\mathbf{j}}$	$\hat{\mathbf{k}}$
$\hat{\mathbf{i}}$	1	0	0
$\hat{\mathbf{j}}$	0	1	0
$\hat{\mathbf{k}}$	0	0	1

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir:

$$|a\rangle = a^\alpha\,|q_\alpha\rangle = a^0 + a^i\,|q_i\rangle = a_0 + a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}\,,$$

con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y donde las a^i (con $i = 1, 2, 3$) son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la a^0, también un número real se le llama componente escalar[12].

Los cuaterniones fueron inventados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton a mediados del

[11] Esta definición de norma se conoce como norma de Frobenious

[12] Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein: $c^\alpha\,|q_\alpha\rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^{3} c^j\,|q_j\rangle$. Es decir, hemos supuesto que: $|q_0\rangle \equiv 1$, la unidad en los números reales. Adicionalmente, nótese que los índices griegos $\alpha, \beta, \cdots$ toman los valores $0, 1, 2, 3$, mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores $j, k, l = 1, 2, 3$.

Borrador Preliminar

siglo XIX, y por decirlo de alguna manera, son híbridos o generalizaciones a un plano hipercomplejo. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Hoy encontramos aplicaciones del álgebra de cuaterniones en Física[13] y más recientemente ha tenido alguna utilización en computación gráfica que discutiremos en el próximo problema dentro del contexto del álgebra geométrica y las álgebras de Grassman.

Basándonos en este esquema podemos definir la "tabla de multiplicación" para los cuaterniones cartesianos como:

$\lvert q_i\rangle \odot \lvert q_j\rangle$	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
1	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	-1	$\lvert q_3\rangle$	$-\lvert q_2\rangle$
$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_3\rangle$	-1	$\lvert q_1\rangle$
$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_1\rangle$	-1

Nótese que por el hecho de que:

$$\lvert q_j\rangle \odot \lvert q_j\rangle = -1 \Rightarrow \lvert q_1\rangle \odot \lvert q_1\rangle = \lvert q_2\rangle \odot \lvert q_2\rangle = \lvert q_3\rangle \odot \lvert q_3\rangle = -1\,,$$

se puede pensar que un cuaternión es la generalización de los números complejos a más de una dimensión (un número hipercomplejo), donde la parte imaginaria tendría tres dimensiones y no una como es costumbre.

Esto es,

$$\lvert a\rangle = a^\alpha \lvert q_\alpha\rangle = a^0 \underbrace{\lvert q_0\rangle}_{1} + a^j \lvert q_j\rangle = a^0 + \underbrace{a^1 \lvert q_1\rangle + a^2 \lvert q_2\rangle + a^3 \lvert q_3\rangle}_{\text{"parte compleja"}}\,.$$

Siendo consistente con esa visión de generalización de un número complejo, definiremos el conjugado de un cuaternión como:

$$\lvert b\rangle^{\maltese} = b^0 \lvert q_0\rangle - b^j \lvert q_j\rangle\ ,$$

con $j = 1, 2, 3$.

Es decir, en analogía con los números complejos el conjugado de un cuaternión cambia el signo de su "parte compleja vectorial".

Igualmente, definiremos la suma entre cuaterniones de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} \lvert a\rangle = a^\alpha \lvert q_\alpha\rangle \\ \\ \lvert b\rangle = b^\alpha \lvert q_\alpha\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \lvert c\rangle = c^\alpha \lvert q_\alpha\rangle = \lvert a\rangle + \lvert b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha) \lvert q_\alpha\rangle \ \Rightarrow\ c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha)\ .$$

Esto quiere decir que los vectores se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación por un escalar queda definida por $\alpha \lvert c\rangle = \alpha c^\alpha \lvert q_\alpha\rangle$, es decir se multiplica el escalar por cada componente.

Con la información anterior, responda las siguientes preguntas:

(a). Compruebe si los cuaterniones, $\lvert a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenada cartesianas.

(b). Dados dos cuaterniones cualesquiera $\lvert b\rangle \equiv \left(b^0, \mathbf{b}\right)$ y $\lvert r\rangle \equiv \left(r^0, \mathbf{r}\right)$, y su tabla de multiplicación,

[13] Hace algunas décadas se dio una discusión sobre la importancia de utilizar esta representación en Física Cuántica. Pueden consultar:

- Berezin, A. V., Kurochkin, Y. A., & Tolkachev, E. A. (1989). Quaternions in relativistic physics. Nauka i Tekhnika, Minsk.
- Girard, P. R. (1984). The quaternion group and modern physics. European Journal of Physics, 5(1), 25.
- Horwitz, L. P., & Biedenharn, L. C. (1984). Quaternion quantum mechanics: second quantization and gauge fields. Annals of Physics, 157(2), 432-488.

Borrador Preliminar

muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow \left(d^0, \mathbf{d}\right) = \left(b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ r^0\mathbf{b} + b^0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}\right) ,$$

donde $\cdot$ y $\times$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.

(c). Ahora con índices: dados $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$, compruebe si el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser siempre escrito de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a\,|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha\,|q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k\,|q_i\rangle \ .$$

donde a representa un número, $S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$ (recuerde que los índices latinos toman los valores $j, k, l = 1, 2, 3$, mientras $\alpha = 0, 1, 2, 3$), donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$, que la cantidad S^{ij} es simétrica, y por lo tanto $\left(S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha\right)|q_j\rangle$.
Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k:[14]

$$A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to \left(A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k\right)|q_i\rangle \ .$$

(d). Identifique las cantidades: a, $S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$, en términos de las componentes de los cuaterniones. ¿El producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores? Explique por qué.

(e). Compruebe si las matrices de Pauli y la identidad

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \sigma_0 \equiv \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$. Seguidamente muestre que matrices complejas 2×2 del tipo:

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} ,$$

pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x + iy$ y $w = a + ib$ son números complejos. Las Matrices de Pauli aparecen en mecánica cuántica cuando se tiene en cuenta la interacción del espín de una partícula con un campo electromagnético externo y en estas notas las consideraremos en varios momentos (ver, por ejemplo los ejercicios de las secciones 4.3.7 y 4.7.7)

(f). Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones son: la matriz identidad y las matrices reales 4×4 de la forma:

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(g). Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\widetilde{\langle a\,|b\rangle} = |a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle \ .$$

(h). Modifique un poco la definición anterior de tal forma que:

$$\langle a\,|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a\,|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a\,|b\rangle} \odot |q_1\rangle\right] ,$$

y compruebe si esta definición compleja del producto interno cumple con todas las propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma $|f\rangle = f^0 + f^1\,|q_1\rangle$ es un número complejo convencional.

[14] Para familiarizarse con las expresiones vectoriales con la notación de índices puede consultar la sección 1.4.

Borrador Preliminar

(i). Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones:

$$n(|b\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a\,|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{\maltese} \odot |a\rangle}\,.$$

(j). Compruebe si un cuaternión definido por:

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\maltese}}{\||a\rangle\|^2}\,,$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|a\rangle$, respecto a la multiplicación $\odot$.

(k). Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a una operación multiplicación $\odot$.

(l). Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas, $|v\rangle$, pueden ser representados como cuaterniones, donde la parte escalar es nula $v^0 = 0 \to |v\rangle = v^j\,|q_j\rangle$. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma:

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle\ .$$

Estos es: $\||v'\rangle\|^2 = \left(v^{1'}\right)^2 + \left(v^{2'}\right)^2 + \left(v^{3'}\right)^2 \equiv \left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2 = \||v\rangle\|^2$.

7. En el mismo espíritu de los cuaterniones considerados previamente estudiemos el siguiente problema.

Consideremos otra vez el espacio $\mathbb{R}^3$ expandido por la base ortonormal estándar $\left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$. Supongamos en este espacio el producto de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (o $|a\rangle$ y $|b\rangle$ en la notación de vectores abstractos de Dirac) definido a la manera del *álgebra geométrica*. Esto es:

$$|a\rangle \bigodot |b\rangle \equiv \mathbf{ab} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\,,$$

con $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$, representando la parte conmutativa de $\mathbf{ab}$ y $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ su parte anticonmutativa. Esta última parte se relaciona con el producto vectorial estándar de la representación de Gibbs como: $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = i\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, con $i = \hat{\mathbf{i}}\wedge\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}}$ un pseudoescalar.

Figura 2.2: Se ilustran los vectores ortonormales estándares $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$ y como siempre $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}$.

Este formalismo ha tenido cierto impacto en computación gráfica[15] y lo vamos a utilizar para modelar transformaciones de objetos en el espacio. Considere el caso 2D representado en la figura 2.2, en el formalismo de álgebra geométrica el objeto triángulo lo asociamos con vector abstracto $|\triangle\rangle$, mientras que el objeto cuadrado lo representaremos como $|\square\rangle$, y el tercer objeto por $|\Uparrow\rangle$.

[15]Esta representación para objetos físicos ha tenido cierto éxito en Física clásica y cuántica; se puede consultar:

- Hestenes, D., & Sobczyk, G. (2012). Clifford algebra to geometric calculus: a unified language for mathematics and physics (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- Hestenes, D. (1971). Vectors, spinors, and complex numbers in classical and quantum physics. Am. J. Phys, 39(9), 1013-1027.
- Hestenes, D. (2003). Spacetime physics with geometric algebra. American Journal of Physics, 71(7), 691-714.
- Dressel, J., Bliokh, K. Y., & Nori, F. (2015). Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism. Physics Reports, 589, 1-71.
- Goldman, R. (2002). On the algebraic and geometric foundations of computer graphics. ACM Transactions on Graphics (TOG), 21(1), 52-86.
- Hildenbrand (2011). From Grassmann's vision to geometric algebra computing. Springer Basel.
- Hildenbrand, D., Fontijne, D., Perwass, C., & Dorst, L. (2004). Geometric algebra and its application to computer graphics. In Tutorial notes of the EUROGRAPHICS conference.
- Vince, J. (2008). Geometric algebra for computer graphics. Springer Science & Business Media

y las referencias allí citadas.

Borrador Preliminar

Entonces:

(a). Exprese los vectores: $|\triangle\rangle, |\square\rangle, |\Uparrow\rangle$ en términos de la base ortonormal estándar $\left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ (o $|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle, |\mathrm{k}\rangle$) en el formalismo de álgebra geométrica.

(b). Exprese $|\triangle\rangle \odot |\Uparrow\rangle$ en término de la base geométrica. Vale decir, si $|O_g\rangle$ es un objeto geométrico este podrá representarse en términos de una base: $|\epsilon\rangle, |\sigma\rangle, |B\rangle, |i\rangle$, donde $|\epsilon\rangle$ es un escalar; $|\sigma\rangle$ es un vector, $|B\rangle$ un bivector y, finalmente $|i\rangle$ un pseudoescalar.

(c). Encuentre la norma de cada uno de ellos y la distancia entre $|\triangle\rangle$ y $|\Uparrow\rangle$.

(d). Considere ahora la operación: $\mathbb{A}\,|\triangle\rangle = \left|\tilde{\triangle}\right\rangle$.

I. Si $\mathbb{A}_{|\mathrm{j}\rangle}$ es el operador reflexión respecto $|\mathrm{j}\rangle$, exprese en términos geométricos $\left|\tilde{\triangle}\right\rangle = \mathbb{A}_{|\mathrm{j}\rangle}\,|\triangle\rangle$ y $\mathbb{A}_{|\mathrm{i}\rangle}\left(|\triangle\rangle \odot |\Uparrow\rangle\right)$.

II. Si $\mathbb{A}_{\theta,|B\rangle}$ es el operador de rotación alrededor de un bivector $|B\rangle$ un ángulo θ. Encuentre $\mathbb{A}_{\pi/4,|B\rangle}\left(|\triangle\rangle \odot |\Uparrow\rangle\right)$ con $|B\rangle = |\mathrm{j}\rangle + |\mathrm{k}\rangle$.

III. ¿Cómo interpreta Ud. la ecuación de autovalores $\mathbb{A}\,|\triangle\rangle = 2\,|\triangle\rangle$?

(e). Considere el caso 3D en el cual $\left|\hat{\triangle}\right\rangle$ representa un tetraedro regular con la base representada por la figura 2.2 y $\left|\hat{\square}\right\rangle$, un cubo, también con su base representada en el plano de la misma figura.

I. Exprese los vectores: $\left|\hat{\triangle}\right\rangle, \left|\hat{\square}\right\rangle$ en términos de la base ortonormal estándar $\left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ y el formalismo de álgebra geométrica.

II. Exprese $\left(\left|\hat{\triangle}\right\rangle \odot |\Uparrow\rangle\right) \odot |\triangle\rangle$ en término de la base geométrica.

III. Encuentre la norma de $\left|\hat{\triangle}\right\rangle$ y la distancia entre $\left|\hat{\triangle}\right\rangle$ y $\mathbb{A}_{\pi/2,|-\mathrm{j}\rangle}\left|\hat{\square}\right\rangle$.

IV. Exprese $\left[\mathbb{A}_{\pi/2,|-\mathrm{j}\rangle}, \mathbb{B}_{\pi/4,|\mathrm{i}\rangle}\right]\left|\hat{\square}\right\rangle$, con $\left[\mathbb{A}_{\pi/2,|-\mathrm{j}\rangle}, \mathbb{B}_{\pi/4,|\mathrm{i}\rangle}\right] = \mathbb{A}_{\pi/2,|-\mathrm{j}\rangle}\mathbb{B}_{\pi/4,|\mathrm{i}\rangle} - \mathbb{B}_{\pi/4,|\mathrm{i}\rangle}\mathbb{A}_{\pi/2,|-\mathrm{j}\rangle}$.

8. En Geometría Diferencial podemos considerar a $\mathbb{R}^3$ como un conjunto de puntos (una variedad o espacio topológico), es decir, $\mathbb{R}^3$ no es un espacio vectorial como se definió con anterioridad. En un punto q cualquiera podemos generar un plano $\mathbb{R}^2$, entendido también como un conjunto de puntos, y definir el siguiente conjunto $T_q\mathbb{R}^2 = \{$el conjunto de todos los vectores geométricos (flechas) con origen en q que son tangentes al plano $\mathbb{R}^2\}$. Notemos que la idea la podemos extender para cualquier superficie, por ejemplo, una esfera $\mathbb{S}^2$ (embebida en $\mathbb{R}^3$) y sobre la esfera seleccionar un punto arbitrario q. A partir de este punto q generar un plano y construir el conjunto $T_q\mathbb{S}^2 = \{$el conjunto de todos los vectores geométricos con origen en q que son tangentes a la esfera $\mathbb{S}^2\}$.

(a). ¿Es $T_q\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial?

(b). Claramente podemos seleccionar otro punto arbitrario, pero diferente de q, digamos p y construir el conjunto $T_p\mathbb{R}^2$. ¿Son estos dos espacios isomorfos?

9. Consideremos ahora el conjunto de todas las funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Esto es, que existen todas las derivadas parciales en $q \in \mathbb{R}^3$:

$$\partial_x f(x^i)\,,\ \partial_y f(x^i)\,,\ \partial_z f(x^i) \ \in\ \mathbb{R}\ \forall\ (x^i)\ \in\ \mathbb{R}^3\,.$$

Note que hemos supuesto un sistema de coordenadas cartesiano $x^i = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ y que las derivadas son evaluadas en q.

Consideremos el espacio tangente $T_q\mathbb{R}^3$ en un punto q arbitrario y un vector $|u_q\rangle \in T_q\mathbb{R}^3$ con componentes $\left(u^1, u^2, u^3\right)$, podemos definir el siguiente operador (operador derivada direccional) en q siguiendo a $|u_q\rangle$:

$$|U_q\rangle = \left(u^1\partial_x + u^2\partial_y + u^3\partial_z\right)_q\,.$$

Borrador Preliminar

Por lo tanto:

$$|U_q\rangle\, f \equiv \left(u^1\partial_x + u^2\partial_y + u^3\partial_z\right)_q f = u^1(\partial_x f)_q + u^2(\partial_y f)_q + u^3(\partial_z f)_q\,.$$

Es posible entonces construir el conjunto de los operadores derivadas direccionales que actúan sobre las funciones f:

$$\mathcal{D}_q(\mathbb{R}^3) = \{|U_q\rangle = \left(u^1\partial_x + u^2\partial_y + u^3\partial_z\right)_q \ \forall\ |u_q\rangle \ \in\ T_q\mathbb{R}^3\}\,.$$

c) ¿Es $\mathcal{D}_q$ un espacio vectorial?

d) ¿Los espacios $\mathcal{D}_q$ y $T_q\mathbb{R}^3$ son isomorfos?

Borrador Preliminar

Practicando con Maxima

1. **Espacios y subespacios vectoriales** Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{K}^n$, definido en $\boldsymbol{K} = \mathbb{R}$ y donde n es un entero positivo. Consideremos el caso $n = 4$. El producto de un elemento de $\boldsymbol{K}^4$, digamos $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ por un escalar $\alpha \in \boldsymbol{K}$ resulta en otro elemento de $\boldsymbol{K}^4$.
Primero introducimos los elementos como listas:

```
(%i1) X:[x1,x2,x3,x4]; Y:[y1,y2,y3,y4]; Z:[z1,z2,z3,z4];
```
(%o1) $[x_1, x_2, x_3, x_4]$
(%o2) $[y_1, y_2, y_3, y_4]$
(%o3) $[z_1, z_2, z_3, z_4]$

```
(%i4) alpha*X=Y;
```
(%o4) $[\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \alpha\, x_3, \alpha\, x_4] = [y_1, y_2, y_3, y_4]$

El resultado es un elemento del espacio vectorial $\boldsymbol{K}^4$.
La suma de $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ y $|y\rangle = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ será:

```
(%i5) X+Y=Z;
```
(%o5) $[y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3, y_4 + x_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$

con $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \boldsymbol{K}^4$.
Podemos ver rápidamente que el conjunto de vectores que tienen la forma $(x_1, x_2, x_3, 0)$ conforman un subespacio de $\boldsymbol{K}^4$, ya que:

```
(%i6) map(":",[x4,y4,z4],[0,0,0]);
```
(%o6) $[0, 0, 0]$

```
(%i7) X:[x1,x2,x3,x4];Y:[y1,y2,y3,y4];Z:[z1,z2,z3,z4];
```
(%o7) $[x_1, x_2, x_3, 0]$
(%o8) $[y_1, y_2, y_3, 0]$
(%o9) $[z_1, z_2, z_3, 0]$

```
(%i10) alpha*X+beta*Y=Z;
```
(%o10) $[\beta\, y_1 + \alpha\, x_1, \beta\, y_2 + \alpha\, x_2, \beta\, y_3 + \alpha\, x_3, 0] = [z_1, z_2, z_3, 0]$

Para recobrar las variables x_4, y_4, z_4 escribimos:

```
(%i11) kill(x4,y4,z4)$
(%i12) X:[x1,x2,x3,x4]; Y:[y1,y2,y3,y4]; Z:[z1,z2,z3,z4];
```
(%o12) $[x_1, x_2, x_3, x_4]$
(%o13) $[y_1, y_2, y_3, y_4]$
(%o14) $[z_1, z_2, z_3, z_4]$

Para calcular el producto interno entre vectores es necesario utilizar la biblioteca **eigen**.

```
(%i15) load("eigen")$
(%i16) innerproduct(X,Y);
```
(%o16) $x_4\, y_4 + x_3\, y_3 + x_2\, y_2 + x_1\, y_1$

Borrador Preliminar

Consideremos ahora $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{K}^n$, definido en $\boldsymbol{K} = \mathbb{C}$, con $n = 3$. Por lo tanto, los vectores serán ahora de la siguiente forma: $z = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3)$.

```
(%i17) Z1:[x1+%i*y1,x2+%i*y2,x3+%i*y3]; Z2:[u1+%i*v1,u2+%i*v2,u3+%i*v3];
```
(%o17) $[i\,y_1 + x_1, i\,y_2 + x_2, i\,y_3 + x_3]$

(%o18) $[i\,v_1 + u_1, i\,v_2 + u_2, i\,v_3 + u_3]$

Y los escalares de la forma $\alpha = a + ib$.

```
(%i19) alpha:a+%i*b;
```
(%o19) $i\,b + a$

El producto por el escalar α es:

```
(%i20) Z3:alpha*Z1;
```
(%o20) $[(i\,b + a)\ (i\,y_1 + x_1), (i\,b + a)\ (i\,y_2 + x_2), (i\,b + a)\ (i\,y_3 + x_3)]$

```
(%i21) map(rectform,Z3);
```
(%o21) $[i\ (a\,y_1 + b\,x_1) - b\,y_1 + a\,x_1, i\ (a\,y_2 + b\,x_2) - b\,y_2 + a\,x_2, i\ (a\,y_3 + b\,x_3) - b\,y_3 + a\,x_3]$

```
(%i22) map(realpart,Z3),factor; map(imagpart,Z3),factor;
```
(%o22) $[-(b\,y_1 - a\,x_1), -(b\,y_2 - a\,x_2), -(b\,y_3 - a\,x_3)]$

(%o23) $[a\,y_1 + b\,x_1, a\,y_2 + b\,x_2, a\,y_3 + b\,x_3]$

Calculemos ahora el producto interno:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + iy_1)^*(u_1 + iv_1) + (x_2 + iy_2)^*(u_2 + iv_2) + (x_3 + iy_3)^*(u_3 + iv_3)\,.$$

```
(%i24) Z4:innerproduct(Z1,Z2);
```
(%o24) $(v_3 - iu_3)\,y_3 + (v_2 - iu_2)\,y_2 + (v_1 - iu_1)\,y_1 + (iv_3 + u_3)\,x_3 + (iv_2 + u_2)\,x_2 + (iv_1 + u_1)\,x_1$

```
(%i25) Re:map(realpart,Z4)$ Im:map(imagpart,Z4)$
(%i26) Re+%i*Im;
```
(%o26) $i\,(-u_3y_3 - u_2y_2 - u_1y_1 + v_3x_3 + v_2x_2 + v_1x_1) + v_3y_3 + v_2y_2 + v_1y_1 + u_3x_3 + u_2x_2 + u_1\,x_1$

```
(%i27) kill(all)$
```

2. **Producto de polinomios** Consideremos el siguiente producto escalar entre elementos de un espacio vectorial de polinomios:

$$\langle p_i\,|p_j\rangle = \int_a^b p_i(x)p_j(x)\mathrm{d}x\,.$$

Vamos a encontrar la distancia y el ángulo entre los vectores $|x_1\rangle = x(x-1)$ y $|x_2\rangle = x$ en dos intervalos diferentes: $[0, 1]$ y $[-1, 1]$

Debemos introducir los objetos a multiplicar:

```
(%i1) P1:x*(x-1); P2:x;
```
(%o1) $(x - 1)\ x$

(%o2) x

Ahora calculamos las distancias entre los vectores para ambos intervalos. Haremos gala de algunas posibilidades que ofrece el programa para escribir las expresiones.

Borrador Preliminar

```
(%i3) sqrt('integrate(((P1-P2)^ 2),x,-1,1))=sqrt(integrate(((P1-P2)^ 2),x,-1,1));
```

(%o3) $$\sqrt{\int_{-1}^{1} ((x-1)\ x-x)^2\ dx} = \frac{\sqrt{46}}{\sqrt{15}}$$

```
(%i4) sqrt('integrate(((P1-P2)^ 2),x,0,1))=sqrt(integrate(((P1-P2)^ 2),x,0,1));
```

(%o4) $$\sqrt{\int_{0}^{1} ((x-1)\ x-x)^2\ dx} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{15}}$$

El ángulo entre los polinomios definidos en el intervalo $[-1, 1]$ es:

```
(%i5) 'integrate((P1*P2),x,-1,1)/(sqrt('integrate((P1*P1),x,-1,1))*sqrt('integrate((P2*P2),x,-1,1)));
```

(%o5) $$\frac{\int_{-1}^{1} (x-1)\ x^2\ dx}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\ dx}\ \sqrt{\int_{-1}^{1} (x-1)^2\ x^2\ dx}}$$

```
(%i6) ev(%,integrate);
```

(%o6) $$-\frac{\sqrt{15}}{2^{\frac{3}{2}}\ \sqrt{3}}$$

```
(%i7) acos(%),numer;
```

(%o7) 2.482534617763384

Y ahora, el ángulo entre los polinomios definidos en el intervalo $[0, 1]$:

```
(%i8) 'integrate((P1*P2),x,0,1)/(sqrt('integrate((P1*P1),x,0,1))* sqrt('integrate((P2*P2),x,0,1)));
```

(%o8) $$\frac{\int_{0}^{1} (x-1)\ x^2\ dx}{\sqrt{\int_{0}^{1} x^2\ dx}\ \sqrt{\int_{0}^{1} (x-1)^2\ x^2\ dx}}$$

```
(%i9) ev(%,integrate);
```

(%o9) $$-\frac{\sqrt{30}}{4\ \sqrt{3}}$$

```
(%i10) acos(%),numer;
```

(%o10) 2.482534617763384

Borrador Preliminar

2.3 Variedades lineales

Si tenemos una cantidad de vectores: $\{|\mathrm{w}_1\rangle, |\mathrm{w}_2\rangle, |\mathrm{w}_3\rangle, \dots\} \in \boldsymbol{V}$, entonces una variedad lineal generada por este conjunto se entenderá como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas:

$$\alpha\,|\mathrm{w}_1\rangle + \beta\,|\mathrm{w}_2\rangle + \gamma\,|\mathrm{w}_3\rangle + \cdots ,$$

donde los coeficientes: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pertenecen al campo $\boldsymbol{K}$.

Se puede comprobar que esta variedad lineal es un subespacio de $\boldsymbol{V}$. Claramente, todo subespacio que contenga los vectores $\{|\mathrm{w}_1\rangle, |\mathrm{w}_2\rangle, |\mathrm{w}_3\rangle, \dots\}$ también contiene todas sus combinaciones lineales, por lo tanto, la variedad lineal generada de esta manera es el subespacio más pequeño que contiene al conjunto de estos vectores.

Una variedad lineal sencilla de construir en $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ la constituye un par de vectores no colineales. La variedad lineal generada por estos dos vectores será el conjunto de todos los vectores paralelos al plano determinado por este par de vectores no colineales. Mientras que la variedad lineal generada por los vectores: $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\} \in \mathbb{R}^3$ es el mismo espacio entero $\mathbb{R}^3$.

Pasemos ahora a considerar el problema de construir una base para una variedad lineal y a partir de allí determinar la dimensión de la variedad.

2.3.1 Dependencia/Independencia lineal

Siguiendo la misma línea de razonamiento que en las secciones 1.1.3 y 1.2.5, generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Dada la ecuación

$$|0\rangle = C_1\ |v_1\rangle + C_2\ |v_2\rangle + C_3\ |v_3\rangle \cdots + C_n\ |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |v_i\rangle\ , \tag{2.7}$$

las cantidades C_i son llamados los coeficientes de la combinación lineal.

Podemos afirmar que:

- Si esta ecuación se cumple para algún conjunto de $\{C_i\}$ no nulos, se dirá que el conjunto de vectores correspondiente $\{|v_i\rangle\}$ son **linealmente dependientes.**
- Por el contrario, si esta ecuación **sólo** puede ser satisfecha para todos los $C_i = 0$, entonces se dirá que el conjunto de vectores correspondiente $\{|v_i\rangle\}$ son **linealmente independientes.**

Notemos que la suma que aparece aquí es necesariamente una suma finita, y cuando un determinado conjunto de vectores es linealmente dependiente, entonces uno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los demás.

2.3.2 Bases de un espacio vectorial

Ahora bien, dado un espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle \cdots, |v_n\rangle\}$, si encontramos que el conjunto de $\{|v_n\rangle\}$ es linealmente dependiente, entonces siempre es posible despejar uno de los vectores en términos de los demás, vale decir:

$$|v_n\rangle = \bar{C}_1\ |v_1\rangle + \bar{C}_2\ |v_2\rangle + \bar{C}_3\ |v_3\rangle \cdots + \bar{C}_{n-1}\ |v_{n-1}\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{C}_i\ |v_i\rangle\ .$$

Seguidamente podemos proceder a comprobar si $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle \cdots, |v_{n-1}\rangle\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, es decir: $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = \cdots = \bar{C}_{n-1} = 0$.

Borrador Preliminar

En caso de no serlo se procede otra vez a despejar uno de los vectores en términos de los anteriores y aplicar el criterio de independencia lineal:

$$|v_{n-1}\rangle = \tilde{C}_1\ |v_1\rangle + \tilde{C}_2\ |v_2\rangle + \tilde{C}_3\ |v_3\rangle \cdots + \tilde{C}_{n-2}\ |v_{n-2}\rangle = \sum_{i=1}^{n-2} \tilde{C}_i\ |v_i\rangle\ ,$$

nuevamente se comprueba si se cumple: $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2\ = \tilde{C}_3\ = \cdots = \tilde{C}_{n-2} = 0$.

En caso contrario, se repite este procedimiento hasta encontrar un conjunto: $\{|v_1\rangle\ ,\ |v_2\rangle\ ,\ |v_3\rangle \cdots ,|v_{n-j}\rangle\}$ de vectores linealmente independientes. Esto es: $\breve{C}_1\ = \breve{C}_2\ = \breve{C}_3\ = \cdots = \breve{C}_{n-j} = 0$.

Por lo tanto:

$$|v_{n-j+1}\rangle = \breve{C}_1\ |v_1\rangle + \breve{C}_2\ |v_2\rangle + \breve{C}_3\ |v_3\rangle \cdots + \breve{C}_{n-j}\ |v_{n-j}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} \breve{C}_i\ |v_i\rangle\ .$$

Diremos entonces que $\{|v_1\rangle\,,|v_2\rangle\,,|v_3\rangle\,,\cdots\,,|v_{n-j}\rangle\}$ forman una base para el espacio vectorial $\boldsymbol{V}$.

Es importante señalar, que la dimensión de $\boldsymbol{V}$ será el número de vectores linealmente independientes, que para este caso será: dim $\boldsymbol{V} = n - j$.

Entonces, se puede comprobar que, dado un vector arbitrario $|x\rangle \in \boldsymbol{V}$, se tiene que:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} C_i\ |v_i\rangle\ \ \forall\ \ |x\rangle \in \boldsymbol{V},$$

y el conjunto $\{C_1, C_2, C_3, \cdots C_{n-j}\}$ será único.

Diremos que el número mínimo de vectores: $|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle\,,\cdots\,,|v_{n-j}\rangle$ que expanden $\boldsymbol{V}$ conforman una base de ese espacio vectorial, y que el número finito de cantidades $C_1, C_2, C_3, \cdots C_{n-j}$, constituyen las *componentes* de $|x\rangle$ relativas a la base $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\cdots\,,|v_{n-j}\rangle\}$.

Queda claro que el vector cero, $|0\rangle$, es linealmente dependiente, y cualquier conjunto de vectores que lo contenga es un conjunto linealmente dependiente de vectores.

De lo anteriormente expuesto se puede concretar la siguiente definición para una base de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$:

Definición 2.1 (Bases de un espacio vectorial)

Un conjunto finito de vectores:

$$\mathcal{B} = \{|v_1\rangle\,,|v_2\rangle\,,|v_3\rangle\,,\cdots\,,|v_n\rangle\} \in \boldsymbol{V}\,,$$

se les denominará base del espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ si los vectores: $|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle\,,\cdots\,,|v_n\rangle$, son linealmente independientes y expanden $\boldsymbol{V}$. Diremos entonces que $\mathcal{B}$ es un sistema generador de $\boldsymbol{V}$.

Es fácil darse cuenta que si $\boldsymbol{V}$ lo expanden n vectores linealmente independientes, cualquier otro vector $|x\rangle \in \boldsymbol{V}$ será linealmente dependiente. Igualmente, todas las bases de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, de dimensión finita, tendrán el mismo número de elementos y ese número de elemento será la dimensión del espacio, es decir, la dim $\boldsymbol{V}$ = número de vectores que forman una base del espacio.

La base más familiar en el espacio tridimensional real es el conjunto de vectores ortogonales y unitarios: $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$. Por lo tanto, como ya sabemos, la dimensión del espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ es 3. Al conjunto de vectores $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ le podemos asociar tres ejes coordenados: $\{x, y, z\}$ (decimos que le anclamos un sistema de coordenadas), de manera que las componentes C_1, C_1, C_1 de un vector $|v\rangle$ respecto a esta base son las proyecciones de $|v\rangle$ a lo largo de los ejes coordenados.

El concepto de base de un espacio vectorial es de fundamental importancia, ya que una vez especificada la base las operaciones sobre los elementos del espacio vectorial abstracto se pueden realizar ahora sobre los

Borrador Preliminar

números que representan las componentes del vector con respecto a la base. Esto significa que cuando sumamos dos vectores de un espacio vectorial abstracto $\boldsymbol{V}$, sus componentes (respecto a una base) son sumadas. Cuando multiplicamos un vector de $\boldsymbol{V}$ por un elemento α del campo $\boldsymbol{K}$, todas sus componentes son multiplicadas por α.

Adicionalmente, dentro de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ se pueden encontrar subespacios y dentro de esos subespacios un conjunto de vectores base.

Vale decir, si $\forall\ |x\rangle \in \boldsymbol{V}$:

$$|x\rangle = \underbrace{C_1\ |v_1\rangle \cdots + C_{n-j}\ |v_{n-j}\rangle}_{\boldsymbol{S}_1} + \underbrace{C_{n-j+1}\ |v_{n-j+1}\rangle \cdots C_{n-k}\ |v_{n-k}\rangle}_{\boldsymbol{S}_2} + \underbrace{C_{n-k+1}\ |v_{n-k+1}\rangle \cdots C_n\ |v_n\rangle}_{\boldsymbol{S}_3},$$

con: $|x\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + |x_3\rangle$ y $|x_1\rangle \in \boldsymbol{S}_1$; $|x_2\rangle \in \boldsymbol{S}_2$; $|x_3\rangle \in \boldsymbol{S}_3$. Entonces diremos que $\boldsymbol{V}$ es la suma directa de $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ y $\boldsymbol{S}_3$ y lo denotaremos como: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}_1 \oplus \boldsymbol{S}_2 \oplus \boldsymbol{S}_3$.

También es bueno señalar que, una vez fijada una base, las componentes de un vector según esa base, son únicas y que dada una base de un espacio vectorial, se pueden construir otras bases diferentes de ésta, como veremos más adelante.

Ejemplo 2.8 **Independencia lineal:** Presentamos otros ejemplos sobre dependencia/independencia lineal.

1. Si consideramos el espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ serán ejemplos de **independencia lineal**:
   - $|v_k\rangle \equiv f(t) = t^k$, para $k = 1, 2, 3, \cdots$. Es claro que un polinomio de grado $n+1$, no podrá ser expresado en términos un polinomio de grado n, en otras palabras: $t^{n+1} \neq \sum_{i=0}^{n} C_i\, t^i$.
   - $|v_k\rangle \equiv f(t) = e^{a_k t}$, con $a_1, a_2, a_3, \cdots$ coeficientes constantes. También salta a la vista que no podremos expresar una de esas funciones exponenciales como una combinación lineal.
2. Si consideramos: $|v_1\rangle = \cos^2(t), |v_2\rangle = \text{sen}^2(t)$ y $|v_3\rangle = 1$, es claro que $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ y $|v_3\rangle$ son **linealmente dependientes** por cuanto: $|v_1\rangle + |v_2\rangle = |v_3\rangle$. Nótese que si:
   $$|v_1\rangle = \cos(t),\ |v_2\rangle = \text{sen}(t) \text{ y } |v_3\rangle = 1,$$
   entonces $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ y $|v_3\rangle$ serán vectores **linealmente independientes**.
3. Consideremos ahora otro ejemplo en $\mathcal{P}^3$,
   $$|x_1\rangle = 1, \quad |x_2\rangle = x - 1, \quad |x_3\rangle = x^2, \quad |x_4\rangle = x^2 + 2x + 1.$$
   Podemos ver que este conjunto es linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar:
   $$|x_4\rangle = 3\,|x_1\rangle + 2\,|x_2\rangle + |x_3\rangle\ .$$

◁

2.3.3 La matriz y el determinante de Gram

Para un conjunto de vectores: $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\} \in \boldsymbol{V}$, existe una forma directa de comprobar la independencia lineal del conjunto. Dado un vector $|x\rangle \in \boldsymbol{V}$ tendremos que $|x\rangle = C^i\,|v_i\rangle$, entonces, al multiplicar ambos lados por $\langle v^i|$, resulta:

$$\begin{aligned}
\langle v^1\,|x\rangle &= C^1\,\langle v^1\,|v_1\rangle + C^2\,\langle v^1\,|v_2\rangle + C^3\,\langle v^1\,|v_3\rangle + \cdots + C^n\,\langle v^1\,|v_n\rangle \\
\langle v^2\,|x\rangle &= C^1\,\langle v^2\,|v_1\rangle + C^2\,\langle v^2\,|v_2\rangle + C^3\,\langle v^2\,|v_3\rangle + \cdots + C^n\,\langle v^2\,|v_n\rangle \\
\vdots \qquad & \qquad\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\langle v^n\,|x\rangle &= C^1\,\langle v^n\,|v_1\rangle + C^2\,\langle v^n\,|v_2\rangle + C^3\,\langle v^n\,|v_3\rangle + \cdots + C^n\,\langle v^n\,|v_n\rangle
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

donde las $C^1, C^2, C^3, \cdots C^n$ son las incógnitas. Por lo cual, para que este sistema tenga solución se impone que el determinante:

$$\begin{vmatrix} \langle v^1 \,|v_1\rangle & \langle v^1 \,|v_2\rangle & \langle v^1 \,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_1 \,|v_n\rangle \\ \langle v^2 \,|v_1\rangle & \langle v^2 \,|v_2\rangle & \langle v^2 \,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_2 \,|v_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \langle v^n \,|v_1\rangle & \langle v^n \,|v_2\rangle & \langle v^n \,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_n \,|v_n\rangle \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Esto es, que el determinante de Gram[16] sea distinto de cero implica que el conjunto: $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,, \cdots, |v_n\rangle\}$ es linealmente independiente. La inversa también es cierta.

La matriz de Gram aparece de manera natural cuando estudiamos el poducto interno en un espacio vectorial. Sea $\boldsymbol{V}^n$ un espacio vectorial de dimensión n con una base $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle\,, |v_2\rangle\,, |v_3\rangle\,, \cdots, |v_n\rangle\}$. Consideremos también que en $\boldsymbol{V}^n$ existe un producto escalar $\langle x\,|y\rangle$. Entonces, para dos vectores cualesquiera $|x\rangle$ y $|y\rangle$ expandidos en esa base $\mathcal{B}$ resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle x\,|y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \left[\sum_{j=1}^{n} y_j \langle v^i \,|v_j\rangle \right] \\ &= (x_1^*\ x_2^*\ x_3^* \cdots x_n^*) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} y_j \langle v^1 \,|v_j\rangle \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \langle v^2 \,|v_j\rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} y_j \langle v^n \,|v_j\rangle \end{pmatrix} \\ &= (x_1^*\ x_2^*\ x_3^* \cdots x_n^*) \begin{pmatrix} \langle v^1 \,|v_1\rangle & \langle v^1 \,|v_2\rangle & \cdots & \langle v^1 \,|v_n\rangle \\ \langle v^2 \,|v_1\rangle & \langle v^2 \,|v_2\rangle & \cdots & \langle v^2 \,|v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle v^n \,|v_1\rangle & \langle v^n \,|v_2\rangle & \cdots & \langle v^n \,|v_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\langle x\,|y\rangle = \left(|x\rangle^t\right)^* G\,|y\rangle \tag{2.8}$$

La matriz G se llama la matriz de Gram para el producto escalar respecto a la base $\mathcal{B}$. En el caso de espacios vectoriales reales la matriz de Gram es simétrica: $G_{ij} = G_{ji}$, y en el caso complejo es hermítica o autoadjunta: $(G_{ij}^t)^* = G_{ij}$, es decir, es igual a su transpuesta compleja conjugada.

Ejemplo 2.9 El espacio vectorial $\boldsymbol{V}^n$ tendrá dimensión n y una de las posibles bases $\{|v_i\rangle\}$ será:

$$|v_1\rangle = (1, 0, 0, \cdots, 0)\ ,\ |v_2\rangle = (0, 1, 0, \cdots, 0)\ ,\ |v_3\rangle = (0, 0, 1, \cdots, 0)\ , \ldots,\ |v_n\rangle = (0, 0, 0, \cdots, 1)\ .$$

Esta base se conoce con el nombre de base canónica, la base con la que aprendimos el álgebra vectorial en $\mathbb{R}^3 : \{\hat{\mathbf{i}}_i\} = \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$.

◁

Ejemplo 2.10 Es fácil ver que la matriz de Gram para el producto escalar respecto a la base canónica $\{\hat{\mathbf{i}}_i\}$ en

[16] Jørgen Pedersen Gram (1850-1916) Es conocido mayormente por el método de ortogonalización, pero aparentemente fue ideado por Laplace y utilizado también por Cauchy en 1836. https://en.wikipedia.org/wiki/J\OT1\orgen_Pedersen_Gram

Borrador Preliminar

$\mathbb{R}^n$ es la matriz identidad. Para dos vectores $|x\rangle$ y $|y\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle x\,|y\rangle &= (x_1\ x_2\ x_3 \cdots x_n)\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\,.\end{aligned}$$

◁

Ejemplo 2.11 El espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ tendrá como una de las posibles bases al conjunto: $\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\}$, porque cualquier polinomio de grado $\leq n$ podrá ser expresado como combinación lineal de estos $n+1$ vectores. Más aún, el espacio de **todos** los polinomios, $\mathcal{P}^\infty$, tendrá como una posible base al conjunto de funciones: $\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n \cdots\}$. En este caso $\mathcal{P}^\infty$ será infinito dimensional.

◁

Ejemplo 2.12 Consideremos el espacio de polinomios $\mathcal{P}^3$ y la base $\{1, t, t^2\}$ con el producto interno definido como:

$$\langle p, q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t\,.$$

Por lo tanto:

$$\langle 1, 1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t = 1\,,\quad \langle 1, t\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = 0\,,\quad \langle 1, t^2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,,\cdots$$

De esta manera, la matriz de Gram respecto a la base dada es:

$$G_{\{1,t,t^2\}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\,.$$

◁

2.3.4 Ortogonalidad y bases ortogonales

En un espacio vectorial con producto interno, dos vectores $|v_1\rangle \wedge |v_2\rangle$ serán ortogonales si su producto interno se anula

$$|v_1\rangle \perp |v_2\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle v_2|v_1\rangle = 0\,.$$

Se denomina un conjunto **ortogonal** de vectores $\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ |\mathrm{e}_2\rangle,\ |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ si:

$$\langle \mathrm{e}^i|\mathrm{e}_j\rangle = \delta^i_j \||\mathrm{e}_j\rangle\|^2\,,\quad i, j = 1, 2, 3, \cdots, n \quad \text{y con} \quad \delta^i_j = \begin{cases}0 & \text{si } i \neq j\\ 1 & \text{si } i = j\end{cases}$$

En este caso , es fácil ver que la matriz de Gram es una matriz en diagonal.

Además, se denominará un conjunto **ortonormal** de vectores $\{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle, \cdots, |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle\}$ si:

$$\langle \hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^i_j\,,\quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n\,,$$

es decir, cuando $\||\mathrm{e}_j\rangle\|^2 = 1$ y la matriz de Gram será la matriz identidad.

Un conjunto ortogonal de vectores $\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ |\mathrm{e}_2\rangle,\ |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\} \in \boldsymbol{V}$ es linealmente independiente. Más aún, para el caso particular de un espacio euclidiano este conjunto conforma una base ortogonal para $\boldsymbol{V}$. La demostración es sencilla, para un determinado espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ una combinación lineal de los vectores:

Borrador Preliminar

$\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ |\mathrm{e}_2\rangle,\ |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ se anula. Veamos:

$$\sum_{i=1}^{n} C^i|\mathrm{e}_i\rangle = |0\rangle \ \Rightarrow \ \begin{cases} \langle \mathrm{e}^1| \left[\sum_{i=1}^n C^i|\mathrm{e}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^n C^i\delta_i^1 = 0 & \Rightarrow & C^1 = 0 \\ \langle \mathrm{e}^2| \left[\sum_{i=1}^n C^i|\mathrm{e}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^n C^i\delta_i^2 = 0 & \Rightarrow & C^2 = 0 \\ \langle \mathrm{e}^3| \left[\sum_{i=1}^n C^i|\mathrm{e}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^n C^i\delta_i^3 = 0 & \Rightarrow & C^3 = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \langle \mathrm{e}^n| \left[\sum_{i=1}^n C^i|\mathrm{e}_i\rangle\right] = 0 & \Rightarrow & \sum_{i=1}^n C^i\delta_i^n = 0 & \Rightarrow & C^n = 0 \end{cases}$$

entonces, queda claro que: $\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ |\mathrm{e}_2\rangle,\ |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ son un conjunto de vectores linealmente independientes.

Si la dimensión de $\boldsymbol{V}$ es n ($\dim \boldsymbol{V} = n$) y tenemos n vectores linealmente independientes, entonces esos n vectores $\{|\mathrm{e}_1\rangle,\ |\mathrm{e}_2\rangle,\ |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ forman una base ortogonal para $\boldsymbol{V}$, y por lo tanto, las componentes de un vector en esa base se pueden expresar de manera simple:

$$\forall |x\rangle \in \boldsymbol{V} \ \Rightarrow \ |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C^i|\mathrm{e}_i\rangle \ \Rightarrow \ \langle \mathrm{e}^j|x\rangle = \langle \mathrm{e}^j| \left[\sum_{i=1}^{n} C^i\ |\mathrm{e}_i\rangle\right] \ \Rightarrow \ C^j = \frac{\langle \mathrm{e}^j|x\rangle}{\langle \mathrm{e}^j|e_j\rangle} = \frac{\langle \mathrm{e}^j|x\rangle}{\||\mathrm{e}_j\rangle\|^2}\,.$$

En el caso de un conjunto ortonormal de vectores $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\} \in \boldsymbol{V}^n$, las componentes de cualquier vector quedan determinadas de una forma todavía más simple y con consecuencias mucho más impactantes:

$$\text{Si } \||\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\|^2 = 1 \ \Rightarrow \ C^i = \langle \hat{\mathrm{e}}^i|x\rangle \ \Rightarrow \ |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C^i|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\mathrm{e}}^i|x\rangle\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \equiv \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^i|}_{1}x\rangle\,.$$

Es bueno recalcar la relación de cierre[17]

$$\sum_{i=1}^{n} |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^i| = 1\,, \tag{2.9}$$

con lo cual es trivial demostrar la fórmula de Parseval:

$$\forall |x\rangle, |y\rangle \in \boldsymbol{V} \ \Rightarrow \ \langle y|x\rangle \equiv \langle y| \left(\sum_{i=1}^{n} |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^i|\right) |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle y|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^i|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle y|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\langle x|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle^*\,,$$

para el caso de $|x\rangle \equiv |y\rangle$ se llega a la generalización del teorema de Pitágoras:

$$\langle x|x\rangle \equiv \||x\rangle\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle|^2\,.$$

Consideremos un par de ejemplos de bases ortogonales en espacio funcionales:

Ejemplo 2.13 **Funciones trigonométricas:** Uno de los ejemplos más emblemáticos es el caso de las funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, con el producto interno definido por:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)\,, \tag{2.10}$$

esto es, el conjunto de funciones $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ representadas por:

$$|\mathrm{e}_0\rangle = 1, \quad |\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx) \quad \text{y} \quad |\mathrm{e}_{2n}\rangle = \mathrm{sen}(nx), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \cdots \tag{2.11}$$

[17] La relación de cierre expresa una propiedad importante de los vectores base: si los $|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle$ se multiplican por la derecha por los $\langle \hat{\mathrm{e}}^i|$, el resultado, luego de sumar para todos los vectores, es el operador lineal unitario. Se dice también que el conjunto de vectores $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}$ forman un conjunto completo.

Borrador Preliminar

Es claro que $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle, \cdots\}$ es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto:

$$\langle \mathrm{e}^n \,|\mathrm{e}_m\rangle = \delta^n_m \, \||\mathrm{e}_n\rangle\|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n \neq m \quad \Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \mathrm{sen}(nx)\mathrm{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \cos(nx)\mathrm{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \cos(nx)\cos(mx) = 0 \end{cases} \\ \\ \||\mathrm{e}_n\rangle\|^2 \quad \text{si} \quad n = m \quad \Rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, = 2\pi & \text{si} \quad n = m = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \cos^2(nx) = \pi & \text{si} \quad n = m = 2k-1 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, \mathrm{sen}^2(nx) = \pi & \text{si} \quad n = m = 2k \end{cases} \end{cases}$$

con $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Claramente, podremos construir una base ortonormal de funciones: $\{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle, \cdots\}$ de la forma:

$$|\hat{\mathrm{e}}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |\hat{\mathrm{e}}_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) \quad \text{y} \quad |\hat{\mathrm{e}}_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sen}(nx).$$

Por lo tanto, dada una función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$, podremos expresarla en términos de la base ortogonal como:

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C^i \, |\mathrm{e}_i\rangle \Rightarrow C^i = \langle \mathrm{e}^i \,|f\rangle = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, f(x) = C^0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, f(x) \, \cos(nx) = C^{2n-1} & \text{si} \quad i = 2n-1 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \, f(x) \, \mathrm{sen}(nx) = C^{2n} & \text{si} \quad i = 2n \end{cases}$$

donde los C^i son los coeficientes de Fourier.

◁

Ejemplo 2.14 **Polinomios de Legendre:** Otro de los ejemplos típicos son los llamados polinomios de Legendre, $P_n(x)$, definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Estos polinomios pueden ser generados a partir de la Fórmula de Rodrigues[18]

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.12}$$

con $P_0(x) = 1$.

Algunos de estos polinomios son los siguientes:

$$P_1(x) = x, \; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \; P_3(x) = \frac{x}{2}(5x^2-3), \; P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \ldots$$

los polinomios de Legendre son soluciones de la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)\, y'' - 2x\, y' + \lambda(\lambda+1)y = 0\,.$$

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre $|P_\alpha\rangle = P_\alpha(x)$ son mutuamente ortogonales con un producto interno definido como,

$$\langle P_n \,|P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}\,, \tag{2.13}$$

y con una norma definida por,

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n \,|P_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\,. \tag{2.14}$$

[18] Benjamin Olinde Rodrigues (1794-1851). https://es.wikipedia.org/wiki/Olinde_Rodrigues

Borrador Preliminar

Por lo tanto, cualquier función en el intervalo $[-1, 1]$ puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = |f\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ |P_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle P_k \ |F\rangle}{\langle P_k \ |P_k\rangle} \ |P_k\rangle \ . \tag{2.15}$$

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \, |P_k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a^n P_n(x) \, ,$$

y los coeficientes a^n se determinan fácilmente a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, para el caso de $f(x) = x^2$ tendremos

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a^0 P_0(x) + a^1 P_1(x) + a^2 P_2(x) \\ &= a^0 + a^1 x + \frac{1}{2} a^2 (3x^2 - 1) = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x) \, . \end{aligned}$$

Quedará como ejercicio demostrar que para el caso

$$g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle P_k \ |g\rangle}{\langle P_k \ |P_k\rangle} \ |P_k\rangle = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)} \, ,$$

con

$$\langle P_k \ |g\rangle = \int_{-1}^{1} g(x) P_k(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

◁

2.3.5 Ortogonalización

Hemos visto que un conjunto de vectores ortogonales forman una base para un espacio vectorial. Ahora bien, siempre es posible construir un conjunto de vectores ortogonales a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. El método de "ortogonalización" se conoce como el método de Gram-Schmidt[19], en honor de estos dos matemáticos alemanes que no lo inventaron pero hicieron famoso al método que, al parecer, se le debe al matemático francés P.S. Laplace.

Consideremos, por ejemplo, un conjunto de vectores linealmente independientes, $\{|v_1\rangle \, , |v_2\rangle \, , |v_3\rangle \, , \cdots \, , |v_n\rangle\}$ que expanden un espacio euclidiano real de dimensión finita, $\boldsymbol{E}^n$. Entonces, siempre se podrá construir un conjunto ortogonal de vectores, $\{|\mathrm{e}_1\rangle \, , |\mathrm{e}_2\rangle \, , |\mathrm{e}_3\rangle \, , \cdots \, , |\mathrm{e}_n\rangle\}$, que también expandan $\boldsymbol{E}^n$, de la siguiente forma:

1. Hacemos coincidir uno de los vectores de la base dada con nuestro primer vector ortogonal:

$$|\mathrm{e}_1\rangle \equiv |v_1\rangle \ .$$

2. A partir de $|\mathrm{e}_1\rangle$ y otro de los vectores dados construimos un segundo vector:

$$|\mathrm{e}_2\rangle \equiv |v_2\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^1 | v_2\rangle}{\langle \mathrm{e}^1 | \mathrm{e}_1\rangle} |\mathrm{e}_1\rangle \qquad \backslash \quad \langle \mathrm{e}^2 | \mathrm{e}_1\rangle = 0 \, .$$

3. De esta manera podemos seguir calculando los otros vectores de la base ortogonal hasta completar los n vectores dados:

[19] Erhard Schmidt (1876-1959). Matemático alemán fundador del primer instituto de matemáticas aplicadas de Berlín. Alumno de Hilbert, Schmidt hizo sus mayores contribuciones en el campo de ecuaciones integrales y teoría de funciones en el espacio de Hilbert. https://es.wikipedia.org/wiki/Erhard_Schmidt

Borrador Preliminar

$$|\mathrm{e}_3\rangle \equiv |v_3\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^2|v_3\rangle}{\langle \mathrm{e}^2|\mathrm{e}_2\rangle}|\mathrm{e}_2\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^1|v_3\rangle}{\langle \mathrm{e}^1|\mathrm{e}_1\rangle}|\mathrm{e}_1\rangle \qquad \backslash \quad \begin{cases} \langle \mathrm{e}^3|\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}^3|\mathrm{e}_2\rangle = 0 \end{cases}$$

$$|\mathrm{e}_4\rangle \equiv |v_4\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^3|v_4\rangle}{\langle \mathrm{e}^3|\mathrm{e}_3\rangle}|\mathrm{e}_3\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^2|v_4\rangle}{\langle \mathrm{e}^2|\mathrm{e}_2\rangle}|\mathrm{e}_2\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^1|v_4\rangle}{\langle \mathrm{e}^1|\mathrm{e}_1\rangle}|\mathrm{e}_1\rangle \qquad \backslash \quad \begin{cases} \langle \mathrm{e}^4|\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}^4|\mathrm{e}_2\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}^4|\mathrm{e}_3\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$|\mathrm{e}_n\rangle \equiv |v_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathrm{e}^i|v_n\rangle}{\langle \mathrm{e}^i|\mathrm{e}_i\rangle}|\mathrm{e}_i\rangle \qquad \backslash \quad \begin{cases} \langle \mathrm{e}^n|\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}^n|\mathrm{e}_2\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \mathrm{e}^n|\mathrm{e}_{n-1}\rangle = 0 \end{cases}$$

Entonces, siempre es posible construir una base ortogonal a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes y una definición de producto interno. Esta base será única en $\boldsymbol{E}^n$ –para cada definición de producto interno– y si existe otra, sus vectores serán proporcionales. Más aún, cada espacio vectorial $\boldsymbol{V}^n$ de dimensión finita tendrá una base ortogonal asociada[20].

Ejemplo 2.15 Consideremos un par de ejemplos del método de ortogonalización sencillos, y uno más elaborado:

1. Para el caso de $\mathbb{R}^2$ es muy claro. Si tenemos dos vectores $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ linealmente independientes:
$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
y si elegimos $|\mathrm{e}_1\rangle \equiv |v_2\rangle$, entonces, $|\mathrm{e}_2\rangle$ vendrá dado por:
$$|\mathrm{e}_2\rangle \equiv |v_1\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^1|v_1\rangle}{\langle \mathrm{e}^1\,|\mathrm{e}_1\rangle}|\mathrm{e}_1\rangle \;\Rightarrow\; |\mathrm{e}_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
tal y como se esperaba, el otro vector ortogonal es el canónico.
2. Un subespacio de $\boldsymbol{V}^4$, expandido por los siguientes vectores
$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[20] Hemos construido la base ortogonal para un espacio de dimensión finita, pero el procedimiento es válido para espacios de dimensión infinita

Borrador Preliminar

tendrá una base ortogonal asociada dada por:

$$|\mathrm{e}_1\rangle \equiv |v_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; |\mathrm{e}_2\rangle \equiv |v_2\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^1|v_2\rangle}{\langle \mathrm{e}^1\,|\mathrm{e}_1\rangle}\,|\mathrm{e}_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{e}_3\rangle \equiv |v_1\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^2|v_1\rangle}{\langle \mathrm{e}^2|\mathrm{e}_2\rangle}\,|\mathrm{e}_2\rangle - \frac{\langle \mathrm{e}^1|v_1\rangle}{\langle \mathrm{e}^1|\mathrm{e}_1\rangle}\,|\mathrm{e}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{9}{12}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Y la base ortonormal asociada será:

$$|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle = \frac{|\mathrm{e}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathrm{e}^1\,|\mathrm{e}_1\rangle}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle = \frac{|\mathrm{e}_2\rangle}{\sqrt{\langle \mathrm{e}^2\,|\mathrm{e}_2\rangle}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \; |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle = \frac{|\mathrm{e}_3\rangle}{\langle \mathrm{e}^3\,|\mathrm{e}_3\rangle} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo hemos mostrado que $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ son linealmente independientes y, por lo tanto, base de un subespacio de $\boldsymbol{V}^4$. Cabría preguntarse ¿Cómo construimos un cuarto vector, linealmente independiente a los anteriores, que expanda todo $\boldsymbol{V}^4$?

3. Suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\}$ con el producto interno definido por:[21]

$$\langle \pi^i|\pi_j\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\; \pi_i(t)\pi_j(t)\,.$$

Procederemos a construir una base ortogonal $\{|P_i\rangle\}$, y tomaremos como vector de inicio a $|\pi_0\rangle$:

$$|P_0\rangle \equiv |\pi_0\rangle = 1\,.$$

El siguiente vector será:

$$|P_1\rangle \equiv |\pi_1\rangle - \frac{\langle \pi^1\,|P_0\rangle}{\langle P^0\,|P_0\rangle}\,|P_0\rangle = t \;\Leftarrow\; \begin{cases} \langle \pi^1\,|P_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\; t = 0 \\ \langle P^0\,|P_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = 2 \end{cases}$$

[21] En este punto es importante señalar la importancia de la definición de producto interno. Si esta definición hubiera sido $\langle f|\,g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; f(x)\; g(x)\sqrt{1-x^2}$ o $\langle f|\,g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; \frac{f(x)\; g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ las bases correspondientes a estas definiciones de producto interno serían distintas.

Borrador Preliminar

El siguiente:

$$|P_2\rangle \equiv |\pi_2\rangle - \frac{\langle \pi^2 \,|P_1\rangle}{\langle P^1 \,|P_1\rangle}|P_1\rangle - \frac{\langle \pi^2 \,|P_0\rangle}{\langle P^0 \,|P_0\rangle}|P_0\rangle = t^2 - \frac{1}{3} \Leftarrow \begin{cases} \langle \pi^2 \,|P_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, t^2 = \frac{2}{3} \\ \langle \pi^2 \,|P_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, t^3 = 0 \\ \langle P^1 \,|P_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, t^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Para el cuarto:

$$|P_3\rangle \equiv |\pi_3\rangle - \frac{\langle \pi^3 \,|P_2\rangle}{\langle P^2 \,|P_2\rangle}|P_2\rangle - \frac{\langle \pi^3 \,|P_1\rangle}{\langle P^1 \,|P_1\rangle}|P_1\rangle - \frac{\langle \pi^3 \,|P_0\rangle}{\langle P^0 \,|P_0\rangle}|P_0\rangle = t^3 - \frac{3}{5}t$$

$$\begin{cases} \langle \pi^3 \,|P_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, t^3 = 0\,, & \langle \pi^3 \,|P_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, t^4 = \frac{2}{5} \\ \langle \pi^3 \,|P_2\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, t^3[t^2 - \frac{1}{3}] = 0\,, & \langle P^2 \,|P_2\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, [t^2 - \frac{1}{3}]^2 = \frac{8}{45} \end{cases}$$

Queda como ejercicio comprobar la ortogonalidad de los vectores recién calculados:

$$\langle P^0 \,|P_1\rangle = \langle P^1 \,|P_2\rangle = \langle P^2 \,|P_3\rangle = \cdots = 0\,.$$

Esta base ortogonal está formada por los polinomios de Legendre, discutidos en la sección 2.3.4. Es decir, si ortogonalizamos una base de monomios $\{|\pi_i\rangle\}$ mediante la definición de producto interno: $\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; f(x)\; g(x)$, obtendremos la base de polinomios ortogonales de Legendre.
Podemos resumir los cálculos anteriores, construyendo también la base ortonormal a partir de los monomios $\{|\pi_i\rangle\}$ como se muestra a continuación:

$\|\pi_n\rangle$	$\|P_n\rangle$	$\|\hat{P}_n\rangle$
1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
t	t	$\sqrt{\frac{3}{2}}\, t$
t^2	$t^2 - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,(3t^2 - 1)$
t^3	$t^3 - \frac{3}{5}t$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\,(5t^3 - 3t)$
t^4	$t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}\,(35t^4 - 30t^2 + 3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

◁

2.3.6 Ejercicios

1. Diga si los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}^3$ son o no linealmente independientes.
   (a). $|x_1\rangle = 2x\,,\quad |x_2\rangle = x^2 + 1\,,\quad |x_3\rangle = x + 1\,,\quad |x_4\rangle = x^2 - 1.$
   (b). $|x_1\rangle = x(x-1)\,,\quad |x_2\rangle = x\,,\quad |x_3\rangle = x^3\,,\quad |x_4\rangle = 2x^3 - x^2.$
2. Probar que los polinomios: $|x_1\rangle = 1\,,\ |x_2\rangle = x\,,\ |x_3\rangle = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ y $|x_4\rangle = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, forman una base en $\mathcal{P}_4$. Expresar $|p\rangle = x^2\,,\ |q\rangle = x^3$ en función de esa base.
3. Encontrar la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ (espacio de funciones continuas en el intervalo [-1,1] y con el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; f(x)\; g(x)$) al subespacio generado por los polinomios: $\{1, x, x^2 - 1\}$. Calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado.
   (a). $f(x) = x^n\,,\ n$ entero.
   (b). $f(x) = \mathrm{sen}(x)$.

Borrador Preliminar

(c). $f(x) = 3x^2$.

4. Utilizando el método de Gram-Schmidt encuentre una base ortonormal para los siguientes conjuntos de vectores:
   (a). $|v_1\rangle = (1,0,1)\,, |v_2\rangle = (0,1,1)$ y $|v_3\rangle = (1,0,0)$. En $\mathbb{R}^3$.
   (b). $|v_1\rangle = (2,-4,5,2)\,, |v_2\rangle = (-6,5,-1,-6)$ y $|v_3\rangle = (-10,13,-4,-3)$. En $\mathbb{R}^4$.
5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2 y lo detallamos en la sección 4.4.9, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_4^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases}.$$

   Entonces
   (a). Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.
   (b). Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a\,|b\rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger\mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.
   (c). Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.
6. Utilizando **Maxima** reproduzca el ejemplo 2. que expusimos en la página 122. Es decir, suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1,1]$. Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\}$, pero en este caso con el producto interno definido por:

$$\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; f(x)\, g(x)\sqrt{1-x^2}\,.$$

   Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie[22].
7. Otra vez, utilizando **Maxima**, reproduzca el ejercicio anterior, pero con la definición de producto interno:

$$\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; \frac{f(x)\, g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

   A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de primera especie.

Practicando con Maxima

1. **Independencia Lineal:** En 2.3.5 vimos que si en la ecuación

$$|0\rangle = C_1\; |v_1\rangle + C_2\; |v_2\rangle + C_3\; |v_3\rangle \cdots + C_n\; |v_n\,,\rangle$$

   con todos los $C_i = 0$, entonces se dirá que el conjunto de vectores son linealmente independientes. Para el segundo ejemplo de esa sección (ejemplo 2.) se obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrrcl} C_1 & +2C_2 & -C_3 & = & 0 \\ 3C_1 & & +C_3 & = & 0 \\ -C_1 & +C_2 & & = & 0 \\ 2C_1 & +3C_2 & & = & 0 \end{array}$$

   que procedemos a resolver usando el comando **linsolve**:

[22] https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials

Borrador Preliminar

(%i1) linsolve([C1+2*C2-C3=0, 3*C1+C3=0, -C1+C2=0, 2*C1+3*C2=0], [C1,C2,C3]);
solve: dependent equations eliminated: (4)

(%o1) $[C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0]$

2. **Bases para espacios vectoriales:** En este ejercicio aprenderemos a calcular una base a partir de un conjunto de vectores perteneciente a un determinado espacio vectorial. Por ejemplo, si en $\mathbb{R}^5$ tenemos el siguiente conjunto de vectores:

$$|v_1\rangle = (1,2,3,4,5)\,,\ |v_2\rangle = (0,-1,1,2,3)\,,\ |v_3\rangle = (3,2,1,0,-1)\,,\ |v_4\rangle = (-4,-3,-2,-1,0)\,.$$

(%i1) v1:[1,2,3,4,5]; v2:[0,-1,1,2,3]; v3:[3,2,1,0,-1]; v4:[-4,-3,-2,-1,0];

(%o1) $[1,2,3,4,5]$

(%o2) $[0,-1,1,2,3]$

(%o3) $[3,2,1,0,-1]$

(%o4) $[-4,-3,-2,-1,0]$

Con los vectores dados construimos la siguiente matriz

(%i5) M:matrix(v1,v2,v3,v4);

(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como veremos más adelante, el Rango de una matriz indica el número máximo de vectores fila o columna linealmente independientes.

(%i6) rank(M);

(%o6) 3

Podemos aplicar el método de eliminación gaussiana a la matriz $\mathbf{M}$ para obtener una nueva matriz escalonada. El cálculo además se hace normalizando el primer elemento no nulo de cada fila. Esto se logra con el comando **echelon(M)**.

(%i7) echelon(M);

(%o7) $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, cada fila de la matriz anterior conformará un conjunto de vectores linealmente independiente. Los podemos aislar de la matriz con el comando **row(M,i)**, que devolverá la $i-$ésima fila de la matriz $\mathbf{M}$.

(%i8) e1:row(%o7,1);

(%o8) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(%i9) e2:row(%o7,2);

(%o9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

(%i10) e3:row(%o7,3);

Borrador Preliminar

(%o10) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

Es trivial verificar que el conjunto: $\{e1, e2, e3\}$ es linealmente independientes.

(%i11) solve(alpha*[1,2/3,1/3,0,-1/3]+beta*[0,1,-1,-2,-3]+gamma*[0,0,0,5/3,7/3],[alpha,beta,gamma]);
```
solve: dependent equations eliminated: (3)
```
(%o11) $[[\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0]]$

Consideremos otros ejemplos, dados los vectores $\mathbf{a} = (1, 3)$ y $\mathbf{b} = (-1, 1)$ ¿Serán linealmente independientes?

(%i12) solve(alpha*[1,3]+beta*[-1,1],[alpha,beta]);
(%o12) $[[\alpha = 0, \beta = 0]]$

Los vectores $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{b} = (4, 8, 12)$ ¿Serán linealmente independientes?

(%i13) solve(alpha*[1,2,3]+beta*[4,8,12],[alpha,beta]);
```
solve: dependent equations eliminated: (2 3)
```
(%o13) $[[\alpha = -4\ \%r_4, \beta = \%r_4]]$

Aquí $\alpha = -4\beta$.
Sea ahora $\{\mathbf{e}_i\} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 2)\}$ una base para $\mathbb{R}^3$. Vamos a calcular las componentes del vector $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$ respecto de esa base.
Primero verifiquemos si efectivamente es una base:

(%i14) solve(alpha*[1,1,1]+beta*[1,2,1]+gamma*[0,0,2],[alpha,beta,gamma]);
(%o14) $[[\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0]]$

(%i15) solve([3,2,1]-ax*[1,1,1]-ay*[1,2,1]-az*[0,0,2],[ax,ay,az]);
(%o15) $[[ax = 4, ay = -1, az = -1]]$

Por lo tanto, $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.
En la base canónica las componentes del vector **a** serán:

(%i16) solve([3,2,1]-ax*[1,0,0]-ay*[0,1,0]-az*[0,0,1],[ax,ay,az]);
(%o16) $[[ax = 3, ay = 2, az = 1]]$

Es decir, $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$.

(%i17) kill(all)$

3. **Ortogonalización con Maxima** Anteriormente hicimos los cálculos para hallar una base ortogonal a partir del siguiente conjunto de vectores linealmente independientes:

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La función **gramschmidt**(x) es la que ejecuta el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt sobre

Borrador Preliminar

el objeto x. Si x es una matriz el algoritmo actúa sobre sus filas. Antes de usar la función es necesario cargar la biblioteca **eigen**.

```
(%i1) load("eigen")$
(%i2) v:matrix ([-1, 1, 0, 0], [2, 0, 1,3], [1,3, -1,2]);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Notemos que el vector $|v_3\rangle$ es el que hemos puesto en la primera fila de la matriz. Ahora procedemos al cálculo:

```
(%i3) e:gramschmidt(v);
```

(%o3) $\left[[-1,1,0,0],[1,1,1,3],\left[\frac{5}{2^2},\frac{5}{2^2},-\frac{7}{2^2},-\frac{1}{2^2}\right]\right]$

El resultado viene en forma de una lista: $[e[1], e[2], e[3]]$. Simplificando resulta:

```
(%i4) e:expand( %);
```

(%o4) $\left[[-1,1,0,0],[1,1,1,3],\left[\frac{5}{4},\frac{5}{4},-\frac{7}{4},-\frac{1}{4}\right]\right]$

Podemos verificar que son ortogonales:

```
(%i5) map(innerproduct, [e[1], e[2], e[3]], [e[2], e[3], e[1]]);
```

(%o5) $[0,0,0]$

Normalizamos ahora cada uno de los vectores:

```
(%i6) e[1]/sqrt(innerproduct(e[1],e[1]));
```

(%o6) $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right]$

```
(%i7) e[2]/sqrt(innerproduct(e[2],e[2]));
```

(%o7) $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

```
(%i8) e[3]/sqrt(innerproduct(e[3],e[3]));
```

(%o8) $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{7}{10},-\frac{1}{10}\right]$

La función **gramschmidt**(x,F) nos permite definir un producto interno diferente a **innerproduct**. Veamos como se hace para el otro ejemplo donde el conjunto de vectores linealmente independientes estaba dado por: $\{1,t,t^2,t^3,\cdots,t^n\}$.

```
(%i9) producto(f,g):=integrate(f*g, t, a, b);
```

(%o9) producto(f,g) $:= \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}t$

```
(%i10) e:gramschmidt ([1, t, t^ 2,t^ 3,t^ 4], producto), a= -1, b=1;
```

(%o10) $\left[1,t,\frac{3\,t^2-1}{3},\frac{t\,\left(5\,t^2-3\right)}{5},\frac{35\,t^4-30\,t^2+3}{35}\right]$

```
(%i11) e:expand(e);
```

Borrador Preliminar

(%o11) $\left[1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3\,t}{5}, t^4 - \frac{6\,t^2}{7} + \frac{3}{35}\right]$

Verifiquemos si son ortogonales:

(%i12) map(producto, [e[1], e[2], e[3]], [e[2], e[3], e[1]]), a= -1, b=1;
(%o12) $[0, 0, 0]$

Para normalizar cada uno de los vectores procedemos como en el caso anterior pero primero hacemos $a = -1$ y $b = 1$.

(%i13) a: -1b : 1
(%i14) e[1]/sqrt(producto(e[1], e[1]));
(%o14) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(%i15) e[2]/sqrt(producto(e[2], e[2]));
(%o15) $\frac{\sqrt{3}\,t}{\sqrt{2}}$
(%i16) e[3]/sqrt(producto(e[3], e[3]));
(%o16) $\frac{3\,\sqrt{5}\,\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{3}{2}}}$
(%i17) e[4]/sqrt(producto(e[4], e[4]));
(%o17) $\frac{5\,\sqrt{7}\,\left(t^3 - \frac{3\,t}{5}\right)}{2^{\frac{3}{2}}}$

Borrador Preliminar

2.4 Aproximación de funciones

Armados de los conocimientos previos podemos pasar a aplicarlos en un intento de aproximar funciones. La aproximación de una función tiene varias facetas y seguramente en cursos anteriores hemos hecho este tipo de aproximaciones una buena cantidad de veces cuando necesitábamos convertir una expresión, que nos resultaba muy complicada, en otras más sencillas y casi equivalentes. Por ejemplo, cuando aplicamos la aproximación lineal: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con x muy cercano a x_0 ¿Cuántas veces no hemos utilizado la aproximación: $\text{sen}(x) \approx x$? También aproximamos funciones cuando en el laboratorios nos veíamos en la necesidad de "ajustar con la mejor curva" una serie de puntos experimentales.

Consideremos primero algunos conceptos importantes.

2.4.1 Complementos ortogonales y descomposición ortogonal

Volvamos a retomar la idea de los subespacios y su complemento ortogonal, ejercicio 3. de la sección 2.2. Sea un subespacio $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$. Un elemento $|\bar{v}_i\rangle \in \boldsymbol{V}$ se dice ortogonal a $\boldsymbol{S}$ si $\langle s^k|\bar{v}_i\rangle = 0 \ \forall \ |s_k\rangle \in \boldsymbol{S}$, es decir, es ortogonal a todos los elementos de $\boldsymbol{S}$. El conjunto $\{|\bar{v}_1\rangle, |\bar{v}_2\rangle, |\bar{v}_3\rangle, \cdots, |\bar{v}_m\rangle\}$ de todos los elementos ortogonales a $\boldsymbol{S}$, se denomina $S-$perpendicular y se denota como $\boldsymbol{S}^\perp$. Es fácil demostrar que $\boldsymbol{S}^\perp$ es un subespacio, aún si $\boldsymbol{S}$ no lo es.

Dado un espacio euclidiano de dimensión infinita $\boldsymbol{V} : \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ y un subespacio $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ con dimensión finita: $\dim \boldsymbol{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \boldsymbol{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \boldsymbol{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^\perp \in \boldsymbol{S}^\perp$. Esto es:

$$|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp, \quad |s_k\rangle \in \boldsymbol{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^\perp \in \boldsymbol{S}^\perp .$$

La norma de $|v_k\rangle$ se calcula a través del teorema de Pitágoras generalizado:

$$\||v_k\rangle\|^2 = \||s_k\rangle\|^2 + \left\||s_k\rangle^\perp\right\|^2 .$$

La demostración es sencilla. Primero se prueba que la descomposición ortogonal $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp$ es siempre posible. Para ello recordamos que $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{V}$ es de dimensión finita, por lo tanto existe una base ortonormal $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \cdots, |\hat{e}_m\rangle\}$ para $\boldsymbol{S}$. Es decir, dado un $|v_k\rangle$ definimos los elementos $|s_k\rangle$ y $|s_k\rangle^\perp$ como sigue:

$$|s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k \, |\hat{e}_i\rangle \, |\hat{e}_i\rangle \quad \wedge \quad |s_k\rangle^\perp = |v_k\rangle - |s_k\rangle \ . \tag{2.16}$$

Nótese que $\langle v_k \, |\hat{e}_i\rangle \, |\hat{e}_i\rangle$ es la proyección de $|v_k\rangle$ a lo largo de $|\hat{e}_i\rangle$ y $|s_k\rangle$ se expresa como la combinación lineal de la base de $\boldsymbol{S}$, por lo tanto, está en $\boldsymbol{S}$. Por otro lado:

$${}^\perp\langle s^k|\hat{e}_i\rangle = \langle v^k - s^k|\hat{e}_i\rangle = \langle v^k|\hat{e}_i\rangle - \langle s^k|\hat{e}_i\rangle = \langle v^k|\hat{e}_i\rangle - \left[\sum_{j=1}^{m} \langle v^k|\hat{e}_j\rangle\langle\hat{e}^j|\right] |\hat{e}_i\rangle = 0 \ \Rightarrow \ |s_k\rangle^\perp \perp |\hat{e}_j\rangle \ ,$$

lo cual indica que $|s_k\rangle^\perp \in \boldsymbol{S}^\perp$.

Podemos ir un poco más allá y ver que la descomposición $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp$ es única en $\mathbf{V}$. Para ello suponemos que existen dos posibles descomposiciones, vale decir:

$$|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp \ \wedge \ |v_k\rangle = |t_k\rangle + |t_k\rangle^\perp \ , \quad \text{con } |s_k\rangle \wedge |t_k\rangle \in \boldsymbol{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^\perp \ \wedge \ |t_k\rangle^\perp \in \boldsymbol{S}^\perp .$$

Por lo tanto:

$$|v_k\rangle - |v_k\rangle = \left(|s_k\rangle + |s_k\rangle^\perp\right) - \left(|t_k\rangle + |t_k\rangle^\perp\right) = 0 \ \Rightarrow \ |s_k\rangle - |t_k\rangle = |t_k\rangle^\perp - |s_k\rangle^\perp \ .$$

Pero $|s_k\rangle - |t_k\rangle \in \boldsymbol{S}$, es decir, ortogonal a todos los elementos de $\boldsymbol{S}^\perp$ y $|s_k\rangle - |t_k\rangle = |t_k\rangle^\perp - |s_k\rangle^\perp$.

Borrador Preliminar

Con lo cual $|s_k\rangle - |t_k\rangle \equiv |0\rangle$, que es el único elemento que es ortogonal a sí mismo y en consecuencia la descomposición $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}$ es única.

Finalmente, con la definición de norma:

$$\||v_k\rangle\|^2 = \left\||s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}\right\|^2 = \left(\langle s^k| + \langle s^k|^{\perp}\right)\left(|s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}\right) = \langle s^k|s_k\rangle +^{\perp} \langle s^k|s_k\rangle^{\perp} = \||s_k\rangle\|^2 + \left\||s_k\rangle^{\perp}\right\|^2 .$$

Así, dado $\boldsymbol{S}^m$ un subespacio de $\boldsymbol{V}$ de dimensión finita y dado un $|v_k\rangle \in \boldsymbol{V}$ el elemento:

$$|s_k\rangle \in \boldsymbol{S} \;\Rightarrow\; |s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k\,|\mathrm{e}_i\rangle\,|\mathrm{e}_i\rangle \;,$$

será la proyección de $|v_k\rangle$ en $\boldsymbol{S}$.

En general, dado un vector $|x\rangle \in \boldsymbol{V}$ y un subespacio de $\boldsymbol{V}$ con dimensión finita, $\boldsymbol{S}^m \subset \boldsymbol{V}$ y $\dim \boldsymbol{S} = m$, entonces la distancia de $|x\rangle$ a $\boldsymbol{S}^m$ es la norma de la componente de $|x\rangle$, perpendicular a $\boldsymbol{S}^m$. Más aún, esa distancia será mínima y $|x\rangle_{\boldsymbol{S}^m}$ la proyección de $|x\rangle$, en $\boldsymbol{S}^m$ será el elemento de $\boldsymbol{S}^m$ más próximo a $|x\rangle$ y, por la mejor aproximación.

Ejemplo 2.16 Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^3$ con los vectores base: $|x_1\rangle = \hat{\mathbf{i}}$, $|x_2\rangle = \hat{\mathbf{k}}$ y $|x_3\rangle = \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y consideramos el subespacio $\boldsymbol{S} : \{x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Podemos calcular una base en $\boldsymbol{S}$ parametrizándola de la manera siguiente:

$$x + y = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = -\mu \\ y = \mu \\ z = \nu \end{array}\right.$$

Por lo que una base en $\boldsymbol{S}$ puede ser: $|\mathrm{e}_1\rangle = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ y $|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{\mathbf{k}}$. Si tomamos un vector $|x\rangle \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z), para que éste vector $|x\rangle \in \boldsymbol{S}^{\perp}$ se tiene que cumplir que: $\langle x\,|\mathrm{e}_k\rangle = 0$. Podemos utilizar la matriz de Gram, que conocemos para la base dada, para calcular el producto escalar a través de las ecuaciones:

$$\langle x\,|\mathrm{e}_1\rangle = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -x + y + z = 0$$

$$\langle x\,|\mathrm{e}_2\rangle = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; y + 2z = 0$$

El par de ecuaciones: $-x + y + z = 0$ y $y + 2z = 0$ vienen a ser representación cartesiana de $\boldsymbol{S}^{\perp}$. La matriz de los coeficientes de ese sistema de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right.$$

por lo que una base para esa representación cartesiana puede ser:

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = -\mu \\ y = -2\mu \\ z = \mu \end{array}\right. ,$$

es decir, $\boldsymbol{S}^{\perp} : \{(-1, -2, 1)\}$.

Notemos que partimos de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ de dimensión 3, la dimensión de $\boldsymbol{S}$ es 2 y por lo tanto, la de $\boldsymbol{S}^{\perp}$ es 1.

El lector debe comprobar que efectivamente $\{(-1, -2, 1)\}$ es ortogonal a cada uno de los vectores base de $\boldsymbol{S} : \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

◁

Borrador Preliminar

2.4.2 Condiciones para la aproximación de funciones

Sea $\boldsymbol{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, y un subespacio $\boldsymbol{S}^m \subset \boldsymbol{V}$, con dimensión finita, $\dim \boldsymbol{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\boldsymbol{S}^m$, $|s_i\rangle$, será el elemento de $\boldsymbol{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras:

$$\||v_i\rangle - |s_i\rangle\| \leq \||v_i\rangle - |t_i\rangle\| \;\; \forall \;\; |t_i\rangle \in \boldsymbol{S}\,.$$

La demostración se sigue así:

$$|v_i\rangle - |t_i\rangle = (|v_i\rangle - |s_i\rangle) + (|s_i\rangle - |t_i\rangle) \;\Rightarrow\; \||v_i\rangle - |t_i\rangle\|^2 = \||v_i\rangle - |s_i\rangle\|^2 + \||s_i\rangle - |t_i\rangle\|^2 \;,$$

ya que $|v_i\rangle - |s_i\rangle = |s_k\rangle^{\perp} \in \boldsymbol{S}^{\perp} \;\wedge\; |s_i\rangle - |t\,_i\rangle \in \boldsymbol{S}$, y vale el teorema de Pitágoras generalizado.

Ahora bien, como:

$$\||s_i\rangle - |t_i\rangle\|^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \||v_i\rangle - |t_i\rangle\|^2 \geq \||v_i\rangle - |s_i\rangle\|^2 \;\Rightarrow\; \||v_i\rangle - |t_i\rangle\| \geq \||v_i\rangle - |s_i\rangle\| \;. \blacktriangleleft$$

En la sección 2.3.4 consideramos la expansión de funciones continuas, reales de variable real, definidas en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por:

$$\langle f|\, g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\; f(x)\, g(x)\,.$$

En ese entonces consideramos, para ese espacio vectorial, una base ortogonal definida por:

$$|\mathrm{e}_0\rangle = 1, \quad |\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx) \quad \text{y} \quad |\mathrm{e}_{2n}\rangle = \mathrm{sen}(nx)\,, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Por lo tanto, cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como mostramos a continuación:

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C^i\, |\mathrm{e}_i\rangle \;.$$

Los C^i son los coeficientes de Fourier. Es decir, cualquier función puede ser expresada como una serie de Fourier de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)] \;,$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\; f(x)\cos(kx) \;\wedge\; b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\; f(x)\mathrm{sen}(kx)\,.$$

Es claro que para la aproximación de funciones por funciones trigonométricas cuyos coeficientes son los coeficientes de Fourier constituyen la mejor aproximación. Por lo tanto, de todas las funciones $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$ las funciones trigonométricas, $\mathcal{T}(x)$ minimizan la desviación cuadrática media:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\; (f(x) - \mathcal{P}(x))^2 \geq \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\; (f(x) - \mathcal{T}(x))^2 \;.$$

2.4.3 El método de mínimos cuadrados

Una de las aplicaciones más importantes en la aproximación de funciones es el método de mínimos cuadrados. La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$. Para ello asociamos ese conjunto de medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y supondremos que su mejor aproximación, que llamaremos $\mathsf{c}\,|1\rangle \equiv (\mathsf{c}, \mathsf{c}, \mathsf{c}, \cdots, \mathsf{c})$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por

Borrador Preliminar

$|1\rangle$. Esto es:

$$|x\rangle = \mathsf{c}\,|1\rangle \;\Rightarrow\; \mathsf{c} = \frac{\langle x\,|1\rangle}{\langle 1\,|1\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}\,,$$

que no es otra cosa que construir -de una manera sofisticada- el promedio aritmético de las medidas. Es claro que la proyección perpendicular de $|x\rangle$ sobre $|1\rangle$ hace mínima la distancia entre el subespacio perpendicular generado por $|1\rangle$ y el vector $|x\rangle$, con ello también hará mínimo su cuadrado:

$$[d\,(|x\rangle\,, \mathsf{c}\,|1\rangle)]^2 = \||x - \mathsf{c}\rangle\|^2 = \langle x - \mathsf{c}\,|x - \mathsf{c}\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathsf{c})^2\,.$$

Esta manera sofisticada, que se deriva del formalismo utilizado, muestra el significado del promedio aritmético como medida más cercana al valor "real" de una cantidad obtenida a partir de una serie de medidas experimentales.

Obviamente, este problema se puede generalizar para el caso de dos (o n) cantidades si extendemos la dimensión del espacio y los resultados experimentales se expresarán como un vector de $2n$ dimensiones

$$|x\rangle = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots x_{2n})\,,$$

mientras que los vectores que representan las cantidades más aproximadas serán:

$$\mathsf{c}_1\,|1_1\rangle = \left(\underbrace{\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_1, \mathsf{c}_1, \cdots, \mathsf{c}_1}_{n}, \underbrace{0, 0, 0, \cdots 0}_{n}\right) \quad \wedge \quad \mathsf{c}_2\,|1_2\rangle = (0, 0, 0, \cdots, 0,\ \mathsf{c}_2, \mathsf{c}_2\mathsf{c}_2, \cdots \mathsf{c}_2)\,.$$

Ahora $\{|1_1\rangle\,, |1_2\rangle\}$ expanden un subespacio vectorial sobre el cual $|x\rangle$ tiene como proyección ortogonal a: $\mathsf{c}_1\,|1_1\rangle + \mathsf{c}_2\,|1_2\rangle$ y consecuentemente $|x - \mathsf{c}_1 1_1 - \mathsf{c}_2 1_2\rangle$ será perpendicular a $\{|1_1\rangle\,, |1_2\rangle\}$. Por lo tanto:

$$\mathsf{c}_1 = \frac{\langle x\,|1_1\rangle}{\langle 1^1\,|1_1\rangle} = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13}, \cdots + x_{1n}}{n} \quad \wedge \quad \mathsf{c}_2 = \frac{\langle x\,|1_2\rangle}{\langle 1^2\,|1_2\rangle} = \frac{x_{21} + x_{22} + x_{23}, \cdots + x_{2n}}{n}\,.$$

Quizá la consecuencia más conocida de esta forma de aproximar funciones es el "ajuste" de un conjunto de datos experimentales $\{(x_1, y_1)\,, (x_2, y_2)\,, (x_3, y_3)\,, \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = \mathsf{c}x$. En este caso, el planteamiento del problema se reduce a encontrar el vector $\mathsf{c}|x\rangle$, en el subespacio $\boldsymbol{S}\,(|x\rangle)$, que esté lo más cercano posible al vector $|y\rangle$.

Como en el caso anterior, queremos que la distancia entre $|y\rangle$ y su valor más aproximado $\mathsf{c}\,|x\rangle$ sea la menor posible. Por lo tanto, $\||\mathsf{c}x - y\rangle\|^2$ será la menor posible y $|\mathsf{c}x - y\rangle$ será perpendicular a $\boldsymbol{S}\,(|x\rangle)$, por lo que:

$$\langle x\,|\mathsf{c}x - y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \mathsf{c} = \frac{\langle x\,|y\rangle}{\langle x\,|x\rangle} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

Si la recta a "ajustar" es $y = \mathsf{c}x + \mathsf{b}$ el procedimiento será uno equivalente: proyectar sobre los vectores y obtener ecuaciones. Si representamos $|\mathsf{b}\rangle = \mathsf{b}\,|1\rangle$, tendremos:

$$|y\rangle = \mathsf{c}\,|x\rangle + |\mathsf{b}\rangle \;\Rightarrow\; \begin{cases} \langle x\,|y\rangle = \mathsf{c}\,\langle x\,|x\rangle + \langle x\,|\mathsf{b}\rangle \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \mathsf{c}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \mathsf{b}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \\ \langle \mathsf{b}\,|y\rangle = \mathsf{c}\,\langle \mathsf{b}\,|x\rangle + \langle \mathsf{b}\,|\mathsf{b}\rangle \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} y_i = \mathsf{c}\sum_{i=1}^{n} x_i + \mathsf{b}n \end{cases}$$

Que no es otra cosa que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: c y b. Por simplicidad y conveniencia continuaremos con el análisis del caso $\mathsf{b} = 0$, vale decir, aproximando las medidas experimentales a una recta que pase por el origen de coordenadas $y = \mathsf{c}x$. El lector podrá extender el procedimiento para caso $\mathsf{b} \neq 0$.

Para tratar de entender (y extender) lo antes expuesto, consideremos tres ejemplos que muestran la versatilidad del método y la ventaja de disponer de una clara notación. Primeramente, mostraremos el caso más utilizado para construir el mejor ajuste lineal a un conjunto de datos experimentales. Buscaremos la mejor recta que describe ese conjunto de puntos. Luego mostraremos la aplicación del método para buscar la mejor

Borrador Preliminar

función multilineal, es decir, que ajustaremos la mejor función de n variables con una contribución lineal de sus argumentos: $y = y(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathtt{c}_1 x_1 + \mathtt{c}_2 x_2 + \cdots + \mathtt{c}_n x_n$. Este caso tendrá una complicación adicional, por cuando realizaremos varias mediciones de las variables. En los ejemplos de la sección 2.18 analizaremos varios casos en los cuales extendemos el método.

2.4.4 Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de (digamos n) medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos, de manera que: $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \cdots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$.

El tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Puede ser que el polinomio no sea lineal y entonces queramos ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales.

Queda entonces por decidir la estrategia, esto es, construimos la función como "trozos" de polinomios que ajusten a subconjuntos: $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \cdots, (x_m, y_m = f(x_m))\}$ con $m < n$ de los puntos experimentales. En este caso tendremos una función de interpolación para cada conjunto de puntos. También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales de manera que el máximo grado del polinomio que los interpole será de grado $n - 1$.

Para encontrar este polinomio, y a manera de ejemplo, lo expresaremos como una combinación lineal de polinomios de Legendre, una base ortogonal que hemos discutido con anterioridad en la secciones 2.3.4 y 2.8. Esto es:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left|P_k\right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} C^k P_k(x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1 = f(x_1) = C^0 P_0(x_1) + C^1 P_1(x_1) + \cdots + C^{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C^0 P_0(x_2) + C^1 P_1(x_2) + \cdots + C^{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C^0 P_0(x_n) + C^1 P_1(x_n) + \cdots + C^{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

que no es otra cosa que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C^0, C^1, \cdots C^{n-1}\}$.

Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos. Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, ya que ellos son base del espacio de funciones.

Ejemplo 2.17

Series de Fourier Un ejemplo sencillo para aprender el mecanismo del cálculo de los coeficientes para la aproximación de funciones en series de Fourier lo podemos hacer para la siguiente función.

$$f(x) = x^2\,, \qquad -\pi \le x \le \pi\,.$$

Los coeficientes serán:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}\,, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}\,, \quad b_n = 0\ \forall\ n.$$

Se puede verificar que si $f(x)$ es par $(f(-x) = f(x))$ sólo la parte que contiene $\cos(nx)$ contribuirá a la serie.

Si $f(x)$ es impar $(f(-x) = -f(x))$, lo hará sólo la parte que contiene $\mathrm{sen}(nx)$.

Por lo tanto:

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos(2\,x) - \frac{4}{9}\cos(3\,x) + \frac{1}{4}\cos(4\,x) - \cdots\,.$$

Borrador Preliminar

◁

Ejemplo 2.18

Mínimos cuadrados:

Mostraremos como se puede utilizar el método de mínimos cuadrados para ajustar un conjunto de datos experimentales a un polinomio de cualquier grado. Veamos estos tres primeros casos:

1. La situación más simple será el conjunto de datos experimentales: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$, y nos preguntamos ¿Cuál será la recta, $y = \mathsf{c}x$, que ajusta más acertadamente a estos puntos? Es inmediato darnos cuenta que la pendiente de esa recta será:
$$|y\rangle = \mathsf{c}\,|x\rangle \;\Rightarrow\; \mathsf{c} = \frac{\langle x\,|y\rangle}{\langle x\,|x\rangle}\,.$$
Consideremos los puntos experimentales: $\{(1,2)\,,(3,2)\,,(4,5)\,,(6,6)\}$, entonces:
$$|y\rangle = \mathsf{c}\,|x\rangle \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathsf{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathsf{c} = \frac{\langle x\,|y\rangle}{\langle x\,|x\rangle} = \frac{2+6+20+36}{1+9+16+36} = \frac{32}{31} = 1.03226\,.$$
¿Cuál sería el ajuste para el caso de una recta $y = \mathsf{c}x + \mathsf{b}$? Queda como ejercicio para el lector utilizar el esquema descrito en las ecuaciones (2.4.3) y encontrar los parámetros c y b para este nuevo ajuste.
2. El segundo caso que consideraremos será la generalización a una contribución lineal de varios parámetros, i.e. un "ajuste" multilineal a la mejor función, $y = y(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \mathsf{c}^1 x_1 + \mathsf{c}^2 x_2 + \cdots + \mathsf{c}^m x_m$. El procedimiento anterior puede generalizarse de forma casi inmediata:
$$|y\rangle = \sum_{j=1}^{m} \mathsf{c}^j\,|x_j\rangle \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} \langle x^1\,|y\rangle & = & \mathsf{c}^1\langle x^1\,|x_1\rangle + \mathsf{c}^2\langle x^1\,|x_2\rangle + \cdots + \mathsf{c}^m\langle x^1\,|x_j\rangle \\ \langle x^2\,|y\rangle & = & \mathsf{c}^1\langle x^2\,|x_1\rangle + \mathsf{c}^2\langle x^2\,|x_2\rangle + \cdots + \mathsf{c}^m\langle x^2\,|x_j\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x^m\,|y\rangle & = & \mathsf{c}^1\langle x^m\,|x_1\rangle + \mathsf{c}^2\langle x^m\,|x_2\rangle + \cdots + \mathsf{c}^m\langle x^m\,|x_j\rangle\,. \end{array}\right.$$
Es decir, un sistema de m ecuaciones con m incógnitas que corresponden a los "pesos", $\mathsf{c}^1, \mathsf{c}^2, \cdots, \mathsf{c}^m$, de las contribuciones a la función multilineal.
Supongamos ahora un paso más en este afán de generalizar y consideremos que ejecutamos n experimentos con $n > m$. De esta forma nuestro problema adquiere un grado mayor de riqueza y las medidas experimentales estarán representadas ahora por:
$$(y_1, x_{11}, x_{12}, \cdots x_{1m};\; y_2, x_{21}, x_{22}, \cdots x_{2m};\; y_3, x_{31}, x_{32}, \cdots x_{3m}; \cdots y_n, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots x_{nm})\,,$$
por lo tanto, podremos construir m vectores:
$$|\tilde{x}_1\rangle = (x_{11}, \cdots, x_{1n})\,;\; |\tilde{x}_2\rangle = (x_{21}, \cdots, x_{2n})\,;\; \cdots |\tilde{x}_m\rangle = (x_{m1}, \cdots, x_{mn})\,;\; |y\rangle = (y_{m1}, \cdots, y_n)\,,$$
y el conjunto $\{|\tilde{x}_1\rangle\,, |\tilde{x}_2\rangle\,, \cdots, |\tilde{x}_m\rangle\}$ expande el subespacio $\boldsymbol{S}\,(|\tilde{x}_1\rangle\,, |\tilde{x}_2\rangle\,, \cdots |\tilde{x}_m\rangle)$, que alberga la aproximación de $|y\rangle$. Otra vez, la distancia de este subespacio al vector $|y\rangle$, será mínima, y por lo tanto, será la mejor aproximación:
$$\left[d\left(\boldsymbol{S}\left(\tilde{\mathsf{c}}^i\,|\tilde{x}_i\rangle\right), |y\rangle\right)\right]^2 = \left\langle \boldsymbol{S}\left(\tilde{\mathsf{c}}^i\,|\tilde{x}_i\rangle\right) - y \,\middle|\, \boldsymbol{S}\left(\tilde{\mathsf{c}}^i\,|\tilde{x}_i\rangle\right) - y\right\rangle\,,$$
y $\left|\boldsymbol{S}\left(\tilde{\mathsf{c}}^i\,|\tilde{x}\rangle\right) - y\right\rangle$ será ortogonal a los $|\tilde{x}_i\rangle$:
$$\langle \tilde{x}^j|\boldsymbol{S}\left(\tilde{\mathsf{c}}^i|\tilde{x}\rangle\right) - y\rangle \equiv \langle \tilde{x}^j|\sum_{i=1}^{m} \mathsf{c}^i|\tilde{x}\rangle - y\rangle = 0 \quad \forall \quad i,j = 1,2,3,\cdots m\,.$$

Borrador Preliminar

Finalmente, el problema queda de la misma manera que en el caso multilineal (2.):

$$|y\rangle = \sum_{j=1}^{m} \tilde{\mathtt{c}}^j \, |\tilde{x}_j\rangle \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} \langle \tilde{x}^1 \, | y\rangle & = & \tilde{\mathtt{c}}^1 \langle \tilde{x}^1 \, | \tilde{x}_1\rangle + \tilde{\mathtt{c}}^2 \langle \tilde{x}^1 \, | \tilde{x}_2\rangle + \cdots + \tilde{\mathtt{c}}^m \langle \tilde{x}^1 \, | \tilde{x}_j\rangle \\ \langle \tilde{x}^2 \, | y\rangle & = & \tilde{\mathtt{c}}^1 \langle \tilde{x}^2 \, | \tilde{x}_1\rangle + \tilde{\mathtt{c}}^2 \langle \tilde{x}^2 \, | \tilde{x}_2\rangle + \cdots + \tilde{\mathtt{c}}^m \langle \tilde{x}^2 \, | \tilde{x}_j\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \tilde{x}^m \, | y\rangle & = & \tilde{\mathtt{c}}^1 \langle \tilde{x}^m \, | \tilde{x}_1\rangle + \tilde{\mathtt{c}}^2 \langle \tilde{x}^m \, | \tilde{x}_2\rangle + \cdots + \tilde{\mathtt{c}}^m \langle \tilde{x}^m \, | \tilde{x}_j\rangle \end{array} \right.$$

3. Se puede extender el razonamiento anterior y generar un ajuste "lineal no lineal". Esto es: el ajuste lineal es en los coeficientes, pero la funcionalidad de la ley a la cual queremos ajustar los datos puede ser un polinomio de cualquier orden. Ese es el caso de una parábola que ajusta, por ejemplo, al siguiente conjunto de puntos experimentales:

$$\{(0,1)\,,(1,3)\,,(2,7)\,,(3,15)\} \quad \Leftrightarrow \quad y = ax^2 + bx + c\,.$$

Las ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrr} 1 = & 0 & +0 & +c \\ 3 = & a & +b & +c \\ 7 = & 4a & +2b & +c \\ 15 = & 9a & +3b & +c \end{array}$$

y los vectores construidos a partir de los datos experimentales serán:

$$|x_1\rangle = (0,1,4,9)\;, \quad |x_2\rangle = (0,1,2,3)\;, \quad |x_3\rangle = (1,1,1,1)\;, \quad |y\rangle = (1,3,7,15)\;.$$

Una vez más, la ecuación vectorial sería: $|y\rangle = a\,|x_1\rangle + b\,|x_2\rangle + c\,|x_3\rangle$, y las ecuaciones normales (2.) para este sistema se construyen como:

$$\left.\begin{array}{rrrr} 136 = & 98a & +36b & +14c \\ 62 = & 36a & +14b & +6c \\ 26 = & 14a & +6b & +4c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = -6 \\ b = \frac{113}{5} \\ c = -\frac{32}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow\; y = -6x^2 + \frac{113}{5}x - \frac{32}{5}\,.$$

4. Para finalizar analicemos el caso típico de aproximación por mínimos cuadrados. Se sospecha que una determinada propiedad de un material cumple con la ecuación $y = ax_1 + bx_2$ y realizamos 4 mediciones independientes obteniendo:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_3 \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_4 \\ x_{41} \\ x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que tenemos un subespacio de $m = 2$ dimensiones, que hemos hecho $n = 4$ veces el experimento y que los vectores considerados arriba serán:

$$|x_1\rangle = (1,2,1,1)\;, \quad |x_2\rangle = (2,1,1,-1)\;, \quad |y\rangle = (15,12,10,0)\;.$$

Por lo tanto, vectorialmente tendremos: $|y\rangle = a\,|x_1\rangle + b\,|x_2\rangle$, es decir, las ecuaciones normales (2.) se escribirán de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{rrr} 7a & +4b & = 49 \\ 4a & +7b & = 52 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \frac{45}{11} \\ b = \frac{56}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow\; y = \frac{45}{11}x_1 + \frac{56}{11}x_2\,.$$

◁

Borrador Preliminar

2.4.4.1 Aproximación polinómica

Consideremos los puntos experimentales representados en la figura 2.3:

$$\{(2,8),(4,10),(6,11),(8,18),(10,20),(12,34)\}\ .$$

Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre están definido en el intervalo $[-1,1]$ los puntos experimentales deberán reescalarse a ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los polinomios de Legendre. Esto se puede hacer con la ayuda del siguiente cambio de variable:

$$x=\frac{(b-a)t+b+a}{2},\quad \mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\mathrm{d}t\,,$$

donde a y b son los valores mínimos y máximos de los datos, respectivamente.

En este caso podemos ver que $a=2$ y $b=12$, y por lo tanto:

$$x=5t+7 \text{ y } \mathrm{d}x=5\mathrm{d}t \ \Rightarrow\ t=(x-7)/5 \text{ y } \mathrm{d}t=\mathrm{d}x/5\,.$$

Ahora los datos quedan de la siguiente forma:

$$\left\{(-1,8),\left(-\frac{3}{5},10\right),\left(-\frac{1}{5},11\right),\left(\frac{1}{5},18\right),\left(\frac{3}{5},20\right),(1,34)\right\}\ .$$

Ahora bien, necesitamos encontrar los coeficientes de la serie

$$f(x)=\sum_{k=0}^{5}C^kP_k(x)=C^0P_0(x)+C^1P_1(x)+\cdots+C^5P_5(x)$$

y el sistema de ecuaciones que resulta es el siguiente:

$$\begin{cases}
(-1,8) \ \Rightarrow\ 8=C^0-C^1+C^2-C^3+C^4-C^5\\[2ex]
\left(-\frac{3}{5},10\right) \ \Rightarrow\ 10=C^0-\frac{3}{5}C^1+\frac{1}{25}C^2+\frac{9}{25}C^3-\frac{51}{125}C^4+\frac{477}{3125}C^5\\[2ex]
\left(-\frac{1}{5},11\right) \ \Rightarrow\ 11=C^0-\frac{1}{5}C^1-\frac{11}{25}C^2+\frac{7}{25}C^3+\frac{29}{125}C^4-\frac{961}{3125}C^5\\[2ex]
\left(\frac{1}{5},18\right) \ \Rightarrow\ 18=C^0+\frac{1}{5}C^1-\frac{11}{25}C^2-\frac{7}{25}C^3+\frac{29}{125}C^4+\frac{961}{3125}C^5\\[2ex]
\left(\frac{3}{5},20\right) \ \Rightarrow\ 20=C^0+\frac{3}{5}C^1+\frac{1}{25}C^2-\frac{9}{25}C^3-\frac{51}{125}C^4-\frac{477}{3125}C^5\\[2ex]
(1,34) \ \Rightarrow\ 34=C^0+C^1+C^2+C^3+C^4+C^5
\end{cases}$$

Al resolver este sistema obtendremos los siguientes resultados:

$$C^0=\frac{2249}{144},\quad C^1=\frac{3043}{336},\quad C^2=\frac{1775}{504},\quad C^3=-\frac{175}{216},\quad C^4=\frac{625}{336},\quad C^5=\frac{14375}{3024}\,,$$

con lo cual:

$$\mathcal{P}(x)=f(x)=\frac{2249}{144}+\frac{3043}{336}x+\frac{1775}{504}P(2,x)-\frac{175}{216}P(3,x)+\frac{625}{336}P(4,x)+\frac{14375}{3024}P(5,x)\ .$$

y la interpolación queda representada en la figura 2.3.

Nótese que mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorsionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (un polinomio) continua a trozos.

Borrador Preliminar

Figura 2.3: A la izquierda los puntos experimentales: $\{(2,8),(4,10),(6,11),(8,18),(10,20),(12,34)\}$ y a la derecha la función polinómica que los interpola.

2.4.5 Ejercicios

1. Demuestre que con las identidades siguientes:
$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}, \quad \text{sen}(kx) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i},$$
la serie de Fourier definida para funciones en el intervalo $(t, t+2\pi)$ se escribe en su forma compleja como:
$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\text{sen}(kx)] \;\Rightarrow\; f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$
con:
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x\,.$$
Y que para funciones definidas en el intervalo $(l, l+2L)$ como:
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi x}{L}}, \quad \text{con } c_k = \frac{1}{2L}\int_l^{l+2L} f(x)e^{-\frac{ik\pi x}{L}}\mathrm{d}x\,.$$
Nota: Para los siguientes ejercicios supondremos la utilización del programa **Maxima**.
2. Para las siguientes funciones determine la serie de Fourier calculando los coeficientes como en la sección 2.4 y compare los resultados con los cálculos hechos en el ambiente de manipulación simbólica.
   (a). $f(x) = x\ \text{sen}(x)$, si $-\pi < x < \pi$.
   (b). $f(x) = e^x$, si $-\pi < x < \pi$.
   (c). $f(x) = x$, si $0 < x < 2$.
   (d). $f(x) = 2x - 1$, si $0 < x < 1$.
3. Considere el espacio vectorial, $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$, de funciones reales, continuas y continuamente diferenciables definidas en el intervalo $[-1,1]$. Es claro que una posible base de este espacio de funciones la constituye el conjunto de monomios $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\}$ por cuanto estas funciones son linealmente independientes.
   (a). Si suponemos que este espacio vectorial está equipado con un producto interno definido por $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\ f(x)g(x)$, muestre que esa base de funciones no es ortogonal.
   (b). Utilizando la definición de producto interno $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\ f(x)g(x)$ ortogonalize la base

Borrador Preliminar

$\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\}$ y encuentre los 10 primeros vectores ortogonales, base para $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Legendre.

(c). Modificando un poco la definición de producto interno para que ahora sea

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)\sqrt{(1-x^2)}\,,$$

ortogonalize la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\}$ y encuentre otros 10 primeros vectores ortogonales base para el mismo $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Chebyshev.

(d). Suponga la función $h(x) = \mathrm{sen}(3x)(1-x^2)$:

I. Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Legendre, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.

II. Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Chebyshev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.

III. Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de polinomios de Legendre y de Chebyshev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.

IV. Estime en cada caso el error que se comete como función del grado del polinomio (o monomio) de la expansión.

¿Qué puede concluir respecto a la expansión en una u otra base?

4. Parecido al ejercicio anterior, considere el espacio vectorial, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,1]}$, de funciones reales, continuas y continuamente diferenciables definidas en el intervalo $[0, 1]$. Es claro que otra posible base de este espacio de funciones la constituye el conjunto de funciones exponenciales $\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{4x}, \cdots\}$ por cuanto, al igual que el caso anterior estas funciones también son linealmente independientes. Adicionalmente, considere aquí la función $g(x) = \cos(3x^3)(1-x^2)$,

(a). Suponga que este espacio vectorial está equipado con un producto interno definido por

$$\langle f|g\rangle = \int_{0}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)\,,$$

y muestre que esa base de funciones $\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{4x}, \cdots\}$ no es ortogonal.

(b). Utilizando la definición de producto interno ortogonalize la base $\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{4x}, \cdots\}$ y encuentre los 7 primeros vectores ortogonales, base para $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,1]}$, i.e. $\{1, E_1(x), E_2(x), E_3(x), E_4(x), \cdots\}$.

(c). Encuentre el valor de los coeficientes, C_i de la expansión

$$g_M(x) \approx \sum_{i=0}^{7} C_i x^i\,,$$

utilizando la definición de producto interno anterior y estime también el error ϵ_M en esta aproximación

$$g_M(x) = \sum_{i=0}^{7} C_i x^i + \epsilon_M\,.$$

(d). Expanda en serie de Taylor la función anterior

$$g_T(x) \approx \sum_{n=0}^{7} \left.\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} \frac{x^n}{n!}\,,$$

estime el error ϵ_T y compárelo con el caso anterior.

Borrador Preliminar

(e). Ahora encuentre el valor de los coeficientes, $\tilde{C}_i$ de la expansión

$$g_E(x) \approx \sum_{m=0}^{7} \tilde{C}_m \mathrm{e}^{mx} \,,$$

utilizando la definición de producto interno anterior y, del mismo modo, estime también el error ϵ_E en esta aproximación

$$g_E(x) = \sum_{m=0}^{7} \tilde{C}_m \mathrm{e}^{mx} + \epsilon_E \,.$$

¿Qué puede concluir de la comparación de los errores ϵ_M, ϵ_T y ϵ_E?

(f). A continuación encuentre el valor de los coeficientes, $\bar{C}_i$ de la expansión

$$g_{Eo}(x) \approx \sum_{m=0}^{7} \bar{C}_m E_m(x) \,,$$

y estime también el error ϵ_{Eo} en esta aproximación

$$g_{Eo}(x) = \sum_{m=0}^{7} \bar{C}_m E_m(x) + \epsilon_{Eo} \,.$$

. ¿Otra vez, qué puede concluir de la comparación de los errores ϵ_M, ϵ_T, ϵ_E y ϵ_{Eo}?

(g). Grafique las funciones $g(x)$, $g_M(x)$, $g_T(x)$, $g_E(x)$ y $g_{Eo}(x)$ y compare con los errores.

5. Al medir la temperatura a lo largo de una barra material obtenemos los siguientes valores:

$x_i\,(cm)$	$1,0$	$2,0$	$3,0$	$4,0$	$5,0$	$6,0$	$7,0$	$8,0$	$9,0$
$T_i\,(°C)$	$14,6$	$18,5$	$36,6$	$30,8$	$59,2$	$60,1$	$62,2$	$79,4$	$99,9$

Encuentre, mediante el método de los mínimos cuadrados los coeficientes que mejor ajustan a la recta $T = ax + b$.

6. Los precios de un determinado producto varían como se muestra a continuación:

Año	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Precio	133.5	132.2	138.7	141.5	144.2	144.5	148.6	153.8

Realice una interpolación polinomial que permita modelar estos datos.

Practicando con Maxima

1. **Series de Fourier**

Existe una biblioteca llamada **fourie** en **Maxima** que contiene instrucciones para el cálculo simbólico de series de Fourier de una función $f(x)$ en el intervalo $[-l, l]$: **fourier** (f, x, l). También encontraremos un conjunto de comandos en el paquete para calcular los coeficientes y para manipular las expresiones resultantes.

```
(%i1) load(fourie)$
```

En el ejemplo anterior aproximamos la función:

$$f(x) = x^2 \,.$$

Veamos como se trabaja con el programa para calcular la serie de Fourier. Los resultados aparecerán en la forma de listas temporales y entre ellas los coeficientes. Las listas temporales serán indicadas con la notación (`%t`).

Borrador Preliminar

(%i2) f:x^ 2;
(%o2) x^2

(%i3) fourier(f,x, %pi);
(%t3) $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$
(%t4) $a_n = \frac{2\left(\frac{\pi^2 \sin(\pi n)}{n} - \frac{2\sin(\pi n)}{n^3} + \frac{2\pi\cos(\pi n)}{n^2}\right)}{\pi}$
(%t5) $b_n = 0$
(%o5) $[\%t_3, \%t_4, \%t_5]$

Lo anterior se puede simplificar con el comando **foursimp**:

(%i6) foursimp(%);
(%t6) $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$
(%t7) $a_n = \frac{4\,(-1)^n}{n^2}$
(%t8) $b_n = 0$
(%o8) $[\%t_6, \%t_7, \%t_8]$

Podemos evaluar la lista de los coeficiente hasta el término k. Aquí lo haremos hasta $k = 4$ y el resultado lo lo asignaremos a la variable F. Por otro lado, usaremos (%o8), la última salida, como entrada para siguiente comando.

(%i9) F:fourexpand(%o8,x, %pi,4);
(%o9) $\frac{\cos(4x)}{4} - \frac{4\cos(3x)}{9} + \cos(2x) - 4\cos x + \frac{\pi^2}{3}$

Construiremos ahora en un mismo gráfico la función original y los primeros 5 términos de la serie, de esta manera podremos comparar el resultado de la aproximación. Las opciones para realizar los diferentes gráficos en **Maxima** se pueden consultar en el manual de programa.

(%i10) wxplot2d([F,f], [x,- %pi, %pi],[legend, "F", "x^ 2"])$
(%o10)

Borrador Preliminar

Veamos que sucede si escribimos:

(%i11) totalfourier(f,x, %pi);

(%t11) $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$

(%t12) $a_n = \frac{2\left(\frac{\pi^2 \sin(\pi n)}{n} - \frac{2\sin(\pi n)}{n^3} + \frac{2\pi\cos(\pi n)}{n^2}\right)}{\pi}$

(%t13) $b_n = 0$

(%t14) $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$

(%t15) $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$

(%t16) $b_n = 0$

(%o16) $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n\,x)}{n^2} + \frac{\pi^2}{3}$

En este caso fueron aplicados de manera simultánea los comandos **fourier** y **foursimp** para finalmente presentar la serie en forma de una sumatoria.

(%i17) kill(all)$

2. **Mínimos Cuadrados**

Maxima puede estimar los parámetros que mejor se ajusten a una función $f = (x, y)$ para un conjunto de datos, utilizando el método de mínimos cuadrados. El programa buscará primero una solución exacta, si no la encuentra buscará una aproximada. El resultado lo presentará como una lista de ecuaciones. La función a utilizar será **lsquares**.

Vamos a considerar los ejemplos estudiados con anterioridad:

(a). En el primer ejemplo los datos eran los siguientes:

$$(x, y) = (1, 2), (3, 2), (4, 5), (6, 6)\ .$$

Es necesario hacer uso de la biblioteca **lsquares** y los los datos deben introducirse en forma de matriz.

(%i1) load(lsquares)$

(%i2) datos: matrix([1,2],[3,2],[4,5],[6,6])$

Por conveniencia, para más adelante hacer un gráfico, convertimos la matrix "datos" en una lista. Esto es sencillo si utilizamos el comando **args**:

(%i3) datosL: args(datos);

(%o3) $[[1, 2], [3, 2], [4, 5], [6, 6]]$

Supondremos entonces que los puntos se ajustan a un polinomio lineal del tipo: $y = ax$. El parámetro a se calcula con la función **lsquares_estimates**. Es importante prestar bastante atención a la sintaxis del siguiente comando.

(%i4) param: lsquares_estimates(datos,[x,y],y=a*x,[a]), numer;

(%o4) $[[a = 1.032258064516129]]$

Borrador Preliminar

Este será entonces el valor del parámetro a de la ecuación de la recta $y = ax$ que pasa por el origen. Notemos también que le hemos asignado el valor del parámetro a a la variable `param`.
Lo que haremos ahora es escribir la ecuación de dicha recta. Podemos hacer uso de la instrucción **ev** que nos permite evaluar una expresión.

```
(%i5)  y:ev(a*x,first(param));
(%o5)  1.032258064516129 x
```

Procederemos ahora a graficar los datos experimentales vs el ajuste por mínimos cuadrados en un mismo gráfico.
Recordemos que el conjunto de puntos lo tenemos en la forma de una lista, que hemos denominada más arriba como `datosL`. Mientras que al ajuste que hemos calculado, es decir, la recta: $1.032258064516129\,x$ le hemos asignado la variable denominada y.
Es recomendable consultar el manual del programa, en la parte que tiene que ver con gráficos, **plot2d**, **plot3d**, para identificar la sintaxis que aparecerá en la siguiente instrucción.

```
(%i6)  wxplot2d([[discrete,datosL], y], [x,0,10],[style, [points,5,2], [lines,2,1]],
       [point_type, plus], [legend,"Datos","y=ax"],[xlabel, "x"],[ylabel, " y"])$
(%o6)
```

Nota: Se deja como ejercicio repetir éste mismo cálculo pero usando un ajuste para los datos de la forma: $y = ax + b$.

(b). Consideremos el conjunto de datos: $|x_1\rangle = (1, 2, 1, 1)$, $|x_2\rangle = (2, 1, 1, -1)$, $|y\rangle = (15, 12, 10, 0)$.
Vamos a suponer que ajustan de la manera siguiente: $|y\rangle = a\,|x_1\rangle + b\,|x_2\rangle$.

```
(%i7)  datos2: matrix([1,2,15],[2,1,12],[1,1,10],[1,-1,0])$
```

Cambiemos ligeramente la notación por: $z = ax + by$ y calculemos los parámetros a y b.

```
(%i8)  param: lsquares_estimates(datos2,[x,y,z], z=a*x+b*y,[a,b]), numer;
(%o8)  [[a = 4.090909090909091, b = 5.090909090909091]]
```

(c). Para el tercer ejemplo se consideraron los siguientes datos:

$$\{(0,1)\,,(1,3)\,,(2,7)\,,(3,15)\} \quad \Leftrightarrow \quad y = ax^2 + bx + c\,.$$

Borrador eliminar

Haremos con **Maxima** el cálculo directo usando un ajuste cuadrático para los datos suministrados.

(%i9) datos3: matrix([0,1],[1,3],[2,7],[3,15])$

Como hicimos anteriormente, hacemos una lista:

(%i10) datosL3: args(datos3)$

Procedemos a calcular los parámetros:

(%i11) param: lsquares_ estimates(datos3,[x,y], y=a*x^ 2+b*x+c,[a,b,c]), numer;
(%o11) $[[a = 1.5, b = 0.1, c = 1.1]]$

Con los parámetros determinados podemosasignarlos a una nueva variable, en este caso y2,

(%i12) y2:ev(a*x^ 2+b*x+c,first(param))$

Como hicimos anteriormente, graficamos los datos y el ajuste cuadrático en una misma figura.

(%i13) wxplot2d([[discrete,datosL3], y2], [x,0,4],[style, [points,5,2], [lines,2,1]],
[point_ type, plus], [legend,"Datos"," y=ax^ 2+bx+c"],[xlabel, "x"],[ylabel, " y "])$
(%o13)

(%i14) kill(all)$

3. **Polinomios ortogonales**

Maxima contiene la librería **orthopoly** que nos permite acceder a la evaluación simbólica y numérica de los diferentes tipos de polinomios ortogonales: Chebyshev, Laguerre, Hermite, Jacobi, Legendre...

(%i1) load (orthopoly)$

Por ejemplo, para obtener los primeros 6 polinomios de Legendre escribimos los siguientes comandos:

(%i2) [legendre_ p(0,x),legendre_ p(1,x),legendre_ p(2,x),
legendre_ p(3,x),legendre_ p(4,x),legendre_ p(5,x)]$

Simplificamos con **ratsimp**:

Borrador eliminar

(%i3) ratsimp (%);

(%o3) $\left[1, x, \frac{3\,x^2-1}{2}, \frac{5\,x^3-3\,x}{2}, \frac{35\,x^4-30\,x^2+3}{8}, \frac{63\,x^5-70\,x^3+15\,x}{8}\right]$

Los diferentes polinomios de Legendre se pueden visualizar de la manera siguiente:

(%i4) wxplot2d(%,[x,-1,1],[legend, "P0", "P1","P2", "P3","P4", "P5"])$

(%o4)

Ahora bien, con los datos de la figura 2.3 planteamos un sistema de ecuaciones lineales que ahora introduciremos en el programa:

(%i4) ecu1:C0-C1+C2-C3+C4-C5=8$

(%i5) ecu2:C0-3/5*C1+1/25*C2+9/25*C3-51/125*C4+477/3125*C5=10$

(%i6) ecu3:C0-1/5*C1-11/25*C2+7/25*C3+29/125*C4-961/3125*C5=11$

(%i7) ecu4:C0+1/5*C1-11/25*C2-7/25*C3+29/125*C4+961/3125*C5=18$

(%i8) ecu5:C0+3/5*C1+1/25*C2-9/25*C3-51/125*C4-477/3125*C5=20$

(%i9) ecu6:C0+C1+C2+C3+C4+C5=34$

Procedemos a resolver el sistema de ecuaciones anterior:

(%i10) linsolve([ecu1,ecu2,ecu3,ecu4,ecu5,ecu6], [C0,C1,C2,C3,C4,C5]);

(%o10) $\left[C_0=\frac{2249}{144}, C_1=\frac{3043}{336}, C_2=\frac{1775}{504}, C_3=-\frac{175}{216}, C_4=\frac{625}{336}, C_5=\frac{14375}{3024}\right]$

Para asignar cada solución a la variable correspondiente podemos hacer lo siguiente:

(%i11) [C0,C1,C2,C3,C4,C5]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4]),rhs(%[5]),rhs(%[6])];

(%o11) $\left[\frac{2249}{144}, \frac{3043}{336}, \frac{1775}{504}, -\frac{175}{216}, \frac{625}{336}, \frac{14375}{3024}\right]$

Por lo tanto, la función aproximada será la siguiente:

(%i13) f:C0+C1*legendre_ p(1,x)+C2*legendre_ p(2,x)+C3*legendre_ p(3,x)
+C4*legendre_ p(4,x)+legendre_ p(5,x)*C5$

Borrador Preliminar

(%i14) f:expand(%);

(%o14) $\frac{14375\,x^5}{384}+\frac{3125\,x^4}{384}-\frac{8375\,x^3}{192}-\frac{325\,x^2}{192}+\frac{7367\,x}{384}+\frac{1863}{128}$

Procedemos a introducir los datos:

(%i15) datos:[[-1,8],[-3/5,10],[-1/5,11],[1/5,18],[3/5,20],[1,34]];

(%o15) $\left[[-1,8],\left[-\frac{3}{5},10\right],\left[-\frac{1}{5},11\right],\left[\frac{1}{5},18\right],\left[\frac{3}{5},20\right],[1,34]\right]$

Haremos ahora la gráfica con los datos y con la interpolación:

(%i16) wxplot2d([[discrete,datos],f], [x,-1,1],[style, [points,5,2], [lines,2,1]], [point_ type, plus], [legend, false],[xlabel, ”x”],[ylabel, ” y”])$

(%o16)

Borrador

Bibliografía

[1] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[2] Scharnhorst, K. (2009) **Angles in complex vector spaces** Acta Applicandae Mathematica), **69**(1), 95-103

[3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[4] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J:*)

[5] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*

[6] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press*)

Borrador Preliminar

Capítulo 3

Vectores duales y tensores

La ruta de este capítulo

Este capítulo completa el esfuerzo de formalización de conceptos que comenzamos en el capítulo anterior. Iniciamos con el estudio de los funcionales lineales, extendimos el concepto de función al de una aplicación entre elementos de espacios vectoriales, y esta extensión nos llevó a la definición de los espacios vectoriales duales.

Luego incorporamos el concepto de $1-$*forma* como el conjunto de funcionales que conforman un espacio vectorial dual. Ahora el producto interno se definirá entre $1-$*formas* y vectores. En la sección 3.2 construiremos una nueva clase de objetos matemáticos: los tensores. Estos objetos pueden verse como arreglos multilineales y constituyen una extensión de objetos ya conocidos: los escalares, los vectores y las $1-$*formas*. Presentaremos las tres definiciones de un tensor: como un mapa multilineal, como el resultado de un producto tensorial de espacios vectoriales y finalmente como un objeto que satisface ciertas reglas de transformación (un tensor en términos de bases coordenadas), [1]

Desarrollaremos el álgebra tensorial y sus leyes de transformación, tanto desde el punto de vista de los vectores abstractos como en bases coordenadas. Ejemplificamos la utilización de este concepto en Física cuando discutimos, en la sección 3.3, el tensor de inercia y el de esfuerzos (*stress*). En la sección 3.4 incursionaremos en los espacios pseudoeuclidianos para mostrar una situación en la cual podemos diferenciar $1-$*formas* de vectores, y aprovechamos además para introducir algunas nociones básicas de la teoría especial de la relatividad.

Para finalizar, en la sección 3.5 extenderemos los conceptos de espacios vectoriales y bases discretas a espacios de funciones y bases continuas y en ese contexto discutimos algunos rudimentos de teorías de distribuciones.

3.1 Funcionales lineales

En los cursos más elementales de cálculo se estudiaron funciones de una y varias variables reales. Estas funciones pueden considerarse que actúan sobre vectores en $\mathbb{R}^3$ y podemos extender esta idea para otras que tengan como argumento vectores de un espacio vectorial abstracto.

Como hemos visto, los espacios vectoriales pueden estar formados por funciones, es decir, por aplicaciones

[1] Una referencia muy ilustrativa es Lek-Heng Lim (2021) Tensors in Computations. *Acta Numerica* **30**, 555-764. También está disponible en https://arxiv.org/abs/2106.08090.

Borrador Preliminar

que pueden transformar unas funciones en otras. Comenzaremos con las más sencillas, las lineales, que también son conocidas como *funcionales lineales*.

Definición 3.1 (Funcional lineal)

Un funcional lineal es una operación que asocia un número complejo (o real) $\in \boldsymbol{K}$ a un vector $|v\rangle \in \boldsymbol{V}$, es decir:

$$\forall\ |v\rangle \in \boldsymbol{V} \quad \Rightarrow \mathcal{F}\left[|v\rangle\right] \in \mathbb{C}\,,$$

y cumple con:

$$\mathcal{F}\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle\right] \equiv \alpha\,\mathcal{F}\left[|v_1\rangle\right] + \beta\,\mathcal{F}\left[|v_2\rangle\right]\ ,\ \forall\ |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \boldsymbol{V} \text{ y } \forall\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}\,,$$

vale decir: **es lineal**.

En otras palabras, un funcional lineal (o forma lineal) es un *morfismo*[2] del espacio lineal $\boldsymbol{V}$ a un espacio $\boldsymbol{K}$.

Cuando se escoge una base $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ para un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ se puede expresar cualquier vector $|v\rangle \in \boldsymbol{V}$ como una combinación lineal respecto a esa base. Es decir, $|v\rangle = \xi^i|\mathrm{e}_i\rangle$ (recordemos el uso de la convención de Einstein para las suma: 1.4.1). Las cantidades $\{\xi^i\}$ son las componentes del vector $|v\rangle$ en esa base. Entonces, lo que se tiene para cada componente es un funcional lineal, como por ejemplo, $\mathcal{F}_{|\mathrm{e}_i\rangle}\left[|v\rangle\right] = \xi^i$.

Algo parecido ocurre con el producto interno, cuando se define el producto escalar $\langle v_0|v\rangle$, del vector $|v\rangle$ con un vector fijo $|v_0\rangle$. En ese caso, lo que tenemos es un funcional lineal $\mathcal{F}_{|v_0\rangle}\left[|v\rangle\right] = \langle v_0|v\rangle = \alpha \in \boldsymbol{K}$.

Otro ejemplo sencillo de un funcional lineal es la integral definida que podemos interpretar de la manera siguiente:

$$\mathcal{F}_{f_0(x)}\left[|f\rangle\right] = \int_a^b f_0(x) f(x) \mathrm{d}x\,,$$

donde $f(x), f_0(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, es decir, pertenece al espacio vectorial de funciones reales y continuas en el intervalo $[a, b]$ y $f_0(x)$ es una función que se toma como fija. Este concepto nos servirá de base para extender, en la sección 3.5.2 la idea de función a distribución

3.1.1 Espacio vectorial dual

El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ constituyen a su vez un espacio vectorial, el cual se denomina espacio vectorial dual de $\boldsymbol{V}$ –que es el espacio directo– y se denotará como $\boldsymbol{V}^\star$ (aquí * no es complejo conjugado al que distiguiremos con $\boldsymbol{V}^*$).

Es fácil convencerse que los funcionales lineales forman un espacio vectorial ya que, dados $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \boldsymbol{V}^\star$ se tiene:

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)\left[|v\rangle\right] &= \mathcal{F}_1\left[|v\rangle\right] + \mathcal{F}_2\left[|v\rangle\right] \\ (\alpha\,\mathcal{F})\left[|v\rangle\right] &= \alpha\,\mathcal{F}\left[|v\rangle\right] \end{aligned}\right\} \quad \forall \quad |v\rangle \in \boldsymbol{V}\,.$$

A este espacio lineal se le llama espacio de formas lineales y, a los funcionales se les denomina $1-$*formas* o covectores. Más aún Si $\boldsymbol{V}$ es de dimensión finita n, entonces $\dim \boldsymbol{V} = \dim \boldsymbol{V}^\star = n$.

Como ya lo mencionamos, en aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional. Así tendremos que:

$$\mathcal{F}_a\left[|v\rangle\right] \equiv \langle a|v\rangle \quad \forall \quad |v\rangle \in \boldsymbol{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \boldsymbol{V}^\star\,.$$

[2]Entenderemos por morfismo a toda regla o mapa que asigne a todo vector $|v\rangle$ de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ un vector $|w\rangle$ de un espacio vectorial $\boldsymbol{W}$ y usualmente se denota por $\mathcal{F} : \boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{W}$.

Borrador Preliminar

Es claro comprobar que el producto interno garantiza que los $\{\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b, \cdots\}$ forman un espacio vectorial:

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b)\,[|v\rangle] &= \mathcal{F}_a\,[|v\rangle] + \mathcal{F}_b\,[|v\rangle] = \langle a|v\rangle + \langle b|v\rangle \\ (\alpha\,\mathcal{F}_a)\,[|v\rangle] &= \langle \alpha a|v\rangle = \alpha^*\langle a|v\rangle = \alpha^*\,\mathcal{F}_a\,[|v\rangle] \end{aligned}\right\} \quad \forall \quad |v\rangle \in \boldsymbol{V}\,.$$

Esta última propiedad se conoce como antilinealidad.

Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales):

$$\lambda_1|v_1\rangle + \lambda_2|v_2\rangle \qquad \rightleftarrows \qquad \lambda_1^*\langle v_1| + \lambda_2^*\langle v_2|\,,$$

que ahora la podemos precisar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle a|v\rangle &= \langle v|a\rangle^*\,, \\ \langle a|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle &= \lambda_1\langle a|v_1\rangle + \lambda_2\langle a|v_2\rangle\,, \\ \langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2|v\rangle &= \lambda_1^*\langle a_1|v\rangle + \lambda_2^*\langle a_2|v\rangle\,. \end{aligned}$$

Más aún, dada una base $\{|e_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots |\mathrm{e}_n\rangle\}$ para $\boldsymbol{V}$ siempre es posible asociar una base para $\boldsymbol{V}^\star$ de tal manera que:

$$|v\rangle = \xi^i|\mathrm{e}_i\rangle \;\rightleftarrows\; \langle v| = \xi_i^*\langle e^i|\,, \quad \text{con} \;\; \xi^i = \langle e^i|v\rangle \;\wedge\; \xi_i^* = \langle v|\mathrm{e}_i\rangle, \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots, n\,.$$

En un lenguaje arcaico (y muchos textos de mecánica todavía lo reproducen) se denota a la base del espacio dual $\{\langle e^i|\}$ como la base recíproca de la base $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$. Este caso lo ilustraremos más adelante en el ejemplo 3.1.

Se puede ver también que si $|v\rangle = \xi^i|\mathrm{e}_i\rangle$, entonces

$$\mathcal{F}\,[|v\rangle] = \mathcal{F}\left[\xi^i|\mathrm{e}_i\rangle\right] = \xi^i\mathcal{F}\,[|\mathrm{e}_i\rangle] = \xi^i\omega_i\,, \quad \text{con} \;\; \mathcal{F}\,[|\mathrm{e}_i\rangle] \equiv \omega_i\,.$$

Nótese que estamos utilizando la notación de Einstein en la que índices repetidos indican suma. También que las bases del espacio dual de formas diferenciales $\{\langle \mathrm{e}^k|\}$ llevan los índices arriba, los llamaremos índices contravariantes, mientras que los índices abajo, serán covariantes. Por lo tanto, las componentes de las formas diferenciales en una base dada, llevan índices abajo $\langle a| = a_i\langle \mathrm{e}^i|$ mientras que las componentes de los vectores los llevan arriba $|v\rangle = \xi^j|\mathrm{e}_j\rangle$.

Observe también que dada una base ortonormal en el espacio directo $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}$ existe una única base canónica en el dual definida como:

$$\langle \hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \mathcal{F}^i\,[|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle] = \delta^i_j\,.$$

Esta $1-$*forma* al actuar sobre un vector arbitrario resulta en:

$$\mathcal{F}^i\,[|v\rangle] = \mathcal{F}^i\left[\xi^j|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle\right] = \xi^j\mathcal{F}^i\,[|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle] = \xi^j\delta^i_j = \xi^i\,,$$

su componente contravariante. El conjunto de $1-$*formas* $\{\mathcal{F}^i\}$ será linealmente independientes.

Si $|v\rangle = \xi^i|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle$ es un vector arbitrario en el espacio directo y $\langle a| = a_i\langle \hat{\mathrm{e}}^i|$ un vector en el espacio dual, entonces:

$$\langle a|v\rangle = \langle a_i\langle \hat{\mathrm{e}}^i| \,|\, |\xi^i|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\rangle = a_i^*\xi^j\langle \hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a_i^*\xi^j\delta^i_j = a_i^*\xi^i\,,$$

y para bases arbitrarias, oblicuas (no ortogonales), $\{|\mathrm{w}_i\rangle\}$ de $\boldsymbol{V}$ y $\{\langle \mathrm{w}^i|\}$ de $\boldsymbol{V}^\star$ se tiene:

$$\langle a|v\rangle = \langle \mathrm{w}^i|\mathrm{w}_j\rangle a_i^*\xi^j\,.$$

Es claro que $\langle \mathrm{w}^i|\mathrm{w}_j\rangle$ son las proyecciones de cada uno de los vectores base en las distintas direcciones.

Borrador Preliminar

Figura 3.1: Bases directas y recíprocas. Note como los covectores representan planos perpendiculares a dos vectores de la base directa. Figura tomada de `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=457850` CC BY-SA 3.0. Los cristalógrafos lograron ejemplificar las bases duales y luego la aplicación de la difracción de rayos X a la cristalografía potenció utilidad de este concepto.

3.1.2 Espacios duales y bases recíprocas

Un ejemplo que ilustra las bases duales es la construcción de las llamadas bases recíprocas que mencionamos anteriormente en los ejercicios de aplicaciones del álgebra vectorial de la sección 1.3.3, en la página 28. Este ejemplo ilustra la pregunta de siempre: si los vectores se representan geométricamente como un segmento orientado, con módulo, dirección y sentido ¿cómo representamos geométricamente una forma lineal o covector? Las formas diferenciales representan vectores perpendiculares a planos formados por dos vectores de la base directa. Los cristalógrafos lograron ejemplificar las bases duales y luego la aplicación de la difracción de rayos X a la cristalografía potenció utilidad de este concepto.

3.1.2.1 Bases recíprocas

Consideremos el problema de expandir un vector $|a\rangle$ con respecto a una base oblicua (no es ortogonal), $\{|\mathrm{w}_i\rangle\}$, de tal forma que, $|a\rangle = a^i|\mathrm{w}_i\rangle$.

Por simplicidad, tomemos el caso $\mathbb{R}^3$, de manera que $\mathbf{a} = a^i\mathbf{w}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Al proyectar el vector $\mathbf{a}$ sobre los ejes de algún sistema de coordenadas, es posible resolver el sistema de tres ecuaciones que resulta para las incógnitas a^i. Las bases de vectores $\{\mathbf{w}_i\}$ y de formas o covectores $\{\mathbf{w}^i\}$ serán duales, y por construcción satisfacen $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}^j = \delta_i^j$. Es decir, cada uno de los vectores bases duales es perpendicular a los otros dos de la base dual: $\mathbf{w}^1$ será perpendicular a $\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$: $\mathbf{w}^1 = \alpha(\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3)$.

Como $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}^1 = 1$, entonces:

$$\alpha\mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) = 1 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3)} \quad \Rightarrow \mathbf{w}^1 = \frac{\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3}{\mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3)},$$

y en general, es fácil ver que:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k)}, \tag{3.1}$$

donde i, j, k son permutaciones cíclicas de $1, 2, 3$.

La definición (3.1) nos permite construir la base de *1-formas* o covectores, a partir de su ortogonalidad con los vectores de la base directa. Notemos también que $V = \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k)$ es el volumen del paralelepípedo que soportan los vectores $\{\mathbf{w}_i\}$ y que además se puede obtener una expresión análoga para los $\{\mathbf{w}_i\}$ en término de los $\{\mathbf{w}^i\}$.

Al ser $\{\mathbf{w}_i\}$ y $\{\mathbf{w}^i\}$ duales, $\mathbf{a} = a^j\mathbf{w}_j \Rightarrow \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w}^i \cdot (a^j\mathbf{w}_j) = a^j(\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{w}_j) = a^j\delta_j^i = a^i$, con $i = 1, 2, 3$ y equivalentemente, el covector de $\mathbf{a}$: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_j\mathbf{w}^j \quad \Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{w}_i = (\bar{a}_j\mathbf{w}^j) \cdot \mathbf{w}_i = \bar{a}_j(\mathbf{w}^j \cdot \mathbf{w}_i) = \bar{a}_j\delta_i^j = \bar{a}_i$, con $i = 1, 2, 3$. Hemos querido enfatizar el carácter dual del covector $\bar{\mathbf{a}}$ al vector $\mathbf{a}$ y obviamente $\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

De la misma ecuación (3.1) se puede ver que la representación gráfica de una forma será una superficie orientada. La figura 3.1 muestra como, a partir de una base directa de vectores oblícuos se construyen planos

Borrador Preliminar

perpendiculares a esos vectores y la orientación (dirección y sentido) representan las direcciones de los vectores duales. En cristalografía esa base dual se le representa como los índices de Miller.

Claramente si las base directa es ortonormal su dual también lo será y, más importante aún, ambas bases coinciden $\mathbf{e}^i \equiv \mathbf{e}_i$, y si la base original o directa es dextrógira su dual también lo será.

Ejemplo 3.1 Dados los vectores: $\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, y $\mathbf{u}_3 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$. Revisaremos si estos vectores son mutuamente ortogonales. Encontraremos la base recíproca $\mathbf{u}^i$, el tensor métrico en ambas bases y para el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ encontraremos sus componentes covariantes.

Para saber si son ortogonales simplemente calculamos el producto escalar entre ellos:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 9\,,\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 6 \ \text{ y } \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 7\,,$$

por lo tanto no son ortogonales y adicionalmente sabemos que:

$$\mathbf{u}^i = \frac{\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k)}$$

Procederemos a calcular primero el denominador:

$$V = \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \quad \Rightarrow \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}\right]\right) = 6\,.$$

En general:

$$\mathbf{u}^i = \frac{\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k}{V} \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}^1 = \dfrac{\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3}{V} = \frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}} \\[2ex] \mathbf{u}^2 = \dfrac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1}{V} = -\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}} \\[2ex] \mathbf{u}^3 = \dfrac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{V} = -\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}} \end{cases}$$

Notemos que:

$$\tilde{V} = \mathbf{u}^1 \cdot (\mathbf{u}^2 \times \mathbf{u}^3) \quad \Rightarrow \left(\frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[-\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[-\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}}\right]\right) = \frac{1}{6}\,.$$

◁

3.1.2.2 Bases duales

Si tenemos un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ y una definición de producto interno podremos conectar la base $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}$ de $\boldsymbol{V}$ con la base $\{\langle\hat{\mathrm{e}}^j|\}$ de $\boldsymbol{V}^\star$, imponiendo la ortogonalidad entre las bases, i.e. $\langle\hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^i_j$. En general, tal y como hemos dicho al comienzo de este capítulo (sección 3.1.1), una forma diferencial o 1-forma, $\langle b| \in \boldsymbol{V}^\star$ es susceptible de expresarse en una base $\{\langle\hat{\mathrm{e}}^i|\}$ del espacio dual $\boldsymbol{V}^\star$ como $b_i\langle\hat{\mathrm{e}}^i|$ y, como el espacio está equipado con un producto interno, entonces:

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = b_i a^j\ \langle\hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = b_i a^j \delta^i_j = a^i b_i\,.$$

3.1.3 Vectores, formas, componentes y leyes de transformación

Tal y como hemos mencionado anteriormente (tempranamente en la sección 1.4.3 y luego en la sección 2.3.4), un vector $|a\rangle \in \boldsymbol{V}$ puede expresarse en una base ortonormal $\{|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ como: $a^j|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes *contravariantes* del vector en esa base. En general, como es muy largo decir "componentes del vector contravariante" uno se refiere (y nos referiremos de ahora en adelante) al conjunto $\{a^j\}$ como un *vector contravariante* obviando la precisión de *componente*, pero realmente las a^j **son** las componentes del vector.

Adicionalmente, en esta etapa pensaremos a las bases como distintos observadores o sistemas de referencias. Con ello tendremos (algo que ya sabíamos) que un vector se puede expresar en distintas bases y tendrá distintas

Borrador Preliminar

componentes referidas a esa base

$$|a\rangle = a^j|\hat{e}_j\rangle = a^{j'}|\hat{e}_{j'}\rangle\,. \tag{3.2}$$

Así una misma cantidad física vectorial se verá distinta (tendrá distintas componentes) desde diferentes sistemas de coordenadas. Las distintas "visiones" están conectadas mediante un transformación de sistema de referencia como veremos más adelante. Con lo cual avanzamos otra vez en la interpretación de este tipo de objetos: una cantidad física escalar se verá igual (será invariante) desde distintos sistemas de referencia.

Sabemos que unas y otras componentes se relacionan y por (3.2) tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \langle\hat{e}^i|a\rangle = a^j\langle\hat{e}^i|\hat{e}_j\rangle = a^j\delta^i_j = a^{j'}\langle\hat{e}^i|\hat{e}_{j'}\rangle \\ \\ \langle\hat{e}^{i'}|a\rangle = a^{j'}\langle\hat{e}^{i'}|\hat{e}_{j'}\rangle = a^{j'}\delta^{i'}_{j'} = a^j\langle\hat{e}^{i'}|\hat{e}_j\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^i = A^i_{j'}a^{j'} \\ \\ a^{i'} = A^{i'}_j a^j\,, \end{array}\right.$$

donde claramente:

$$\langle\hat{e}^i|\hat{e}_{j'}\rangle = A^i_{j'}\,, \qquad \langle\hat{e}^{i'}|\hat{e}_j\rangle = A^{i'}_j \qquad \text{y} \quad A^i_{k'}A^{k'}_j = \delta^i_j \quad \Longleftrightarrow \quad A^i_{j'} = \left(A^{i'}_j\right)^{-1}.$$

Diremos entonces que aquellos objetos cuyas componentes transforman como: $a^i = A^i_{j'}a^{j'}$ o, equivalentemente como: $a^{i'} = A^{i'}_j a^j$ serán vectores, o en un lenguaje un poco más antiguo, vectores contravariantes.

Tradicionalmente, e inspirados en la ley de transformación, la representación matricial de las componentes contravariantes de un vector, $\langle\hat{e}^i|a\rangle = a^i$, para una base determinada $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ se representan como una columna

$$|a\rangle \quad \Rightarrow a^i = \langle\hat{e}^i|a\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

con: $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

De la misma manera, en el espacio dual, $\boldsymbol{V}^\star$, las formas diferenciales se podrán expresar en término de una base de ese espacio vectorial como

$$\langle b| = b_i\langle\hat{e}^i| = b_{i'}\langle\hat{e}^{i'}|\,. \tag{3.4}$$

Las $\{b_i\}$ serán las componentes de las formas diferenciales o las componentes *covariantes* de un vector $|b\rangle$, o –dicho rápidamente– un *vector covariante* o *covector*. Al igual que en el caso de las componentes contravariantes las componentes covariantes transforman de un sistema de referencia a otro mediante la siguiente ley de transformación:

$$\left.\begin{array}{r} \langle b|\hat{e}_j\rangle = b_i\langle\hat{e}^i|\hat{e}_j\rangle = b_i\delta^i_j = b_{i'}\langle\hat{e}^{i'}|\hat{e}_j\rangle \\ \\ \langle b|\hat{e}_{j'}\rangle = b_{i'}\langle\hat{e}^{i'}|\hat{e}_{j'}\rangle = b_{i'}\delta^{i'}_j = b_i\langle\hat{e}^i|\hat{e}_{j'}\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_j = b_{i'}A^{i'}_j \\ \\ b_{j'} = b_i A^i_{j'}\,. \end{array}\right.$$

Otra vez, objetos cuyas componentes transformen como $b_j = b_{i'}A^{i'}_j$ los denominaremos formas diferenciales o *vectores covariantes* o *covectores* y serán representados como matrices en un arreglo tipo fila:

$$\langle b| \quad \Rightarrow b_i = \langle b|\hat{e}_i\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

con: $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Quizá hasta este punto la diferencia de formas y vectores, de componentes covariantes y contravariantes, así como sus esquemas de transformación es todavía confusa. No disponemos de ejemplos contundentes que ilustren esa diferencia. Estos serán evidentes cuando nos toque discutir las características de los espacios pseudoeuclidianos en la sección 3.4. A continuación, en el ejemplo 3.4 para vectores complejos, también será clara la diferencia entre *1-formas* y vectores

Borrador Preliminar

Ejemplo 3.2 Consideremos $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$ como el espacio vectorial conformado por todos los vectores columna

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix},$$

el cual al representarse en su base canónica $\{|\hat{\mathrm{i}}_i\rangle\}$ resulta en:

$$|v\rangle = \xi^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi^1|\hat{\mathrm{i}}_1\rangle + \xi^2|\hat{\mathrm{i}}_2\rangle + \xi^3|\hat{\mathrm{i}}_3\rangle = \xi^i|\hat{\mathrm{i}}_i\rangle\,.$$

Sea un funcional lineal $\mathcal{F} \in \boldsymbol{V}^\star$, de manera que los vectores duales $\mathcal{F}[\circ] \equiv \langle F| \leftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$, puedan ser representados por "vectores" filas.

Notemos que la base de funcionales lineales $\boldsymbol{\zeta}^i[\circ] \equiv \langle\hat{\mathrm{i}}^i|$, la definimos como:

$$\boldsymbol{\zeta}^i\left[|\hat{\mathrm{i}}_j\rangle\right] = \langle\hat{\mathrm{i}}^i|\hat{\mathrm{i}}_j\rangle = \delta^i_j \quad \Rightarrow \langle\hat{\mathrm{i}}^1|\hat{\mathrm{i}}_1\rangle = 1\,,\ \langle\hat{\mathrm{i}}^1|\hat{\mathrm{i}}_2\rangle = 0\,,\ \langle\hat{\mathrm{i}}^1|\hat{\mathrm{i}}_3\rangle = 0\,,\ \langle\hat{\mathrm{i}}^2|\hat{\mathrm{i}}_1\rangle = 0\,,\ \langle\hat{\mathrm{i}}^2|\hat{\mathrm{i}}_2\rangle = 1\,,\cdots$$

En este caso: $\boldsymbol{\zeta}^i = \langle\hat{\mathrm{i}}_i|$ entonces $\boldsymbol{\zeta}^1 = (1,0,0)$, $\quad \boldsymbol{\zeta}^2 = (0,1,0)$, $\quad \boldsymbol{\zeta}^3 = (0,0,1)$ y además,

$$\boldsymbol{\zeta}^1\left[|v\rangle\right] = (1,0,0)\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \xi^1\,, \quad \boldsymbol{\zeta}^2\left[|v\rangle\right] = (0,1,0)\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \xi^2\,, \quad \boldsymbol{\zeta}^3\left[|v\rangle\right] = (0,0,1)\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \xi^3\,.$$

◁

Ejemplo 3.3 Encontremos la base dual para el espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$, con base ortogonal:

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, |\mathrm{e}_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, |\mathrm{e}_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Todo vector de ese espacio queda representado en esa base por:

$$|v\rangle = v^i|\mathrm{e}_i\rangle = v^1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + v^2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v^3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 + 2v^2 \\ v^1 - v^2 - v^3 \\ -v^1 + v^2 - v^3 \end{pmatrix}.$$

Sea un funcional lineal $\mathcal{F} \in \boldsymbol{V}^\star$ que representa vectores duales $\mathcal{F}[\circ] \equiv \langle F| \leftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$ y la base en el dual: $\langle\hat{\mathrm{e}}^i| = (a_i, b_i, c_i)$ que supondremos satisface la condición $\langle\hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^i_j$.

Podemos hacer los siguientes cálculos con los vectores previamente normalizados

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\mathrm{e}}^1|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle &= (a_1, b_1, c_1)\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(a_1 + b_1 - c_1) = 1\,, \\
\langle\hat{\mathrm{e}}^1|\hat{\mathrm{e}}_2\rangle &= (a_1, b_1, c_1)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2a_1 - b_1 + c_1) = 0\,, \\
\langle\hat{\mathrm{e}}^1|\hat{\mathrm{e}}_3\rangle &= (a_1, b_1, c_1)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-b_1 - c_1) = 0\,.
\end{aligned}$$

Si resolvemos este sistema de tres ecuaciones resulta: $\left\{a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Borrador Preliminar

Repetimos los cálculos para el segundo vector:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{e}^2|\hat{e}_1\rangle &= (a_2, b_2, c_2)\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(a_2 + b_2 - c_2) = 0\,, \\
\langle \hat{e}^2|\hat{e}_2\rangle &= (a_2, b_2, c_2)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2a_2 - b_2 + c_2) = 1\,, \\
\langle \hat{e}^2|\hat{e}_3\rangle &= (a_2, b_2, c_2)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-b_2 - c_2) = 0\,.
\end{aligned}$$

Ahora la solución que resulta es: $\left\{a_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}, b_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$.

Para finalizar:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{e}^3|\hat{e}_1\rangle &= (a_3, b_3, c_3)\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(a_3 + b_3 - c_3) = 0\,, \\
\langle \hat{e}^3|\hat{e}_2\rangle &= (a_3, b_3, c_3)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2a_3 - b_3 + c_3) = 0\,, \\
\langle \hat{e}^3|\hat{e}_3\rangle &= (a_3, b_3, c_3)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-b_3 - c_3) = 1\,.
\end{aligned}$$

Con: $\left\{a_3 = 0, b_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Por lo tanto, la base del dual es la siguiente:

$$\langle \hat{e}^1| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \langle \hat{e}^2| = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \langle \hat{e}^3| = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,,$$

de manera que:

$$\langle F| = w_1\langle \hat{e}^1| + w_2\langle \hat{e}^2| + w_3\langle \hat{e}^3|\,.$$

◁

Ejemplo 3.4

Consideremos un espacio vectorial complejo $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}^3$, vale decir un espacio en el cual los vectores tengan componentes complejas y puedan ser representados por un vector columna de la forma

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} x^1 + iy^1 \\ x^2 + iy^2 \\ x^3 + iy^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_1 e^{\theta_1} \\ r_2 e^{\theta_2} \\ r_3 e^{\theta_3} \end{pmatrix}\,.$$

Claramente, dependiendo de la representación del número complejo tendremos bases diferentes. La primera la hemos denominado representación vectorial, mientras que la segunda la conocemos como representación polar.

Si utilizamos la representación vectorial pudiéramos tener una posible base de la forma:

$$|w_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |w_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |w_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\,.$$

Borrador Preliminar

Dejamos al lector comprobar que ésta es una base para este espacio vectorial complejo y que cualquier vector complejo puede ser expresado como combinación lineal de esta base. Esto es, cualquier número complejo $|z\rangle$ podrá ser expresado como: $|z\rangle = z^i|w_i\rangle$.

Para calcular la base dual necesitaremos la definición de producto interno. Una posible definición es la que adelantamos en el la sección 1.6.3 en la página 67: $\langle a|b\rangle = (a_i)^* b^i$ y si utilizamos esta definición la base dual será:

$$\langle w_1| = (-i, 0, 0)\,,\ \langle w_2| = (0, -i, 0) \text{ y } \langle w_3| = (0, 0, -i)\,.$$

Si ahora consideramos un espacio vectorial complejo $\boldsymbol{V} = \mathbb{C}^2$

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 + i\tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 + i\tilde{y}^2 \end{pmatrix} \qquad \text{la base sería} \quad |\tilde{w}_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{w}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

Si consideramos otra definición de producto interno $\langle \tilde{a}|\tilde{b}\rangle = (a_1)^* b^1 + 2(a_2)^* b^2$ la base dual será:

$$\langle \tilde{w}_1| = (-i, 0) \text{ y } \langle \tilde{w}_2| = (0, -i/2)\,.$$

◁

3.1.4 Ejercicios

1. Encuentre las bases duales para los siguientes espacios vectoriales:
   (a). $\mathbb{R}^2$, donde: $|\mathrm{e}_1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $|\mathrm{e}_2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b). $\mathbb{R}^3$, donde: $|\mathrm{e}_1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\mathrm{e}_2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $|\mathrm{e}_3\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Si $\boldsymbol{V}$ es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado $n \leq 1$, y definimos:
$$\boldsymbol{\zeta}^1\left[|p\rangle\right] = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x \ \wedge\ \boldsymbol{\zeta}^2\left[|p\rangle\right] = \int_0^2 p(x)\mathrm{d}x\,,$$
   donde $\{\boldsymbol{\zeta}^1, \boldsymbol{\zeta}^2\} \in \boldsymbol{V}^\star$. Encuentre una base $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle\} \in \boldsymbol{V}$ que resulte ortogonal a la dual $\{\boldsymbol{\zeta}^1, \boldsymbol{\zeta}^2\}$.
3. Si $\mathbf{V}$ es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado $n \leq 2$, y si además definimos
$$\boldsymbol{\zeta}^1\left[|p\rangle\right] = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x = 1\,, \quad \boldsymbol{\zeta}^2\left[|p\rangle\right] = \left.\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\zeta}^3\left[|p\rangle\right] = p(1)$$
   donde $\{\boldsymbol{\zeta}^1, \boldsymbol{\zeta}^2, \boldsymbol{\zeta}^3\} \in \mathbf{V}^\star$. Encuentre una base $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\} \in \mathbf{V}$ que resulte ortogonal a la dual $\{\boldsymbol{\zeta}^1, \boldsymbol{\zeta}^2, \boldsymbol{\zeta}^3\}$.
4. Sean $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle \in \mathbf{V}$ y supongamos que $\mathcal{F}\left[|v_1\rangle\right] = 0$ implica que $\mathcal{F}\left[|v_2\rangle\right] = 0\ \forall\ \mathcal{F} \in \mathbf{V}^\star$. Muestre que $|v_2\rangle = \alpha\,|v_1\rangle$ con $\alpha \in \mathbf{K}$.
5. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2 \in \mathbf{V}^\star$ y supongamos que $\mathcal{F}_1\left[|v\rangle\right] = 0$ implica que $\mathcal{F}_2\left[|v\rangle\right] = 0\ \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}$. Muestre que $\mathcal{F}_2 = \alpha\mathcal{F}_1$ con $\alpha \in \mathbf{K}$.
6. En el caso 3D tenemos que si $\{\mathbf{e}_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) no necesariamente ortogonal, entonces, demuestre que:
   (a).
$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}\,, \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ y sus permutaciones cíclicas}$$
   (b). si los volumenes: $V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ y $\tilde{V} = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)$, entonces $V\tilde{V} = 1$.
   (c). ¿Qué vector satisface $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i = 1$? Demuestre que $\mathbf{a}$ es único.
   (d). Encuentre el producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que están representados en un sistema de

Borrador Preliminar

coordenadas oblicuo: Dada la base: $\mathbf{w}_1 = 4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{w}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{w}_3 = 2\hat{\mathbf{k}}$. Entonces encuentre:

I. Las bases recíprocas $\{\mathbf{e}^i\}$.

II. Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.

7. Considere una vez más el espacio vectorial de matrices hermíticas 2×2 y la definición de producto interno $\langle a\,|b\rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger\mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de la sección 2.2.4. Hemos comprobado que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ –presentadas también en los ejercicios de la sección 2.2.4– forman base para ese espacio (ver ejercicios sección 2.3.6). Encuentre entonces la base dual asociada a las base de Pauli y, adicionalmente dado un vector genérico en este espacio vectorial, encuentre también su 1-forma asociada.

Practicando con Maxima

1. Tenemos para el espacio vectorial $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^3$, la base ortogonal:

$$|\mathrm{e}_1\rangle = (1, 1, -1),\ |\mathrm{e}_2\rangle = (2, -1, 1),\ |\mathrm{e}_3\rangle = (0, -1, -1)\,.$$

Con $\mathcal{F} \in \boldsymbol{V}^\star$ donde $\mathcal{F}[\circ] \equiv \langle F| \leftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$ y $\langle \hat{\mathrm{e}}^i| = (a_i, b_i, c_i)$, con $\langle \hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^i_j$.
Comencemos introduciendo los vectores en las filas de matriz, pero los vectores ya normalizados.

```
(%i1) E:matrix([1,1,-1]/sqrt(3),[2,-1,1]/sqrt(6),[0,-1,-1]/sqrt(2));
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

De manera que podemos construir una nueva matriz pero donde cada fila contenga cada una de las ecuaciones que queremos resolver

```
(%i2) M1:E.[a1,b1,c1];
```

(%o2) $$\begin{pmatrix} -\frac{c1}{\sqrt{3}} + \frac{b1}{\sqrt{3}} + \frac{a1}{\sqrt{3}} \\ \frac{c1}{\sqrt{6}} - \frac{b1}{\sqrt{6}} + \frac{2a1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{c1}{\sqrt{2}} - \frac{b1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones son:

```
(%i3) ec1:M1[1,1]=1;ec2:M1[2,1]=0;ec3:M1[3,1]=0;
```

(%o3) $$-\frac{c1}{\sqrt{3}} + \frac{b1}{\sqrt{3}} + \frac{a1}{\sqrt{3}} = 1$$

(%o4) $$\frac{c1}{\sqrt{6}} - \frac{b1}{\sqrt{6}} + \frac{2a1}{\sqrt{6}} = 0$$

(%o5) $$-\frac{c1}{\sqrt{2}} - \frac{b1}{\sqrt{2}} = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

```
(%i6) linsolve([ec1,ec2,ec3],[a1,b1,c1]);
```

(%o6) $$\left[a1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, b1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, c1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

Debemos repetir los pasos anteriores dos veces más.

Borrador Preliminar

(%i7) M2:E.[a2,b2,c2];

(%o7) $$\begin{pmatrix} -\frac{c2}{\sqrt{3}}+\frac{b2}{\sqrt{3}}+\frac{a2}{\sqrt{3}} \\ \frac{c2}{\sqrt{6}}-\frac{b2}{\sqrt{6}}+\frac{2a2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{c2}{\sqrt{2}}-\frac{b2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(%i8) ec1:M2[1,1]=0;ec2:M2[2,1]=1;ec3:M2[3,1]=0;

(%o8) $$-\frac{c2}{\sqrt{3}}+\frac{b2}{\sqrt{3}}+\frac{a2}{\sqrt{3}}=0$$

(%o9) $$\frac{c2}{\sqrt{6}}-\frac{b2}{\sqrt{6}}+\frac{2a2}{\sqrt{6}}=1$$

(%o10) $$-\frac{c2}{\sqrt{2}}-\frac{b2}{\sqrt{2}}=0$$

(%i11) linsolve([ec1,ec2,ec3],[a2,b2,c2]);

(%o11) $$\left[a2=\frac{\sqrt{6}}{3}, b2=-\frac{1}{\sqrt{6}}, c2=\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

Por último:

(%i12) M3:E.[a3,b3,c3];

(%o12) $$\begin{pmatrix} -\frac{c3}{\sqrt{3}}+\frac{b3}{\sqrt{3}}+\frac{a3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c3}{\sqrt{6}}-\frac{b3}{\sqrt{6}}+\frac{2a3}{\sqrt{6}} \\ -\frac{c3}{\sqrt{2}}-\frac{b3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(%i13) ec1:M3[1,1]=0;ec2:M3[2,1]=0;ec3:M3[3,1]=1;

(%o13) $$-\frac{c3}{\sqrt{3}}+\frac{b3}{\sqrt{3}}+\frac{a3}{\sqrt{3}}=0$$

(%o14) $$\frac{c3}{\sqrt{6}}-\frac{b3}{\sqrt{6}}+\frac{2a3}{\sqrt{6}}=0$$

(%o15) $$-\frac{c3}{\sqrt{2}}-\frac{b3}{\sqrt{2}}=1$$

(%i16) linsolve([ec1,ec2,ec3],[a3,b3,c3]);

(%o16) $$\left[a3=0, b3=-\frac{1}{\sqrt{2}}, c3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Por lo tanto, la base dual es:

(%i17) d1:[1/sqrt(3),1/sqrt(3),-1/sqrt(3)]; d2:[sqrt(6)/3,-1/sqrt(6),1/sqrt(6)]; d3:[0,-1/sqrt(2),-1/sqrt(2)];

(%o17) $$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

(%o18) $$\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

(%o19) $$\left[0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Que es una base ortonormal, como debería ser

(%i20) ratsimp(d1.d2);d1.d3;d3.d2;

(%o20) 0

(%o21) 0

(%o22) 0

Borrador Preliminar

```
(%i23) d1.d1;d2.d2;d3.d3;
```
(%o23) 1

(%o24) 1

(%o25) 1

```
(%i26) kill(all)$
```

2. En este ejercicio veremos la manera de construir la matriz de transformación entre bases y el cálculo de las bases recíprocas.
Si tenemos la siguientes bases:

$$|\mathrm{w}_1\rangle = |\mathrm{j}\rangle + |\mathrm{k}\rangle\,, \quad |\mathrm{w}_2\rangle = |\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{k}\rangle\,, \quad |\mathrm{w}_3\rangle = |\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle\,.$$

Para calcular la matriz de transformación:

$$|\mathrm{w}_i\rangle = A_i^{j'}\,|\mathrm{i}_{j'}\rangle\,,$$

podemos trabajar de la manera siguiente. Primero introducimos los vectores como una matriz y luego calculamos la transpuesta:

```
(%i1) w1:[0,1,1]$ w2:[1,0,1]$ w3:[1,1,0]$
(%i2) Aij: transpose(matrix(v1,v2,v3));
```
(%o2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz de transformación inversa $|\mathrm{i}_{i'}\rangle = A_{i'}^{j}|\mathrm{w}_j\rangle$, es simplemente la matriz inversa:

```
(%i3) Aji: invert(%);
```
(%o3) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Es claro que $A_{k'}^{j}A_i^{k'} = \delta_i^j$

```
(%i4) Aij.Aji;
```
(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i5) kill(all)$
```

3. Con el uso de la librería **vect** podemos hacer algunos cálculos sencillos con vectores, como por ejemplo, el cálculo de las bases recíprocas.

```
(%i1) load(vect)$
```
Dado el siguiente conjunto de vectores:

$$\mathtt{b1} = \mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\,,\ \mathtt{b2} = \mathbf{e}_2 = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\,,\ \mathtt{b3} = \mathbf{e}_3 = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Calcularemos la base recíproca a través de:

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}\,,$$

Borrador Preliminar

Primero que todo, debemos introducir los vectores

(%i2) b1:[1,1,2]; b2:[-1,-1,-1]; b3:[2,-2,1];
(%o2) $[1,1,2]$
(%o3) $[-1,-1,-1]$
(%o4) $[2,-2,1]$

Podemos comprobar si la base original b_i es ortogonal calculando sus productos escalares:

(%i5) {b1.b2, b1.b3, b2.b3};
(%o5) $\{-4,-1,2\}$

Por lo tanto, no son ortogonales. Ahora, los vectores recíprocos e^i se calculan de la manera siguiente:

(%i6) e1:express(b2 ~ b3)/(b3.(express(b1 ~ b2)));
(%o6) $\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},1\right]$
(%i7) e2:express(b3~ b1)/(b3.(express(b1~ b2)));
(%o7) $\left[-\frac{5}{4},-\frac{3}{4},1\right]$
(%i8) e3:express(b1~ b2)/(b3.(express(b1~ b2)));
(%o8) $\left[\frac{1}{4},-\frac{1}{4},0\right]$

La base recíproca es entonces:

$$\mathbf{e}^1=-\frac{3}{4}\hat{\mathbf{i}}-\frac{1}{4}\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\,,\ \mathbf{e}^2=-\frac{5}{4}\hat{\mathbf{i}}-\frac{3}{4}\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}\,,\ \mathbf{e}^3=\frac{1}{4}\hat{\mathbf{i}}-\frac{1}{4}\hat{\mathbf{j}}$$

Que tampoco es ortogonal:

(%i9) {e1.e2, e1.e3, e2.e3};
(%o9) $\left\{\frac{17}{8},-\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right\}$

Como veremos más adelante, podemos construir un objeto con dos índices para la base original: $g_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$ de la manera siguiente:

(%i10) gb:matrix([b1.b1,b1.b2,b1.b3],[b2.b1,b2.b2,b2.b3],[b3.b1,b3.b2,b3.b3]);
(%o10) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

Para la base recíproca: $g^{ij}=\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j$

(%i11) ge:matrix([e1.e1,e1.e2,e1.e3],[e2.e1,e2.e2,e2.e3],[e3.e1,e3.e2,e3.e3]);
(%o11) $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{17}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{17}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

De manera que: $\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j=g^i_j=\delta^i_j$:

(%i12) gb.ge;

Borrador Preliminar

(%o12) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Borrador Preliminar

3.2 Tensores y producto tensorial

Las funciones más simples que se pueden definir sobre un espacio vectorial son los funcionales lineales y éstos nos permiten extendernos al concepto de tensor. Para llegar a la noción de tensores ampliaremos la idea de funcionales lineales, que actúan sobre un único vector, al de funcionales bilineales (o formas bilineales) que tienen dos vectores en su argumento. Como veremos más adelante, este tipo de funcionales nos revelarán un contenido geométrico de gran riqueza. Es conocido que presentar el concepto de tensores para estudiantes de pregrado o, estudiantes graduados de ingeniería tiene algunas barreras[3] y, la principal quizá sea la notación. En este capítulo presentaremos la notación que mas nos sedujo desde las épocas de estudiantes. Es tomada de dos libros clásicos[4], que han marcado una huella en nuestra generación y creemos permite su aplicación a variados campos.

3.2.1 Tensores, una definición funcional

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del campo $\boldsymbol{K}$, complejo o real, a un vector $|v\rangle \in \boldsymbol{V}$, a una forma $\langle u| \in \boldsymbol{V}^\star$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

$$\forall \quad |v\rangle \in \boldsymbol{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \boldsymbol{V}^\star \rightarrow \quad \mathcal{T}\left[\langle u|; |v\rangle\right] \in \mathbb{C}\,.$$

De esta manera:

1. $\mathcal{T}\left[\langle u|; \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle\right] \equiv \alpha\mathcal{T}\left[\langle u|; |v_1\rangle\right] + \beta\,\mathcal{T}\left[\langle u|; |v_2\rangle\right] \;\; \forall\; |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \boldsymbol{V} \;\wedge\; \langle u| \in \boldsymbol{V}^\star.$
2. $\mathcal{T}\left[\mu\langle u_1| + \nu\langle u_2|; |v\rangle\right] \equiv \mu^*\mathcal{T}\left[\langle u_1|; |v\rangle\right] + \nu^*\mathcal{T}\left[\langle u_2|; |v\rangle\right] \;\; \forall\; |v\rangle, \in \boldsymbol{V} \;\wedge\; \langle u_1|, \langle u_2| \in \boldsymbol{V}^\star.$

En pocas palabras: un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas[5], lo que significa que $\mathcal{T}\left[\circ; \bullet\right]$ es una cantidad con dos "puestos" y una vez "cubiertos" se convierte en un número complejo o real.

Las combinaciones son muy variadas:

- Un tensor, con un argumento correspondiente a un vector y un argumento correspondiente a una forma, lo podremos representar de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}\begin{bmatrix} |v\rangle & \langle u| \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ\,; & \bullet \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \quad \rightrightarrows \quad \text{tensor de tipo} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Un tensor con dos argumentos correspondientes a vectores y uno a una forma sería:

$$\mathcal{T}\left[\circ, \circ;\; \bullet\right] \rightrightarrows \mathcal{T}\begin{bmatrix} |v_1\rangle & |v_2\rangle & \langle u| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ\,, & \circ\,; & \bullet \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \quad \rightrightarrows \quad \text{tensor de tipo} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

- Un tensor con dos argumentos correspondientes a formas y uno a un vector:

$$\mathcal{T}\left[\circ;\; \bullet, \bullet\right] \rightrightarrows \mathcal{T}\begin{bmatrix} |v\rangle & \langle u_1| & \langle u_2| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ\,; & \bullet\,, & \bullet \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \quad \rightrightarrows \quad \text{tensor de tipo} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[3]Tal y como lo plantea Battaglia, Franco, y Thomas F. George. "Tensors: A guide for undergraduate students." *American Journal of Physics* **81**(2013): 498-51.

[4]Misner, C. W., K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. Gravitation. Princeton University Press, 2017; y Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. and Laloë, F., 1977. Quantum Mechanics vol 1 (Paris: Hermann).

[5]Una presentación interesante y detallada de la utilización del concepto de tensor para el manejo de datos en computación la pueden encontrar en: Lu, H., Plataniotis, K. N., & Venetsanopoulos, A. N. (2011). A survey of multilinear subspace learning for tensor data. Pattern Recognition, 44 (7), 1540-1551.

Borrador Preliminar

- En general:

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{ccccccccc} |v_1\rangle & |v_2\rangle & & |v_n\rangle & \langle u_1| & \langle u_2| & & \langle u_m| \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \circ\,, & \circ\,, & \cdots\,, & \circ\,; & \bullet\,, & \bullet & \cdots\,, & \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C} \quad \rightrightarrows \quad \text{tensor de tipo} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

En esta notación el punto y coma (;) separa las "entradas" formas de las "entradas" vectores. Es importante recalcar que **el orden si importa**, no sólo para las cantidades separadas por el punto y coma, sino el orden de los "puestos" vectores y "puestos" formas separados por coma, y repercutirá en las propiedades de los tensores. Por ejemplo: **si el orden de las "entradas" vectores no importa**, podremos permutarlas sin alterar al tensor, **tendremos entonces tensores simétricos respecto a esos "puestos" o "entradas"**; del mismo modo, serán tensores antisimétricos aquellos en los cuales **el orden si importa** y al permutar esos "puestos" o "entradas" hay un cambio de signo en el tensor. Todos estos casos serán tratados con detalle más adelante, pero vale la pena recalcar que en general, para un tensor genérico el orden de la "entradas" o "puestos" si importa pero no necesariamente se comporta como los casos reseñados anteriormente.

Notemos que en el caso general un tensor es básicamente un aplicación multilineal $\mathcal{T}$ sobre $\boldsymbol{V}^\star \times \boldsymbol{V}$:

$$\mathcal{T} : \boldsymbol{V}^{\star m} \times \boldsymbol{V}^n = \underbrace{\boldsymbol{V}^\star \times \boldsymbol{V}^\star \cdots \boldsymbol{V}^\star \times \boldsymbol{V}^\star}_{m} \times \underbrace{\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \cdots \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}}_{n} \Rightarrow \mathbb{C}\,,$$

con n el orden covariante y m el orden contravariante. Hay que hacer notar que por simplicidad hemos construido el espacio tensorial a partir de una solo espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ y su conjugado $\boldsymbol{V}^\star$, pero muy bien cada espacio vectorial puede ser diferente.

Por lo tanto, **un tensor** $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ es un funcional multilineal que asocia m $1-$*formas* y n vectores con $\mathbb{C}$. Un ejemplo sencillo de un funcional bilineal sobre un espacio vectorial $\boldsymbol{V}^n$ con una base $|\mathrm{e}_i\rangle$ es:

$$\mathcal{T}\left[|v_1\rangle, |v_2\rangle\right] = a_{ij}\xi^i\zeta^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

donde:

$$|v_1\rangle = \xi^i|\mathrm{e}_i\rangle \;\wedge\; |v_2\rangle = \zeta^i|\mathrm{e}_i\rangle\,.$$

son vectores arbitrarios $\in \boldsymbol{V}^n$ y los a_{ij} son números. Notemos que:

$$\mathcal{T}\left[|v_1\rangle, |v_2\rangle\right] = \mathcal{T}\left[\xi^i|\mathrm{e}_i\rangle, \zeta^j|\mathrm{e}_j\rangle\right] = \xi^i\zeta^j\mathcal{T}\left[|\mathrm{e}_i\rangle, |\mathrm{e}_j\rangle\right] = \xi^i\zeta^j a_{ij}\,.$$

Diremos que ésta será la representación del funcional bilineal para $\boldsymbol{V}^n$.

Obviamente las formas pueden ser representadas por tensores ya que son funcionales lineales de vectores. Para finalizar, notemos lo siguiente:

- **Un vector** es un tensor del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightrightarrows \mathcal{T}\left[\begin{array}{c} \langle u| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C}.$$

  Los vectores constituyen un caso especial de tensores.
- **Una forma** es un tensor del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightrightarrows \mathcal{T}\left[\begin{array}{c} |v\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}\right] \in \mathbb{C},$$

  porque son funcionales lineales para las formas diferenciales.
- **Un escalar** es un tensor del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Borrador Preliminar

3.2.2 Producto tensorial

Los tensores (*simples*) pueden provenir del *producto tensorial* de espacios vectoriales. Esto es, consideraremos $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensiones n_1 y n_2, respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ pertenecientes a espacios vectoriales: $|\varphi(1)\rangle \in \boldsymbol{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \boldsymbol{E}_2$.

Definiremos el *producto tensorial* de espacios vectoriales, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y si se cumple que:

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle \equiv |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \Leftrightarrow \mathcal{T}\begin{bmatrix} \overset{\langle\psi(1)|}{\overset{\downarrow}{\bullet}} , & \overset{\langle\upsilon(2)|}{\overset{\downarrow}{\bullet}} \\ & \end{bmatrix} = \langle\psi(1)|\varphi(1)\rangle\langle\upsilon(2)|\chi(2)\rangle \in \mathbb{C}\,,$$

y si además se cumplen las siguientes propiedades:

1. La suma entre tensores de $\boldsymbol{E}$ viene definida como:
$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle = |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle\,.$$
2. El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ:
$$[|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = [\lambda|\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\,[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \lambda|\varphi(1)\chi(2)\rangle\,,$$
$$|\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu|\chi(2)\rangle] = \mu\,[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \mu|\varphi(1)\chi(2)\rangle\,.$$
3. El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:
$$|\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle$$
$$[|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\,.$$

Nótese que las etiquetas (1) y (2) denotan la pertenencia al espacio respectivo.

3.2.3 Espacios tensoriales

Es fácil convencerse que los tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \in \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2$ forman un espacio vectorial y la demostración se basa en comprobar los axiomas o propiedades de los espacios vectoriales tal y como lo describimos en la sección 2.1.3:

1. La operación suma $\boxplus$ es cerrada en $\boldsymbol{V}$: $\forall\, |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V} \Rightarrow |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
Esto se traduce en demostrar que sumados dos tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle$ y $|\zeta(1)\xi(2)\rangle \in \boldsymbol{E}$ el tensor suma también pertenece a $\boldsymbol{E}$, con α y β pertenecientes al campo del espacio vectorial
$$\alpha|\varphi(1)\chi(2)\rangle + \beta|\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\alpha\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \beta\xi(2)\rangle\,,$$
y esto se cumple siempre ya que, el producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales, y por ser $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ espacios vectoriales se cumple:
$$\left.\begin{aligned} |\alpha\varphi(1) + \zeta(1)\rangle &= \alpha|\varphi(1)\rangle + |\zeta(1)\rangle \in \boldsymbol{E}_1 \\ |\varphi(2) + \beta\zeta(2)\rangle &= |\varphi(2)\rangle + \beta|\zeta(2)\rangle \in \boldsymbol{E}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \in \boldsymbol{E}\,.$$
2. La operación suma $\boxplus$ es conmutativa y asociativa.
Conmutativa: $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \boldsymbol{V} \Rightarrow |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle$.
Esta primera es clara de la definición de suma:
$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle$$
$$|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\zeta(1) + \varphi(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle\,,$$

Borrador Preliminar

por ser $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ dos espacios vectoriales.

Asociativa: $\forall\, |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \boldsymbol{V} \quad \Rightarrow (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_j\rangle \boxplus (|v_i\rangle \boxplus |v_k\rangle)$

Una vez más, esto se traduce en:

$$(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle)\ ,$$

con lo cual, por la definición de suma, la expresión anterior queda como:

$$(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1) + \varkappa(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \kappa(2)\rangle)$$

$$|\,(\varphi(1) + \zeta(1)) + \varkappa(1)\rangle \otimes |\,(\xi(2) + \chi(2)) + \kappa(2)\rangle = |\varphi(1) + (\zeta(1) + \varkappa(1))\rangle \otimes |\xi(2) + (\chi(2) + \kappa(2))\rangle\,.$$

3. Existe un único elemento neutro: $\exists |0\rangle \ / \ |0\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |0\rangle = |v_j\rangle \ \forall\ |v_j\rangle \in \boldsymbol{V}$.
   Es decir:
   $$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |0(1)0(2)\rangle = |\varphi(1) + 0(1)\rangle \otimes |\chi(2) + 0(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle\,.$$
4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\boldsymbol{V}$: $\forall\ |v_j\rangle \in V\ \exists\ |-v_j\rangle \ / \ |v_j\rangle \boxplus |-v_j\rangle = |0\rangle$.
   $$|\varphi(1)\chi(2)\rangle - |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1) - \varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2) - \chi(2)\rangle = |0(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle = |0(1)0(2)\rangle\,.$$
5. $\alpha\,(\beta|v_i\rangle) = (\alpha\beta)\,|v_i\rangle$:
   $$\alpha\,(\beta|\varphi(1)\chi(2)\rangle) = \alpha\,(|\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle) = |\alpha\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle = (\alpha\beta)\,|\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle = (\alpha\beta)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle\,.$$
6. $(\alpha + \beta)\,|v_i\rangle = \alpha|v_i\rangle + \beta|v_i\rangle$:
   $$\begin{aligned}(\alpha + \beta)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\,(\alpha + \beta)\,\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\alpha\chi(2) + \beta\chi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1)\rangle \otimes [(\alpha|\chi(2)\rangle + \beta|\chi(2)\rangle)] \\ &= \alpha|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + \beta|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\,.\end{aligned}$$
7. $\alpha\,(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha|v_i\rangle \boxplus \alpha|v_j\rangle$:
   $$\begin{aligned}\alpha\,(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) &= \alpha\,(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) = |\alpha\,(\varphi(1) + \zeta(1))\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ &= |\alpha\varphi(1) + \alpha\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle = |\alpha\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\alpha\zeta(1)\xi(2)\rangle \\ &= \alpha|\varphi(1)\chi(2)\rangle + \alpha|\zeta(1)\xi(2)\rangle\,.\end{aligned}$$

Equivalentemente, podemos construir un producto tensorial entre espacios de formas diferenciales. Si $\boldsymbol{E}_1^\star$ y $\boldsymbol{E}_2^\star$ son dos espacios vectoriales duales a $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$, con dimensiones n_1 y n_2, respectivamente. A estos espacios pertenecen las formas diferenciales genéricas $\langle\zeta(1)| \in \boldsymbol{E}_1^\star$ y $\langle\xi(2)| \in \boldsymbol{E}_2^\star$.

Definiremos el producto tensorial de espacios vectoriales duales, $\boldsymbol{E}^\star = \boldsymbol{E}_1^\star \otimes \boldsymbol{E}_2^\star$, si a cada par de formas diferenciales $\langle\zeta(1)| \in \boldsymbol{E}_1^\star$ y $\langle\xi(2)| \in \boldsymbol{E}_2^\star$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Esto es:

$$\langle\zeta(1)\xi(2)| = \langle\zeta(1)| \otimes \langle\xi(2)|\,.$$

Es importante aclarar que el número $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)|\chi(2)\rangle$, NO representa el producto interno entre los tensores, $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)|$ y $|\varphi(1)\chi(2)\rangle$. Tal y como hemos descrito arriba,

$$\mathcal{T}\,[|\varphi(1)\rangle, |\chi(2)\rangle] \equiv \mathcal{T}^*\,[\langle\tilde{\varphi}(1)|, \langle\tilde{\chi}(2)|] = \langle\tilde{\varphi}(1)|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)|\chi(2)\rangle\,,$$

representa las evaluaciones de los funcionales $\mathcal{T}\,[\circ]$ y $\mathcal{T}^*\,[\bullet]$, respectivamente.

Borrador Preliminar

3.2.4 Bases para un producto tensorial

Si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ son, respectivamente, bases discretas para $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$ entonces podremos construir el tensor:

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \in \boldsymbol{E}\,,$$

el cual funcionará como una base para $\boldsymbol{E}$.

Podremos construir un tensor genérico de $\boldsymbol{E}$:

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \varphi^i\chi^j|u_i(1)v_j(2)\rangle\,,$$

donde φ^i y χ^j son las componentes de $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ en sus respectivas bases. En otras palabras, las componentes de un tensor en $\boldsymbol{E}$ corresponden a la multiplicación de las componentes de los vectores en $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$. Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein de suma tácita en índices covariantes y contravariantes, en la cual $c^k|v_k\rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} c^k|v_k\rangle$.

Es importante señalar que si bien un tensor genérico $|\Psi\rangle \in \boldsymbol{E}$ siempre se puede expandir en la base $|u_i(1)v_j(2)\rangle$ no es cierto que todo tensor de $\boldsymbol{E}$ provenga del producto tensorial de $\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{E}_2$. Es decir, $\boldsymbol{E}$ tiene más tensores de los que provienen el producto tensorial. Esta afirmación puede intuirse del hecho que si $|\Psi\rangle \in \boldsymbol{E}$ entonces:

$$|\Psi\rangle = c^{ij}|u_i(1)v_j(2)\rangle\,,$$

por ser $\{|u_i(1)v_j(2)\rangle\}$ base para $\boldsymbol{E}$. Es claro que dados dos números α_1 y α_2 habrá c^{ij} que no provienen de la multiplicación de $\alpha_1\alpha_2$.

El conjunto de todas funciones bilineales $\mathcal{T}\,[\langle u|;|v\rangle]$ forman un espacio vectorial sobre el espacio directo $\boldsymbol{E}$. Este espacio vectorial de funciones tendrá una base dada por:

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle\,.$$

3.2.5 Tensores, sus componentes y sus contracciones

Hemos mencionado anteriormente, ubicándonos en $\mathbb{R}^3$, que un escalar es una cantidad que se puede especificar, independientemente del sistema de coordenadas, por un sólo número. Los vectores geométricos que dibujábamos con flechas los sustituimos ahora por tres números respecto a una base seleccionada, es decir, a través de sus tres componentes. Los escalares y los vectores son casos particulares de objetos más generales que denominamos tensores, tensores de orden o rango k y cuya especificación en cualquier sistema de coordenadas requerirá de 3^k números, llamadas las componentes del tensor. Esto significa que un escalar es un tensor de orden 0 ($3^0 = 1$ componente) y un vector un tensor de orden 1 ($3^1 = 3$ componentes). Si el espacio vectorial es de dimensión n, entonces un tensor de orden k tendrá n^k componentes[6].

Los tensores son mucho más que simples números respecto a un sistema de coordenadas y la clave radica en la "ley de transformación" de sus componentes, es decir, en la relación que existe entre las componentes de un tensor en un sistema de coordenadas y las componentes del mismo tensor en otro sistema de coordenadas diferente. Lo que hay detrás de todo esto es el hecho que las leyes matemáticas que describen los fenómenos físicos deben ser "invariantes" bajo transformaciones de coordenadas, como por ejemplo: traslaciones (el espacio es homogéneo) y rotaciones (el espacio es isótropo).

[6]Existen varias presentaciones operativas de estos conceptos para Física e Ingeniería, pueden consultar:

- Battaglia, F., & George, T. F. (2013). Tensors: A guide for undergraduate students. American Journal of Physics, 81(7), 498-511.
- Comon, P. (2014). Tensors: a brief introduction. IEEE Signal Processing Magazine, 31(3), 44-53.

Borrador Preliminar

3.2.5.1 Componentes de un tensor

Consideremos un espacio tensorial $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}_1^\star \otimes \boldsymbol{E}_2^\star \otimes \boldsymbol{E}_3^\star \otimes \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2$. Denominaremos componentes de un tensor, aquellos números que surgen al evaluar los funcionales (formas diferenciales o vectores) con la bases de los espacios que lo constituyen. Así, si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|x_i(1)\rangle\}$ son base para $\boldsymbol{E}_1$, mientras $\{|v_j(2)\rangle\}$ y $\{|y_j(2)\rangle\}$ lo son para $\boldsymbol{E}_2$ y finalmente $\{|t_k(3)\rangle\}$ para $\boldsymbol{E}_3$, entonces las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán:

$$S^{mn}{}_{ijk} = \mathcal{S}\begin{bmatrix} \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| & |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet\ , & \bullet\ ; & \circ\ , & \circ\ , & \circ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathcal{S} = S^{mn}{}_{ijk}\left[x_m(1), y_n(2); u^i(1), v^j(2), t^k(3)\right],$$

donde hemos denotado $\left[x_m(1), y_n(2); u^i(1), v^j(2), t^k(3)\right]$ como el tensor base

$$\left[x_m(1), y_n(2); u^i(1), v^j(2), t^k(3)\right] = |x_m(1)\rangle \otimes |y_n(2)\rangle \otimes \langle u^i(1)| \otimes \langle v^j(2)| \otimes \langle t^k(3)|\,.$$

Podemos comentar varias cosas:

- Por simplicidad hemos considerado un espacio tensorial de la forma $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}_1^\star \otimes \boldsymbol{E}_2^\star \otimes \boldsymbol{E}_3^\star \otimes \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2$, pero claramente pudimos haberlo construido mas general, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{E}_1^\star \otimes \boldsymbol{E}_2^\star \otimes \boldsymbol{E}_3^\star \otimes \boldsymbol{E}_4 \otimes \boldsymbol{E}_5$.
- En este ejemplo, en la base del espacio tensorial $\left[x_m(1), y_n(2); u^i(1), v^j(2), t^k(3)\right]$, hemos colocado primero su "parte" vectorial y luego su "parte" forma. Los índices de las componentes heredan esta convención $S^{mn}{}_{ijk}$: primero irán los contravariantes y luego los covariantes. Pero lo importante es que los índices etiqueten el espacio al cual corresponde.
- Nuestra notación será:
  - $|\psi(1), \phi(2)\rangle \equiv |\psi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle = C^{ij}|u_i(1), v_j(2)\rangle = \tilde{C}^{ij}|x_i(1), v_j(2)\rangle = \bar{C}^{ij}|u_i(1), y_j(2)\rangle$. Es decir un tensor pertenciente a un espacio tensorial conformado por dos espacios vectoriales y que se pueden expresar en varias de las bases de esos espacios.
  - $\langle\psi(1), \phi(2)| \equiv \langle\psi(1)| \otimes \langle\phi(2)| = K_{ij}\langle u^i(1), v^j(2)| = \tilde{K}_{ij}\langle x^i(1), v^j(2)| = \bar{K}_{ij}\langle u^i(1), y^j(2)|$. Igual que para el caso anterior pero a partir de *1-formas*.
  - $[\psi(1), \phi(2)] \equiv \langle\psi(1)| \otimes |\phi(2)\rangle = M_i^{\ j}\left[u^i(1); v_j(2)\right] = \tilde{M}_i^{\ j}\left[x^i(1); v_j(2)\right] = \bar{M}_i^{\ j}\left[u^i(1); y_j(2)\right]$. Un tensor mixto

  Es importante convenir el orden en el cual se presenten los espacios con los cuales se realiza el producto tensorial

Es de hacer notar que la selección de las bases no es arbitraria sino que deben corresponderse, entre el espacio directo, $\boldsymbol{E}$, y su dual $\boldsymbol{E}^\star$, i.e.

$$\{|u_i(1)\rangle, |v_j(2)\rangle, |w_k(3)\rangle\} \otimes \{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\} \Leftrightarrow \{|x_p(1)\rangle, |y_q(2)\rangle\} \otimes \left\{\langle u^a(1)|, \langle v^b(2)|, \langle w^c(2)|\right\}.$$

Si consideramos un tensor como resultado de un producto tensorial y consideramos las bases: $\{|u_i(1)\rangle, \langle x^m(1)|\}$, sus componentes se pueden expresar $\{\varphi^m(1)\chi_i(1)\}$, vale decir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow |\varphi(1)\rangle \otimes \langle\Delta(1)| \quad \Rightarrow \langle x^m(1)|\varphi(1)\rangle \otimes \langle\Delta(1)|u_i(1)\rangle \quad \Rightarrow \{\varphi^m(1)\chi_i(1)\}\,.$$

3.2.5.2 Combinaciones lineales de tensores

Es claro que podremos sumar (componentes) de tensores como lo hemos hecho con la suma de (componentes) de vectores:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_z + b_z)\,\hat{\mathbf{k}} = \left(a^1 + b^1\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(a^2 + b^2\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(a^3 + b^3\right)\hat{\mathbf{k}} = \left(a^i + b^i\right)|\mathrm{i}_i\rangle\,,$$

Borrador Preliminar

esto es:

$$R_{kl}{}^{ij} = \alpha Q_{kl}{}^{ij} + \beta P_{kl}{}^{ij}\,.$$

3.2.5.3 Producto tensorial de tensores

Podemos extender aún más la idea del producto directo y extenderla para tensores. Así, para dos tensores, uno tipo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \mathcal{T}\begin{bmatrix} \langle\zeta(1)| & \langle\xi(2)| \\ \downarrow & \downarrow \\ \bullet\ , & \bullet \end{bmatrix},$$

y el otro tipo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle = |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle\Theta\,(1)\,| = \mathcal{P}\begin{bmatrix} |u_i(1)\rangle & \langle\varepsilon(1)| & \langle\phi(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ\ ; & \bullet\ , & \bullet \end{bmatrix},$$

el producto directo es:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle\Theta\,(1)\,| \\ &= \mathcal{T}\begin{bmatrix} \langle\zeta(1)| & \langle\xi(2)| \\ \downarrow & \downarrow \\ \bullet\ , & \bullet \end{bmatrix} \otimes \mathcal{P}\begin{bmatrix} |u_i(1)\rangle & \langle\varepsilon(1)| & \langle\phi(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ\ ; & \bullet\ , & \bullet \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{R}\begin{bmatrix} |u_i(1)\rangle & \langle\varepsilon(1)| & \langle\phi(2)| & \langle\zeta(1)| & \langle\xi(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ\ ; & \bullet\ , & \bullet\ , & \bullet\ , & \bullet \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En componentes será como se muestra a continuación:

$$R^{ij}{}_{k}{}^{lm} = T^{ij} P_{k}{}^{lm}\,.$$

Un vez más, note que los puestos de los índices en las componentes de los tensores heredan las posiciones de los vectores y formas que construyeron el espacio tensorial a partir del producto directo o tensorial.

3.2.5.4 Contracción de un tensor

Denominaremos una contracción cuando sumamos las componentes covariantes y contravariantes, esto es, si tenemos $\varphi^i(1)\chi_i(1)$, entonces se genera un escalar independiente de la base. La situación será más evidente cuando definamos métricas y contracción de tensores. Por analogía y considerando un caso más general, dada las componentes S^{mn}_{ijk} correspondiente a un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ podremos construir un nuevo tensor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a partir de una contracción. Las componentes de este nuevo tensor serán: $S_{ijk}{}^{mn} \;\Rightarrow\; S_{ijk}{}^{in} \equiv S_{jk}{}^{n}$.

Del mismo modo, dadas las componentes de dos tensores, P^{lm} y $Q_{zk}{}^{ij}$ generarán componentes de nuevos tensores $R_{k}{}^{lij} = P^{lm} Q_{mk}{}^{ij}$. Así:

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; P^{lm} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Q_{zk}{}^{ij} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; R_{k}{}^{lij} = P^{lm} Q_{mk}{}^{ij}\,.$$

Es claro que si dos tensores derivan de productos tensoriales y si $\{|u_i(1)\rangle\}$, $\{\langle u^m(1)|\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ son

Borrador Preliminar

bases ortonormales para $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_1^\star$ y $\boldsymbol{E}_2$, entonces sus productos tensoriales podrán ser expresados como:

$$|\gamma(1);\,\delta(2)\rangle = \underbrace{\left(\gamma^i(1)\delta^j(2)\right)}_{P^{ij}}|u_i(1)\rangle\otimes|v_j(2)\rangle\,,\qquad [\alpha(1);\,\beta(1)] = \underbrace{\left(\alpha^l(1)\beta_m(1)\right)}_{Q^l_m}|u_l(1)\rangle\otimes\langle u^m(1)|\,,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\alpha^l(1)\beta_m(1)\right)|u_l(1)\rangle\otimes\langle u^m(1)|\right)\left(\left(\gamma^i(1)\delta^j(2)\right)|u_i(1)\rangle\otimes|v_j(2)\rangle\right)\\
=\;&\alpha^l(1)\beta_m(1)\left(\gamma^i(1)\delta^j(2)\right)\underbrace{\{\langle u^m(1)|u_i(1)\rangle\}}_{\delta^m_i}|v_j(2)\rangle\otimes|u_l(1)\rangle\\
=\;&\alpha^l(1)\beta_k(1)\left(\gamma^k(1)\delta^j(2)\right)|v_j(2)\rangle\otimes|u_l(1)\rangle\\
=\;&P^{ij}Q^l_i|u_l(1);\,v_j(2)\rangle\\
=\;&R^{jl}|u_l(1);\,v_j(2)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Pero más aún, si $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle\otimes|v_j(2)\rangle\in\boldsymbol{E}$ es base de $\boldsymbol{E}$ entonces se puede demostrar lo anterior sin circunscribirnos a tensores cuyas componentes provengan de multiplicación de las componentes en cada espacio vectorial.

3.2.5.5 Simetrización de tensores

Un tensor y sus componentes será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}\,,\quad S^{ij} = S^{ji}\,,\quad S_{ij\cdots kl\cdots mn} = S_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,\quad S^{ij\cdots kl\cdots mn} = S^{ij\cdots lk\cdots mn}\,,$$

y será antisimétrico si:

$$A_{ij} = -A_{ji}\,,\quad A^{ij} = -A^{ji}\,,\quad A_{ij\cdots kl\cdots mn} = -A_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,\quad A^{ij\cdots kl\cdots mn} = -A^{ij\cdots lk\cdots mn}\,.$$

Un tensor de rango 2, viene representado por una matriz que tendrá $3^2 = 9$ componentes. Si la matriz es simétrica tendrá como máximo 6 componentes distintas.

$$S^i_j = S^j_i = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^1_2 & S^1_3\\ S^2_1 & S^2_2 & S^2_3\\ S^3_1 & S^3_2 & S^3_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^2_1 & S^3_1\\ S^1_2 & S^2_2 & S^3_2\\ S^1_3 & S^2_3 & S^3_3\end{pmatrix}\,.$$

Mientras que un tensor antisimétrico de segundo orden tendrá, como máximo, tres componentes con valor absoluto distintos de cero,

$$A_j{}^i = -A_i{}^j = \begin{pmatrix} 0 & A^1_2 & A^1_3\\ -A^2_1 & 0 & A^2_3\\ -A^3_1 & -A^3_2 & 0\end{pmatrix}\,.$$

Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij}+T_{ji}\right)\equiv T_{(ij)}\quad\Longleftrightarrow\quad S_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn}+T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots(kl)\cdots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij}-T_{ji}\right)\equiv T_{[ij]}\quad\Longleftrightarrow\quad A_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn}-T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots[kl]\cdots mn}\,.$$

Es evidente que las componentes de un tensor genérico, T_{ij}, pueden expresarse como una combinación de su parte simétrica y antisimétrica:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}\,.$$

Borrador Preliminar

Obviamente que algo equivalente se puede realizar para componentes contravariantes de tensores.

Ejemplo 3.5 **Producto tensorial, vectores y matrices** Para fijar los conceptos que hemos desarrollado en las secciones 3.2.2, y 3.2.5 consideremos dos espacios vectoriales $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ y sus duales $\mathbf{V}_1^\star$ y $\mathbf{V}_2^\star$ cuyos vectores y formas pueden ser representados como

$$|\mathrm{v}\rangle = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_1,\ \langle \mathrm{v}| = (v_1\ v_2\ v_3) \in \mathbf{V}_1^\star \quad \text{y} \quad |\mathrm{u}\rangle = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_2,\ \langle \mathrm{u}| = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4) \in \mathbf{V}_2^\star$$

Para ejemplificar las componentes y bases de los espacios tensoriales a partir de los espacios vectoriales y sus duales previamente identificados, podemos entonces definir la siguiente operación, como el producto tensorial:

Para vectores

$$|\mathrm{v}(1)\rangle \otimes |\mathrm{u}(2)\rangle = |\mathrm{v}(1)\mathrm{u}(2)\rangle = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1u^1 \\ v^1u^2 \\ v^1u^3 \\ v^1u^4 \\ v^2u^1 \\ v^2u^2 \\ v^2u^3 \\ v^2u^4 \\ v^3u^1 \\ v^3u^2 \\ v^3u^3 \\ v^3u^4 \\ v^4u^1 \\ v^4u^2 \\ v^4u^3 \\ v^4u^4 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2.$$

Para formas

$$\langle \mathrm{v}(1)| \otimes \langle \mathrm{u}(2)| = \langle \mathrm{v}(1)\mathrm{u}(2)| = (v_1u_1\ v_1u_2\ v_1u_3\ v_1u_4\ v_2u_1\ v_2u_2\ v_2u_3\ v_2u_4\ v_3u_1\ v_3u_2\ v_3u_3\ v_3u_4) \in \mathbf{V}_3^\star = \mathbf{V}_1^\star \otimes \mathbf{V}_2^\star.$$

Para productos tensoriales entre formas y vectores:

$$|\mathrm{v}(1)\rangle \otimes \langle \mathrm{u}(2)| \equiv [\mathrm{v}(1)\mathrm{u}^\star(2)] = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \otimes (u_1\ u_2\ u_3\ u_4) = \begin{pmatrix} v^1u_1 & v^1u_2 & v^1u_3 & v^1u_4 \\ v^2u_1 & v^2u_2 & v^2u_3 & v^2u_4 \\ v^3u_1 & v^3u_2 & v^3u_3 & v^3u_4 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbf{V}}_3 = \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2^\star.$$

y del mismo modo el dual del producto anterior

$$\langle \mathrm{w}(1)| \otimes |\mathrm{z}(2)\rangle \equiv [\mathrm{w}^*(1)\ \mathrm{z}(2)] = (w_1\ w_2\ w_3) \otimes \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^1w_1 & z^1w_2 & z^1w_3 \\ z^2w_1 & z^2w_2 & z^2w_3 \\ z^3w_1 & z^3w_2 & z^3w_3 \\ z^4w_1 & z^4w_2 & z^4w_3 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbf{V}}_3^\star = \mathbf{V}_1^\star \otimes \mathbf{V}_2.$$

Notemos que $|\mathrm{v}(1)\mathrm{u}(2)\rangle$, $\langle \mathrm{v}(1)\mathrm{u}(2)|$, $[\mathrm{v}(1)\mathrm{u}^\star(2)]$ y $[\mathrm{v}^\star(1)\mathrm{u}(2)]$ son funcionales bilineales tal y como lo definimos en 3.2.2. Es fácil convencerse que $|\mathrm{v}(1)\mathrm{u}(2)\rangle$ y $\langle \mathrm{v}(1)\mathrm{u}(2)|$, como $[\mathrm{v}(1)\mathrm{u}^*(2)]$ y $[\mathrm{v}^*(1)\mathrm{u}(2)]$ son tensores duales uno del otro.

Borrador Preliminar

Consideremos que si $\{|e_1(1)\rangle, |e_2(1)\rangle, |e_3(1)\rangle\}$ es una base para $\boldsymbol{V}_1$ con $\{\langle e^1(1)|, \langle e^2(1)|, \langle e^3(1)|\}$ y su dual en $\boldsymbol{V}_1^\star$, entonces, éstas pueden ser definidas como:

$$|e_1(1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_3(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que por otra lado

$$\langle e^1(1)| = (1\,0\,0)\,,\ \langle e^2(1)| = (0\,1\,0)\,,\ \langle e^3(1)| = (0\,0\,1)\ .$$

De igual forma las bases para $\mathbf{V}_2$ y $\mathbf{V}_2^\star$ pueden ser definidas como

$$|e_1(2)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2(2)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_3(2)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_4(2)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y repectivamente:

$$\langle e^1(2)| = (1\,0\,0\,0)\,,\ \langle e^2(2)| = (0\,1\,0\,0)\,,\ \langle e^3(2)| = (0\,0\,1\,0)\,,\ \langle e^4(2)| = (0\,0\,0\,1)\,,$$

Entonces con el producto tensorial previamente definido, podemos construir la siguiente base para el espacio tensorial $\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2^\star$:

$$\left[e_1(1)\,;e^1(2)\right] = |e_1(1)\rangle\otimes\langle e^1(2)| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left[e_1(1)\,;e^2(2)\right] = |e_1(1)\rangle\otimes\langle e^2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[e_1(1)\,;e^3(2)\right] = |e_1(1)\rangle\otimes\langle e^3(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left[e_1(1)\,;e^4(2)\right] = |e_1(1)\rangle\otimes\langle e^4(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[e_2(1)\,;e^1(2)\right] = |e_2(1)\rangle\otimes\langle e^1(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left[e_2(1)\,;e^2(2)\right] = |e_2(1)\rangle\otimes\langle e^2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[e_2(1)\,;e^3(2)\right] = |e_2(1)\rangle\otimes\langle e^3(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left[e_2(1)\,;e^4(2)\right] = |e_2(1)\rangle\otimes\langle e^4(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[e_3(1)\,;e^1(2)\right] = |e_3(1)\rangle\otimes\langle e^1(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left[e_3(1)\,;e^2(2)\right] = |e_3(1)\rangle\otimes\langle e^2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[e_3(1)\,;e^3(2)\right] = |e_3(1)\rangle\otimes\langle e^3(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \left[e_3(1)\,;e^4(2)\right] = |e_3(1)\rangle\otimes\langle e^4(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invocando la correspondencia entre *kets* y *bras* que expresamos en 3.1.1 construimos la base tensorial dual

Borrador Preliminar

$\left[\mathrm{e}^i(1)\,;\mathrm{e}_j(2)\right] = \langle \mathrm{e}^i(1)| \otimes |\mathrm{e}_j(2)\rangle \in \mathbf{V}_3^\star$ y tendremos

$$\left[\mathrm{e}^1(1)\,;\mathrm{e}_1(2)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^1(1)\,;\mathrm{e}_2(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^1(1)\,;\mathrm{e}_3(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[\mathrm{e}^1(1)\,;\mathrm{e}_4(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^2(1)\,;\mathrm{e}_1(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^2(1)\,;\mathrm{e}_2(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[\mathrm{e}^2(1)\,;\mathrm{e}_3(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^2(1)\,;\mathrm{e}_4(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^3(1)\,;\mathrm{e}_1(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[\mathrm{e}^3(1)\,;\mathrm{e}_2(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^3(1)\,;\mathrm{e}_3(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left[\mathrm{e}^3(1)\,;\mathrm{e}_4(2)\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como no tenemos definido un producto interno entre tensores y sus duales no podemos afirmar que esta base sea ortogonal, pero es claro que ambos conjuntos de vectores $\{[\mathrm{e}_k(1)\,;\mathrm{e}^m(2)]\}$ y sus duales $\left\{\left[\mathrm{e}^i(1)\,;\mathrm{e}_j(2)\right]\right\}$ son linealmente independientes en $\mathbf{V}_3$ y $\mathbf{V}_3^\star$, respectivamente. Por lo tanto, cualquier tensor, $[\mathrm{v}(1)\,;\mathrm{u}^*(2)] \in \mathbf{V}_3$ se puede expresar como combinación lineal de esta base

$$|\mathrm{v}(1)\rangle \otimes \langle \mathrm{u}(2)| \equiv [\mathrm{v}(1)\,;\mathrm{u}^*(2)] = v^i u_j \left[\mathrm{e}_i(1)\,;\mathrm{e}^j(2)\right] \equiv U^i_j \left[\mathrm{e}_i(1)\,;\mathrm{e}^j(2)\right],$$

donde los $U^i_j = v^i u_j$ son las componentes del tensor en esta base.

Equivalentemente, el tensor $[\mathrm{w}^*(1)\,;\mathrm{z}(2)] \in \mathbf{V}_3^\star$, también podrá expresarse en la base dual

$$\langle \mathrm{w}(1)| \otimes |\mathrm{z}(2)\rangle \equiv [\mathrm{w}^*(1)\,;\mathrm{z}(2)] = \left[\mathrm{e}^i(1)\,;\mathrm{e}_j(2)\right] z^j w_i \equiv \left[\mathrm{e}^i(1)\,;\mathrm{e}_j(2)\right] W^j_i.$$

Otra vez, los $W^j_i = z^j w_i$ son las componente del tensor $[\mathrm{w}^*(1)\,;\mathrm{z}(2)]$ en la base $\left[\mathrm{e}^i(1)\,;\mathrm{e}_j(2)\right]$.

◁

3.2.6 Tensor métrico, bases y componentes

Para una base genérica, $\{|u_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor simétrico, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que denominaremos "tensor métrico", de la siguiente manera:

$$\mathbf{g}\begin{bmatrix} |u_i\rangle & |u_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ\,, & \circ, \end{bmatrix} = \mathbf{g}\left[|u_i\rangle, |u_j\rangle\right] = g_{|u_i\rangle\,|u_j\rangle} \equiv g_{|u_j\rangle\,|u_i\rangle}\,, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{g}\begin{bmatrix} \langle u^i| & \langle u^j| \\ \downarrow & \downarrow \\ \bullet\,, & \bullet \end{bmatrix} = \mathbf{g}\left[\langle u^i|, \langle u^j|\right] = g^{\langle u^i|\,\langle u^j|} \equiv g^{\langle u^j|\,\langle u^i|}\,, \tag{3.7}$$

Borrador Preliminar

con $g^{\langle u^i|\,\langle u^j|} = \left(g_{|u_i\rangle\,|u_j\rangle}\right)^{-1}$.

Nótese que las $g_{|u_i\rangle\,|u_j\rangle} \equiv g_{|u_j\rangle\,|u_i\rangle}$ son las componentes del tensor $\mathbf{g}\,[\circ,\circ]$ una vez que la base $\{|u_j\rangle\}$ ha actuado. Esto hace que podamos definir una forma a partir del tensor métrico como $\mathbf{g}\,[|u_i\rangle,\circ] = \langle u^i|$ y equivalentemente un vector como $\mathbf{g}\left[\langle u^j|,\bullet\right] = |u_j\rangle$.

Ambas asociaciones nos llevan a pensar que el tensor métrico está relacionado a una función del producto interno, vale decir $\mathbf{g}\left[\langle u^i|,\langle u^j|\right] = g^{\langle u^i|\,\langle u^j|} \equiv g^{\langle u^j|\langle u^i|} = \mathcal{F}[\langle u^i|u_j\rangle]$, que preserve la idea de métrica: $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$, que sea simétrico respecto a los índices i,j y que cumpla con la desigualdad triangular. Entonces, la denominación de tensor **métrico**, no es gratuita, $\mathbf{g}$ cumple con todas las propiedades de la métrica definida para un **espacio vectorial euclidiano** expuestas en la sección 2.2.1, vale decir:

1. $\mathbf{g}\,[|u_i\rangle,|u_j\rangle] = g_{ij} \equiv g_{ji} \geq 0 \quad \forall |u_j\rangle$, y si $\quad \mathbf{g}\,[|u_i\rangle,|u_j\rangle] = 0 \Rightarrow i = j$.
2. $\mathbf{g}\,[|u_i\rangle,|u_j\rangle] = \mathbf{g}\,[|u_j\rangle,|u_i\rangle] \quad \Rightarrow \quad g_{ij} \equiv g_{ji}$.
3. $\mathbf{g}\,[|u_i\rangle,|u_j\rangle] \leq \mathbf{g}\,[|u_i\rangle,|u_k\rangle] + \mathbf{g}\,[|u_k\rangle,|u_j\rangle]$: La desigualdad Triangular.

Si la base genérica es ortonormal, $\{|u_i\rangle\} \to \{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}$, entonces tendremos, de manera natural:

$$\mathbf{g}\,[\circ,\circ] \equiv g_{ij}\langle\hat{\mathrm{e}}^i| \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^j| \equiv g_{ji}\langle\hat{\mathrm{e}}^j| \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^i| \quad \text{y} \quad \mathbf{g}\,[\bullet,\bullet] \equiv g^{ij}|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \equiv g^{ji}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\,, \tag{3.8}$$

claramente sus componentes tensoriales serán simétricas $g_{ij} = g_{ji}$, (igualmente las componentes contravariantes $g^{ij} = g^{ji}$) y

$$\left(g_{ij}\langle\hat{\mathrm{e}}^i| \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^j|\right)\left(g^{km}|\hat{\mathrm{e}}_k\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_m\rangle\right) = g_{ij}g^{km}\langle\hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_k\rangle\langle\hat{\mathrm{e}}^j|\hat{\mathrm{e}}_m\rangle = g_{ij}g^{km}\delta^i_k\delta^j_m = g_{ij}g^{ji} = \delta^i_i = n\,,$$

ya que $i,j = 1,2,3,\cdots,n$.

Por lo tanto, g_{ij} es la matriz inversa de g^{ij}, es decir, hemos definido las componentes covariantes y contravariantes del tensor de modo que cumplan con $g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i$.

También es claro que si $|a\rangle = a^k|\hat{\mathrm{e}}_k\rangle$, entonces:

$$\left(g_{ij}\langle\hat{\mathrm{e}}^i| \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^j|\right)|a\rangle = a^k\left(g_{ij}\langle\hat{\mathrm{e}}^i| \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^j|\right)|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle = a^k g_{ij}\langle\hat{\mathrm{e}}^j|\hat{\mathrm{e}}_k\rangle\langle\mathrm{e}^i| = a^k g_{ij}\delta^j_k\langle\hat{\mathrm{e}}^i| = a^k g_{ik}\langle\hat{\mathrm{e}}^i| \equiv a_i\langle\hat{\mathrm{e}}^i|\,,$$

con lo cual $a_i = a^k g_{ik}$. De la misma forma:

$$\langle a|\left(g^{ij}|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_j\rangle\right) = \langle a|\left(g^{ij}|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_j\rangle\right) = g^{ij}\langle a|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a_k g^{ij}\langle\hat{\mathrm{e}}^k|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a_k g^{kj}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \equiv a^j|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle\,,$$

otra vez $a^j = a_k g^{kj}$, ahora subimos el índice correspondiente.

De esta manera, el tensor métrico nos permite asociar formas con vectores, componentes covariantes (de las formas) a componentes contravariantes (de los vectores). Dicho rápido y feo, pero de uso muy frecuente: el tensor métrico nos permite "subir y bajar índices".

Otra forma de verlo es combinando las propiedades del producto directo de tensores y contracción de índices:

$$g^{ij}|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \otimes P_k{}^{lmn}|\hat{\mathrm{e}}_l\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_m\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^k| \quad \Rightarrow g^{ij}P_k{}^{lmn}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \otimes P_k{}^{lmn}|\hat{\mathrm{e}}_l\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_m\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^k|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle$$

$$g^{ij}P_k{}^{lmn}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_l\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_m\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle \cdot \underbrace{\langle\hat{\mathrm{e}}^k|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle}_{\delta^k_i} = P^{jlmn}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_l\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_m\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle \quad \Rightarrow g^{ij}P_i{}^{lmn} \equiv P^{jlmn}\,.$$

Adicionalmente, el tensor métrico permite la contracción de índices. Así, dado un producto tensorial de dos vectores que se pueden expresar en una base ortonormal $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}$:

$$|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = a^k b^m|\hat{\mathrm{e}}_k\rangle \otimes |\hat{\mathrm{e}}_m\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\left(g_{ij}\langle\hat{\mathrm{e}}^i| \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^j|\right)\left(a^k|\hat{\mathrm{e}}_k\rangle \otimes b^m|\hat{\mathrm{e}}_m\rangle\right) = a^k b^m g_{ij}\delta^i_k\delta^j_m = a^k b^m g_{km} = a^k b_k = \langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle\,.$$

Borrador Preliminar

Es decir, el producto interno de dos vectores involucra, de manera natural, la métrica del espacio,

$$\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle = a^k b_k = a_k b^k = a^k b^m g_{km} = a_k b_m g^{km}\,.$$

Obviamente la norma de un vector, también incluirá al tensor métrico:

$$\||a\rangle\|^2 = \langle a|a\rangle = a_i a^j \langle \hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a_i a^i = a_i a_j\, g^{ij} = a^i a^j\, g_{ij}\,.$$

Si partimos de la definición general de un tensor, cuando es evaluado en dos vectores tendremos

$$\mathbf{g}\begin{bmatrix} |a\rangle & |b\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ\,, & \circ, \end{bmatrix} = \mathbf{g}\left[|a\rangle, |b\rangle\right] = g_{ij} a^k b^m \langle \hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_k\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^j|\hat{\mathrm{e}}_m\rangle = a^k b^m g_{ij}\delta^i_k \delta^j_m = a^k b^m g_{km} = a^k b_k = \langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle\,.$$

Consideramos la definición (3.6) para una base genérica, $\{|u_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, tendremos

$$\mathbf{g}\begin{bmatrix} |a\rangle & |b\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ\,, & \circ, \end{bmatrix} = \langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle \quad \Rightarrow \mathbf{g}\begin{bmatrix} |u_i\rangle & |u_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ\,, & \circ, \end{bmatrix} = g_{|u_i\rangle|u_j\rangle} \Leftrightarrow \langle u^i|u_i\rangle\,. \tag{3.9}$$

Estamos asociando la componente del tensor métrico al producto interno de la base de vectores (genérica, no necesariamente ortonormal). Hay que aclarar que utilizamos la palabra asociar para no violentar nuestra notación de base directas y duales. Adicionalemente, debemos garantizar que $g^{\langle u^i|\,\langle u^j|} = \left(g_{|u_i\rangle|u_j\rangle}\right)^{-1}$. Analizaremos algunos ejemplos concretos en la sección 3.5.

3.2.7 Métrica, elemento de línea y factores de escala

El caso más emblemático lo constituye la norma de un desplazamiento infinitesimal. Para una base genérica, $\{|u_i\rangle\}$, no necesariamente ortogonal de un espacio vectorial con producto interno, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como:

$$\mathrm{d}s^2 \equiv \langle \mathrm{d}r|\mathrm{d}r\rangle = \Big(\mathrm{d}x_k\,\langle u^k|\Big)\left(\mathrm{d}x^m\,|u_m\rangle\right) = \langle u^k|u_m\rangle\,\mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x^m = \mathrm{d}x_m\,\mathrm{d}x^m = g_{km}\,\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^m\,. \tag{3.10}$$

Si las bases de formas y vectores son ortogonales, $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$, (cosa más o menos común pero no necesariamente cierta siempre) la métrica será diagonal y como en general: $\||\mathrm{e}_i\rangle\| \neq 1$, entonces surgen los llamados factores de escala $h_i = \sqrt{g_{ii}}$:

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1\,\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(h_2\,\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(h_3\,\mathrm{d}x^3\right)^2\,, \tag{3.11}$$

donde $h_i = \sqrt{g_{ii}}$, con $i, j = 1, 2, 3$ (aquí no hay suma).

De esta manera, las componentes covariantes y contravariantes estarán relacionadas, a través de los factores de escala como:

$$a_j = g_{jk}a^k \quad \Rightarrow a_i = h_{[i]}a^{[i]}\,. \quad (\text{Aquí } h_{[i]}a^{[i]} \quad \text{NO indica suma}).$$

En otras palabras, en aquellos sistemas de coordenadas en los cuales la métrica es diagonal pero no viene representada por la matriz unidad, subir y bajar indices puede incluir los cambios de escala. Obviamente, si la base $\{|\mathrm{i}_i\rangle\}$ es la canónica, es fácil ver que:

$$(\mathrm{d}s)^2 \equiv \langle \mathrm{d}r|dr\rangle = \delta^k_m \mathrm{d}x_k\,\mathrm{d}x^m = \mathrm{d}x_m \mathrm{d}x^m.$$

es decir: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1\,,\quad g_{ij} = 0$ si $i \neq j$, esto significa que en coordenadas cartesianas el desplazamiento infinitesimal es la ya conocida expresión: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$.

En este punto analizaremos dos ejemplos en los cuales construiremos los tensores métricos a partir de dos bases para $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3.6 Bases oblicuas, bases recíprocas y tensores métricos.

Borrador Preliminar

Consideremos una base genérica oblicua para $\mathbb{R}^3$, formada por los vectores:

$$\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\,, \mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} \text{ y } \mathbf{u}_3 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Revisaremos si estos vectores son mutuamente ortogonales. Encontraremos la base recíproca $\mathbf{u}^i$, el tensor métrico en ambas bases y para el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ encontraremos sus componentes covariantes.

Para saber si son ortogonales simplemente calculamos el producto escalar entre ellos:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 9\,, \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 6 \text{ y } \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 7\,,$$

por lo tanto no son ortogonales y adicionalmente sabemos que (ver 3.1)

$$\langle \mathbf{u}^i| = \frac{|\mathbf{u}_j\rangle \times |\mathbf{u}_k\rangle}{|\mathbf{u}_i\rangle \cdot (|\mathbf{u}_j\rangle \times |\mathbf{u}_k\rangle)}\,.$$

A pesar que hemos exagerado con la notación, esto no es otra cosa que la receta para construir la base recíproca, que en el lenguaje de formas y vectores coincide con la base dual, es decir la base del espacio de *1-formas*.

En general la base dual será:

$$\langle \mathbf{u}^i| \Rightarrow \mathbf{u}^i = \frac{\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k}{V} \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}^1 = \dfrac{\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3}{V} = \frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}} \\ \\ \mathbf{u}^2 = \dfrac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1}{V} = -\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}} \\ \\ \mathbf{u}^3 = \dfrac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{V} = -\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}}\,, \end{cases}$$

donde $V = \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \quad \Rightarrow \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}\right]\right) = 6\,.$

Notemos que el volumen unitario del espacio dual se construye:

$$\tilde{V} = \mathbf{u}^1 \cdot (\mathbf{u}^2 \times \mathbf{u}^3) \quad \Rightarrow \left(\frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[-\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[-\frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}}\right]\right) = \frac{1}{6}\,.$$

Construimos entonces el tensor métrico para la base recíproca implementando la ecuación (3.9):

$$g^{ij} = g^{ji} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1\mathbf{u}^1 & \mathbf{u}^1\mathbf{u}^2 & \mathbf{u}^1\mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^2\mathbf{u}^1 & \mathbf{u}^2\mathbf{u}^2 & \mathbf{u}^2\mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^3\mathbf{u}^1 & \mathbf{u}^3\mathbf{u}^2 & \mathbf{u}^3\mathbf{u}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{4} & -\frac{16}{3} & -\frac{7}{12} \\ \\ -\frac{16}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix},$$

mientras que para la base directa:

$$g_{ij} = g_{ji} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_3\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 14 & 7 \\ 6 & 7 & 26 \end{pmatrix}.$$

En ambos casos hemos denotado $\mathbf{u}^i\mathbf{u}^j$ como el producto escalar entre los vectores $\mathbf{u}^i$ y $\mathbf{u}^j$ y su equivalente en la base recíproca. Y, como debe ser,

$$g_{ia}g^{aj} = \delta_i^j = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 14 & 7 \\ 6 & 7 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{35}{4} & -\frac{16}{3} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{16}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para un vector dado por: $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, podemos calcular sus componentes covariantes

Borrador Preliminar

de la manera siguiente:

$$a_i = g_{ij}a^j = \begin{cases} a_1 = g_{11}a^1 + g_{12}a^2 + g_{13}a^3 = (6)(3) + (9)(2) + (6)(1) = 42 \\ a_2 = g_{21}a^1 + g_{22}a^2 + g_{23}a^3 = (9)(3) + (14)(2) + (7)(1) = 62 \\ a_3 = g_{31}a^1 + g_{32}a^2 + g_{33}a^3 = (6)(3) + (7)(2) + (26)(1) = 58 \end{cases}$$

Esto es: $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}} = 42\mathbf{u}^1 + 62\mathbf{u}^2 + 58\mathbf{u}^3$.

◁

Ejemplo 3.7 Bases ortogonales, bases recíprocas y tensores métricos.

El segundo ejemplos será construir una base dual a una base de vectores mutuamente ortogonales, para ello consideraremos los siguientes vectores

$$\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{w}_2 = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{w}_3 = 3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Ortogonalidad: $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$, $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_3 = 0$ y $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 = 0$. Son ortogonales.

La base recíproca se construye a partir de:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k)}\,,$$

donde el denominador es:

$$V = \mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) \quad \Rightarrow \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right] \times [3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}]\right) = 18\,,$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k}{V} \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{w}^1 = \dfrac{\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3}{V} = \frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{w}^2 = \dfrac{\mathbf{w}_3 \times \mathbf{w}_1}{V} = -\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{w}^3 = \dfrac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{V} = \frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} \end{cases}$$

El volumen recíproco, como era de esperarse:

$$\tilde{V} = \mathbf{w}^1 \cdot (\mathbf{w}^2 \times \mathbf{w}^3) \quad \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[-\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}}\right]\right) = \frac{1}{18}\,,$$

mientras que el tensor métrico para la base recíproca es:

$$\bar{g}^{ij} = \bar{g}^{ji} = \mathbf{w}^i \otimes \mathbf{w}^j = \begin{pmatrix} \mathbf{w}^1\mathbf{w}^1 & \mathbf{w}^1\mathbf{w}^2 & \mathbf{w}^1\mathbf{w}^3 \\ \mathbf{w}^2\mathbf{w}^1 & \mathbf{w}^2\mathbf{w}^2 & \mathbf{w}^2\mathbf{w}^3 \\ \mathbf{w}^3\mathbf{w}^1 & \mathbf{w}^3\mathbf{w}^2 & \mathbf{w}^3\mathbf{w}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

y para la base original

$$g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_1\mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2\mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2\mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_3\mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3\mathbf{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Entonces el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, tendrá como componentes covariantes

$$a_i = g_{ij}a^j = \begin{cases} a_1 = g_{11}a^1 = (6)(3) = 18 \\ a_2 = g_{22}a^2 = (3)(2) = 6 \\ a_3 = g_{33}a^3 = (18)(1) = 18 \end{cases}$$

Esto es: $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}} = 18\mathbf{w}^1 + 6\mathbf{w}^2 + 18\mathbf{w}^3$.

Notemos que si la base original hubiese sido ortonormal:

$$\mathbf{w}_1 = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})/\sqrt{6}\,, \quad \mathbf{w}_2 = (-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{3}\,, \quad \mathbf{w}_3 = (3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})/\sqrt{18}\,,$$

Borrador Preliminar

entonces:

$$g_{ij} = \bar{g}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a^1 \\ a_2 = a^2 \\ a_3 = a^3 \end{cases}$$

◁

3.2.8 Vectores, formas, tensores y leyes de transformación

En esta sección discutiremos la importancia de caracterizar objetos identificando las leyes de transformación. La invariancia bajo determinadas leyes de transformación es clave en Física y nos permite identificar propiedades fundamentales. Ya hemos visto, en la sección 1.4.4, como los esquemas de transformación de coordenadas nos han permitido diferenciar escalares y pseudoescalares y vectores de pseudovectores. En esta sección puntualizaremos como transforman vectores y formas y como esos esquemas de transformaciones los heredan los tensores.

En general las afirmaciones anteriores se pueden generalizar considerando que las coordenadas que definen un determinado punto, P, expresado en un sistema de coordenadas particular, son $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$ y las coordenadas de ese mismo punto P, expresado en otro sistema de coordenadas son $\left(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}\right)$. Ambas coordenadas estarán relacionadas por:

$$\left.\begin{array}{c} x^{1'} = x^{1'}\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \\ x^{2'} = x^{2'}\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \\ \vdots \\ x^{n'} = x^{n'}\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^1 = x^1\left(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}\right) \\ x^2 = x^2\left(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}\right) \\ \vdots \\ x^n = x^n\left(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}\right) \end{array}\right.$$

En una notación más compacta lo que tenemos es:

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^j\right) \Longleftrightarrow x^i = x^i(x^{j'}), \tag{3.12}$$

con: $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ y $i', j' = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Retomemos lo que discutimos en la sección 3.1.3, pero ahora en el lenguaje de coordenadas. En esa oportunidad mostramos como transformaban las bases y las componentes de formas y vectores. Ahora lo generalizaremos a los tensores. Otra vez, sólo exigiremos (y es bastante) que:

1. Las funciones $x^i = x^i(x^{m'})$ y $x^{j'} = x^{j'}\left(x^m\right)$ sean al menos $\mathcal{C}^2$ (función y derivada continua)
2. Que el determinante de la matriz jacobiana sean finito y distinto de cero, esto es

$$\det\left|\frac{\partial x^i(x^{m'})}{\partial x^{j'}}\right| \neq 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial x^{n'}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^n}{\partial x^{2'}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow x^i = x^i(x^{m'}) \Longleftrightarrow x^{j'} = x^{j'}\left(x^m\right).$$

Ahora bien, una vez más, derivando y utilizando la regla de la cadena:

$$x^i = x^i\left(x^{j'}\left(x^m\right)\right) \quad \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^m} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} = \delta^i_m \quad \Rightarrow \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\mathrm{d}x^{j'},$$

como hemos comprobado para los dos casos particulares estudiados con anterioridad.

De ahora en adelante tendremos las siguientes redefiniciones:

1. Un conjunto de cantidades $\left\{a^1, a^2, \cdots, a^n\right\}$ se denominarán componentes *contravariantes* de un vector $|a\rangle \in \mathbf{V}$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$, si:

Borrador Preliminar

(a). dada dos bases ortonormales de vectores coordenados: $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, \cdots, |\hat{e}_n\rangle\}$ y $\{|\hat{e}_{1'}\rangle, |\hat{e}_{2'}\rangle, \cdots, |\hat{e}_{n'}\rangle\}$, se cumple que:

$$|a\rangle = a^i|\hat{e}_i\rangle = a^{i'}|\hat{e}_{i'}\rangle \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \langle\hat{e}^i|a\rangle = a^i \\ \langle\hat{e}^{i'}|a\rangle = a^{i'} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow a^{i'} = a^j\langle\hat{e}^{i'}|\hat{e}_j\rangle.$$

(b). o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas: $x^i = x^i(x^{j'})$ (con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ y $i', j' = 1, 2, 3, \cdots, n$), estas cantidades transforman como:

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\, a^k \iff a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, a^{k'}\,, \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} = \delta^i_l\,, \tag{3.13}$$

2. Un conjunto de cantidades $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ se denominarán componentes *covariantes* de un vector $\langle b| \in \mathbf{V}^\star$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$, si:

(a). dada dos bases de formas: $\left\{\langle\hat{e}^1|, \hat{e}^2|, \cdots, \langle\hat{e}^n|\right\}$ y $\left\{\langle\hat{e}^{1'}|, \langle\hat{e}^{2'}|, \cdots, \langle\hat{e}^{n'}|\right\}$ se cumple que:

$$\langle b| = b_i\langle\hat{e}^i| = b_{i'}\langle\hat{e}^{i'}| \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \langle b|\hat{e}\rangle = b^i \\ \langle b|\hat{e}^{i'}\rangle = b^{i'} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow b^{i'} = b^j\langle\hat{e}_j|\hat{e}^{i'}\rangle\,.$$

(b). o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(x^{j'})$ (con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ y $i', j' = 1, 2, 3, \cdots, n$) estas cantidades transforman como:

$$b_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, b_i \iff b_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\, b_{i'} \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} = \delta^i_l\,, \tag{3.14}$$

Es bueno recalcar que cantidades $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$ deben ser evaluadas en el punto P.

Podemos generalizar los conceptos anteriores:

1. Dado un conjunto bases para las formas diferenciales $\{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\}$, hemos definido las componentes *contravariantes* de un tensor:

$$T^{ij} = \mathcal{T}\begin{bmatrix} \langle x^i(1)| & \langle y^j(2)| \\ \downarrow & \downarrow \\ \bullet\,, & \bullet \end{bmatrix} \iff \{T^{ij}\} \equiv \{T^{11}, T^{12}, \cdots, T^{1n}, T^{21}, T^{22}, \cdots, T^{2n}, \cdots, T^{nn}\}\,,$$

Las componentes contravariantes en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \Leftrightarrow x^i = x^i(x^{j'})$ (con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ y $i', j' = 1, 2, 3, \cdots, n$) transforman como:

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m}\, T^{km} \iff T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\, T^{k'm'}\,.$$

Esto nos permite construir el caso más general.

2. Si $\{|t_i(1)\rangle, |u_j(2)\rangle, \cdots, |v_k(m)\rangle\}$ y $\left\{\langle x^e(1)|, \langle y^f(2)|, \cdots, \langle z^g(n)|\right\}$ son bases para los vectores y las formas, respectivamente, las componentes de un tensor:

$$T_{ijk}{}^{mn} = \mathcal{T}\begin{bmatrix} |t_i(1)\rangle & |u_j(2)\rangle & & |v_k(m)\rangle & \langle x^e(1)| & \langle y^f(2)| & & \langle z^g(n)| \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \circ\,, & \circ, & ,\cdots, & \circ\,; & \bullet\,, & \bullet & ,\cdots, & \bullet \end{bmatrix},$$

serán un conjunto de cantidades: $\left\{T_{ijk}{}^{mn}\right\}$ que se denominarán las componentes *contravariantes* y *covariantes* respectivamente, de un tensor mixto en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$.

Bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(x^{j'})$, estas cantidades transforman como:

$$T_{e'\cdots g'}{}^{i'\cdots k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\cdots\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^a}{\partial x^{e'}}\cdots\frac{\partial x^d}{\partial x^{g'}}\, T_{a\cdots d}{}^{p\cdots q} \iff T_{e\cdots g}{}^{i\cdots k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\cdots\frac{\partial x^k}{\partial x^{q'}}\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^e}\cdots\frac{\partial x^{d'}}{\partial x^g}\, T_{a'\cdots d'}{}^{p'\cdots q'}\,. \tag{3.15}$$

Recordemos nuevamente que

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} = \delta^i_l\,,$$

Borrador Preliminar

y las cantidades $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$ deben ser evaluadas en el punto P.

Ejemplo 3.8 Un ejemplo detallado de transformación de tensores

Ilustremos ahora las transformaciones de tensores bajo cambios de la base del espacio tensorial. Esta vez, consideraremos que un tensor tendrá componentes T^i_j cuando se expresa como combinación lineal de la base $\left[\hat{\mathrm{e}}_i(1);\, \hat{\mathrm{e}}^j(2)\right] = |\hat{\mathrm{e}}_i(1)\rangle \otimes \langle\hat{\mathrm{e}}^j(2)|$ donde la base $\{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle\} \equiv \{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle, |\mathrm{k}\rangle\}$ son los vectores unitarios cartesianos para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Esto es

$$|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle = |\mathrm{i}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle = |\mathrm{j}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle = |\mathrm{k}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y su base dual

$$\langle\hat{\mathrm{e}}_1| = \langle\mathrm{i}| = (1\ 0\ 0),\ \langle\hat{\mathrm{e}}_2| = \langle\mathrm{j}| = (0\ 1\ 0),\ \langle\hat{\mathrm{e}}_3| = \langle\mathrm{k}| = (0\ 0\ 1).$$

Consideremos un tensor en la base tensorial $\left[\hat{\mathrm{e}}_i(1);\, \hat{\mathrm{e}}^j(2)\right]$ se expresa como:

$$T^i_j = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo consiste en ver cómo calcular las expresiones de los siguientes tensores: $\tilde{T}^{i'}_{j'}, \tilde{T}_{i'j'}$ y $\tilde{T}^{i'j'}$, si consideramos una nueva base:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |\mathrm{w}_{1'}\rangle = |\mathrm{i}\rangle & & \langle\mathrm{w}_{1'}| = \langle\mathrm{i}| \\ |\mathrm{w}_{2'}\rangle = |\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle & \Leftrightarrow & \langle\mathrm{w}_{2'}| = \langle\mathrm{i}| + \langle\mathrm{j}| \\ |\mathrm{w}_{3'}\rangle = |\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle + |\mathrm{k}\rangle & & \langle\mathrm{w}_{3'}| = \langle\mathrm{i}| + \langle\mathrm{j}| + \langle\mathrm{k}| \end{array} \right\}$$

Nótese que la nueva base **no es ortogonal** ,$\langle\mathrm{w}^{k'}|\mathrm{w}_{i'}\rangle \neq \delta^{k'}_{i'}$, con lo cual no se cumplen muchas cosas, entre ellas: $|\mathrm{w}_{k'}\rangle\langle\mathrm{w}^{k'}| \neq \mathbb{I}$, como lo veremos en la sección 4.1.4. Pero sin duda se cumple que para transformar componentes de un tensor tendremos siempre la relación

$$T^{k'}_{m'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\, T^i_j\,.$$

Tenemos que identificar las matrices de transformación $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}$. Estas matrices de transformación son las mismas que transforman componentes (contravariantes) de vectores y las componentes (covariantes) de covectores o formas, i.e.

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\, a^k \quad \Leftrightarrow \quad a_{k'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{k'}}\, a_m\,,$$

y además son las mismas matrices que devuelven el cambio de un sistema de coordenadas a otro:

$$a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, a^{k'} \quad \Leftrightarrow \quad a_k = \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^k}\, a_{m'}\,.$$

Adicionalmente, estas matrices son una la inversa de la otra $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j$.

Para identificar esas matrices recordamos que un vector genérico transforma de la siguiente manera: $|a\rangle = a^j|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a^{j'}|\mathrm{w}_{j'}\rangle$, por lo tanto:

$$|a\rangle = a^j|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a^{1'}|\mathrm{w}_{1'}\rangle + a^{2'}|\mathrm{w}_{2'}\rangle + a^{3'}|\mathrm{w}_{3'}\rangle = a^{1'}|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle + a^{2'}\left(|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle + |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle\right) + a^{3'}\left(|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle + |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle + |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle\right)\,,$$

donde hemos sustituido la expresión de la base $\{|\tilde{\mathrm{w}}_{i'}\rangle\}$ en términos de la base $\{|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ con lo cual:

$$|a\rangle = a^1|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle + a^2|\hat{\mathrm{e}}_2\rangle + a^3|\hat{\mathrm{e}}_3\rangle = \left(a^{1'} + a^{2'} + a^{3'}\right)|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle + \left(a^{2'} + a^{3'}\right)|\hat{\mathrm{e}}_2\rangle + a^{3'}|\hat{\mathrm{e}}_3\rangle\,.$$

Borrador Preliminar

Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a^1 = a^{1'} + a^{2'} + a^{3'} \\ a^2 = a^{2'} + a^{3'} \\ a^3 = a^{3'} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, a^{k'} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} = 1; & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} = 1; & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} = 1\,; \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} = 0; & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} = 1; & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} = 1\,; \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} = 0; & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} = 0; & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} = 1\,. \end{array}\right.$$

Es de hacer notar que dado que la base: $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}$ es ortonormal, se tiene que:

$$|a\rangle = a^j|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a^{i'}|\mathrm{w}_{i'}\rangle \quad \Rightarrow \langle\hat{\mathrm{e}}^i|a\rangle = a^j\langle\hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a^j\delta^i_j = a^i = a^{k'}\langle\hat{\mathrm{e}}^i|\mathrm{w}_{k'}\rangle \quad \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = \langle\hat{\mathrm{e}}^i|\mathrm{w}_{k'}\rangle\,.$$

Este mismo procedimiento se puede aplicar para expresar el vector $|a\rangle$ como una combinación lineal de los vectores $|\mathrm{w}_{j'}\rangle$:

$$|a\rangle = a^{j'}|\hat{\mathrm{e}}_{j'}\rangle = a^j|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = a^1|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle + a^2|\hat{\mathrm{e}}_2\rangle + a^3|\hat{\mathrm{e}}_3\rangle = a^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle + a^2\left(|\mathrm{w}_{2'}\rangle - |\mathrm{w}_{1'}\rangle\right) + a^3\left(|\mathrm{w}_{3'}\rangle - |\mathrm{w}_{2'}\rangle\right)\,,$$

esto es:

$$\left.\begin{array}{l} a^{1'} = a^1 - a^2 \\ a^{2'} = a^2 - a^3 \\ a^{3'} = a^3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow a^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} a^i \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = 1; & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -1; & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} = 0\,; \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = 0; & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = 1; & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} = -1\,; \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} = 0; & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} = 1\,. \end{array}\right.$$

Nótese que, como era de esperarse:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Con las expresiones matriciales para las transformaciones, estamos en capacidad de calcular, componente a componente, las representación del tensor dado en la nueva base:

$$T^{k'}_{m'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\, T^i_j\,.$$

Veamos:

$$\begin{aligned} T^{1'}_{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}} T^i_j \\ &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\, T^1_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\, T^1_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}\, T^1_3\right) + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\, T^2_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\, T^2_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}\, T^2_3\right) \\ &+ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\, T^3_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\, T^3_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}}\, T^3_3\right)\,, \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} T^{1'}_{1'} &= 1\cdot\left(1\,T^1_1 + 0\,T^1_2 + 0\,T^1_3\right) - 1\cdot\left(1\,T^2_1 + 0\,T^2_2 + 0\,T^2_3\right) + 0\left(1\,T^3_1 + 0\,T^3_2 + 0\,T^3_3\right) \\ &= T^1_1 - T^2_1 = 2 - 2 = 0\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Del mismo modo para $T^{1'}_{2'}$:

$$\begin{aligned}
T^{1'}_{2'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{2'}}\,T^i_j \\
&= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\,T^1_1+\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\,T^1_2+\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}\,T^1_3\right)+\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\,T^2_1+\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\,T^2_2+\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}\,T^2_3\right) \\
&+ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\,T^3_1+\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\,T^3_2+\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}}\,T^3_3\right),
\end{aligned}$$

resultando:

$$\begin{aligned}
T^{1'}_{2'} &= 1\cdot\left(1\,T^1_1+1\,T^1_2+0\,T^1_3\right)-1\cdot\left(1\,T^2_1+1\,T^2_2+0\,T^2_3\right)+0\left(1\,T^3_1+1\,T^3_2+0\,T^1_3\right) \\
&= \left(T^1_1+T^1_2\right)-\left(T^2_1+T^2_2\right)=(2+1)-(2+3)=-2\,.
\end{aligned}$$

Se puede continuar término a término (el lector debe terminar los cálculos) o realizar la multiplicación de las matrices provenientes de la transformación de componentes de tensores. Vale decir:

$$T^{k'}_{m'}=\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right)\left(T^i_j\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\right)\;\Leftrightarrow\;\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&4\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-3\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}.$$

Hay que resaltar el especial cuidado que se tuvo en la ubicación de las matrices para su multiplicación. Si bien en la expresión $T^{k'}_{m'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\,T^i_j$ las cantidades $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$ son números y no importa el orden con el cual se multipliquen, cuando se escriben como matrices debe respetarse la "concatenación interna de índices". Esto es, cuando queremos expresar $T^{k'}_{m'}$ como una matriz, donde el índice contravariante k' indica filas y el índice covariante m' las columnas, fijamos primero estos índices y luego respetamos la "concatenación de índices" covariantes con los contravariantes. Esta es la convención para expresar la multiplicación de matrices en la notación de índices[7]. Esto es:

$$T^{k'}_{m'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\,T^i_j\;\Rightarrow\left(T^{k'}_{m'}\right)=\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right)\left(T^i_j\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\right).$$

Los objetos $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}, T^i_j$ y $\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}$ fueron sustituidos (en sus puestos correspondientes) por su representación matricial. Con lo cual hemos encontrado la representación matricial $T^{i'}_{j'}$ de las componentes del tensor $\mathbf{T}$ en la base $\{|\mathrm{w}_{1'}\rangle,|\mathrm{w}_{2'}\rangle,|\mathrm{w}_{3'}\rangle\}$

$$T^{i'}_{j'}=\begin{pmatrix}T^{1'}_{1'}&T^{1'}_{2'}&T^{1'}_{2'}\\T^{2'}_{1'}&T^{2'}_{2'}&T^{2'}_{3'}\\T^{3'}_{1'}&T^{3'}_{2'}&T^{3'}_{3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-3\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}.$$

Para encontrar la expresión de $T_{i'j'}$ ($T_{i'j'}=g_{i'k'}T^{k'}_{j'}$), requeriremos las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico $g_{i'k'}$ que genera esta base. Para ello recordamos que para una base genérica, $\left\{|\mathrm{w}_{j'}\rangle\right\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor que denominaremos tensor métrico como:

$$\text{un tensor del tipo}\;\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\;\Rightarrow g_{i'j'}=\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}}g_{mn}\equiv\langle\hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{i'}\rangle\langle\hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{j'}\rangle g_{mn}\,.$$

Recordemos que la métrica covariante g_{ij} generada por una base ortonormal $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}\equiv\{|\mathrm{i}_i\rangle\}$ es:

$$g_{11}=1\,,\;g_{22}=1\,,\;g_{33}=1\,,\;g_{12}=g_{21}=g_{13}=g_{31}=g_{23}=g_{32}=0\,.$$

[7]Quizá una forma de comprobar si los índices están bien concatenados se observa si se "bajan" los índices contravariantes pero se colocan antes que los covariantes. Esto es, $T^i_j\to T_{ij}$. Así, la multiplicación de matrices queda representada de la siguiente forma: $C^i_j=A^i_kB^k_j\to C_{ij}=A_{ik}B_{kj}$ y aquí es claro que índices consecutivos están "concatenados" e indican multiplicación.

Borrador Preliminar

Es decir:

$$g_{ij} = g^{ij} = g^i_j \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Con lo cual, para el caso de la base genérica no ortonormal $\{|\mathrm{w}_{j'}\rangle\}$ tenemos dos formas de calcular las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico.

La primera es la forma directa: $g_{i'j'} = \langle \mathrm{e}^m|\mathrm{w}_{i'}\rangle\langle \mathrm{e}^n|\mathrm{w}_{j'}\rangle g_{mn}$. Esto es:

$$\begin{aligned}
g_{1'1'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{1'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{1'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{1'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle^2 = 1 \\
g_{1'2'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{2'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{2'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle = 1 \\
g_{1'3'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{3'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle = 1 \\
g_{2'1'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{1'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{1'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{1'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle = 1 \\
g_{2'2'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{2'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{2'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle = 2 \\
g_{2'3'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{3'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle = 2 \\
g_{3'1'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{1'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{1'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{1'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{1'}\rangle = 1 \\
g_{3'2'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{2'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{2'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{2'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{2'}\rangle = 2 \\
g_{3'3'} &= \langle \hat{\mathrm{e}}^n|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^m|\mathrm{w}_{3'}\rangle g_{nm} = \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle \\
&= \langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^1|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^2|\mathrm{w}_{3'}\rangle + \langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}^3|\mathrm{w}_{3'}\rangle = 3
\end{aligned}$$

De manera que:

$$g_{i'j'} \;\Rightarrow\; g_{1'1'} = 1\,,\; g_{1'2'} = 1\,,\; g_{1'3'} = 1\,,\; g_{2'1'} = 1\,,\; g_{2'2'} = 2\,,\; g_{2'3'} = 2\,,\; g_{3'1'} = 1\,,\; g_{3'2'} = 2\,,\; g_{3'3'} = 3\,.$$

Consecuentemente podemos "arreglarlo como una matriz"[8] de la siguiente forma:

$$g_{i'j'} \equiv g_{j'i'} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow g^{i'j'} \equiv g^{j'i'} = \left(g_{i'j'}\right)^{-1} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nótese que también podríamos haber procedido, y en términos "matriciales", de la siguiente forma:

$$g_{k'm'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, g_{ij}\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Nuevamente es bueno aclarar que para conservar la convención de índices y poder representar la multiplicación de matrices, los índices deben estar consecutivos, por lo tanto, hay que trasponer la representación matricial para multiplicarlas. Es por eso que en el cálculo anterior aparece como primera matriz la transpuesta

[8] Recordemos que hemos insistido que las matrices representan tensores mixtos

Borrador Preliminar

de la última. El cálculo se debe hacer como se muestra a continuación:

$$g_{k'm'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, g_{ij}\, \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \quad \longrightarrow \quad g_{k'm'} = \Pi_{ik'}\, g_{ij}\, \Pi_{jm'} \quad \longrightarrow \quad g_{k'm'} = \bar{\Pi}_{k'i}\, g_{ij}\, \Pi_{jm'}\,.$$

Finalmente, estamos en capacidad de obtener las representaciones matriciales para los tensores: $T_{i'}^{j'}, T_{i'j'}, T^{i'j'}$.

$$T_{i'}^{j'} = (T_{j'}^{i'})^{\mathrm{T}} \iff T_{i'}^{j'} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$T_{k'm'} = g_{k'n'} T_{m'}^{n'} \iff T_{k'm'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$T^{k'n'} = T_{m'}^{n'} g^{m'k'} \iff T^{k'n'} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quisiéramos ejemplificar una forma "rápida y furiosa" (pero sucia) de calcular la métrica generada por una determinada base genérica. La idea es que, violentando toda nuestra notación e idea de tensores, construimos la métrica a partir de los vectores base definiéndola como $g_{i'j'} = \langle \mathrm{w}_{i'} | \mathrm{w}_{i'} \rangle$, de esta manera:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \begin{pmatrix} \langle \mathrm{w}_{1'} | \mathrm{w}_{1'} \rangle & \langle \mathrm{w}_{1'} | \mathrm{w}_{2'} \rangle & \langle \mathrm{w}_{1'} | \mathrm{w}_{3'} \rangle \\ \langle \mathrm{w}_{2'} | \mathrm{w}_{1'} \rangle & \langle \mathrm{w}_{2'} | \mathrm{w}_{2'} \rangle & \langle \mathrm{w}_{2'} | \mathrm{w}_{3'} \rangle \\ \langle \mathrm{w}_{3'} | \mathrm{w}_{1'} \rangle & \langle \mathrm{w}_{3'} | \mathrm{w}_{2'} \rangle & \langle \mathrm{w}_{3'} | \mathrm{w}_{3'} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \mathrm{i} | \mathrm{i} \rangle & \langle \mathrm{i} | [|\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle] & \langle \mathrm{i} | [|\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle + |\mathrm{k}\rangle] \\ [\langle \mathrm{i}| + \langle \mathrm{j}|]\, |\mathrm{i}\rangle & [\langle \mathrm{i}| + \langle \mathrm{j}|]\, [|\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle] & [\langle \mathrm{i}| + \langle \mathrm{j}|]\, [|\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle + |\mathrm{k}\rangle] \\ [\langle \mathrm{i}| + \langle \mathrm{j}| + \langle \mathrm{k}|]\, |\mathrm{i}\rangle & [\langle \mathrm{i}| + \langle \mathrm{j}| + \langle \mathrm{k}|]\, [|\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle] & [\langle \mathrm{i}| + \langle \mathrm{j}| + \langle \mathrm{k}|]\, [|\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle + |\mathrm{k}\rangle] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resultado que coincide con la métrica que calculamos transformando el tensor métrico.

◁

A continuación vamos a considerar otros ejemplos con tensores cartesianos.

Ejemplo 3.9 Dado los tensores:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La parte simétrica de T_{ij} es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left[T_{ij} + T_{ji}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Para la parte antisimétrica de T_{ij}:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left[T_{ij} - T_{ji}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Para calcular $T_{ij}E^j$ hacemos lo siguiente:

$$C_i = T_{i1}E^1 + T_{i2}E^2 + T_{i3}E^3 = \begin{cases} C_1 = T_{11}E^1 + T_{12}E^2 + T_{13}E^3 = (1)(1) + (0)(4) + (2)(3) = 7 \\ C_2 = T_{21}E^1 + T_{22}E^2 + T_{23}E^3 = (3)(1) + (4)(4) + (1)(3) = 22 \\ C_3 = T_{31}E^1 + T_{32}E^2 + T_{33}E^3 = (1)(1) + (3)(4) + (4)(3) = 25 \end{cases}$$

◁

Ejemplo 3.10 Dados T^i_j, a^i y $b^i \in \mathbb{R}^3$ con:

$$T^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que T^i_j, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están expresados en coordenadas cartesianas.

Vamos a calcular: $A_{ij}a^ib^j$, $S_{ij}a^ia^j$ y $A_{ij}b^ib^j$, donde S_{ij} y A_{kl} son, respectivamente, las partes simétrica y antisimétrica del tensor T^i_j.

La métrica en coordenadas cartesianas viene dada por:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tendremos que:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nótese que la expresión matricial para $T_{ij} \equiv g_{ik}T^k_j$ es la misma que para T^i_j debido a la forma de la métrica en este espacio. Del mismo modo:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto:

$$a^iA_{ij}b^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{87}{2},$$

$$a^iS_{ij}a^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 1,$$

$$b^iA_{ij}b^j = 0.$$

◁

Ejemplo 3.11 **Sistema de coordenadas genérico**.

Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas:

$$|\mathrm{w}_1\rangle = a|\mathrm{i}\rangle + b|\mathrm{j}\rangle, \quad |\mathrm{w}_2\rangle = c|\mathrm{i}\rangle + d|\mathrm{j}\rangle.$$

Borrador Preliminar

1. Para una base arbitraria, $\{|\mathrm{w}_i\rangle\}$, la métrica viene definida por:

$$g_{ij} \equiv g_{ji} = \mathbf{g}\left[|\mathrm{w}_i\rangle, |\mathrm{w}_j\rangle\right] \equiv \langle \mathrm{w}^i|\mathrm{w}_j\rangle$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{w}^1|\mathrm{w}_1\rangle & \langle \mathrm{w}^1|\mathrm{w}_2\rangle \\ \langle \mathrm{w}^2|\mathrm{w}_1\rangle & \langle \mathrm{w}^2|\mathrm{w}_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

2. Un vector genérico: $|v\rangle = v_x|\mathrm{i}\rangle + v_y|\mathrm{j}\rangle$, en estas coordenadas se escribe como:

$$\left.\begin{array}{l} |\mathrm{w}_1\rangle = a|\mathrm{i}\rangle + b|\mathrm{j}\rangle \\ \\ |\mathrm{w}_2\rangle = c|\mathrm{i}\rangle + d|\mathrm{j}\rangle \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} |\mathrm{i}\rangle = \frac{1}{\Delta}\left(d|\mathrm{w}_1\rangle - b|\mathrm{w}_2\rangle\right) \\ \\ |\mathrm{j}\rangle = \frac{1}{\Delta}\left(-c|\mathrm{w}_1\rangle + a|\mathrm{w}_2\rangle\right) \end{array}\right.$$

con $\Delta = ad - bc$, por lo cual:

$$|v\rangle = v_x|\mathrm{i}\rangle + v_y|\mathrm{j}\rangle = \frac{v_x}{\Delta}\left(d|\mathrm{w}_1\rangle - b|\mathrm{w}_2\rangle\right) + \frac{v_y}{\Delta}\left(-c|\mathrm{w}_1\rangle + a|\mathrm{w}_2\rangle\right)$$
$$= \left(d\frac{v_x}{\Delta} - c\frac{v_y}{\Delta}\right)|\mathrm{w}_1\rangle - \left(b\frac{v_x}{\Delta} - a\frac{v_y}{\Delta}\right)|\mathrm{w}_2\rangle.$$

3. Consideremos ahora una base y un tensor de manera concreta.

$$|\mathrm{w}_1\rangle = |\mathrm{i}\rangle, \quad |\mathrm{w}_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathrm{i}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathrm{j}\rangle, \quad T^i_j = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontremos primero la expresión matricial para el tensor $\tilde{T}_{ij}$[9].

En general:

$$T_{i'j'} = g_{ik}T^{k'}_{j'} = g_{ik}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m}T^m_n\frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}},$$

Identificando:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^j}v^j = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}v^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}v^2 = \frac{d}{\Delta}v_x - \frac{c}{\Delta}v_y, \\ v_{y'} &= v^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^j}v^j = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}v^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}v^2 = -\frac{b}{\Delta}v_x + \frac{a}{\Delta}v_y, \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \frac{d}{\Delta}, \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -\frac{c}{\Delta}, \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = -\frac{b}{\Delta} \text{ y } \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = \frac{a}{\Delta}.$$

Como $a = 1, b = 0, c = \frac{\sqrt{2}}{2}, d = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces:

$$g_{ik} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} = \left(\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^j}\right)^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$T_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

◁

Ejemplo 3.12 Cartesianas y polares, otra vez

El ejemplo más simple, y por ello clásico y emblemático de cambio de coordenadas, lo constituye las expresiones de un mismo vector en dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Esto es, para un vector $|a\rangle$:

$$|a\rangle = a_x|\mathrm{i}\rangle + a_x|\mathrm{j}\rangle = a^1|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle + a^2|\hat{\mathrm{e}}_2\rangle \qquad \text{y} \qquad |a\rangle = a_r|u_r\rangle + a_\theta|u_\theta\rangle = a^{1'}|\hat{\mathrm{e}}_{1'}\rangle + a^{2'}|\hat{\mathrm{e}}_{2'}\rangle.$$

[9] **Ayuda**: dada una matriz genérica $A^i_j = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, su inversa será $\begin{pmatrix} \frac{D}{AD-BC} & -\frac{B}{AD-BC} \\ -\frac{C}{AD-BC} & \frac{A}{AD-BC} \end{pmatrix}$.

Borrador Preliminar

Al expresar una base en términos de la otra obtenemos:

$$|u_r\rangle = \cos(\theta)|\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\theta)|\mathrm{j}\rangle \qquad \text{y} \qquad |u_\theta\rangle = -\mathrm{sen}(\theta)|\mathrm{i}\rangle + \cos(\theta)|\mathrm{j}\rangle\,,$$

con lo cual:

$$\langle \hat{\mathrm{e}}^{i'}|\mathrm{e}_j\rangle = A^{'}_j \iff A^{i'}_j = \begin{pmatrix} \langle u_r|\mathrm{i}\rangle & \langle u_r|\mathrm{j}\rangle \\ \langle u_\theta|\mathrm{i}\rangle & \langle u_\theta|\mathrm{j}\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Para la transformación inversa se tiene:

$$\langle \mathrm{e}^i|\hat{\mathrm{e}}_{j'}\rangle = A^i_{j'} \iff A^i_{j'} = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{i}|u_r\rangle & \langle \mathrm{i}|u_\theta\rangle \\ \langle \mathrm{j}|u_r\rangle & \langle \mathrm{j}|u_\theta\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

y por lo tanto:

$$|\mathrm{i}\rangle = \cos(\theta)|u_r\rangle - \mathrm{sen}(\theta)|u_\theta\rangle \qquad \text{y} \qquad |\mathrm{j}\rangle = \mathrm{sen}(\theta)|u_r\rangle + \cos(\theta)|u_\theta\rangle\,.$$

Cumpliendo además con:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff A^i_{k'}A^{k'}_j = \delta^i_j\,.$$

Por otro lado, si:

$$|a\rangle = a_r|u_r\rangle + a_\theta|u_\theta\rangle \equiv a^{1'}|\hat{\mathrm{e}}_{1'}\rangle + a^{2'}|\hat{\mathrm{e}}_{2'}\rangle = a_x|\mathrm{i}\rangle + a_x|\mathrm{j}\rangle \equiv a^1|\mathrm{e}_1\rangle + a^2|\mathrm{e}_2\rangle\,,$$

tendremos que:

$$a^{i'} = A^{i'}_j a^j \iff \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x\cos(\theta) + a_y\mathrm{sen}(\theta) \\ -a_x\mathrm{sen}(\theta) + a_y\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

con lo cual:

$$a_r = a_x\cos(\theta) + a_y\mathrm{sen}(\theta) \quad \text{y} \quad a_\theta = -a_x\mathrm{sen}(\theta) + a_y\cos(\theta)\,.$$

Del mismo modo:

$$a^i = A^i_{j'}a^{j'} \iff \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r\cos(\theta) - a_\theta\mathrm{sen}(\theta) \\ a_r\mathrm{sen}(\theta) + a_\theta\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$a_x = a_r\cos(\theta) - a_\theta\mathrm{sen}(\theta) \qquad \text{y} \qquad a_y = a_r\mathrm{sen}(\theta) + a_\theta\cos(\theta)\,.$$

◁

En el ejemplo anterior consideramos los cambios de base entre cartesianas y polares. A partir de cambios de la base construimos la matriz de transformación entre sus componentes. Ahora pondremos la atención en las componentes. En general, podemos pensar que las componentes de los vectores pueden ser funciones de las otras. Consideremos el ejemplo anterior con esta visión para estudiarlo con más detalle en dos y tres dimensiones.

Ejemplo 3.13 Caso bidimensional

Tendremos que un punto en el plano viene representado en coordenadas cartesianas por dos números (x, y) y en coordenadas polares por otros dos números (r, θ). Siguiendo el ejemplo anterior un punto P, en el plano lo describimos como:

$$|P\rangle = r_P|u_r\rangle = x_P|i\rangle + y_P|j\rangle\,.$$

Veamos como están relacionadas estas dos descripciones, para este caso en el cual las ecuaciones de transformación son:

$$\left.\begin{array}{l} x_P = x_P(r,\theta) = x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}) \\ y_P = y_P(r,\theta) = x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} r_P = r_P(x,y) = x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2) \\ \theta = \theta_P(x,y) = x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2) \end{array}\right.$$

Borrador Preliminar

y explícitamente:

$$\left.\begin{array}{lll} x_P = r_P\ \cos(\theta) & \Rightarrow & x^1 = x^{1'}\ \cos(x^{2'}) \\ y_P = r_P\ \mathrm{sen}(\theta) & \Rightarrow & x^2 = x^{1'}\ \mathrm{sen}(x^{2'}) \end{array}\right\} \text{ y } \left\{\begin{array}{lll} r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} & \Rightarrow & x^{1'} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) & \Rightarrow & x^{2'} = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \end{array}\right.$$

Es claro que ambas coordenadas están relacionadas y que se puede invertir la relación.

$$\left.\begin{array}{l} x^{1'} = x^{1'}\left(x^1, x^2\right) \\ x^{2'} = x^{2'}\left(x^1, x^2\right) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}) \\ x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}) \end{array}\right. .$$

Se debe pedir, eso si, dos cosas razonables:

1. que las funciones $x^i = x^i(x^{m'})$ y $x^{j'} = x^{j'}\left(x^m\right)$ sean al menos $\mathcal{C}^2$ (función y derivada continua)
2. que el determinante de la matriz Jacobiana sea finito,

$$\det\left|\frac{\partial x^i(x^{k'})}{\partial x^{j'}}\right| \neq 0\,.$$

Más aún, si:

$$x^i = x^i(x^{j'}(x^k)) \quad \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} = \delta^i_k \quad \Rightarrow \mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\mathrm{d}x^{j'}\,,$$

con lo cual intuimos dos cosas:

1. que las componentes de un vector, $|P\rangle$, deben transformar bajo un cambio de coordenadas como:

$$p^i = \frac{\partial x^i(x^{k'})}{\partial x^{j'}}p^{j'}.$$

2. Las matrices jacobianas $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$ y $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$ son una la inversa de la otra.

Veamos si es cierto para el caso de vectores en el plano. Para ello calculamos la matriz jacobiana:

$$\frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{j'}} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{2'}} \\ \\ \dfrac{\partial x^2(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{2'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x^{2'}) & -x^{1'}\mathrm{sen}(x^{2'}) \\ \\ \mathrm{sen}(x^{2'}) & x^{1'}\cos(x^{2'}) \end{pmatrix},$$

y seguidamente, identificando $|P\rangle = x_P|i\rangle + y_P|j\rangle = r_P|u_r\rangle$

$$p^i = \frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{j'}}p^{j'} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} p^1 \\ \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x^{2'}) & -x^{1'}\mathrm{sen}(x^{2'}) \\ \\ \mathrm{sen}(x^{2'}) & x^{1'}\cos(x^{2'}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{p}^1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igualmente, si calculamos la inversa de la matriz jacobiana:

$$\left(\frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{j'}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x^{2'}) & \mathrm{sen}(x^{2'}) \\ \\ \frac{-\mathrm{sen}(x^{2'})}{x^{1'}} & \frac{\cos(x^{2'})}{x^{1'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \\ \\ \frac{-x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2} \end{pmatrix},$$

tendremos:

$$\begin{pmatrix} p^{1'} \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \\ \\ \frac{-x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow p^{i'} = \frac{\partial x^{i'}\left(x^1, x^2\right)}{\partial x^j}p^j\,.$$

◁

Ejemplo 3.14 Caso tridimensional

Consideremos nuevamente dos sistemas de coordenadas: uno cartesiano $\left(x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z\right)$ y otro esférico $\left(x^{1'} = r,\ x^{2'} = \theta,\ x^{3'} = \phi\right)$.

Borrador Preliminar

Tal y como hemos supuesto anteriormente el punto P vendrá descrito por:

$$|P\rangle = r_P|u_r\rangle = x_P|i\rangle + y_P|j\rangle + z_P|k\rangle\,,$$

de nuevo

$$\left.\begin{array}{l} x = x\,(r,\theta,\phi) = x^1 = x^1(x^{1'},x^{2'},x^{3'}) \\ y = y\,(r,\theta,\phi) = x^2 = x^2(x^{1'},x^{2'},x^{3'}) \\ z = z\,(r,\theta,\phi) = x^3 = x^3(x^{1'},x^{2'},x^{3'}) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = r\,(x,y,z) = x^{1'} = x^{1'}\left(x^1,x^2,x^3\right) \\ \theta = \theta\,(x,y,z) = x^{2'} = x^{2'}\left(x^1,x^2,x^3\right) \\ \phi = \phi\,(x,y,z) = x^{3'} = x^{3'}\left(x^1,x^2,x^3\right) \end{array}\right.$$

Las ecuaciones de transformación serán:

$$\left\{\begin{array}{lll} x_P = r_P\text{sen}(\theta)\cos(\phi) & \Rightarrow & x^1 = x^{1'}\text{sen}(x^{2'})\cos(x^{3'}) \\ y_P = r_P\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) & \Rightarrow & x^2 = x^{1'}\text{sen}(x^{2'})\text{sen}(x^{3'}) \\ z_P = r_P\cos(\theta) & \Rightarrow & x^3 = x^{1'}\cos(x^{2'}) \end{array}\right.$$

y las transformaciones inversas:

$$\left\{\begin{array}{lll} r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} & \Rightarrow & x^{1'} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) & \Rightarrow & x^{2'} = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_P^2+y_P^2}}{z_P}\right) & \Rightarrow & x^{3'} = \arctan\left(\frac{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}{x^3}\right) \end{array}\right.$$

Con lo cual la matriz de las derivadas para esta transformación en particular será:

$$\frac{\partial x^i(x^{1'},x^{2'},x^{3'})}{\partial x^{j'}} = \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta)\cos(\phi) & -r\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) & r\text{sen}(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\,\text{sen}(\phi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\text{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{sen}(x^{2'})\cos(x^{3'}) & -\tilde{x}^1\text{sen}(x^{2'})\text{sen}(x^{3'}) & \tilde{x}^1\cos\left(x^{2'}\right)\cos(x^{3'}) \\ \text{sen}(x^{2'})\,\text{sen}(x^{3'}) & x^{1'}\text{sen}(x^{2'})\cos\left(x'^3\right) & x^{1'}\cos(x^{2'})\text{sen}(x^{3'}) \\ \cos(x^{2'}) & 0 & -x^{1'}\text{sen}(x^{2'}) \end{pmatrix}.$$

Mientras que la inversa es:

$$\frac{\partial x^{i'}\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta)\cos(\phi) & \text{sen}\,(\theta)\,\text{sen}(\phi) & \cos(\theta) \\ -\frac{\text{sen}(\phi)}{r\text{sen}(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r\text{sen}(\theta)} & 0 \\ \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r} & \frac{\cos(\theta)\text{sen}(\phi)}{r} & -\frac{\text{sen}(\theta)}{r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)} \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Dejaremos al lector comprobar que, efectivamente,

$$p^i = \frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial x^{j'}} p^{j'} \quad \Longleftrightarrow \quad p^{i'} = \frac{\partial x^{i'}\left(x^1, x^2, x^3\right)}{\partial x^j} p^j \,.$$

◁

3.3 Aplicaciones en Fisica: Esfuerzos, Inercia y Energía libre

En este punto vamos a ejemplificar la utilización de los tensores en varios ámbitos de la Física, en particular de la Mecánica. Para comenzar consideraremos el tensor de esfuerzos para describir las tensiones internas de cuerpos sometidos a fuerzas externas[10]. Haremos el análisis tanto para el caso de dos como de tres dimensiones. Luego a continuación consideraremos el tensor de inercia y su impacto en la dinámica de cuerpos en movimiento.

3.3.1 El tensor de esfuerzos o tensor stress (caso 2D)

Supongamos un cuerpo que se encuentra en equilibrio y está sometido a un conjunto de fuerzas externas. Para facilitar las cosas consideremos el efecto de esas fuerzas sobre un plano que contiene a un determinado punto P (ver figura 3.2 cuadrante Ia). Es decir, vamos a considerar los efectos de las componentes de todas las fuerzas sobre ese plano y obviaremos el efecto del resto de las componentes.

Como observamos en la figura 3.2 Ib y Ic, si cortamos la superficie en dos líneas (AB y $A'B'$), podemos ver que el efecto del conjunto de fuerzas externas es distinto sobre P, en la dirección perpendicular a cada una de esas líneas. De hecho, al "cortar" la superficie las fuerzas que aparecen sobre las líneas AB (y $A'B'$) eran fuerzas internas y ahora son externas al nuevo cuerpo "cortado". Así, estas fuerzas por unidad de longitud[11] sobre el punto P existen como un conjunto de fuerzas que generan esfuerzos (*stress*). Por lo tanto, es claro que los esfuerzos sobre un punto dependen del punto, de las fuerzas externas y de la dirección del efecto.

Para irnos aclarando consideremos un elemento de área infinitesimal $\mathrm{d}s$ sobre la cual actúa un conjunto de fuerzas externas, las cuales podemos descomponer como normales y tangenciales a la línea sobre la cual están aplicadas (ver figura 3.2 cuadrante II). Es costumbre denotar los esfuerzos normales y tangenciales por σ y τ respectivamente.

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} & \uparrow Y_2 = \sigma_2 \mathrm{d}x \quad \longrightarrow X_2 = \tau_2 \mathrm{d}x & \\ & \mathrm{d}x & \\ Y_3 = \tau_3 \mathrm{d}y \uparrow & \mathrm{d}y \quad \mathrm{d}s \quad \mathrm{d}y & \uparrow Y_1 = \tau_1 \mathrm{d}y \\ X_3 = \sigma_3 \mathrm{d}y \rightarrow & & \rightarrow X_1 = \sigma_1 \mathrm{d}y \\ & \mathrm{d}x & \\ & \uparrow Y_4 = \sigma_4 \mathrm{d}x \quad \rightarrow X_4 = \tau_4 \mathrm{d}x & \end{array} \right.$$

Consideramos la segunda ley de Newton aplicada a cada diferencial de masa $\mathrm{d}m$ y obtendremos:

$$\sum \mathbf{F}_i^{ext} = \mathrm{d}m\, \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \mathrm{d}y + \sigma_2 \mathrm{d}x + \tau_3 \mathrm{d}y + \sigma_4 \mathrm{d}x = 0 = (\sigma_2 + \sigma_4)\,\mathrm{d}x + (\tau_1 + \tau_3)\,\mathrm{d}y \\ \\ \sigma_1 \mathrm{d}y + \tau_2 \mathrm{d}x + \sigma_3 \mathrm{d}y + \tau_4 \mathrm{d}x = 0 = (\tau_2 + \tau_4)\,\mathrm{d}x + (\sigma_1 + \sigma_3)\,\mathrm{d}y \end{array} \right.$$

con lo cual:

$$\sigma_2 = -\sigma_4\,,\ \tau_1 = -\tau_3\,,\ \tau_2 = -\tau_4\,,\ \sigma_1 = -\sigma_3\,.$$

[10] Una presentación más contemporánea del tensor de esfuerzos la pueden encontrar en De Prunelé, E. (2007). Linear strain tensor and differential geometry. *American Journal of Physics*, 75(10), 881-887.

[11] En el caso tridimensional, las fuerzas que generan los esfuerzos serán definidas como fuerzas por unidad de área. Ese caso lo veremos en la próxima sección.

Borrador Preliminar

Figura 3.2: Tensor de Esfuerzos (*stress*) en 2 dimensiones

Como se trata de una situación en equilibrio, también la sumatoria de torques se tendrá que anular. Esto significa que:

$$\left.\begin{aligned}(\tau_1 \mathrm{d}y)\,\tfrac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_2 \mathrm{d}x)\,\tfrac{\mathrm{d}y}{2} = 0\\ (\tau_3 \mathrm{d}y)\,\tfrac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_4 \mathrm{d}x)\,\tfrac{\mathrm{d}y}{2} = 0\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4\,,$$

entonces, nos damos cuenta que existen sólo tres cantidades independientes: dos esfuerzos normales σ_1 y σ_2; y un esfuerzo tangencial τ_1. Adicionalmente, notamos que los esfuerzos tienen que ver con la dirección de la fuerza y la superficie sobre la cual va aplicada. Con ello podemos diseñar la siguiente notación para los esfuerzos: σ_{ij}. El primer índice indica la dirección de la fuerza y el segundo la dirección de la normal de la superficie donde está aplicada. Así, tal y como muestra la figura (ver figura 3.2 cuadrante II)

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{xx}\,, \quad -\sigma_4 \equiv \sigma_{yy}\,, \quad \tau_2 \equiv \sigma_{xy} \equiv \sigma_{yx}\,.$$

El cambio de signo se debe a lo incómodo de la notación: $\sigma_4 \equiv \sigma_{y-y}$ ya que la normal de lado 4 apunta en la dirección $-y$. Es importante también señalar que los esfuerzos en cualquier punto contenido en el diferencial de área $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ deben ser considerado constantes, o lo que es lo mismo, que podemos hacer tender a cero el área del diferencial y con ello asociar los esfuerzos σ_{ij} a un punto P contenido en $\mathrm{d}A$ sobre la cual hemos calculado los esfuerzos.

En esta misma línea de razonamiento, nos podemos preguntar cuál es la expresión de los esfuerzos cuando se miden respecto a una superficie genérica, definida por un vector normal $\mathbf{n}$ (ver figura 3.2 cuadrante III). Es decir, queremos conocer los esfuerzos medidos en el punto P y en la dirección $\mathbf{n}$, es decir, σ_{nn}.

Borrador Preliminar

Figura 3.3: Tensor de Esfuerzos en 3 dimensiones

Por lo tanto, tendremos que:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \sigma_{xx}\mathrm{d}y + \sigma_{xy}\mathrm{d}x = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\cos(\phi) + \sigma_{sn}\mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi) \\ y &\rightarrow \sigma_{yy}\mathrm{d}x + \sigma_{yx}\mathrm{d}y = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi) - \sigma_{sn}\mathrm{d}s\cos(\phi) \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\cos(\phi)$ y $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\ \mathrm{sen}(\phi)$, entonces podemos expresar:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \sigma_{xx}\cos^2(\phi) + \sigma_{xy}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + \sigma_{yx}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + \sigma_{yy}\mathrm{sen}^2(\phi) \\ \sigma_{sn} &= \sigma_{xx}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) + \sigma_{xy}\mathrm{sen}^2(\phi) - \sigma_{yx}\cos^2(\phi) - \sigma_{yy}\mathrm{sen}(\phi)\cos(\phi) \end{aligned}$$

y si ahora nos damos cuenta que si construimos una matriz:

$$A^i_j = \begin{pmatrix} A^x_n & A^x_s \\ A^y_n & A^y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \mathrm{sen}(\phi) \\ \mathrm{sen}(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix},$$

entonces:

$$\sigma_{nn} = A^x_n A^x_n \sigma_{xx} + A^x_n A^y_n \sigma_{xy} + A^y_n A^x_n \sigma_{yx} + A^y_n A^y_n \sigma_{yy} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{nn} = A^i_n A^j_n \sigma_{ij} \quad \text{con}\, i,j = x,y$$

$$\sigma_{sn} = A^x_s A^x_n \sigma_{xx} + A^x_s A^y_n \sigma_{xy} + A^y_s A^x_n \sigma_{yx} + A^y_s A^y_n \sigma_{yy} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{sn} = A^i_s A^j_n \sigma_{ij} \quad \text{con}\, i,j = x,y$$

es decir:

$$\sigma_{kl} = A^i_k A^j_l \sigma_{ij}\,, \quad \text{con} \quad i,j = x,y;\ k,l = n,s\,.$$

Como ya hemos mencionado, y veremos más adelante con más detalle, cualquier objeto que transforme como $\sigma_{kl} = A^i_k A^j_l \sigma_{ij}$ lo llamaremos tensor de segundo orden.

3.3.2 El tensor de esfuerzos o tensor stress (caso 3D)

Podemos proceder como en el caso anterior estableciendo las siguientes condiciones de equilibrio:

$$\sum \mathbf{F}^{ext}_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum \boldsymbol{\tau}^{ext}_i = 0\,,$$

con ello construimos un volumen (cúbico) diferencial y construimos los esfuerzos normales y tangenciales, los cuales serán:

$$\sigma_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,, \quad \sigma_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,, \quad \sigma_{zz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \quad \sigma_{xz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \quad \sigma_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \quad \sigma_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,.$$

Siguiendo el mismo proceso que involucra imponer el equilibrio, es fácil demostrar que al igual que el caso

Borrador Preliminar

anterior, el tensor de esfuerzos σ_{ij} cumple con:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}\,, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}\,, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}\,.$$

Tendremos seis componentes (tres normales y tres tangenciales) independientes. Es decir, si bien el tensor de esfuerzos σ_{ij} viene representado por una matriz 3×3 y por lo tanto tiene 9 elementos, sólo seis son independientes.

Vayamos ahora el caso general para un tensor de esfuerzos en un medio elástico. Para ello construimos un tetraedro regular tal y como muestra la figura 3.3, y sobre su cara genérica asociada a un vector normal $\mathbf{n}$ una fuerza $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = F^i\hat{\mathbf{i}}_i = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = \sigma_{xn}\mathrm{d}S_n \\ \\ F_y = \sigma_{yn}\mathrm{d}S_n \\ \\ F_z = \sigma_{zn}\mathrm{d}S_n \end{array} \right\} \quad \Rightarrow F^i = \sigma^i_j n^j \mathrm{d}S \quad \Rightarrow \mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

De esta manera se especifica como la fuerza actúa sobre un determinado elemento de superficie. Es claro que la condición de equilibrio se traduce en:

$$\sum F_{xi} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_{xn}\mathrm{d}S_n - \frac{1}{2}\sigma_{xx}\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{xy}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{xz}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = 0\,,$$

$$\sum F_{yi} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_{yn}\mathrm{d}S_n - \frac{1}{2}\sigma_{yx}\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{yy}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{yz}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = 0\,,$$

$$\sum F_{zi} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_{zn}\mathrm{d}S_n - \frac{1}{2}\sigma_{zx}\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{zy}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{zz}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = 0\,.$$

Si consideramos la proyección de $\mathrm{d}S_n$ sobre cada uno de los planos del sistema cartesiano tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathrm{d}S^n\cos(\mathbf{i};\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z = \mathrm{d}S^n\;A^x_n \\ \\ \mathrm{d}S^n\cos(\mathbf{j};\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}z = \mathrm{d}S^n\;A^y_n \\ \\ \mathrm{d}S^n\cos(\mathbf{k};\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = \mathrm{d}S^n\;A^z_n \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \sigma_{xn} = \sigma_{xx}A^x_n + \sigma_{xy}A^y_n + \sigma_{xz}A^z_n\,,$$

y equivalentemente:

$$\sigma_{yn} = \sigma_{yx}A^x_n + \sigma_{yy}A^y_n + \sigma_{yz}A^z_n \quad \text{y} \quad \sigma_{zn} = \sigma_{zx}A^x_n + \sigma_{zy}A^y_n + \sigma_{zz}A^z_n\,,$$

las cuales se conocen como las relaciones de Cauchy. Estas relaciones representan los esfuerzos sobre la superficie con normal $\mathbf{n}$.

Ahora bien, dado que: $\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S$ es una relación vectorial podemos proyectar en la dirección $\hat{\mathbf{u}}_m$:

$$\hat{\mathbf{u}}_m\cdot\mathbf{F} = \hat{\mathbf{u}}_m\cdot(\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}S) \quad \Rightarrow F^m = \sigma^m_n\mathrm{d}S^n = \left(\sigma^m_i A^i_n\right)\mathrm{d}S^n = \left(\sigma^m_i A^i_n\right)\mathrm{d}S^n\,,$$

por lo tanto:

$$\sigma_{mn}\mathrm{d}S^n = \left(\sigma_{mi}A^i_n\right)\mathrm{d}S^n \quad \Rightarrow \sigma_{mn}\mathrm{d}S^n = \left(\sigma_{ki}A^k_m A^i_n\right)\mathrm{d}S^n\,, \quad \text{con } i,j = x,y,z\,.$$

Una vez más, podemos ver que transforma como un tensor.

Borrador Preliminar

3.3.3 El Tensor de inercia

Consideremos el caso de un sistema de n partículas. La cantidad de movimiento angular para este sistema vendrá dada por:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left(\mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{v}_{(i)}\right) \ ,$$

donde hemos indicado que la $i-$ésima partícula que está en la posición $\mathbf{r}_{(\mathbf{i})}$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_{(i)}$.

Si las distancias entre las partículas, y entre las partículas con el origen de coordenadas, son constantes, podremos expresar la velocidad de cada una de ellas como:

$$\mathbf{v}_{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)} \ , \quad \text{¿Por qué?}$$

Donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del sistema. Entonces tendremos que:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} \left[\mathbf{r}_{(i)} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)}\right)\right] = \sum_i m_{(i)} \left[\boldsymbol{\omega} \left(\mathbf{r}_{(i)} \cdot \mathbf{r}_{(i)}\right) - \mathbf{r}_{(i)} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{(i)}\right)\right] \ ,$$

y para cada partícula se cumple que las componentes de la cantidad de movimiento angular serán:

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\omega^k \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(\omega^m r_{(i)m}\right)\right] .$$

Si vemos que $\omega^k_{(i)} = \delta^k_l \omega^l_{(i)}$ entonces:

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\delta^k_l \omega^l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(\omega^m r_{(i)m}\right)\right] = \omega^l_{(i)} \underbrace{\left[\sum_i m_{(i)} \left(\delta^k_l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(r_{(i)l}\right)\right)\right]}_{I^k_l}$$

es decir:

$$L^k = \omega^l_{(i)} I^k_l \ , \quad \text{donde:} \quad I^k_l = \sum_i m_{(i)} \left(\delta^k_l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(r_{(i)l}\right)\right) .$$

El objeto I^k_l se conoce como el tensor de inercia y corresponde a nueve cantidades (sólo seis son independientes porque es un tensor simétrico). En coordenadas cartesianas se verá de la siguiente forma:

$$I^k_l = \begin{pmatrix} I^x_x & I^x_y & I^x_z \\ I^y_x & I^y_y & I^y_z \\ I^z_x & I^z_y & I^z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_{(i)} \left(y^2_{(i)} + z^2_{(i)}\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)}\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} z_{(i)}\right) \\ -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)}\right) & \sum_i m_{(i)} \left(x^2_{(i)} + z^2_{(i)}\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)}\right) \\ -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} z_{(i)}\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)}\right) & \sum_i m_{(i)} \left(x^2_{(i)} + y^2_{(i)}\right) \end{pmatrix}$$

Por ahora, nos contentaremos con esta construcción y en los ejercicios le propondremos que muestre que es un tensor.

3.3.4 Energía libre para un medio elástico

Consideremos el siguiente par de tensores provenientes de la teoría de elasticidad:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\partial_k \, u_i + \partial_i \, u_k\right) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right) \ , \quad \left(u^i_k\right)^0 = u^i_k - \frac{1}{3} u^m_m \, \delta^i_k \ ,$$

y construyamos el tensor de esfuerzos como: $p^i_j = 2\lambda \left(u^i_j\right)^0 + K u^l_l \, \delta^i_j$.

Calculemos la energía libre para el medio elástico, definida como: $F = \frac{1}{2} p^i_j u^j_i$ y tenemos que:

$$p^i_j = 2\lambda \left(u^i_j\right)^0 + K u^l_l \, \delta^i_j = 2\lambda \left(u^i_j - \frac{1}{3} u^m_m \, \delta^i_j\right) + K u^l_l \, \delta^i_j = 2\lambda u^i_j + u^l_l \delta^i_j \left(K - \frac{2\lambda}{3}\right) \ ,$$

Borrador Preliminar

donde: $u^m_m = \frac{1}{2}\left(\partial^m\, u_m + \partial_m\, u^m\right) = \partial^m\, u_m$, con lo cual:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}p^i_j u^j_i = \frac{1}{2}\left(2\lambda u^i_j + u^l_l \delta^i_j \left(K - \frac{2\lambda}{3}\right)\right) u^j_i = \left(\lambda u^i_j u^j_i + u^l_l \delta^i_j u^j_i \left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\right) \\
&= \lambda\left(u^i_1 u^1_i + u^i_2 u^2_i + u^i_3 u^3_i\right) + \left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\left(u^l_l\right)^2 \\
&= \lambda\left(\left(u^1_1 u^1_1 + u^2_1 u^1_2 + u^3_1 u^1_3\right) + \left(u^1_2 u^2_1 + u^2_2 u^2_2 + u^3_2 u^2_3\right) + \left(u^1_3 u^3_1 + u^2_3 u^3_2 + u^3_3 u^3_3\right)\right) + \left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\left(u^l_l\right)^2 \\
&= \lambda\left(\left(u^1_1\right)^2 + \left(u^2_2\right)^2 + \left(u^3_3\right)^2 + 2\left(u^1_2 u^2_1 + u^2_3 u^3_2 + u^3_1 u^1_3\right)\right) + \left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\left(u^l_l\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}K + \frac{2\lambda}{3}\right)\left(u^l_l\right)^2 + 2\lambda\left(u^1_2 u^2_1 + u^2_3 u^3_2 + u^3_1 u^1_3\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}K + \frac{2\lambda}{3}\right)\left(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z\right)^2 + 2\lambda\left(\partial_x u_y \partial_y u_x + \partial_y u_z \partial_z u_y + \partial_z u_x \partial_x u_z\right).
\end{aligned}
$$

3.3.5 Ejercicios

1. Si A_{ijk} es un tensor covariante de orden 3 y B^{lmnp} un tensor contravariante de orden 4, pruebe que $A_{ijk}B^{jknp}$ es un tensor mixto de orden 3.
2. Dados los tensores:

$$
R^i_j = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}, \quad T^i = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

   Encuentre:
   (a). La parte simétrica S^i_j y antisimétrica A^i_j de R^i_j.
   (b). $R_{kj} = g_{ik}R^i_j$, $R^{ki} = g^{jk}R^i_j$, $T_j = g_{ij}T^i$ ¿Qué se concluye de estos cálculos?
   (c). $R^i_j T_i$, $R^i_j T^j$, $R^i_j T_i T^j$.
   (d). $R^i_j S^j_i$, $R^i_j A^j_i$, $A^j_i T^i$, $A^j_i T^i T_j$.
   (e). $R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l$, $(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l)T_i$, $(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l)T_i T^j$.
3. Demuestre que si S^i_j representa un tensor simétrico y A^i_j uno antisimétrico, entonces, $S^i_j A^j_i = 0$.
4. Dado F_{ijk} un tensor totalmente antisimétrico respecto a sus índices ijk, demuestre que el rotor de F_{ijk} definido como sigue, también será un tensor.

$$
\text{rot}\left[F_{ijk}\right] = \partial_m F_{ijk} - \partial_i F_{jkm} + \partial_j F_{kmi} - \partial_k F_{mij} \equiv \frac{\partial F_{ijk}}{\partial x^m} - \frac{\partial F_{jkm}}{\partial x^i} + \frac{\partial_j F_{kmi}}{\partial x^j} - \frac{\partial_k F_{mij}}{\partial x^k}.
$$

5. Consideremos un tensor **B** con componentes B^j_i, un tensor **A** con componentes A_i y el producto:

$$
B^j_i A_j = C_i\,.
$$

   Esta última expresión se puede interpretar como la acción de **B** sobre **A** que consiste en producir un nuevo tensor **C** que tendrá una magnitud y una dirección diferente a **A**. Podremos estar interesados en encontrar todos los vectores que NO son rotados por **B**, es decir, que estaríamos interesados en resolver la ecuación:

$$
B^j_i A_j = \lambda A_i\,, \text{ donde } \lambda \text{ es un escalar.}
$$

   Si estos vectores existen se denominan vectores característicos o "autovectores" de **B** y sus direcciones:

Borrador Preliminar

direcciones principales o característicos. Más aún, los ejes determinados por las direcciones principales se denominan ejes principales de $\mathbf{B}$. Los valores de las componentes B_i^j en el sistema de coordenadas determinado por los ejes principales se denominan valores característicos o "autovalores" de $\mathbf{B}$.

Ahora, como lo ilustramos en los ejemplos, consideremos un sistema conformado por n partículas de masas iguales: $m_1, m_2, \ldots m_n = m$, distribuidas en el plano xy, y sea I_{ij} el tensor de inercia con respecto a un sistema rectangular de coordenadas. Por ser un caso en 2D, el tensor de inercia tendrá solamente cuatro componentes.

(a). Encuentre: $I_{11} = I_{xx}$, $I_{22} = I_{yy}$ y $I_{12} = I_{xy} = I_{21} = I_{yx}$.

(b). Si un vector $\mathbf{A}$ coincide con el eje principal de I_i^j entonces debe satisfacer la ecuación:

$$I_i^j A_j = \lambda A_i \quad \Rightarrow (I_i^j - \lambda\delta_i^j)A_j = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} (I_{11} - \lambda)A_1 + I_{12}A_2 = 0 \\ I_{12}A_1 + (I_{22} - \lambda)A_2 = 0 \end{cases}$$

Encuentre la solución (no trivial) para λ, es decir, resuelva: $\lambda^2 - \lambda(I_{11} + I_{22}) + I_{11}I_{22} - (I_{12})^2 = 0$.

(c). ¿Cómo se interpreta el hecho de que $I_{12} = 0$?

(d). Si $I_{12} \neq 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces, para cada valor de λ se puede encontrar un vector (autovector) $\mathbf{A}^{(\lambda_1)}$ y $\mathbf{A}^{(\lambda_2)}$ resolviendo el sistema de dos ecuaciones. Demuestre que las direcciones de estos vectores tienen pendientes, respecto al sistema de coordenada, dadas por:

$$\tan(\theta_1) = \frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}}\,, \quad \tan(\theta_2) = \frac{\lambda_2 - I_{11}}{I_{12}}\,.$$

(e). Demuestre que:

$$\tan(2\theta_1) = \tan(2\theta_2) = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}\,, \text{ donde } \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}\,,$$

es decir: $\mathbf{A}^{(\lambda_1)} \perp \mathbf{A}^{(\lambda_2)}$.

(f). ¿Cuáles son las componentes del tensor de inercia en el sistema de coordenadas determinado por los ejes principales?

6. En este ejercicio generalizamos la definición del momento de inercia para cuerpos continuos, el cual se define como:

$$I_j^i = \int_V \mathrm{d}v\rho\,(\mathbf{r})\left(\delta_j^i\left(x^k x_k\right) - x^i x_j\right)\,, \quad \text{con } x^i = \{x, y, z\} \text{ y } \mathrm{d}v = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

(a). Muestre que I_j^i es un tensor.

(b). Considere un cubo de lado l y masa total M tal que tres de sus aristas coinciden con un sistema de coordenadas cartesiano. Encuentre el tensor momento de inercia, I_j^i.

7. Dados dos sistemas de coordenadas ortogonales $O \rightleftharpoons (x, y, z)$ y $O' \rightleftharpoons (x', y', z')$, donde el sistema de coordenadas O' se obtiene rotando a O, $\pi/6$ alrededor del eje z y $\pi/2$ alrededor del eje x', con lo cual los ejes y' y z coinciden.

(a). Si tenemos los vectores:

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Expréselos en el sistema de coordenadas $O' \rightleftharpoons (x', y', z')$.

(b). El tensor de esfuerzos (tensiones normales y tangenciales a una determinada superficie) se expresa en el sistema $O \rightleftharpoons (x, y, z)$ como:

$$P_j^i = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}\,.$$

¿Cuál será su expresión en el sistema de coordenadas $O' \rightleftharpoons (x', y', z')$?

Borrador Preliminar

8. Suponga un sistema de coordenadas ortogonales generalizadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ las cuales tienen las siguiente relación funcional con las coordenadas cartesianas[12]:

$$q^1 = x + y; \qquad q^2 = x - y; \qquad q^3 = 2z\,.$$

   (a). Compruebe que el sistema $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ conforma un sistema de coordenadas ortogonales
   (b). Encuentre los vectores base para este sistema de coordenadas.
   (c). Encuentre el tensor métrico y el elemento de volumen en estas coordenadas.
   (d). Encuentre las expresiones en el sistema $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ para los vectores:

$$\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{j}}\,, \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\,, \quad \mathbf{C} = \hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\,.$$

   (e). Encuentre en el sistema $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ las expresiones para las siguientes relaciones vectoriales :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}\,, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}\,, \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}\,.$$

   ¿Qué puede decir si compara esas expresiones en ambos sistemas de coordenadas?
   (f). Considere los siguientes tensores y vectores en coordenadas cartesianas :

$$R^i_j = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}, \quad T^i = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   y encuentre sus expresiones para el nuevo sistema de coordenadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$.

Practicando con Maxima

1. **Tensores y Maxima**

   Maxima presenta dos bibliotecas para la manipulación de tensores, bibliotecas en constante desarrollo todavía. Estas son **ctensor**, manipulación de componentes y **itensor**, manipulación indexada. En la manipulación por componentes los tensores se representan por arreglos o matrices. En la manipulación indexada los tensores se representan por funciones de sus índices covariantes, contravariantes y de derivadas.

   Los índices covariantes se especifican mediante una lista que será el primer argumento del objeto indexado, siendo los índices contravariantes otra lista que será el segundo argumento del mismo objeto indexado. Si al objeto indexado le falta cualquiera de estos grupos de índices, entonces se le asignará al argumento correspondiente la lista vacía [ ]. Así, $g([a,b],[c])$ representa un objeto indexado llamado g, el cual tiene dos índices covariantes (a,b), un índice contravariante (c) y no tiene índices de derivadas, es decir, g^c_{ab}

```
(%i1) load(itensor)$
(%i2) imetric(g);
(%i3) ishow(g([j,k],[])*g([i,l],[])*a([],[i,j]))$
```
(%t3) $a^{i\,j}\,g_{j\,k}\,g_{i\,l}$

```
(%i4) ishow(contract(%))$
```
(%t4) $a_{k\,l}$

```
(%i5) ishow(kdelta([i],[k])*a([k,l],[]))$
```
(%t5) $\delta^k_i\,a_{k\,l}$

```
(%i6) ishow(contract(%))$
```

[12]Estes tipo de transformaciones a coordenadas generalizadas será analizado, con todo detalle, en la sección 5.1 de la página 329.

Borrador Preliminar

(%t6) $a_{i\,l}$

La identidad $\delta_i^j \delta_j^i = 3$

```
(%i7) ishow(contract(kdelta([i], [j])*kdelta([j], [i])))$
```
(%t7) $kdelta$

```
(%i8) ishow(ev(%,kdelta))$
```
(%t8) 3

El símbolo de Levi-Civita:

```
(%i9) levi_civita([1, 2, 3]); levi_civita([1, 3, 2]); levi_civita([3, 3, 2]);
```
(%o9) 1

(%o10) -1

(%o11) 0

```
(%i12) expr:ishow('levi_civita([],[i,j,k])*'levi_civita([i,j,k],[]));
```
(%t12) $\varepsilon^{i\,j\,k}\,\varepsilon_{i\,j\,k}$

Aquí es necesario utilizar la función **lc2kdt( )** que simplifica expresiones que contengan el símbolo de Levi-Civita, para convertirlas en expresiones con la delta de Kronecker siempre que esto sea posible.[13]

```
(%i13) ishow(lc2kdt(expr))$
```
(%t13) $\left(\delta_i^k\,\delta_j^i - 3\,\delta_j^k\right)\,\delta_k^j + \left(\delta_i^j\,\delta_j^k - 3\,\delta_i^k\right)\,\delta_k^i - 3\,\delta_i^j\,\delta_j^i + 27$

```
(%i14) ishow(contract(expand(%)))$
```
(%t14) $27 - 7\,\delta$

```
(%i15) ishow(ev(%,kdelta))$
```
(%t15) 6

```
(%i16) kill(all)$
```

2. **Transformación de tensores y Maxima**

Como ya mencionamos, **Maxima** contiene una librería para manipular componentes de tensores: **ctensor**. La manipulación en componentes se realiza en términos de matrices. La métrica se almacena en la matriz lg y la métrica inversa se obtiene y almacena en la matriz ug.

En un ejemplo visto con anterioridad se especificaba las componentes de un tensor en coordenadas cartesianas, esto es:

$$\mathrm{To} = T^i_j = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{en la base: } \{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle, |\mathrm{k}\rangle\}\ .$$

Para luego representarlo en la nueva base: $|\mathrm{w}_{1'}\rangle = |\mathrm{i}\rangle$, $|\mathrm{w}_{2'}\rangle = |\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle$ y $|\mathrm{w}_{3'}\rangle = |\mathrm{i}\rangle + |\mathrm{j}\rangle + |\mathrm{k}\rangle$.

Entonces necesitamos calcular:

$$T^{k'}_{m'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}\,T^i_j \quad \Rightarrow \mathrm{Tn} = \alpha\beta\mathrm{To} =$$

[13] En ocaciones, la función **lc2kdt( )** hace uso del tensor métrico. Si el tensor métrico no fue previamente definido con **imetric**, se obtiene un mensaje de error.

Borrador Preliminar

Como vimos cuando hacíamos los cálculos:

$$\alpha = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respetando "la concatenación interna de índices" podemos realizar la multiplicación de matrices.

(%i1) To:matrix([2,1,3],[2,3,4],[1,2,2]);

(%o1) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(%i2) alpha:matrix([1,-1,0],[0,1,-1],[0,0,1]);

(%o2) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i3) beta:matrix([1,1,1],[0,1,1],[0,0,1]);

(%o3) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i4) Tn:alpha.To.beta;

(%o4) $$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Una vez que hemos calculado el nuevo tensor $\mathrm{Tn} = \tilde{T}^i_j$ en la nueva base, podemos calcular: $\tilde{T}^{ij}$, $\tilde{T}_{ij}$. Pero podemos utilizar la métrica para las coordenadas nuevas y con el paquete **ctensor** hacer las respectivas contracciones.

(%i5) load(ctensor)$

(%i6) ct_ coordsys(cartesian3d)$

Introducimos la métrica $\tilde{g}_{ik}$:

(%i7) lg:matrix([1,1,1],[1,2,2],[1,2,3]);

(%o7) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para tener la métrica inversa $\tilde{g}^{ik}$ escribimos:

(%i8) cmetric()$

(%i9) ug;

(%o9) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular $\tilde{T}_{ij} = \tilde{g}_{ik}\tilde{T}^k_j$ hacemos lo siguiente:

(%i10) lg.Tn;

Borrador Preliminar

(%o10) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{pmatrix}$

Y para calcular $\tilde{T}^{ij} = \tilde{T}^i_k \tilde{g}^{kj}$ procedemos así:

(%i11) Tn.ug;

(%o11) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(%i12) kill(all)$

Es posible, y a manera de completar esta primer acercamiento con la biblioteca de tensores, calcular la métrica a partir de una transformación de coordenadas, como vimos en la sección anterior, ejemplo 3.2.8. Escribimos las coordenadas que queremos utilizar, en este caso esféricas, utilizando la función **ct coordsys**.

(%i1) load(ctensor)$

(%i2) ct_coordsys([r*sin(theta)*cos(phi),r*sin(theta)*sin(phi),r*cos(theta),[r,theta,phi]])$

Y le pedimos al programa que calcule el tensor métrico, al que le asigna el nombre **lg**.

(%i3) cmetric()$

El tensor métrico g_{ij} es entonces

(%i4) lg:trigsimp(lg);

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$

Y la métrica inversa g^{ij}, el programa la identifica con la etiqueta **ug**

(%i5) trigsimp(ug);

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \end{pmatrix}$

3.4 Vectores, tensores y espacios pseudoeuclidianos

Hasta este punto la descripción de formas representadas por un *bra*: $\langle a| \equiv a_k \langle e^k|$ ha sido casi estética. Hemos insistido que las componentes de las formas tienen subíndices, mientras que sus vectores bases, $\langle e^k|$, deben tener superíndices, pero no hemos visto clara la necesidad de esa definición. Un ejemplo, un tanto tímido lo desarrollamos en en la sección 3.1.2, en la página 151, donde mencionamos que las bases recíprocas de vectores podrían jugar el papel de bases para el espacio dual. Quizá el ejemplo más significativo y simple, donde se observa la diferencia entre formas (*bras*) y vectores (*kets*) es el caso de los espacios minkowskianos. Estos espacios, también llamados pseudoeuclidianos, presentan una variante en la definición de producto interno, de tal forma que: $\langle x|x\rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x|x\rangle = 0$ no necesariamente implica que $|x\rangle \equiv |0\rangle$.

Borrador Preliminar

La consecuencia inmediata es que la definición de norma $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv \||v_i\rangle\|$, que vimos anteriormente, no es necesariamente positiva. Vale decir que tendremos vectores con norma positiva, $\||v_i\rangle\| > 0$, pero también vectores con norma negativa o cero: $\||v_i\rangle\| \leq 0$. Con lo cual la definición de distancia, entendida como la norma de la resta de vectores, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv \||x\rangle - |y\rangle\|$, tampoco será necesariamente positiva. Esto es, que las distancias serán negativas, positivas o nulas: $d(|x\rangle, |y\rangle) < 0$, $d(|x\rangle, |y\rangle) = 0$ y $d(|x\rangle, |y\rangle) > 0$.

Si extendemos la noción de distancia para que albergue las posibilidades de distancias nula y negativas, entonces la definición del tensor métrico para espacios pseudoeuclidianos también debe cambiar.

$$\mathbf{g}[|x_i\rangle, |x_j\rangle] = g_{ij} \equiv g_{ji} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

En resumen

$$\langle x|x\rangle = \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow d(|x\rangle, |y\rangle) = \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \mathbf{g}[|x_i\rangle, |x_j\rangle] = \left\{ \begin{array}{c} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right.$$

Este tipo de espacios luce como un excentricidad más de los matemáticos y una curiosidad de estudio es ver como organizar los conceptos que aprendimos de los espacios euclidianos y extenderlos a otros espacios. Quizá se hubiera quedado así, como una curiosidad matemática si los físicos no hubieran sacado partido de estas particularidades para describir el comportamiento de la naturaleza. En la próxima sección analizaremos el caso de espacios minkowskianos de dimensión 4, que denominaremos $\mathbb{M}^4$.

3.4.1 Espacios minkowskianos

Consideremos un espacio tetradimensional expandido por una base ortonormal: $\{|\hat{e}_0\rangle, |\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle\}$. Los vectores $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle\}$ corresponden con la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Este espacio vectorial $\mathbb{M}^4$ tendrá asociado un espacio dual: $\left\{\langle\hat{e}^0|, \langle\hat{e}^1|, \langle\hat{e}^2|, \langle\hat{e}^3|\right\}$ a través de una métrica:

$$\eta_{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\alpha| \otimes \langle\hat{e}^\beta| \equiv \eta_{\beta\alpha}\langle\hat{e}^\beta| \otimes \langle\hat{e}^\alpha| \quad \text{y} \quad \eta^{\alpha\beta}|\hat{e}_\alpha\rangle \otimes |\hat{e}_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha}|\hat{e}_\beta\rangle \otimes |\hat{e}_\alpha\rangle\,,$$

con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, y donde: $\eta_{00} = \eta^{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta^{11} = -1$, $\eta_{22} = \eta^{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta^{33} = -1$ (con $\eta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$). Se dice que η tiene signo -2.[14]

Tal y lo como presentamos en la sección 3.8, podemos asociar componentes covariantes y contravariantes a través de la métrica $|a\rangle = a^\sigma|\hat{e}_\sigma\rangle$, entonces:

$$\left(\eta_{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\alpha| \otimes \langle\hat{e}^\beta|\right)|a\rangle = a^\sigma\left(\eta_{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\alpha| \otimes \langle\hat{e}^\beta|\right)|\hat{e}_\sigma\rangle = a^\sigma\eta_{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\beta|\hat{e}_\sigma\rangle\langle\hat{e}^\alpha| = a^\sigma\eta_{\alpha\beta}\delta^\beta_\sigma\langle\hat{e}^\alpha| = a^\sigma\eta_{\alpha\sigma}\langle\hat{e}^\alpha| \equiv a_\alpha\langle\hat{e}^\alpha|\,.$$

Lo interesante del caso es que:

$$a_\alpha = a^\sigma\eta_{\sigma\alpha} \quad \Rightarrow a^0 = a_0\,, \quad a^1 = -a_1\,, \quad a^2 = -a_2\,, \quad a^3 = -a_3.$$

Es decir, en este caso, porque la métrica tiene signo -2, bajar los índices espaciales ($\mu = i = 1, 2, 3$) es cambiar el signo a las componentes[15]. Dicho con más propiedad, las componentes espaciales contravariantes ($\mu = i = 1, 2, 3$) tienen signos contrarios a las componentes covariantes.

De la misma manera que se expuso anteriormente en la sección 3.8:

$$\langle a|\left(\eta^{\alpha\beta}|\hat{e}_\alpha\rangle \otimes |\hat{e}_\beta\rangle\right) = a_\sigma\langle\hat{e}^\sigma|\left(\eta^{\alpha\beta}|\hat{e}_\alpha\rangle \otimes |\hat{e}_\beta\rangle\right) = a_\sigma\eta^{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\sigma|\hat{e}_\alpha\rangle|\hat{e}_\beta\rangle = a_\sigma\eta^{\alpha\beta}\delta^\sigma_\alpha|\hat{e}_\beta\rangle = a_\sigma\eta^{\sigma\beta}|\hat{e}_\beta\rangle \equiv a^\beta|\hat{e}_\beta\rangle\,.$$

[14] Realmente el signo -2 es una convención, se puede también considerar $\eta_{\mu\nu}$ de signo $+2$, con $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = +1$, $\eta_{22} = +1$, $\eta_{33} = +1$.

[15] Otra vez, para la métrica con signo -2, el cambio de signo entre componentes covariantes y contravariantes se da para la componente, $\mu = 0$

Borrador Preliminar

y otra vez, $a^\sigma = \eta^{\sigma\alpha} a_\alpha$, y habría cambio de signo cuando se bajan los índices $1, 2, 3$ para la métrica con signo -2 que hemos considerado anteriormente.

Del mismo modo se "suben" y se "bajan" índices para componentes de tensores:

$$\eta^{\alpha\beta} P_\alpha^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}\,.$$

Por su parte, el producto interno de dos vectores en un espacio de Minkowski involucra, de manera natural, la métrica del espacio. Esto es:

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = a^\alpha b_\alpha = b^\alpha a_\alpha = a^\alpha b^\beta \eta_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta \eta^{\alpha\beta} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3\,.$$

Una vez más, la norma de un vector, también incluirá al tensor métrico:

$$\||a\rangle\|^2 = \langle a|a\rangle = a_\alpha a^\beta \langle \hat{\mathrm{e}}^\alpha|\hat{\mathrm{e}}_\beta\rangle = a_\alpha a^\alpha = a_\alpha a_\beta\, \eta^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta\, \eta_{\alpha\beta} = a^0 a^0 - a^1 a^1 - a^2 a^2 - a^3 a^3\,.$$

El caso más conocido lo constituye la norma de un desplazamiento infinitesimal, en un espacio tetradimensional, el cual puede expresarse como:

$$\mathrm{d}s^2 \equiv \langle \mathrm{d}r|\mathrm{d}r\rangle = (\mathrm{d}x_\alpha\, \langle \mathrm{w}^\alpha|)\left(\mathrm{d}x^\beta\, |\mathrm{w}_\beta\rangle\right) = \mathrm{d}x_\beta\, \mathrm{d}x^\beta = \eta_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2\,,$$

con: $\mathrm{d}x^2 = \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2$.

3.4.2 Un toque de Relatividad Especial

La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más, vale decir, que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números: $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$[16]. El rápido desarrollo de la comprensión de las ideas relativistas muestra que estaban en el ambiente de la época de comienzos de 1900, y una vez más la simplicidad como prejuicio se impuso.

Sólo dos suposiciones están en el corazón de la Relatividad Especial:

1. *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío*: La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, y es independiente de la velocidad de la fuente de luz respecto a un observador en particular.

En términos matemáticos estas dos audaces suposiciones se concretan en una simple propuesta matemática: el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base. Luego vendrá la asociación de observadores físicos –o sistemas de coordenadas– con los miembros de la familia de vectores base, pero la idea es la misma que planteamos para los espacios euclidianos en 2.2.3.1: el producto interno –y consecuentemente, la norma de los elementos del espacio vectorial y la distancia entre éstos– es el mismo independientemente de la base en la cual expanda el espacio vectorial.

La primera de las interpretaciones es el cómo representamos los eventos en el espacio-tiempo. Supongamos el caso unidimensional en el espacio, vale decir los eventos ocurren en un punto de la recta real $x = x^1$, y en un tiempo determinado, por lo tanto podremos asociar al evento un vector evento: $\rightarrow (x^0, x^1)$.

A continuación nos preguntamos que representan las distancias (espacio-temporales) entre estos dos eventos. Tal y como vimos, las distancias entre dos elementos de un espacio vectorial puede ser construida a

[16] Una discusión sobre la necesidad de incorporar los conceptos de relatividad especial en los programas de estudio de Física mediante la utilización del álgebra geométrica la pueden encontrar en Baylis, W. E. (2004). Relativity in introductory physics. Canadian journal of physics, 82(11), 853-873.

Borrador Preliminar

partir de la norma (de la resta de coordenadas) y la norma a partir del producto interno:

$$|||y-x\rangle||^2 \equiv \langle y-x|y-x\rangle \begin{cases} <0 & \text{conexión tipo espacio: eventos desconectados causalmente.} \\ =0 & \text{conexión tipo luz: posible conexión causal a través de rayos de luz.} \\ >0 & \text{conexión tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{cases}$$

Con esta primera interpretación de los valores de la norma y la visión tetradimensional, el espacio-tiempo, dividido en pasado, presente y futuro, se puebla de eventos que pueden estar o no relacionados causalmente tal y como muestra la figura 3.4.

La preservación del producto interno para todos los observadores era intuitiva en los espacios euclidianos y, al mantenerla para los pseudoeuclidianos nos traerá consecuencias nada intuitivas en nuestra idea intuitiva de "realidad".
Para el caso de la formulación de la Relatividad Especial, añadimos un supuesto más: las componentes del tensor métrico son invariantes bajo transformaciones de coordenadas, esto es:

$$\mathbf{g}\left[|\hat{e}_\mu\rangle, |\hat{e}_\nu\rangle\right] \equiv \mathbf{g}'\left[|\hat{e}_{\mu'}\rangle, |\hat{e}_{\nu'}\rangle\right] \;\Leftrightarrow\; \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha'\beta'}\,,$$

con: $\{|e_\mu\rangle\}$ y $\{|\hat{e}_{\mu'}\rangle\}$ dos bases que se conectan a través de una transformación de coordenadas:

$$x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'}) \Leftrightarrow x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha)\,.$$

Figura 3.4: Cono de luz, espacio-tiempo y eventos.

Construyamos ahora el tipo de transformación de coordenadas que mantiene estos dos supuestos[17]:

1. El producto interno de dos vectores es independiente de la base que expande el espacio vectorial.
2. Las componentes del tensor métricos son invariantes bajo transformaciones de coordenadas.

Si el producto interno de dos vectores es independiente de la base que expanda el espacio vectorial, tendremos:

$$\langle x|y\rangle = (x_\alpha\langle\hat{e}^\alpha|)\,(y^\beta|\hat{e}_\beta\rangle) \equiv \left(x_{\sigma'}\langle\hat{e}^{\sigma'}|\right)\left(y^{\alpha'}|\hat{e}_{\alpha'}\rangle\right) \;\Leftrightarrow\; x^\alpha y_\alpha \equiv x^{\beta'}y_{\beta'} \;\Leftrightarrow\; x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv x^{\alpha'}y^{\beta'}\eta_{\alpha'\beta'}\,,$$

y como lo vimos en 3.2.8 las componentes de vectores, bajo cambio de coordenadas, transforman como:

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\,a^k \;\Rightarrow x^\alpha y_\alpha = x^{\alpha'}y_{\alpha'} \;\Leftrightarrow\; x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}x^\alpha\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta}y^\beta\eta_{\nu'\mu'} = x^\alpha y^\beta\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta}\eta_{\nu'\mu'}\,,$$

con lo cual concluimos que:

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta}\eta_{\nu'\mu'} \equiv \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta}\eta_{\nu\mu}\,. \tag{3.16}$$

Ahora bien, si derivamos (3.16) respecto a x^γ tendremos que:

$$\eta_{\nu'\mu'}\left[\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha\partial x^\gamma}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\right] = 0\,.$$

Como la cantidad dentro del paréntesis se anula podemos jugar con ésta para descubrir algunas consecuencias ocultas. Es de hacer notar que esa cantidad tiene tres índices libres y por lo tanto son 64 ecuaciones que se anulan. Eso significa que le podemos añadir y sustraer cualesquiera otras con los índices intercambiados.

Supongamos que al paréntesis anulado le añadimos una con los índices α y γ intercambiados y, adicionalmente, le sustraemos una con los índices γ y β intercambiados. Claramente, estamos añadiendo y sustrayendo

[17]Estamos suponiendo que observadores, sistemas de coordenadas y sistemas de referencia son conceptos equivalentes.

Borrador Preliminar

ceros.

$$\eta_{\nu'\mu'}\left[\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}+\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}-\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}\right]=0\,.$$

Con este "truco", vemos que el último término anula el segundo y el penúltimo el cuarto, de forma y manera que nos queda:

$$2\eta_{\nu'\mu'}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta}=0\,,$$

Con lo cual la única posibilidad que resulta es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}=0 \;\Rightarrow\; x^{\nu'}=\Lambda^{\nu'}_{\mu}x^\mu+a^{\nu'}\,, \tag{3.17}$$

con: $\Lambda^{\nu'}_{\mu}$ y $a^{\nu'}$ constantes.

Las transformaciones lineales (3.17) se conocen como *las transformaciones, inhomogéneas, de Lorentz* o también las transformaciones de Poincaré. Estas transformaciones forman un grupo y, uno de los posibles subgrupos lo constituye el conjunto de transformaciones propias de Lorentz de la forma:

$$\Lambda^{0'}_{0}=1,\quad \Lambda^{i'}_{0}=\Lambda^{0'}_{j}=0,\quad \text{y}\quad \Lambda^{i'}_{j}=R^{i'}_{j}\,,$$

con: $i,j=1,2,3$, y donde $R^{i'}_{j}$ es una matriz de rotación.

Supongamos el caso más sencillo de este grupo de transformaciones: $a^{\nu'}=0$, en la ecuación (3.17). Explícitamente hemos identificado una transformación de la forma:

$$x^{\alpha'}=\Lambda^{\alpha'}_{0}x^0+\Lambda^{\alpha'}_{1}x^1+\Lambda^{\alpha'}_{2}x^2+\Lambda^{\alpha'}_{3}x^3\,,$$

la cual, por construcción, deja invariante el intervalo tetradimensional:

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^1-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}x^3=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu dx^\nu\,,$$

con $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico. Aquí c es la constante que representa la velocidad de la luz en el vacío. Por razones de conveniencia se escoge un sistema de unidades donde $c=1$[18].

Es inmediato demostrar que este tipo de transformaciones deja invariante el intervalo. Primero, notemos que:

$$\eta^{\mu'\nu'}=\Lambda^{\mu'}_{\alpha}\Lambda^{\nu'}_{\beta}\eta^{\alpha\beta}\quad\Rightarrow\eta^{\mu'\nu'}\eta_{\nu'\gamma'}=\delta^{\mu'}_{\gamma'}=\Lambda^{\mu'}_{\alpha}\Lambda^{\nu'}_{\beta}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\nu'\gamma'}\quad\Rightarrow\Lambda^{\mu'}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{\gamma'}=\delta^{\mu'}_{\gamma'}\,,$$

y como $\mathrm{d}x^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}_{\alpha}\mathrm{d}x^\alpha$, entonces:

$$\mathrm{d}s'^2=\eta_{\mu'\nu'}\mathrm{d}x^{\mu'}\mathrm{d}x^{\nu'}\equiv\eta_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}_{\alpha}\mathrm{d}x^\alpha\Lambda^{\nu'}_{\beta}\mathrm{d}x^\beta=\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta=\mathrm{d}s^2\,.$$

Para construir una de las expresiones más utilizadas del grupo de Lorentz consideramos la siguiente situación: un observador, $x^{\mu'}$, ve moverse una partícula con una velocidad $\mathbf{v}$, mientras que un segundo observador, x^μ, la percibe en reposo. Entonces, para el observador, que registra la partícula en reposo, resulta que $\mathrm{d}x^i=0$, y:

$$\mathrm{d}x^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}_{\alpha}\mathrm{d}x^\alpha\quad\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}t' &= \Lambda^{0'}_{0}\,\mathrm{d}t\\ \\ \mathrm{d}x^{i'} &= \Lambda^{i'}_{\alpha}\mathrm{d}x^\alpha=\Lambda^{i'}_{0}\,\mathrm{d}t\qquad \text{con } i'=1,2,3.\end{cases}$$

Ahora bien, las ecuaciones anteriores nos imponen:

$$\mathbf{v}'=\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t'}\quad\Rightarrow v^{i'}=\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}t'}\quad\Rightarrow\Lambda^{i'}_{0}=v^{i'}\,\Lambda^{0'}_{0}\,.$$

[18] Un sistema de unidades denominado *sistema de unidades geometrizado* en el cual la velocidad de la luz y la constante de gravitación universal se toman como la unidad: $c=G=1$.

Borrador Preliminar

Además, tenemos que:

$$\eta_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}_{\beta'}\eta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow 1 = \Lambda^{\mu}_{0'}\Lambda^{\nu}_{0'}\eta_{\mu\nu} = \left(\Lambda^{0}_{0'}\right)^2 - \left(\Lambda^{1}_{0'}\right)^2 - \left(\Lambda^{2}_{0'}\right)^2 - \left(\Lambda^{3}_{0'}\right)^2 ,$$

con una solución de la forma:

$$\Lambda^{0}_{0'} = \gamma\,, \quad \Lambda^{i}_{0'} = \gamma\, v^i\,,$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left[(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2\right]}}\,,$$

los otros términos $\Lambda^{i}_{j'}$ no quedan unívocamente determinados porque está de por medio la arbitrariedad de una rotación $R^{i}_{j'}$. Por ello, una selección arbitraria pero razonable de todos los términos $\Lambda^{i}_{j'}$ es:

$$\Lambda^{i}_{j'} = \delta^{i}_{j'} + v^i v_{j'}\frac{\gamma-1}{\mathbf{v}^2} \equiv \delta^{i}_{j'} + v^i v_{j'}\frac{\gamma-1}{v^k v_k}\,.$$

De esta forma quedan determinados todos los elementos de las transformaciones de Lorentz.

Los observadores lorentzianos son los equivalentes a los observadores galileanos en las teorías newtonianas: son observadores que se mueven uno respecto al otro con una velocidad constante y, desempeñan el mismo papel que los observadores inerciales. Quizá la consecuencia más impactante de la necesidad de vincular mediciones de distintos observadores lorentzianos a través de transformaciones de Lorentz, lo ilustra la evolución distinta del tiempo medido por los diferentes observadores. Un observador en reposo respecto a un reloj, ve avanzar el tiempo con *tic* separados por $\mathrm{d}t = \Delta t$, ya que su reposo respecto al reloj implica: $\mathrm{d}x^i = 0$, por lo tanto la separación espacio temporal será:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}x^i)^2 = (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \mathrm{d}t = \Delta t\,,$$

mientras que un segundo observador, en movimiento, tendrá el mismo elemento de línea pero expresado como:

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}t'^2 - (\mathrm{d}x^{i'})^2 = \left(1-\mathbf{v}^2\right)\mathrm{d}t' \quad \Rightarrow \mathrm{d}t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\,,$$

y ésta última ecuación claramente indica que el tiempo evoluciona más lento para relojes en movimiento.

Ejemplo 3.15 En este ejemplo vamos a repetir, para el caso bidimensional, lo expuesto de manera general en la sección anterior. Como vimos, las transformaciones de Lorentz relacionan las coordenadas del espacio-tiempo medidas por un observador O de un evento, con las coordenadas medidas por otro observador O' del mismo evento. El observador O lo representaremos por las coordenadas $\{t,x,y,z\} = \{x^0,x^1,x^2,x^3\}$, mientras que el observador O' por $\{t',x',y',z'\} = \{x^{0'},x^{1'},x^{2'},x^{3'}\}$. Para lo que sigue, supondremos que cuando los observadores coincidan los relojes de ambos marcarán $t = t' = 0$.

La ecuación (3.17),

$$x^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}_{\mu}x^{\mu}\,,$$

la podemos expandir en lo que realmente es:

$$\begin{aligned}
t' = x^{0'} &= \Lambda^{0'}_{0}x^0 + \Lambda^{0'}_{1}x^1 + \Lambda^{0'}_{2}x^2 + \Lambda^{0'}_{3}x^3\,,\\
x' = x^{1'} &= \Lambda^{1'}_{0}x^0 + \Lambda^{1'}_{1}x^1 + \Lambda^{1'}_{2}x^2 + \Lambda^{1'}_{3}x^3\,,\\
y' = x^{2'} &= \Lambda^{2'}_{0}x^0 + \Lambda^{2'}_{1}x^1 + \Lambda^{2'}_{2}x^2 + \Lambda^{2'}_{3}x^3\,,\\
z' = x^{3'} &= \Lambda^{3'}_{0}x^0 + \Lambda^{3'}_{1}x^1 + \Lambda^{3'}_{2}x^2 + \Lambda^{3'}_{3}x^3\,.
\end{aligned}$$

Vamos a suponer que O' se mueve respecto a O, con velocidad v, únicamente en la dirección x, es decir, $y' = y$ y $z' = z$. Se supone entonces que t' no dependerá ni de y ni de z y que cuando $x' = 0$ entonces $x = vt$.

Borrador Preliminar

Todo esto hace que el sistema de ecuaciones anterior se simplifique de manera significativa:

$$\begin{aligned} t' = x^{0'} &= \Lambda_0^{0'} x^0 + \Lambda_1^{0'} x^1 = \Lambda_0^{0'} t + \Lambda_1^{0'} x\,, \\ x' = x^{1'} &= \Lambda_1^{1'}(x^1 - vt) = \Lambda_1^{1'}(x - vt)\,, \\ y' = x^{2'} &= x^2 = y\,, \\ z' = x^{3'} &= x^3 = z\,. \end{aligned}$$

Debemos determinar los coeficiente $\Lambda_0^{0'}$, $\Lambda_1^{0'}$ y $\Lambda_1^{1'}$. Para tal fin vamos a suponer que cuando $t' = t = 0$ un pulso de luz es emitido desde el origen de coordenadas. Recordemos que en ese instante ambos observadores coinciden. Como suponemos además que la velocidad de la luz es constante, la onda de luz se propagará en todas las direcciones de manera que cada observador podrá describirla mediante la ecuación de una esfera cuyo radio aumenta con el tiempo a velocidad c. Esto es:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2\,.$$

Por lo tanto:

$$[\Lambda_1^{1'}(x - vt)]^2 + y^2 + z^2 = c^2[\Lambda_0^{0'} t + \Lambda_1^{0'} x]^2\,.$$

Al desarrollar esta última ecuación obtenemos:

$$\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 (x^2 - 2xvt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2\left[\left(\Lambda_0^{0'}\right)^2 t^2 + 2\Lambda_0^{0'}\Lambda_1^{0'} xt + \left(\Lambda_1^{0'}\right)^2 x^2\right]\,,$$

por lo tanto:

$$\left[\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 - c^2\left(\Lambda_1^{0'}\right)^2\right] x^2 + y^2 + z^2 - 2xt\left[\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 v + c^2\Lambda_0^{0'}\Lambda_1^{0'}\right] = \left[c^2\left(\Lambda_0^{0'}\right)^2 - v^2\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2\right] t^2\,.$$

Como ambos observadores registran la misma onda de luz, entonces:

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 - c^2\left(\Lambda_1^{0'}\right)^2 &= 1\,, \\ \left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 v + c^2\Lambda_0^{0'}\Lambda_1^{0'} &= 0\,, \\ c^2\left(\Lambda_0^{0'}\right)^2 - v^2\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 &= c^2\,. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas resulta:

$$\Lambda_1^{1'} = \Lambda_0^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \quad \Lambda_1^{0'} = \frac{v}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Si definimos $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, las transformaciones de Lorentz quedan entonces de la forma:

$$t' = \left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\gamma\,, \quad x' = (x - vt)\,\gamma\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,.$$

Existen las transformaciones inversas que se pueden obtener de la misma manera que las anteriores.

$$t = \left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\gamma\,, \quad x = \left(x' + vt'\right)\gamma\,, \quad y = y'\,, \quad z = z'\,.$$

Notemos que cuando el observador O' se mueve a velocidades muy pequeñas en comparación a c, entonces el factor γ tiende a la unidad:

$$v \ll c \quad \Rightarrow \gamma \to 1\,,$$

por lo tanto:

$$t' = t\,, \quad x' = x - vt\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,.$$

que no son más que la transformación de Galileo.

◁

Borrador Preliminar

Ejemplo 3.16

Si un observador O' determina que dos eventos ocurren en el mismo lugar, pero separados en el tiempo; entonces, un observador O ¿cómo los apreciaría? Veamos dos situaciones diferentes.

- Consideremos a una persona sentada en un tren en movimiento, observador O', esta persona enciende y apaga rápidamente una linterna dos veces, con una diferencia de 15 minutos entre un evento y el otro. Entonces para O' será dos eventos que ocurren en el mismo lugar. Pero para el observador O que se encuentra en tierra los eventos habrán ocurrido en lugares diferentes, y esto no parece tener ningún conflicto con nuestra experiencia e intuición.
- Si O' sigue en su asiento del tren y observa que dos personas, uno a cada extremo del vagón (a unos 30 mts), encienden las linternas al mismo tiempo, entonces para O' será un evento simultáneo, pero para el observador en tierra O que ve al tren alejarse determinará que la persona de la parte trasera encendió la linterna un poco antes que la persona apostada en la parte delantera. Esto tal vez si nos resulte algo extraño.

Consideremos que el tren viaja a 36 m/s ($\approx$ 130 Km/h) entonces, esta pequeña velocidad se refleja en el factor γ de la manera siguiente:

$$\frac{v}{c} = 1.2 \times 10^{-7} \to \frac{v^2}{c^2} = 1.44 \times 10^{-14} \to \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1.44 \times 10^{-14}}} \approx 1.000000000000007\,.$$

Cuando consideramos la primera situación, la diferencia entre un evento y el otro era de 15 minutos (900 seg), y para el observador en tierra ambos eventos ocurren en dos lugares diferentes: x_1 y x_2,

$$x_1 = \left(x_1' + vt_1'\right)\gamma\,, \quad x_2 = \left(x_2' + vt_2'\right)\gamma\,,$$

de manera que:

$$x_2 - x_1 = \left(x_2' + vt_2'\right)\gamma - \left(x_1' + vt_1'\right)\gamma = \left(x_2' - x_1'\right)\gamma + \left(t_2' - t_1'\right)v\gamma\,.$$

Pero: $x_2' = x_1'$ y $t_2' - t_1' = 15$ min. Por lo tanto:

$$x_2 - x_1 = (900\text{ s})(36\text{ m.s}^{-1})\gamma = 32400\text{m} = 32.4\text{Km}\,.$$

Para la segunda situación, el observador en tierra puede dar fe que los dos eventos ocurren en tiempos diferentes: t_1 y t_2,

$$t_1 = \left(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'\right)\gamma\,, \quad t_2 = \left(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'\right)\gamma\,,$$

de manera que:

$$t_2 - t_1 = \left(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'\right)\gamma - \left(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'\right)\gamma = \left(t_2' - t_1'\right)\gamma + \left(x_2' - x_1'\right)\frac{v}{c^2}\gamma\,,$$

con: $t_2' = t_1'$ y $x_2' - x_1' = 30$ metros, resulta:

$$t_2 - t_1 = (30\text{ m})\left[\frac{36\text{ m.s}^{-1}}{(3 \times 10^8\text{ m.s}^{-1})^2}\right]\gamma = 1.2 \times 10^{-14}\text{ s}\,.$$

Intervalo de tiempo muy pequeño pero diferente de cero: el observador en tierra no aprecia que los eventos fueron simultáneos.

Este valor tan pequeño, obviamente, es debido a que el factor γ es casi la unidad. Notemos que si el tren viajara a una velocidad cercana a c, digamos $v = 0.99999999\,c$, entonces:

$$\frac{v}{c} = 0.99999999 \to \frac{v^2}{c^2} = 0.99999998 \to \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.99999998}} \approx 7071.06780\,.$$

por lo que:

$$t_2 - t_1 = (30\text{ m})\left[\frac{36\text{ m.s}^{-1}}{(3 \times 10^8\text{ m.s}^{-1})^2}\right]\gamma = 8.49 \times 10^{-11}\text{ s}\,.$$

Borrador Preliminar

En vista de lo anterior, se podría esperar que ocurran cosas curiosas con las longitud de los objetos. Supongamos que el observador que viaja en el tren coloca su laptop en el piso y mide su longitud. Esto significa que la computadora está en reposo para O' y, en la dirección del eje x, la laptop mide $x'_2 - x'_1$ según O'. Para el observador que está en tierra la laptop viaja a una velocidad vt, de manera que:

$$x'_2 - x'_1 = [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]\,\gamma\,,$$

Para el observador que se encuentra en reposo la laptop mide $x_2 - x_1$, medida en el instante $t_2 = t_1$. Por lo tanto:

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma}\,.$$

¡La laptop se contrae por el factor γ!

◁

3.4.3 Ejercicios

1. En el espacio euclidiano 3D, y en coordenadas cartesianas, no distinguimos entre vectores y $1-$*formas* debido a que sus componentes transforman de la misma manera. Demuestre que:
   (a). $a^{i'} = \Lambda^{i'}_{j} a^j \;\wedge\; b_{j'} = \Lambda^{i}_{j'} b_i$, son la misma transformación si la matriz $\Lambda^{i'}_{j}$ es igual a la transpuesta de su inversa, es decir, si es ortogonal.
   (b). Considere dos observadores $O : x, y \leftrightarrow x^1, x^2$ y $O' : x', y' \leftrightarrow x^{1'}, x^{2'}$ y sus sistemas de coordenadas asociados.
      I. Considere la siguiente transformación de coordenadas de Galileo:
      $$x^{1'} = v^1 t + \frac{\sqrt{2}}{2}x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad x^{2'} = \frac{\sqrt{2}}{2}x^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2\,,$$
      con v^1 una constante que representa la velocidad relativa entre $O - O'$, y t al tiempo (parámetro de esta transformación).
      A continuación suponga una partícula que describe un movimiento respecto a O siguiendo una trayectoria recta, esto es $x^2 = \alpha x^1$, donde α es una constante. Encuentre cómo lo describiría el observador O' respecto a sus coordenadas $(x^{1'}, x^{2'})$.
      II. Considere ahora la generalización de la transformación de coordenadas anterior:
      $$x^{1'} = v^1 t + \frac{\sqrt{2}}{2}x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad x^{2'} = v^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2}x^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2\,,$$
      con v^1 y v^2 las componentes de una velocidad relativa entre $O - O'$, y t al tiempo. Muestre que la norma de cualquier vector queda invariante respecto a una transformación de coordenadas como la anterior y encuentre la matriz de transformación.
2. Un acelerador produce partículas que tienen una vida promedio de 5μs. Estas logran alcanzar una velocidad de $0.6c$.
   (a). Un observador que se encuentra en reposo en el laboratorio ¿qué tiempo de vida media le atribuirá a las partículas?
   (b). ¿Qué distancia promedio viajan las partículas en el acelerador?
   (c). Si suponemos que existe un observador en reposo con respecto a la partícula ¿Qué distancia se desplazará éste observador antes de que la partícula se desintegre?
3. Un elemento de área cuadrada se encuentra en reposo para un observador O. Encuentre el área medida por un observador en movimiento O' si éste lleva una velocidad de $0.85c$ a lo largo de la diagonal del cuadrado.

Borrador Preliminar

4. Consideremos un vehículo se mueve con una velocidad V con respecto a un observador fijo en tierra O, y un pasajero dentro del vehículo que se mueve con una velocidad v' con respecto al vehículo. Sabemos de los cursos básicos que la velocidad del pasajero respecto al observador fijo en tierra es simplemente la suma: $v = v' + V$. Nos podemos preguntar sobre la forma en que se suman las velocidades en la teoría especial de la relatividad, es decir, ¿Cómo se suman las velocidades si consideramos las transformaciones de Lorentz? Demuestre que se suman como:
$$v = \frac{v' + V}{1 + v'\frac{V}{c^2}}\,.$$
5. Dado un espacio minkowskiano y un observador O que describe los eventos en el espacio-tiempo respecto a un sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$, donde $\alpha = 0, 1, 2$, y $\eta = \mathrm{diag}[-1, 1, 1]$ el tensor métrico. Considere entonces la siguiente transformación de coordenadas:
$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1)\,, \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad \text{y} \quad x^{2'} = x^2\,, \quad \text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$
Donde $\beta = v/c$ es la velocidad relativa entre O y O'.
   (a). Otra vez, suponga que una partícula describe una linea recta respecto a O: $x^2 = \alpha x^1$, con α igual a una constante. Encuentre cómo lo describiría el otro observador O' respecto a sus coordenadas $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'})$.
   (b). Encuentre la expresión para la transformación de coordenadas, $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ (transformación de Lorentz) entre estos sistemas relativistas y muestre como la norma: $x^\alpha x_\alpha = x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta}$, de cualquier vector se conserva.
6. Considere el tensor de Maxwell definido como:
$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{otra vez con:} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
donde $\boldsymbol{E} = (E^x, E^y, E^z)$ y $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos (respectivamente), medidos por un observador O en coordenadas cartesianas.
   (a). Si un observador mide un campo eléctrico $\boldsymbol{E} = E^x\hat{\mathbf{i}}$ y ningún campo magnético ¿Cuáles campos, $F_{\mu\alpha}$, medirá otro observador que viaja con una velocidad respecto al primero de $\boldsymbol{\beta} = v\hat{\mathbf{i}}$?
   (b). Muestre que las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = 4\pi\mathbf{J}$, y $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$ se pueden expresar como:
$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu\,, \quad \text{donde } J^\mu = (c\rho, J^1, J^2, J^3) \quad \text{y } \mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)\,,$$
   (c). Considere la identidad de Bianchi de la forma:
$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\gamma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\gamma} + \partial_\nu F_{\gamma\mu} \equiv F_{\mu\nu\,,\gamma} + F_{\nu\gamma\,,\mu} + F_{\gamma\mu\,,\nu} = 0\,,$$
y demuestre que las otras dos ecuaciones $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \times \boldsymbol{E} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0$, también están contenidas en las expresiones $F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu$
7. El dual de un tensor $\mathbf{B}$ de rango 2, cuadridimensional, puede ser definido de manera que sus componentes vienen dadas por:
$$\mathcal{B}^{ij} = \frac{1}{2!}\epsilon^{ijkl} B_{kl}\,.$$
Muestre que $\mathcal{B}$ transforma como:
   (a). Un tensor de rango 2 bajo rotaciones.

Borrador Preliminar

(b). Un pseudotensor bajo inversiones.

8. Construya $\mathcal{F}^{\mu\alpha}$, el dual del tensor de Maxwell $F^{\mu\alpha}$.
9. Demuestre que $c^2\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ es un escalar de Lorentz.

Practicando con Maxima

1. En los grandes aceleradores de partículas se puede producir piones cargados cuando se hace colisionar protones de gran energía con algún blanco preparado para este fin. Se conoce que los piones tienen una vida media muy corta: 1.77×10^{-8} seg. Lo que esto significa es, que una vez que se producen los piones, la mitad de ellos se habrá desintegrado en un tiempo de 1.77×10^{-8} seg.
   Los experimentos en el acelerador reflejan el hecho de que la intensidad del haz de piones que emerge del blanco, y que viaja a $0.99\ c$, se reduce a la mitad una vez que recorren 37.2 mts. Pero sucede que si los piones viajan a $0.99\ c = 2.968 \times 10^8$ m/s cuando estos hayan decaído a la mitad la distancia que habrán recorrido es $d = vt$:

```
(%i1) d:(2.968*10^ 8*(m/s))*(1.77*10^ (-8)*s);
```
(%o1) $5.25336\,m$

   ¿Y entonces por qué el experimento mide que viajaron 37.2 mts? Bueno, no estamos considerando los efectos relativistas que están contenidas en las transformaciones de Lorentz:

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1)\gamma \quad \Rightarrow \Delta t = \Delta t'\gamma\,,$$

   donde $\Delta t'$ es el tiempo propio, el tiempo medido por un reloj respecto a la partícula en movimiento, es decir, el sistema de referencia donde el pion se encuentra en reposo.
   Calculemos, primeramente el factor γ:

```
(%i2) gamma:1/sqrt(1-(0.99)^ 2);
```
(%o2) 7.088812050083354

   Por lo tanto, la vida media de los piones medida desde el laboratorio es:

```
(%i3) Delta_ t:(1.77*10^ (-8)*s)*gamma;
```
(%o3) $1.254719732864754 \times 10^{-7}\ s$

   Según las personas que miden el experimento, y que están en el sistema en reposo, los piones viven $\approx 1.255 \times 10^{-7}$ s, y por lo tanto viajan una distancia: $x = (0.99c)\Delta t$

```
(%i4) (2.968*10^ 8*(m/s))*Delta_ t;
```
(%o4) $37.24008167142589\,m$

2. Procederemos ahora a resolver con **Maxima** el sistema que nos condujo a las transformaciones impropias de Lorentz.
   Primero, escribamos una lista que contiene el sistema de ecuaciones:

```
(%i5) sis:[L11^ 2-c^ 2*L01^ 2=1,L11^ 2*v+c^ 2*L01*L00=0,c^ 2*L00^ 2-v^ 2*L11^ 2=c^ 2];
```
(%o5) $\left[\mathtt{L_{11}}^2 - c^2\,\mathtt{L_{01}}^2 = 1, v\,\mathtt{L_{11}}^2 + c^2\,\mathtt{L_{00}}\,\mathtt{L_{01}} = 0, c^2\,\mathtt{L_{00}}^2 - v^2\,\mathtt{L_{11}}^2 = c^2\right]$

   Es importante agregar la información de que $v > 0$, y que además $v < c$, para evitar soluciones complejas.

Borrador Preliminar

El comando **assume** nos permite restringir el valor de los parámetros.

```
(%i6) assume(v¿0,c¿v);
```

(%o6) $[v > 0, c > v]$

Procedemos a resolver el sistema de ecuaciones, lo podemos hacer con ayuda del comando **solve**:

```
(%i7) S:solve(sis,[L11,L00,L01]);
```

(%o7) $$\left[\left[\mathtt{L}_{11} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{00} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{01} = \frac{\sqrt{c-v}\,v\,\sqrt{v+c}}{c\,v^2-c^3}\right], \left[\mathtt{L}_{11} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{00} = -\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{01} = -\frac{\sqrt{c-v}\,v\,\sqrt{v+c}}{c\,v^2-c^3}\right], \left[\mathtt{L}_{11} = -\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{00} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{01} = \frac{\sqrt{c-v}\,v\,\sqrt{v+c}}{c\,v^2-c^3}\right], \left[\mathtt{L}_{11} = -\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{00} = -\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, L_{01} = -\frac{\sqrt{c-v}\,v\,\sqrt{v+c}}{c\,v^2-c^3}\right]\right]$$

Seleccionamos la primera de las listas anteriores y factorizamos con la rutina **factor**:

```
(%i8) map(factor,S[1]);
```

(%o8) $$\left[\mathtt{L}_{11} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{00} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}, \mathtt{L}_{01} = \frac{\sqrt{c-v}\,v}{c\,(v-c)\,\sqrt{v+c}}\right]$$

3.5 Funcionales lineales y Distribuciones

En esta sección discutiremos el concepto de distribución utilizando el lenguaje de formas lineales que hemos expuesto en la sección 3.1 y luego haremos una extensión de las bases discretas a bases continuas. Las distribuciones son objetos que generalizan la noción convencional de funciones en el análisis matemático y permiten diferenciar funciones cuyas derivadas no existen en el sentido tradicional del cálculo diferencial.

Las distribuciones también son importantes en Física e Ingeniería, donde muchos problemas conducen a ecuaciones diferenciales cuyas soluciones (con condiciones iniciales o de frontera) son distribuciones. Considere, por ejemplo el concepto de impulso

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{t_0+\tau} - \vec{p}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_\tau = \int_0^\tau \vec{F}(t)\mathrm{d}t\,,$$

donde una fuerza $\vec{F}(t)$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo muy corto de tiempo y cambia su cantidad de movimiento $\vec{p}_{t_0} \to \vec{p}_{t_0+\tau}$. La cantidad físicamente importante es el valor de la integral y puede asociarse al impulso que se le provee al cuerpo para sacarlo del reposo.

Otra de las aplicaciones naturales e intuitiva corresponde a la descripción de la densidad de carga para cargas puntuales, tanto individuales como en arreglos, de una, dos y tres dimensiones.

El caso más emblemático de las distribuciones lo constituye la función delta de Dirac, una "función" que es cero en todo punto menos en uno que infinita. Si bien ese tipo de funciones toma el nombre de Dirac, fueron propuestas a finales del siglos XIX por Fourier y Cauchy a finales del siglo XIX.

A continuación las presentamos siguiendo el esquema de Sovolev haciendo uso del concepto de funcional lineal que discutimos en la sección 3.1.

Borrador Preliminar

3.5.1 Funciones de prueba

Como hemos dicho las distribuciones de Schwartz, funciones generalizadas o, simplemente distribuciones, son objetos que generalizan la noción clásica de funciones en el análisis matemático. Se utilizan ampliamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, donde puede ser más fácil establecer la existencia de soluciones distribucionales que de soluciones clásicas. Comenzaremos con definir funciones de prueba y el soporte para estas funciones.

Consideremos la siguiente función

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases} .$$

Diremos que una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi\left(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\right)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de $\mathbb{R}^n$ e idénticamente nula fuera éste. Mas aún, hay funciones cuyo soporte puede ser un solo punto en el dominio. Además, nos podemos convencer fácilmente que estas funciones $\psi = c^1\phi_1 + c^2\phi_2$, forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}^n$ lo representaremos como $\boldsymbol{V}$ y a K se le denomina el soporte de ϕ.

3.5.2 Distribuciones y deltas de Dirac

Utilizaremos el concepto de funcional que discutimos en la sección 3.1 para definir una distribución de la forma

$$\mathcal{F}\left[|\phi\rangle\right] \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}_f\left[|\phi\rangle\right] \equiv \langle f\,|\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}\,,$$

donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.

Siguiendo este esquema podemos definir la distribución $\delta_{(0)}$ definida en $\mathbb{R}$, como

$$\mathcal{F}_{\delta_{(0)}}\left[|\phi\rangle\right] \equiv \langle\delta_{(0)}\,|\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(0)}\phi(x)\mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0), \quad \forall\phi(x_0) \in \mathbb{R}\,.$$

El soporte de $\delta_{(0)}$ es el punto $x = 0$ de $\mathbb{R}$. Esto significa que **únicamente** en ese punto la función es distinta de cero. En Física este tipo de objetos se conoce como **deltas de Dirac** y los encontramos frecuentemente, cuando consideramos una masa (o una carga) puntual su función densidad de masa (o de carga) asociada: es infinita en un punto y cero en el resto del espacio. La **delta de Dirac** "generaliza" la delta de Kronecker δ_{ij} que definimos en la sección 1.4.1 como una cantidad que toma valores discretos: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. La delta de Dirac, $\delta(x - x_0) \equiv \delta(x, x_0)$, es la extensión de este objeto matemático cuando los índices toman valores continuos. En la próxima sección 3.6.1, haremos uso de esta propiedad para construir bases continuas de un espacio vectorial.

Esto nos permite definir la "función" delta de Dirac como el límite de una sucesión de la forma

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \delta_{(0)} \equiv \delta(x) \to \infty & \text{si} \quad x \to 0 \\ \\ \delta(x) = 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

En el límite $n \to \infty$ tendremos una "función" que se anula en todos los puntos $x \neq 0$ e infinitamente derivable. Nótese que, siguiendo la costumbre en Física, aquí estamos escribiendo $\delta_{(0)} = \delta(x)$.

Borrador Preliminar

Para convencernos de la existencia de este tipo de funciones en Matemáticas podemos considerar una sucesión funciones gaussianas:

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} ,$$

tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \mathrm{d}x = 1 , \ n > 0 .$$

A medida que el parámetro n aumenta su valor, la curva gaussiana $\delta_n(x)$ será cada vez más alta y más angosta, y si $n \to \infty$ la curva será entonces infinitamente más alta e infinitamente más angosta, pero siempre conservando que el área bajo la curva será igual a la unidad. Cada una de las funciones $\delta_n(x)$ es infinitamente derivable.

Figura 3.5: $\delta_n(x)$ para tres valores diferentes de n.

3.5.3 Distribuciones y sucesiones

La forma que le dimos a la sucesión δ_j es muy particular. En general uno podría definir las distribuciones como el límite de una familia, $\{f_j(x)\}$, de funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$f(x) = \lim_{j \to j_0} f_j \quad \Rightarrow \lim_{j \to j_0} \mathcal{F}_{f_j} [|\phi\rangle] \equiv \lim_{j \to j_0} \langle f_j \, |\phi\rangle = \lim_{j \to j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \mathrm{d}^n \mathbf{x} .$$

Así, una expresión equivalente a la que ensayamos anteriormente

$$f_j(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4j}}}{\sqrt{4\pi j}} \quad \text{para } j \to 0 ,$$

se conoce con el nombre de kernel de Gauss. Mientras que la familia

$$\{f_r(\theta)\} \quad \Rightarrow f_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \right) & \text{si } |\theta| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |\theta| > \pi \end{cases} \quad \text{para} \quad r \to 1 ,$$

se le conoce como el kernel de Poisson. Finalmente la familia $\{f_k(x)\}$

$$f_k(x) = \begin{cases} \sum_{m=-k}^{k} \frac{1}{2\pi} e^{imx} & \text{si } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |x| > \pi \end{cases} , \quad \text{para} \quad k \to \infty ,$$

constituirá el kernel de Dirichlet:

De igual forma podremos construir la distribución $\delta_{(x_0)}$ con soporte en el punto x_0 de $\mathbb{R}$, definida por

$$\mathcal{F}_{\delta_{(x_0)}} [|\phi\rangle] \equiv \langle \delta_{(x_0)} \, |\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(x_0)} \phi(x) \mathrm{d}x \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \phi(x) \mathrm{d}x = \phi(x_0), \quad \forall \phi(x_0) \in \mathbb{R} .$$

Igual que en caso anterior, en este caso podemos imaginar una sucesión de funciones gausianas donde x_0 es el punto donde alcanza su valor máximo. Entonces

$$\delta_n(x - x_0) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2} \quad \Rightarrow \delta(x - x_0) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2} .$$

Borrador Preliminar

3.5.4 Algunas propiedades de las distribuciones

Como construimos las distribuciones como funcionales y demostramos en la sección 3.1.1, las distribuciones formarán un espacio vectorial dual. De esta forma

$$\mathcal{F}_f\left[|\phi\rangle\right] + \mathcal{F}_g\left[|\phi\rangle\right] = \mathcal{F}_{f+g}\left[|\phi\rangle\right] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}_f\left[|\phi\rangle\right] + \mathcal{F}_f\left[|\xi\rangle\right] = \mathcal{F}_f\left[|\phi+\xi\rangle\right] .$$

En el primer caso mostramos que la suma de distribuciones es una distribución y en el segundo caso que las suma de dos funciones de prueba es también una función de prueba.

Si consideramos una distribución $\mathcal{F}_f\left[\phi(x)\right]$ y su derivada $\mathcal{F}_{f'}\left[\phi(x)\right]$, entonces se cumple que

$$\mathcal{F}_{f'}\left[\phi(x)\right] = -\mathcal{F}_f\left[\phi'(x)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x .$$

La demostración es clara cuando utilizamos la integración por parte el hecho de que las funciones de prueba tienen soporte acotado. De esta manera

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \underbrace{f^{(}x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \mathcal{F}_{f'}\left[\phi(x)\right] = -\mathcal{F}_f\left[\phi'(x)\right] ,$$

es decir,

$$\mathcal{F}_{f'}\left[\phi(x)\right] = -\mathcal{F}_f\left[\phi'(x)\right] \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta'(x-x_0) = -f'(x_0) ,$$

y en general

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta^{(n)}(x-x_0) = (-1)^n f^{(n)}(x_0) .$$

El caso mas representativo de esta propiedad es cuando nos planteamos calcular la derivada para la función escalón, $\Theta(x)$ de *Heaviside* en $\mathbb{R}$. Una función localmente integrable, tal que $\Theta(x) = 0$ cuando $x < 0$ y $\Theta(x) = 1$ cuando $x > 0$, entonces

$$\mathcal{F}_{\Theta(x)'}\left[\phi(x)\right] = -\mathcal{F}_{\Theta(x)}\left[\phi'(x)\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \phi(0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x) ,$$

en el sentido de las distribuciones, porque $\phi(x)$ es una función de prueba con soporte compacto: $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$.

Hay algunas propiedades escalamiento para las distribuciones que se pueden derivar de manera inmediata, y las mostraremos para el caso particular la Delta de Dirac en $\mathbb{R}$. Así tendremos

$$\langle\delta(x/\alpha)\,|\phi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x/\alpha)\phi(x)\mathrm{d}x = |\alpha|\int_{\mathbb{R}} \delta(y)\phi(\alpha y)\mathrm{d}y = |\alpha|\,\langle\delta(x)\,|\phi(x)\rangle ,$$

que se puede escribir como $\delta(x/\alpha) = |\alpha|\delta(x/\alpha)$ en el sentido distribucional.

Claramente, una de las relaciones mas útiles es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta\left(x-x_0\right)\mathrm{d}x = f\left(x_0\right) ,$$

es decir: la $\delta(x-x_0)$ obliga a la función de prueba a evaluarse en el punto $x = x_0$. Nos podemos convencer rápidamente de esta importante relación, si utilizamos cualquier de las sucesiones δ_n las cuales, en el límite con $n \to \infty$, representan una distribución. Recordemos que cada una de las sucesiones son funciones continuas y continuamente diferenciables. Entonces es fácil convencernos que para cada n se cumple

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_n\left(x-x_0\right)\mathrm{d}x &\approx \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\delta_n\left(x-x_0\right)\mathrm{d}x \\ &\approx f\left(x_0\right)\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta_n\left(x-x_0\right)\mathrm{d}x \\ &\approx f\left(x_0\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n\left(x-x_0\right) = f\left(x_0\right) .\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

La aproximación de la segunda línea se entiende porque $f(x)$ es casi constante en intervalo infinitesimal $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$. La tercera aproximación es un resultado del valor despreciable de δ_n fuera de ese intervalo, y la igualdad se logra porque δ_n es una función de densidad lineal. Al tomar el límite de $n\to\infty$ tendremos que δ_n se convierte en la función delta de Dirac. Es inmediato convencerse también que estas relaciones se cumplen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos y\,\delta(y-\pi)\,\mathrm{d}y=-1,\quad \text{y}\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sen} z\,\delta(z)\,\mathrm{d}z=0\,.$$

Ahora bien, si el argumento de la función delta de Dirac cambia de escala tendremos:

$$\delta(\alpha x)=\frac{\delta(x)}{\alpha}\,,\qquad \alpha>0.$$

Para demostrarlo podemos hacer siguiente cambio de variable: $y=\alpha x$, con lo cual

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(\alpha x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}y=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)\mathrm{d}y=\frac{f(0)}{\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x\,,$$

por lo tanto: $\delta(\alpha x)=\frac{\delta(x)}{\alpha}$. La condición $\alpha>0$ se debe tener en cuenta porque la función delta de Dirac es par, es decir, $\delta(\alpha x)=\delta(-\alpha x)$. De manera que resulta más apropiado escribir:

$$\delta(\alpha x)=\frac{\delta(x)}{|\alpha|}\,.$$

Si una distribución tiene como argumento una función tendremos que:

$$\delta(g(x))=\sum_{\alpha}\frac{\delta\left(x-\alpha\right)}{|g'(\alpha)|}\,,\quad g(\alpha)=0\ \wedge\ g'(\alpha)\neq 0\,.$$

Podemos ver que para la función $g(x)$, en los intervalos donde se hace cero, se tiene:

$$g(x)\approx g(\alpha)+(x-\alpha)g'(\alpha)\,,\quad -\varepsilon<\alpha<\varepsilon\,.$$

Otra vez, cambiamos de variable y sumamos para todos esos intervalos:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(g(x))\mathrm{d}x=\sum_{\alpha}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}f(x)\delta\left((x-\alpha)g'(\alpha)\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sum_{\alpha}\frac{\delta\left(x-\alpha\right)}{|g'(\alpha)|}\mathrm{d}x\,,$$

donde hemos utilizado el resultado del ejemplo anterior. Por lo tanto:

$$\delta(g(x))=\sum_{\alpha}\frac{\delta\left(x-\alpha\right)}{|g'(\alpha)|}\qquad \text{con } g'(\alpha)\neq 0\,.$$

Ejemplo 3.17 Evaluemos la siguiente integral

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\operatorname{sen}x\,\delta\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)\,.$$

Siguiendo el desarrollo anterior tendremos $g(x)=x^2-\frac{\pi^2}{4}$ con dos raíces $\alpha_\pm=\pm\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto en el segmento positivo tiene una raíz y la integral nos queda

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\operatorname{sen}x\,\delta\left(x^2-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}=\frac{1}{\pi}.$$

En el sentido distibucional podemos afirmar que en general se cumple que

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]\,.$$

Por otro lado, es inmediato constatar que $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)\,\delta(x^2+a^2)=0$, para cualquier función $f(x)$ dado que $g(x)=x^2+a^2$ no tiene raíz real.

◁

Ejemplo 3.18 Podemos representar una cadena de cargas (positivas y negativas) equiespaciadas como

$$\rho(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q\delta(x-na),$$

Borrador Preliminar

donde a representa la distancia entre las cargas, y nuestra cadena está constituida por una carga positiva seguida de una negativa.

◁

3.5.5 Distribuciones en varias dimensiones

Como hemos construido la noción de distribución a partir del concepto de funcionales lineales, podemos también utilizar el producto tensorial definido en la sección 3.2.2 para extender las distribuciones a varias dimensiones. Así, en coordenadas cartesianas

$$\mathcal{F}_{\delta_{(x_0)}}\left[|\phi\rangle\right] \otimes \mathcal{F}_{\delta_{(y_0)}}\left[|\phi\rangle\right] \otimes \mathcal{F}_{\delta_{(z_0)}}\left[|\phi\rangle\right] = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\phi(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \phi(x_0,y_0,z_0),$$

Del mismo modo, la generalización de las distribuciones a varias dimensiones es intuitiva a partir de la idea de sucesiones. En este caso podemos imaginar una sucesión de funciones gausianas bidimensionales donde en el punto x_0, y_0 la función alcanza su valor máximo. Al igual que en el caso unidimensional la distribución se alcanza en el límite de la sucesión, $\delta(x-x_0, y-y_0) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x-x_0, y-y_0)$, es decir

$$\delta_n(x-x_0, y-y_0) = Ce^{-n(x-x_0)^2}e^{-n(y-y_0)^2} \quad \Rightarrow \delta(x-x_0, y-y_0) = \lim_{n\to\infty} C\mathrm{e}^{-n(x-x_0)^2}\mathrm{e}^{-n(y-y_0)^2}\,,$$

donde C corresponde a la normalización que dependerá de las coordenadas en las cuales se exprese la función delta de Dirac. Para este caso de una delta bidimensional en coordenadas cartesianas $C = 1$.

En general nuestra definición general inicial

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_0}) = \lim_{j\to j_0} \delta_j(\mathbf{x}-\mathbf{x_0}) \quad \Rightarrow \lim_{j\to j_0} \mathcal{F}_{f_j}\left[|\phi\rangle\right] \equiv \lim_{j\to j_0} \langle f_j\,|\phi\rangle = \lim_{j\to j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

ahora se concreta en la integración en una región Ω descrita en coordenadas cartesianas y polares respectivamente

$$\int\int_\Omega \mathrm{d}A\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0}) \equiv \int \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\underbrace{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}A} \equiv \int \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{C}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi)\underbrace{\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}A} = 1$$

En general, en el sentido distribucional tendremos

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0}) \equiv \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}\delta(q-q_1)\delta(q-q_2)\,,$$

donde las q_1 y q_2 son las coordenadas generalizadas, mientras que los h_1 y h_2 son los factores de escala. Tal y como discutiremos en detalle en la sección 5.1, el diferencial de área en coordenadas generalizadas viene representado por $\mathrm{d}A = h_1\mathrm{d}q_1\,h_2\mathrm{d}q_2$.

Ejemplo 3.19 Una distribución superficial de carga eléctrica puede escribirse de manera sencilla utilizando la delta de Dirac a través de la siguiente integral de área:

$$q = \int_\Omega \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}A\,,$$

de manera que para una carga puntual localizada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ se tiene que:

$$q = q\underbrace{\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathrm{d}A}_{=1} = \int_\Omega \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}A \quad \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi)\,.$$

◁

Ejemplo 3.20 Podemos generalizar el ejemplo 3.18 para el caso bidimensional, de tal manera que la densidad superficial de carga, para un arreglo rectangular de cargas positivas y negativas alternadas por filas y columnas las podemos representar como

$$\sigma_q(x,y) = q\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{i+j}\delta(x-ia)\delta(y-bj)\,.$$

Borrador Preliminar

Claramente las celda primitiva es un rectángulos de area $a \times b$, espaciadas por una distancia a en x y b en y. Si ahora la misma cadena lineal del ejemplo 3.18 describe una función $y = g(x)$ tendremos

$$\sigma_q(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \delta(x - x_k)\delta(y - g(x_k))\,.$$

Supongamos una cadena de cinco cargas positivas equiespaciadas, dispuestas una semicircunsferencia de radio R, con $y \geq 0$, la densidad lineal de carga será

$$\begin{aligned}\sigma_q(x,y) = \quad & q\left\{\delta(x-R)\delta(y) + \delta\left(x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)\delta\left(y - \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right) + \delta(x)\delta(y-R) + \right.\\ & \left. + \delta\left(x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)\delta\left(y - \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right) + \delta(x+R)\delta(y)\right\}\,,\end{aligned}$$

y equivalentemente en coordenadas polares como

$$\sigma_q(\rho,\phi) = \frac{q\delta(\rho - R)}{R}\left\{\delta(\phi) + \delta\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\phi + \frac{3\pi}{4}\right) + \delta(\phi - \pi)\right\}.$$

◁

La generalización al caso tridimensional es inmedita y siguiendo el sentido distribucional podemos escribir

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \equiv \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}\frac{1}{h_3}\delta(q - q_1)\delta(q - q_2)\delta(q - q_3)\,,$$

con lo cual lo podremos escribir en coordenadas, cartesianas, cilíndricas y esféricas como

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_0}) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) = \frac{1}{\rho_0}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_1) = \frac{1}{r_0^2 \operatorname{sen}\theta_0}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(\theta-\theta_0)\,,$$

respectivamente.

Ejemplo 3.21 Consideremos la misma cadena de cargas (positivas y negativas), equiespaciadas y las supondremos dispuesta a lo largo del eje z. El potencial electrostático para una distribución discreta y contínua de cargas se escriben

$$V_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad \Leftrightarrow \quad V_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R \frac{\rho\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3 r'\,,$$

respectivamente.

En coordenadas cartesianas

$$V_{\mathbf{E}}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x'}\int_{y'}\int_{z'} \frac{\rho(x',y',z')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\,,$$

incorporando la densidad de carga en término de las deltas, obtendremos

$$V_{\mathbf{E}}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \int_{x'}\int_{y'}\int_{z'} \frac{\delta(x')\delta(y')\delta(z'-ka)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}\,,$$

y finalmente el potencial

$$V_{\mathbf{E}}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-ka)^2}}\,.$$

◁

3.5.6 Ejercicios

1. Demuestre algunas de las propiedades de las distribuciones a partir de las siguientes sucesiones
   (a). Si

$$\delta_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & x < \frac{1}{2n} \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)\mathrm{d}x\,,$$

Borrador Preliminar

(b). Si:

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2} \quad \Rightarrow x\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} = -\delta(x)\,.$$

2. Compruebe las siguientes relaciones
   (a). Para argumentos simples de la función $\delta(x - x_0)$ demuestre
      I. $\int_0^{+\infty} \cos y\, \delta(y+\pi)\mathrm{d}y = 0$, y $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\frac{y}{2}\, \delta(y-\pi)\mathrm{d}y = 0\,;$
      II. $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^t\, \delta(t)\mathrm{d}t = 1$, y $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \delta(x)\mathrm{d}x = 0\,;$
      III. $\int_{-\infty}^{3.7} \ln t\, \delta(t-\mathrm{e})\mathrm{d}t = 0$, y $\int_{-\infty}^{3.8} \ln t\, \delta(t-\mathrm{e})\mathrm{d}t = 1\,.$
   (b). Para argumentos funcionales $\delta(g(x))$ demuestre
      I. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sen}\,|t|\, \delta\left(t^2 - \pi^2/4\right) \mathrm{d}t = 2/\pi$, y $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\, \delta\left(x^2 - \pi^2\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}$;
      II. $\int_0^{\infty} \ln z\, \delta\left(z^2 - 1\right) \mathrm{d}z = 0$, y $\int_{-\infty}^{+3} \cos y\, \delta\left(y^2 + \pi^2\right) \mathrm{d}y = 0$;
      III. $\int_{-\pi}^{+\pi} (t+1)^2\, \delta(\mathrm{sen}\,\pi t)\mathrm{d}t = 35/\pi$, y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta\left(\mathrm{e}^t - 1\right) \mathrm{d}t = f(0)$;
      IV. $\int_0^{\infty} \ln x\, \delta\left(10x^2 + 3x - 1\right) \mathrm{d}x = -0.23\,,$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \delta\left(\mathrm{e}^t\right) \mathrm{d}t = 0\,.$
3. Evalue las siguientes integrales
   (a). $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta\left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta\left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$
   (b). $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta\left(x^3 + 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi \mathrm{e}^x}{2}\right) \delta\left(x^4 + 1\right) \mathrm{d}x$
   (c). $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}^{-1}(1/x)\delta\left(x^4 - 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\delta\left(6x^2 - x - 1\right) \mathrm{d}x$
   (d). $\int_{-0.1}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi \mathrm{e}^x}{2}\right) \delta\left(x^2 + x\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta\left(\mathrm{e}^x \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$
   (e). $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2} \delta'\left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2} \delta'\left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$
   (f). $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2} \delta'\left(x^3 + 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi \mathrm{e}^x}{2}\right) \delta'\left(x^4 + 1\right) \mathrm{d}x$
   (g). $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2} \delta'\left(x^3 + 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi \mathrm{e}^x}{2}\right) \delta'\left(x^4 + 1\right) \mathrm{d}x$
   (h). $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2} \delta'\left(x^3 + 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi \mathrm{e}^x}{2}\right) \delta'\left(x^4 + 1\right) \mathrm{d}x$
   (i). $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}^{-1}(1/x)\delta'\left(x^4 - 1\right) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\delta'\left(6x^2 - x - 1\right) \mathrm{d}x$
4. Grafique o describa las siguientes distribuciones de carga
   (a). $\rho_q(x,y,z) = \delta(x)\delta(y)\{2\delta(z) - 3\delta(z+3)\}$
   (b). $\rho_q(x,y,z) = 5\delta(x+1)\delta(y-1)\{\delta(z-1) - \delta(z+1)\}$
   (c). $\rho_q(\rho,\varphi,z) = -2\delta(\rho-3)\delta(\varphi-\pi)\delta(z)$
   (d). $\rho_q(\rho,\varphi,z) = 2\delta\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\delta(z)\left\{\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\delta(\rho - 0.5k)\right\},$
   (e). $\rho_q(r,\theta,\varphi) = 2\delta\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\delta(r-2)\left\{\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\delta\left(\theta - \frac{\pi}{20}k\right)\right\},$
5. Dado un arreglo de cargas bidimensional rectangular descrito por

$$\sigma_q(x,y) = q\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{i+j}\delta(x-ia)\delta(y-bj)\,,$$

   el cual se encuentra dispuesto en el plano $z = 0$.
   (a). Escriba la expresión para la densidad de carga espacial $\rho_q(x,y,z)$;
   (b). Calcule el potencial electrostático en los puntos $(0,0,a)$ y $(0,a,2a)$;
   (c). Calcule también el campo eléctrico para un punto genérico (x_0,y_0,z_0).
6. Considere N cargas de igual signo y magnitud q_i dispuestas, a igual distancia, en un círculo de radio R sobre el plano $x - y$. Suponga que la carga q_1 está la posición $(R,0,0)$.
   (a). Escriba la expresión para la densidad de carga espacial ρ_q en coordenadas cilíndricas ;
   (b). Calcule el potencial electrostático en los puntos $(0,0,R)$, $(0,R,2R)$ y $(3R,0,0)$;
   (c). Calcule también el campo eléctrico para un punto genérico (ρ_0,ϕ_0,z_0);
   (d). Si el arreglo es de seis cargas, $N = 6$ y calcule el potencial electrostático en el punto $(3R,0,0)$.

Borrador Preliminar

3.6 Bases continuas y de ondas planas

En esta sección aprovechamos una generalización del concepto de base para el espacio de funciones continuas para presentar, de forma operativa, la transformada de Fourier y explorar algunas de sus consecuencias. En particular construiremos la base de ondas planas que nos permitirá transitar entre la representación de una función entre el espacio de tiempos y su transformada al espacio frecuencia. Finalmente, desarrollaremos el concepto de las representaciones de coordenadas $|r\rangle$ y de momentos $|p\rangle$, usuales en las descripciones de funciones de onda en Mecánica Cuántica.

3.6.1 Bases continuas

Tal y como vimos anteriormente, la representación de un vector $|a\rangle$ en un espacio vectorial abstracto $\boldsymbol{V}$ puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita $B_{DF} = \{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle, \cdots |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle\}$ o discreta e infinita $B_{DI} = \{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle \cdots |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle \cdots\}$) de la forma:

$$|a\rangle = \begin{cases} c^i\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle = \langle\hat{\mathrm{e}}^i|a\rangle\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \ \Leftarrow\ B_{DF} = \{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle,\ |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle,\ |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle \cdots |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle\}\ , \\ \\ c^i\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle = \langle\hat{\mathrm{e}}^i|\ a\rangle\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \ \Leftarrow\ B_{DI} = \{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle,\ |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle \cdots |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle \cdots\}\ , \end{cases}$$

donde, en ambos casos:

$$c^i = \langle\hat{\mathrm{e}}^i|a\rangle = c^j\ \langle\hat{\mathrm{e}}^i|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = c^j\ \delta^i_j\,.$$

Recapitulemos ahora algunos puntos que hemos tratado con anterioridad, con el fin de aclarar conceptos, para el caso de bases discretas de funciones $\{|\mathrm{e}_i(x)\rangle\}$. Hemos considerado varios de estos casos, como lo son polinomios de Legendre –que consideramos en el ejemplo 3. cuando ortogonalizamos la base de monomios $\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\}$– y las series de Fourier que discutimos en el ejemplo 2.17.

Es claro que la relación de ortogonalidad viene dada, como hemos mencionado en 2.2.3.1, a partir de la definición del producto interno:

$$\langle\mathrm{e}^n(x)|\mathrm{e}_m(x)\rangle = \int_a^b \mathrm{e}^*_n(x)e_m(x)\mathrm{d}x = \Theta_n\delta^n_m\,, \tag{3.18}$$

y que implica una norma definida como:

$$\||\mathrm{e}_i(x)\rangle\|^2 = \langle\mathrm{e}_n(x)|\mathrm{e}_n(x)\rangle = \int_a^b |e_n(x)|^2\mathrm{d}x = \Theta_n\,. \tag{3.19}$$

Entonces, en esta notación la base será ortonormal si $\Theta_n = 1$.

Entonces, cualquier función cuadrado integrable,

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x \neq \infty\,, \tag{3.20}$$

puede ser expresada como una combinación lineal de la base $\{|\mathrm{e}_i(x)\rangle\}$ de la forma

$$|f(x)\rangle = C^i|\mathrm{e}_i(x)\rangle\,. \tag{3.21}$$

Donde las cantidades C^i, son las componentes de $|f(x)\rangle$ y se obtienen como siempre

$$\langle\mathrm{e}^i(x)|f(x)\rangle = C^j\langle\mathrm{e}^i(x)|\mathrm{e}_j(x)\rangle = C^j\delta^i_j = C^i = \int_a^b f(x)\mathrm{e}^*_i(x)\mathrm{d}x\,, \tag{3.22}$$

Podemos cambiar $i \to n$ y $x \to x'$, sin que nada se altere, y obtenemos

$$C^n = \int_a^b f(x')\mathrm{e}^*_n(x')\mathrm{d}x'\,. \tag{3.23}$$

Borrador Preliminar

Por lo tanto:

$$|f(x)\rangle = C^n|\mathrm{e}_n(x)\rangle \quad \Rightarrow |f(x)\rangle = \sum_n \left[\int_a^b f(x')\mathrm{e}_n^*(x')\mathrm{d}x'\right]|\mathrm{e}_n(x)\rangle = \sum_n \int_a^b f(x')\mathrm{e}_n^*(x')\mathrm{e}_n(x)\mathrm{d}x' ,$$
$$= \int_a^b f(x')\sum_n \mathrm{e}_n^*(x')\mathrm{e}_n(x)\mathrm{d}x' .$$

Ahora, identificando la distribución delta de Dirac tendremos

$$f(x) = \int_a^b f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x' = \int_a^b f(x')\left[\sum_n \mathrm{e}_n^*(x')\mathrm{e}_n(x)\right]\mathrm{d}x' \quad \Rightarrow \delta(x-x') = \sum_n \mathrm{e}_n^*(x')\mathrm{e}_n(x) .$$

Esta última relación viene a ser una generalización de la relación de cierre de las bases discretas e infinitas $\{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle, |\hat{\mathrm{e}}_3\rangle \cdots |\hat{\mathrm{e}}_n\rangle \cdots\}$, mencionada en la sección 2.3.4. Se conoce como *condición de completidud* para la base $\{|\mathrm{e}_i(x)\rangle\}$. Además, también resulta ser una representación en serie para la delta de Dirac. De todo esto surgen algunas propiedades fundamentales:

- Se dice que el conjunto $\{|\mathrm{e}_i(x)\rangle\}$ es *completo* si para $|f(x)\rangle = C^i|\mathrm{e}_i(x)\rangle$, entonces se tiene que:
$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_n |C^n|^2 .$$
- Si $|f(x)\rangle = C^i|\mathrm{e}_i(x)\rangle$ y $|g(x)\rangle = E^i|\mathrm{e}_i(x)\rangle$, entonces $\langle f(x)|g(x)\rangle = C_n^* E^n$.

Es posible pasar de estos espacios vectoriales discretos, donde las bases son un conjunto numerable de elementos $\{\mathrm{e}_n(x)\}$, a espacios vectoriales de funciones con las bases donde el índice n, se convierten en una variable continua.

Recordemos que en la sección 2.3.4 hablábamos de un conjunto de funciones $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle \cdots\}$ definidas por:

$$|\mathrm{e}_0\rangle = 1, \quad |\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx) \quad \text{y} \quad |\mathrm{e}_{2n}\rangle = \mathrm{sen}(nx), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \cdots ,$$

que denominamos la base discreta de Fourier. Base que también podemos escribir de la forma compleja, como:

$$|\hat{\mathrm{e}}_n(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}}\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{L}x} = \frac{1}{\sqrt{2L}}\mathrm{e}^{ikx}, \quad \text{con } n = -\infty \ldots \infty \text{ y } -L \leq x \leq L .$$

Cuando n aumenta indefinidamente, también lo hará la cantidad $k = \frac{n\pi}{L}$, convirtiéndose entonces en una variable continua: $\Delta k = \frac{\Delta n\pi}{L} \to 0$.

Notemos que los índices de la delta de Kronecker $\delta_{nm} = \delta_{nn'}$ pueden tomar los valores: $n = \frac{Lk}{\pi}, n' = \frac{Lk'}{\pi}$, y en el proceso de $L \to \infty$, tendremos

$$\delta_{nn'} \to \delta\left(\frac{Lk}{\pi} - \frac{Lk'}{\pi}\right) = \delta\left(\frac{L}{\pi}(k-k')\right) = \frac{\pi}{L}\delta\left(k-k'\right) .$$

De esta manera, la base ortonormal quedará escrita en función de las variables continuas k y x, de la forma

$$|\hat{\mathrm{e}}(k,x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ikx} .$$

El hecho de que sean ortonormales se refleja en la siguiente condición (que es una extensión de la expresión para el producto interno de bases discretas)

$$\langle\hat{\mathrm{e}}(k,x)|\hat{\mathrm{e}}(k,x)\rangle = \int_a^b \hat{\mathrm{e}}(k,x)^*\hat{\mathrm{e}}(k',x)\,\mathrm{d}x = \delta(k-k') , \quad \text{con} \quad \alpha \leq k \leq \beta ,\ a \leq x \leq b$$

Al ser el conjunto de funciones $\{|\hat{\mathrm{e}}(k,x)\rangle\}$ una base, toda función del mismo espacio vectorial se puede expandir en esa base como:

$$|f(x)\rangle = \int_\alpha^\beta \mathrm{C}(k)\hat{\mathrm{e}}(k,x)\mathrm{d}k ,$$

donde la función $\hat{\mathrm{e}}(k,x)$ se presenta como el núcleo de una transformación lineal, que consideraremos en detalle

Borrador Preliminar

en la sección 4.1 del próximo capítulo.

Como en el caso de las bases discretas, los coeficientes $\mathrm{C}(k)$ vienen a ser las componentes de $|f(x)\rangle$ y para calcularlos se procede en forma análoga a como lo hemos hecho con anterioridad

$$\langle \hat{\mathrm{e}}(k',x)|f(x)\rangle = \int_a^b \hat{\mathrm{e}}(k',x)^* f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \mathrm{C}(k)\left[\int_a^b \hat{\mathrm{e}}(k',x)^*\hat{\mathrm{e}}(k,x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}k = \int_\alpha^\beta \mathrm{C}(k)\delta(k-k')\mathrm{d}k = \mathrm{C}(k')\,.$$

Volvamos a cambiar la notación para los índices: $k' \to k$, $x \to x'$ en la última ecuación, de tal forma que

$$\mathrm{C}(k) = \int_a^b \hat{\mathrm{e}}(k,x')^* f(x')\mathrm{d}x'\,,$$

por lo tanto,

$$|f(x)\rangle = \int_\alpha^\beta \mathrm{C}(k)|\hat{\mathrm{e}}(k,x)\rangle\mathrm{d}k = \int_a^b f(x')\left[\int_\alpha^\beta \hat{\mathrm{e}}(k,x')^*\hat{\mathrm{e}}(k,x)\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}x' = \int_a^b f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x'\,,$$

y

$$\int_\alpha^\beta \hat{\mathrm{e}}(k,x')^*\hat{\mathrm{e}}(k,x)\mathrm{d}k = \delta(x-x')\,,$$

será la relación de cierre para el conjunto no numerable de funciones ortonormales.

Una integral como la que nos permitió definir $\mathrm{C}(k)$, es

$$F(k) = \int_a^b f(x')\hat{\mathrm{e}}(k,x')^*\mathrm{d}x' \quad \Rightarrow |f(x)\rangle = \int_\alpha^\beta F(k)\hat{\mathrm{e}}(k,x)\mathrm{d}k\,,$$

es lo que se denomina una transformada de $f(x)$ y la presentaremos en la sección sección 4.1 en el contexto de las transformaciones lineales.

En el espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable $\mathcal{L}^2$, definidas en $\mathbb{R}^3$, tendremos que

$$|F\rangle = c^i\,|\mathrm{e}_i\rangle \equiv \langle \mathrm{e}^i|F\rangle\,|\mathrm{e}_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3r'\xi_i^*\left(\mathbf{r}'\right)\;f(\mathbf{r}')\right)|\mathrm{e}_i\rangle\,,$$

y cambiando un poco la notación se reescribe en términos de funciones como

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3r'\xi_i^*(\mathbf{r}')\;f(\mathbf{r}')\right)\xi_i(\mathbf{r})\,.$$

Es claro que se pueden intercambiar los símbolos de $\int$ y $\sum$, por lo cual tendremos

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3r'\;f(\mathbf{r}')\underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty}\xi_i^*(\mathbf{r}')\xi_i(\mathbf{r})\right]}_{\mathcal{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})}\,,$$

la función $\mathcal{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$, que depende de los argumentos $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}$, "vive" dentro de las integrales y representa el núcleo de una transformación lineal,

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3r'\;f(\mathbf{r}')\;\mathcal{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\,,$$

de forma que, puede representar a las distribuciones que de la forma

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3r'\;f(\mathbf{r}')\;\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\,.$$

En resumen, la generalización de bases discretas a continuas se hace transformando el índice de la sumatoria en la variable de una integral, vale decir:

$$|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\;c(\alpha)\;|w_\alpha\rangle \quad \Rightarrow c(\beta) = \langle w^\beta|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\;c(\alpha)\;\langle w^\beta|w_\alpha\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\;c(\alpha)\;\delta(\alpha-\beta)\,.$$

Así, para los conceptos expresados hasta ahora se tiene la siguiente tabla resumen:

Borrador Preliminar

Propiedad\Base	Discreta	Continua
Ortogonalidad	$\langle u^i \vert u_j\rangle = \delta^i_j$	$\langle w^\beta \vert w_\alpha\rangle = \delta(\alpha-\beta)$
Cierre	$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \vert u_j\rangle\langle u^j\vert$	$1 = \int \mathrm{d}\alpha\, \vert w_\alpha\rangle\langle w^\alpha\vert$
Expansión	$\vert F\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i \vert u_i\rangle$	$\vert\Psi\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\, c(\alpha)\, \vert w_\alpha\rangle$
Componentes	$c^i = \langle u^i \vert F\rangle$	$c(\beta) = \langle w^\beta \vert \Psi\rangle$
Producto Interno	$\langle G\vert F\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g^{i*} f_i$	$\langle G\vert F\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\, g^*(\alpha)\, f(\alpha)$
Norma	$\langle F\vert F\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \vert f_i\vert^2$	$\langle F\vert F\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\, \vert f(\alpha)\vert^2$

3.6.2 Bases de ondas planas y la transformada de Fourier

En esta sección consideraremos un tipo muy particular de base contínua: la base de ondas planas En las teorías de oscilaciones es de gran importancia considerar el problema de la transformada de Fourier y vimos que una función $f(x)$ puede representarse de la forma:

$$|f(x)\rangle = \int_\alpha^\beta \mathrm{C}(k)\mathrm{e}(k,x)\mathrm{d}k\,.$$

Si la función $f(x)$ está definida en $(-\infty,\infty)$ y si tomamos al conjunto de vectores base a las funciones continuas ortonormales $\{\hat{\mathrm{e}}(k,x)\}$ como $\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\}$, entonces la integral anterior la podemos escribir de la forma,

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k\,. \tag{3.24}$$

Si ahora utilizamos la relación de ortogonalidad: $\langle \mathrm{e}(k,x)|\mathrm{e}(k,x)\rangle = \int \mathrm{e}(k,x)\mathrm{e}(k',x)^*\,\mathrm{d}x = \delta(k-k')$, resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta(k-k')\,,$$

donde

$$|\mathrm{F}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\,.$$

A las variables x y k se les denominan variables conjugadas de Fourier (no conjugadas como en variable compleja) y a $\mathrm{F}(k)$ la transformada de Fourier de $f(x)$ (y viceversa).

Notemos que si sustituimos $\mathrm{F}(k)$ en la otra integral, ecuación (3.24), entonces tendremos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ik(x-x')}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x' \quad \Rightarrow |f(x')\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x')\,\mathrm{d}x'\,.$$

Por otra parte, podemos ver que la integral para $\mathrm{F}(k)$ se puede hacer en dos partes:

$$|\mathrm{F}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Si sustituimos $x \to -x$, en la primera integral de la ecuación anterior resulta:

$$|\mathrm{F}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(-x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Podemos considerar entonces dos casos:

- Si la función es par, $f(x) = f(-x)$:

$$|\mathrm{F}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^\infty f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\,,$$

  entonces, al hacer $\mathrm{F}(k) = \mathrm{F}(-k)$ se tiene:

$$|f(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{F}(k)\cos(kx)\,\mathrm{d}k\,.$$

Borrador Preliminar

Estas dos funciones se conocen como las transformadas coseno de Fourier.

- Si la función es impar, $f(x) = -f(-x)$:

$$|\mathrm{F}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_0^\infty f(-x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty f(-x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right] = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ahora al hacer $\mathrm{F}(k) = -\mathrm{F}(-k)$ se tiene:

$$|f(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{\mathrm{F}}(k)\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}k\,,$$

donde $\tilde{F}(k) = iF(k)$ y tendremos las transformadas seno de Fourier.

La generalización a $\mathbb{R}^n$ es directa, si $f = f(\mathbf{r})$, entonces:

$$|f(\mathbf{r})\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^{\frac{1}{n}}\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty \mathrm{F}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\,\mathrm{d}\mathbf{k}\,,$$

donde $\mathrm{d}\mathbf{k} = \mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3\ldots\mathrm{d}k_n$. Para la transformada:

$$|\mathrm{F}(\mathbf{k})\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^{\frac{1}{n}}\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty f(\mathbf{r})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

con $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\ldots\mathrm{d}x_n$, representa el elemento de volumen en $\mathbb{R}^n$.

3.6.2.1 Ondas planas

Como un ejemplo de lo anterior, consideraremos la base de las ondas planas. Si a k la llamaremos s y a la variable x el tiempo t, vale decir:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\; e^{ist}\; f(t) \quad\rightleftarrows\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}s\; e^{-ist}\; F(s)\,.$$

A la función $F(s)$ se le denomina la distribución espectral de $f(t)$ y a $|F(s)|^2$ la densidad espectral de la onda en el intervalo $[s, s+\Delta s]$. Por su parte la energía total es

$$E = \int_{-\infty}^\infty |F(s)|^2\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2\mathrm{d}t.$$

Es más común en Física expresar las transformadas en términos de la posición x y el momento p de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\; e^{i(px/\hbar)}\;\bar{\psi}(p) \quad\rightleftarrows\quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\; e^{-i(px/\hbar)}\;\psi(x)\,.$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en Mecánica Cuántica.

Estas relaciones pueden ser reinterpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua, $v_p(x)$, de la forma:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\;\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i(px/\hbar)}\right)}_{v_p(x)}\bar{\psi}(p) \quad\rightleftarrows\quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\;\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-i(px/\hbar)}\right)}_{v_p^*(x)}\psi(x)\,,$$

por lo cual:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p\; v_p(x)\;\bar{\psi}(p) \quad\rightleftarrows\quad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\; v_p^*(x)\;\psi(x)\,.$$

Diremos que la función $\psi(x)$ está expresada en la base de ondas planas $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{i(px/\hbar)}$. Entonces

- El índice p de $v_p(x)$ varía de forma continua entre $-\infty$ a ∞.
- Que $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{i(px/\hbar)} \notin \mathcal{L}^2$, es decir, no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado

Borrador Preliminar

integrable ya que su norma diverge:

$$\langle v_p|v_p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{2\pi\hbar} \to \infty\,.$$

- Que las proyecciones de $\psi(x)$ sobre la base de ondas planas son $\bar{\psi}(p) = \langle v_p|\psi\rangle$.
- La relación de cierre para esta base se expresa como:

$$1 = \int \mathrm{d}\alpha\, |v_\alpha\rangle\langle v_\alpha| \quad \rightleftarrows \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, v_p^*\left(x'\right)\, v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i[p(x'-x)/\hbar]} = \delta\left(x'-x\right)\,,$$

mientras que de la definición de producto interno se obtiene:

$$\langle v_{p'}|v_p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, v_{p'}^*(x)\, v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i[x(p'-p)/\hbar]} = \delta\left(p'-p\right)\,.$$

En este mismo orden de ideas, podemos construir otra base continua $\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$ a partir de las propiedades de la delta de Dirac. Esto es:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0\, \psi(\mathbf{r}_0)\, \underbrace{\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}_{\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})} \quad \rightleftarrows \quad \psi(\mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r\, \psi\left(\mathbf{r}\right)\, \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right)\,,$$

por lo cual la reinterpretación es inmediata:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0\, \psi(\mathbf{r}_0)\, \xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})\,, \quad \text{con} \quad \psi(\mathbf{r}_0) = \langle \xi_{\mathbf{r}_0}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r\, \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r})\,,$$

más aún, la ortogonalidad queda garantizada por la relación de cierre,

$$\langle \xi_{\mathbf{r}_0}|\xi_{\mathbf{r}_0}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0\, \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r})\, \xi_{\mathbf{r}_0}\left(\mathbf{r}'\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0\, \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right)\, \delta\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\right) = \delta\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}\right)\,,$$

al igual que

$$\langle \xi_{\mathbf{r}_0}|\xi_{\mathbf{r}_0'}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r\, \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r})\, \xi_{\mathbf{r}_0'}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r\, \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right)\, \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'\right) = \delta\left(\mathbf{r}_0'-\mathbf{r}_0\right)\,.$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.22 Podemos ver cómo es la transformada de Fourier de la derivada de una función. Si

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k) \mathrm{e}^{ikx}\, \mathrm{d}k \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}|f(x)\rangle = \frac{(ik)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k) \mathrm{e}^{ikx}\, \mathrm{d}k\,.$$

◁

Ejemplo 3.23 Encontremos la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}(\omega_0\, t) & -\frac{n\pi}{\omega_0} < t < \frac{n\pi}{\omega_0} \\ 0 & t < -\frac{n\pi}{\omega_0} \;\wedge\; t > \frac{n\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

La función $f(t)$ representa un tren de ondas finito con n ciclos en el intervalo dado, como se aprecia en la figura 3.6.

Por el hecho de ser $f(t)$ una función impar, podemos utilizar la transformada seno de Fourier:

$$\begin{aligned} |\mathrm{F}(\omega)\rangle &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{n\pi}{\omega_0}} f(t) \mathrm{sen}(\omega t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{n\pi}{\omega_0}} \mathrm{sen}(\omega_0 t) \mathrm{sen}(\omega t)\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Figura 3.6: $f(t)$ con: $n = 6$ y $\omega_0 = \pi$.

Borrador Preliminar

Resolviendo la integral obtenemos la distribución espectral:

$$|\mathrm{F}(\omega)\rangle = \frac{2\left[\omega_0 \operatorname{sen}(\tau\,\omega)\cos(n\pi) - \omega\,\cos(\tau\,\omega)\operatorname{sen}(n\pi)\right]}{\sqrt{2\pi}\,(\omega^2 - {\omega_0}^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\operatorname{sen}\left[\tau\,(\omega_0-\omega)\right]}{2(\omega_0-\omega)} - \frac{\operatorname{sen}\left[\tau\,(\omega_0+\omega)\right]}{2(\omega_0+\omega)}\right],$$

donde $\tau = \frac{n\pi}{\omega_0}$.

Se puede demostrar que los límites:

$$\lim_{\omega_0\to\infty} |\mathrm{F}(\omega)\rangle = \lim_{\omega\to\infty} |\mathrm{F}(\omega)\rangle = 0\,.$$

Se puede apreciar también que el primer término, de la expresión entre corchetes, es el de mayor relevancia debido a que en el denominador aparece la diferencia: $\omega_0 - \omega$.
En la Figura 3.7 se muestra la función de distribución y en ella podemos notar que a medida que n crece la función $|\mathrm{F}(\omega)\rangle$ es una delta de Dirac en $\omega = \omega_0 = \pi$.
Por otro lado, es fácil ver que los ceros ocurren cuando:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \pm\frac{1}{n}, \pm\frac{2}{n}, \pm\frac{3}{n}\ldots$$

Figura 3.7: $\mathrm{F}(\omega)$ con: $n = 6$ y $\omega_0 = \pi$.

◁

3.6.2.2 Las representaciones $|r\rangle$ y $|p\rangle$

A partir de las bases de ondas planas $v_{p_0}(x)$, y de distribuciones, $\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$, construimos las llamadas representaciones de coordenadas $|r\rangle$ y de momentos $|p\rangle$ de la forma siguiente.

Primero asociamos

$$\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \quad \rightleftarrows \quad |r_0\rangle \;\wedge\; v_{p_0}(x) \quad \rightleftarrows \quad |p_0\rangle\,.$$

De esta forma, dada las bases $\{\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})\}$ y $\{v_{p_0}(x)\}$ para el espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ definiremos dos "representaciones": la de coordenadas, $|r_0\rangle$, y la de momentos $|p_0\rangle$ de $\boldsymbol{V}$, respectivamente. De tal modo que,

$$\langle r_0|r_0'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3r\;\xi^*_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})\;\xi_{\mathbf{r}_0'}(\mathbf{r}) = \delta\left(r_0' - r_0\right) \quad \Rightarrow 1 = \int \mathrm{d}^3r_0\;|r_0\rangle\langle r_0|\,,$$

$$\langle p_0|p_0'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3r\;v^*_{p_0'}(\mathbf{r})\;v_{p_0}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3r\;\frac{1}{2\pi\hbar}e^{-i(\mathbf{r_0}\cdot\mathbf{p}_0/\hbar)} = \delta\left(\mathbf{p}_0' - \mathbf{p}_0\right) \quad \Rightarrow 1 \quad = \int \mathrm{d}^3p_0\;|p_0\rangle\langle p_0|\,.$$

Podemos entonces expresar el producto interno para la representación de coordenadas como

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \langle\Phi|\underbrace{\left(\int \mathrm{d}^3r_0\;|r_0\rangle\langle r_0|\right)}_{1}|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3r_0\;\phi^*(\mathbf{r}_0)\psi(\mathbf{r}_0)\,,$$

y equivalentemente para la representación de momentos

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \langle\Phi|\underbrace{\left(\int \mathrm{d}^3p_0\;|p_0\rangle\langle p_0|\right)}_{1}|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3p_0\;\phi^*(\mathbf{p}_0)\psi(\mathbf{p}_0)\,,$$

por lo cual hemos encontrado que

$$|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3r_0\;|r_0\rangle\langle r_0|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3p_0\;|p_0\rangle\langle p_0|\Psi\rangle\,,$$

$$\psi(\mathbf{r}_0) = \langle r_0|\Psi\rangle \qquad \text{y} \qquad \psi(\mathbf{p}_0) = \langle p_0|\Psi\rangle\,,$$

que es la representación de $|\Psi\rangle$ en coordenadas, $\psi(r_0)$, y en momentos, $\psi(p_0)$.

Borrador Preliminar

Adicionalmente cuando $|\Psi\rangle = |p\rangle$ tendremos que,

$$\langle r_0|p_0\rangle = \langle r_0|\underbrace{\left(\int \mathrm{d}^3 r_0' \, |r_0'\rangle\langle r_0'|\right)}_{1}|p_0\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3 r_0' \, \delta\left(\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0\right) \, e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}_0)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}_0)} \,,$$

con lo cual $\psi(p_0)$ puede considerarse la transformada de Fourier de $\psi(r_0)$, y denotaremos de ahora en adelante las bases $|r_0\rangle \equiv |r\rangle$ y $|p_0\rangle \equiv |p\rangle$.

Estos índices continuos, $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{p_0}$, representan tres índices continuos $\mathbf{r} \rightleftharpoons (x, y, z)$ y $\mathbf{p} \rightleftharpoons (p_x, p_y, p_z)$. La proyección de un vector abstracto $|\Psi\rangle$ en la representación $|r\rangle$ será considerada como su expresión en el espacio de coordenadas, igualmente su proyección $\langle p|\Psi\rangle$ será su expresión en el espacio de los momentos. Eso nos permitirá hacer corresponder los elementos de espacios vectoriales abstractos con elementos de un espacio vectorial de funciones. Por lo tanto todas las fórmulas de proyección quedan como:

$$\langle r|\Psi\rangle = \psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle p|\Psi\rangle = \psi(\mathbf{p}) \,.$$

mientras que las relaciones de cierre y ortonormalización son:

$$\langle r|r'\rangle = \delta\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}\right) \quad \text{y} \quad 1 = \int \mathrm{d}^3 r \, |r\rangle\langle r| \,,$$

$$\langle p|p\rangle = \delta\left(\mathbf{p}' - \mathbf{p}\right) \quad \text{y} \quad 1 = \int \mathrm{d}^3 p \, |p\rangle\langle p| \,.$$

Por su parte, la relación de cierre hará corresponder a la expresión del producto interno de dos vectores, tanto en la representación de las coordenadas como en la representación de momentos, en una de la forma:

$$\langle\Phi|\left(\int \mathrm{d}^3 r \, |r\rangle\langle r|\right)|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3 r \, \phi^*(\mathbf{r}) \, \psi(\mathbf{r}) \;\wedge\; \langle\Phi|\left(\int \mathrm{d}^3 p \, |p\rangle\langle p|\right)|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3 p \, \bar{\phi}^*(\mathbf{p}) \, \bar{\psi}(\mathbf{p}) \,,$$

donde $\bar{\phi}^*(\mathbf{p})$ y $\bar{\psi}(\mathbf{p})$ son las transformadas de Fourier de $\phi^*(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$, respectivamente. La afirmación anterior queda evidentemente demostrada del cambio entre las bases $|r\rangle$ y $|p\rangle$. Esto es:

$$\langle r|p\rangle = \langle p|r\rangle^* = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \, e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \,,$$

por lo cual:

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle r|\Psi\rangle = \langle r|\left(\int \mathrm{d}^3 p \, |p\rangle\langle p|\right)|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3 p \, \langle r|p\rangle\langle p|\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3 p \, e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \, \bar{\psi}(\mathbf{p}) \,,$$

e inversamente:

$$\psi(\mathbf{p}) = \langle p|\Psi\rangle = \langle p|\left(\int \mathrm{d}^3 r \, |r\rangle\langle r|\right)|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^3 r \, \langle p|r\rangle\langle r|\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3 r \, e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r}) \,.$$

3.6.3 Ejercicios

1. Dadas las siguientes funciones ortonormales:

   a) $|\hat{\mathrm{e}}(k,x)\rangle = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sen}(kx)\,, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\right\}$, con: $0 \leq k < \infty\,, -\infty \leq x < \infty\,.$

   b) $|\hat{\mathrm{e}}(k,x)\rangle = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right\}$, con: $-\infty \leq k < \infty\,, -\infty \leq x < \infty\,.$

   (a). Escriba las condiciones de ortogonalidad y cierre.

   (b). Demuestre:

   I. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}(kx)\mathrm{sen}(k'x)\mathrm{d}x = \pi\delta(k-k')$.

   II. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx)\cos(k'x)\mathrm{d}x = \pi\delta(k-k')$.

   III. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}(kx)\cos(k'x)\mathrm{d}x = 0$.

Borrador Preliminar

2. Encuentre las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} e^{-x}\,, & x>0 \\ \\ 0\,, & x<0 \end{cases} \qquad\qquad b)\quad f(x)=\begin{cases} h(1-a|x|)\,, & |x|<\frac{1}{a} \\ \\ 0\,, & |x|>\frac{1}{a} \end{cases}$$

3. Dada $F(\mathbf{k})$ como la transformada de Fourier, en tres dimensiones, de $f(\mathbf{r})$ y $F_d(\mathbf{k})$ la transformada de Fourier, tridimensional, de $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r})$. Demuestre que:

$$F_d(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k}(\mathbf{k})\,.$$

Practicando con Maxima

Estudiaremos en este módulo como calcular transformadas integrales de Fourier con **Maxima**. Disponemos de las siguientes funciones: **fourint**(f,x) que calcula y devuelve la lista de los coeficientes integrales de Fourier de $f(x)$ definida en el intervalo $(-\infty,\infty)$. La función **fourintcos** (f,x) que devuelve los coeficientes integrales de los cosenos $f(x)$ en $(0,\infty)$ y la función **fourintsin**(f,x) que retorna los coeficientes integrales de los senos $f(x)$ en $(0,\infty)$

Vamos a aclarar a que se refieren cuando se habla de los coeficientes integrales.

Para **Maxima** si $f(x)$ es una función definida en $(-\infty,\infty)$ la transformada de Fourier exponencial es:

$$F(f,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{izx}\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-izx}\mathrm{d}z\,.$$

Como vimos anteriormente podemos tener los siguientes casos:

- La función es par: $f(-x)=f(x)$, entonces: $F(f,-z)=F(f,z)$ y podemos utilizar la representación en transformadas coseno de Fourier:

$$F(f,z)=\frac{1}{2}F_{\text{cos}}(f,z)\,.$$

- La función es impar: $f(-x)=-f(x)$, entonces: $F(f,-z)=-F(f,z)$ y podemos utilizar la representación en transformadas seno de Fourier:

$$F(f,z)=\frac{i}{2}F_{\text{sen}}(f,z)\,.$$

- La función no es par ni impar. Pero $f(x)$ siempre se puede escribir como la suma de una función par $f_+(x)$ y una impar $f_-(x)$:

$$f(x)=f_+(x)+f_-(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]\,,$$

de manera equivalente:

$$F(f,z)=F(f_++f_-,z)=\frac{1}{2}F_{\text{cos}}(f_+,z)+\frac{i}{2}F_{\text{sen}}(f_-,z)\,.$$

Entonces, la librería **fourie** lo que genera es la transformada de Fourier de la forma:

$$F(f,z)=\frac{1}{2}a_z+\frac{i}{2}b_z\,.$$

Veamos algunos ejemplos:

1. Consideremos la siguiente función par:

$$f=x^2\mathrm{e}^{-|x|}\,,\quad \text{con } x\in(-\infty,\infty)\,.$$

Podemos intentar resolver la integral que define la transformada de Fourier de manera "manual" o directa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x\,.$$

(%i1) f:x^ 2*exp(-abs(x));

Borrador Preliminar

(%o1) $x^2\,e^{-|x|}$

(%i22) integrate(exp(- %i*k*x)*f,x,minf,inf);

(%o2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-|x|-i\,k\,x}\,dx$

Lo que significa que el programa no supo resolverla. Intentemos ahora utilizar las funciones propias del programa.

(%i3) load(fourie)$

(%i4) fourint(f,x);

(%t4) $a_z = \dfrac{2\left(\frac{2}{z^6+3\,z^4+3\,z^2+1}-\frac{6\,z^2}{z^6+3\,z^4+3\,z^2+1}\right)}{\pi}$

(%t5) $b_z = 0$

(%o5) [%t4, %t5]

(%i6) ratsimp(%t4),factor;

(%o6) $a_z = -\dfrac{4\,\left(3\,z^2-1\right)}{\pi\,\left(z^2+1\right)^3}$

Esta es la notación que el programa utiliza para decirnos que la transformada es

$$F(k) = \frac{1}{2}\left[-\frac{4\,\left(3\,k^2-1\right)}{\pi\,\left(k^2+1\right)^3}\right] = \frac{2\,\left(3\,k^2-1\right)}{\pi\,\left(k^2+1\right)^3}\,.$$

Notemos que el cálculo anterior se corresponde a la transformada coseno de Fourier:

(%i7) fourintcos(f,x);

(%t7) $a_z = \dfrac{2\left(\frac{2}{z^6+3\,z^4+3\,z^2+1}-\frac{6\,z^2}{z^6+3\,z^4+3\,z^2+1}\right)}{\pi}$

(%o7) [%t7]

(%i8) ratsimp(%t7),factor;

(%o8) $a_z = -\dfrac{4\,\left(3\,z^2-1\right)}{\pi\,\left(z^2+1\right)^3}$

Podemos intentar resolver directamente la integral para la transformada coseno de Fourier. Para tal fin escribimos toda la expresión a resolver.

(%i9) Fz:ratsimp(1/%pi*integrate(cos(x*z)*f,x,0,inf)),factor;

(%o9) $-\dfrac{2\,\left(3\,z^2-1\right)}{\pi\,\left(z^2+1\right)^3}$

Incluso podemos probar calculando la transformada inversa y verificar que los cálculos son correctos.

(%i10) integrate(exp(- %i*z*x)*Fz,z,minf,inf);
Is x positive, negative or zero? p;

(%o10) $x^2\,e^{-x}$

(%i11) integrate(exp(- %i*z*x)*Fz,z,minf,inf);
Is x positive, negative or zero? n;

(%o11) $x^2\,e^{x}$

Borrador Preliminar

2. Consideremos la siguiente función impar:

$$f = xe^{-|x|}\,.$$

(%i12) f:x*exp(-abs(x));
(%o12) $x\,e^{-|x|}$

(%i13) fourint(f,x);
(%t13) $a_z = 0$
(%t14) $b_z = \dfrac{4\,z}{\pi\,(z^4 + 2\,z^2 + 1)}$
(%o14) [%t13, %t14]

(%i15) ratsimp(%t14),factor;
(%o15) $b_z = \dfrac{4\,z}{\pi\,(z^2 + 1)^2}$
(%i16) fourintsin(f,x);
(%t16) $b_z = \dfrac{4\,z}{\pi\,(z^4 + 2\,z^2 + 1)}$
(%o16) [%t16]

(%i17) ratsimp(%t16),factor;
(%o17) $b_z = \dfrac{4\,z}{\pi\,(z^2 + 1)^2}$

Esto significa que la transformada seno de Fourier es:

$$F(k) = \frac{i}{2}\left[\frac{4\,k}{\pi\,(k^2+1)^2}\right] = \frac{2i\,k}{\pi\,(k^2+1)^2}\,.$$

Realicemos nuevamente el cálculo pero integrando para comparar.

(%i18) Fz: %i*ratsimp(1/%pi*integrate(sin(x*z)*f,x,0,inf)),factor;
(%o18) $\dfrac{2\,i\,z}{\pi\,(z^2+1)^2}$

Vamos a calcular la transformada inversa:

(%i19) integrate(exp(-%i*z*x)*Fz,z,minf,inf);
Is x positive, negative or zero? p;
(%o19) $x\,e^{-x}$

(%i20) integrate(exp(-%i*z*x)*Fz,z,minf,inf);
Is x positive, negative or zero? n;
(%o20) $x\,e^{x}$

3. Dada la siguiente función que no es par ni impar:

$$f(x) = (x-1)e^{(-|x|)}\,.$$

(%i21) f:(x-1)*exp(-abs(x));
(%o21) $(x-1)\,e^{-|x|}$

(%i22) fourint(f,x);
(%t22) $a_z = -\dfrac{2}{\pi\,(z^2+1)}$

Borrador Preliminar

(%t23) $b_z = \dfrac{4\,z}{\pi\,(z^4+2\,z^2+1)}$
(%o23) [%t22, %t23]

(%i24) az:ratsimp(%t22),factor; bz:ratsimp(%t23),factor;
(%o24) $a_z = -\dfrac{2}{\pi\,(z^2+1)}$
(%o25) $b_z = \dfrac{4\,z}{\pi\,(z^2+1)^2}$
(%i26) Fz:1/2*rhs(az)+%i/2*rhs(bz),factor;
(%o26) $-\dfrac{z^2-2\,i\,z+1}{\pi\,(z^2+1)^2}$

De nuevo, la transformada inversa para verificar:

(%i27) integrate(exp(-%i*z*x)*Fz,z,minf,inf);
Is x positive, negative or zero? p;
(%o27) $(x-1)\,e^{-x}$

(%i28) integrate(exp(-%i*z*x)*Fz,z,minf,inf);
Is x positive, negative or zero? n;
(%o28) $(x-1)\,e^{x}$

(%i29) kill(all)$

4. Resolvamos ahora el ejemplo 3.23 donde la función era:

$$f(t) = \operatorname{sen}(\omega_0 t)\,.$$

(%i1) load(fourie)$
(%i2) f:sin(w0*t);
(%o2) $\operatorname{sen}\,(\mathtt{w0}\,t)$

Como la función es impar, podemos intentar:

(%i3) fourintsin(f,t);
(%t3) $b_z = \dfrac{2\left(\lim_{t\to\infty} -\frac{\operatorname{sen}\,(t\,z+\mathtt{w0}\,t)}{2\,z+2\,\mathtt{w0}} - \frac{\operatorname{sen}\,(t\,z-\mathtt{w0}\,t)}{2\,\mathtt{w0}-2\,z}\right)}{\pi}$
(%o3) [%t3]

¡Intento fallido! Podemos probar resolviendo la integral.

(%i4) tau:n* %pi/w0;
(%i5) Fw: sqrt(2/%pi)*ratsimp(integrate(sin(t*omega)*f,t,0,tau));
Is nw0 positive, negative or zero? p;
(%o5) $-\dfrac{\sqrt{2}\,\left((\mathtt{w0}-\omega)\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,n\,\mathtt{w0}+\pi\,n\,\omega}{w0}\right)+(-\mathtt{w0}-\omega)\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,n\,\mathtt{w0}-\pi\,n\,\omega}{\mathtt{w0}}\right)\right)}{\sqrt{\pi}\,(2\,\mathtt{w0}^2-2\,\omega^2)}$
Asignemos los valores numéricos a los parámetros:

(%i6) n:6$w0$: $\%pi$
(%i7) Fw:ev(Fw);
(%o7) $-\dfrac{\sqrt{2}\left((\pi-\omega)\,\operatorname{sen}\left(\frac{6\,\pi\,\omega+6\,\pi^2}{\pi}\right)+(-\omega-\pi)\,\operatorname{sen}\left(\frac{6\,\pi^2-6\,\pi\,\omega}{\pi}\right)\right)}{\sqrt{\pi}\,(2\,\pi^2-2\,\omega^2)}$

Borrador Preliminar

Grafiquemos ahora la transformada $F(w)$:

```
( %i8)   wxplot2d([Fw], [omega,0,3* %pi])$
( %o8)
```

Borrador Preliminar

Bibliografía

[1] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[2] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analisys** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[3] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. and Laloë, F., (1977) **Quantum Mechanics vol 1** *Hermann, Paris*.

[4] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[5] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J:*)

[6] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*

[7] Hauser, W (1971) **Introduction to Principles of Electromagnetism** (*Addison-Wesley Pub Co Reading*)

[8] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. (2017). **Gravitation**, *Princeton University Press, Princeton.*

[9] Reula, O. (2009) **Métodos Matemáticos de la Física** *Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba*

[10] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press*)

[11] Pantoja-Vásquez, N. (2002) **Ecuaciones Diferenciales Parciales** *Universidad de Los Andes, Mérida.*

[12] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** *Editorial Universitaria, Buenos Aires.*

[13] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)

[14] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaums Outline Series, McGraw Hill New York*)

Borrador Preliminar

Capítulo 4

Operadores lineales

La ruta de este capítulo

En el capítulo anterior definimos los funcionales lineales como un *morfismo* de un espacio vectorial lineal $\boldsymbol{V}$ a un espacio unidimensional $\boldsymbol{K}$. Esta misma idea se puede extender a morfismos de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}_1$ a un espacio vectorial $\boldsymbol{V}_2$, sobre el mismo campo $\boldsymbol{K}$. Desarrollaremos estos conceptos a través de los operadores lineales en la sección 4.1, y en la sección 4.2 señalaremos algunos de los operadores lineales de mayor relevancia. En la sección 4.3 estableceremos una correspondencia uno-a-uno entre operadores lineales y matrices y la dependencia de ésta correspondencia con las bases del espacio vectorial. Luego, en la sección 4.4 presentaremos un conjunto de matrices fundamentales junto con sus operaciones. En la sección 4.5, veremos algunos de los métodos más comunes para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Y para finalizar, las secciones 4.6 y 4.7 estarán dedicadas al importante tema de la representación espectral de un operador: el problema de autovalores y autovectores.

4.1 Operadores lineales

El primer paso es definir lo que en matemáticas se denomina una aplicación lineal, operador lineal o transformación lineal. Esto no es más que una aplicación que preservará la suma de vectores y la multiplicación por escalares.

Definición 4.1 (Operador Lineal)

Se define como un operador lineal a una aplicación que asocia un vector $|v\rangle \in \boldsymbol{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \boldsymbol{V}_2$ y que respeta la linealidad, es decir, una función $\mathbb{T} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ que cumple con:

$$|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle \quad / \quad \mathbb{T}\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{T}|v_2\rangle \;\forall \quad |v_1\rangle \text{ y } |v_2\rangle \in \boldsymbol{V}_1\,. \tag{4.1}$$

Sencillamente, algo que actúe sobre una suma de vectores en $\boldsymbol{V}_1$ y que es equivalente a la suma de sus actuaciones sobre los vectores suma, es decir, a la suma en $\boldsymbol{V}_2$.

A continuación desarrollaremos diferentes ejemplos de transformaciones lineales

Ejemplo 4.1

1. Las siguientes transformaciones claramente son lineales

$$|x'\rangle = \mathbb{T}|x\rangle \;\to\; \left(x', y', z'\right) = \mathbb{T}\left\{(x, y, z)\right\}\,,$$

Borrador Preliminar

(a). $\mathbb{T}\left[(x,y,z)\right] = (x, 2y, 3z)$

$$\mathbb{T}\left[\alpha\left(x_1,y_1,z_1\right)+\beta\left(x_2,y_2,z_2\right)\right] = \alpha\mathbb{T}\left[\left(x_1,y_1,z_1\right)\right]+\beta\mathbb{T}\left[\left(x_2,y_2,z_2\right)\right] ,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\left[\left(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2,\alpha z_1+\beta z_2\right)\right] &= \alpha\left(x_1,2y_1,3z_1\right)+\beta\left(x_2,2y_2,3z_2\right)\\ \left(\alpha x_1+\beta x_2, 2\left[\alpha y_1+\beta y_2\right], 3\left[\alpha z_1+\beta z_2\right]\right) &= \left(\alpha x_1+\beta x_2, 2\left[\alpha y_1+\beta y_2\right], 3\left[\alpha z_1+\beta z_2\right]\right) .\end{aligned}$$

(b). $\mathbb{T}\left\{(x,y,z)\right\} = (z, y, x)$

$$\mathbb{T}\left[\alpha\left(x_1,y_1,z_1\right)+\beta\left(x_2,y_2,z_2\right)\right] = \alpha\mathbb{T}\left[\left(x_1,y_1,z_1\right)\right]+\beta\mathbb{T}\left[\left(x_2,y_2,z_2\right)\right] ,$$

igual que en el caso anterior:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\left\{\left(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2,\alpha z_1+\beta z_2\right)\right\} &= \alpha\left(z_1,y_1,x_1\right)+\beta\left(z_2,y_2,x_2\right)\\ \left(\alpha z_1+\beta z_2,\alpha y_1+\beta y_2,\alpha x_1+\beta x_2\right) &= \left(\alpha z_1+\beta z_2,\alpha y_1+\beta y_2,\alpha x_1+\beta x_2\right) .\end{aligned}$$

2. Operciones tan sencillas como la multiplicación por un número es una transformación (u operador) lineal, esto es, una transformación $\mathbb{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ tal que

$$\mathbb{T}|v\rangle = |v'\rangle = \lambda|v\rangle \;\Rightarrow\; \mathbb{T}\left[\alpha|v\rangle+\beta|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}|v\rangle+\beta\mathbb{T}|w\rangle = \alpha\lambda|v\rangle+\beta\lambda|w\rangle .$$

Obviamente, si $\lambda = 1$ tenemos la transformación identidad que transforma todo vector en sí mismo; si $\lambda = 0$ tendremos la transformación cero, vale decir que lleva a todo $|v\rangle \in \boldsymbol{V}$ a al elemento cero $|0\rangle$.

3. La definición de producto interno también puede ser vista como una transformación (operador) lineal $\mathbb{T} : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{T}|v\rangle = \lambda \rightleftharpoons \langle u|v\rangle \equiv \lambda .$$

Otra vez:

$$\mathbb{T}\left[\alpha|v\rangle+\beta|w\rangle\right] = \langle u|\left[\alpha|v\rangle+\beta|w\rangle\right] = \alpha\langle u|v\rangle+\beta\langle u|w\rangle ,$$

por lo tanto es lineal. Esto implica que también la proyección de un determinado $|v\rangle \in \boldsymbol{V}$ sobre un subespacio $\boldsymbol{S}$ es un operador lineal, y lo denotaremos como:

$$\left[|s\rangle\langle s|\right]\;|v\rangle = \langle s|v\rangle|s\rangle = |v_s\rangle , \quad \text{con } |s\rangle \text{ y } |v_s\rangle \in \boldsymbol{S} .$$

Esta idea se extiende fácilmente para un proyector $\mathbb{T} : \boldsymbol{V}_m \to \mathbf{S}_n$ con $m > n$, de tal modo que para un vector $|v\rangle \in \boldsymbol{V}_m$

$$\mathbb{P}_m|v\rangle \equiv \left(|u_i\rangle\langle u^i|_m\right)|v\rangle = \langle u^i|v\rangle_m|u_i\rangle = |v_m\rangle ,$$

con $\left\{|u^i\rangle\right\}$ una base de $\boldsymbol{S}_n$. Tal y como lo presentaremos en la sección 4.1.4 la definición general de un proyecto será $\mathbb{P}_m\mathbb{P}_m \equiv \mathbb{P}_m^2 = \mathbb{P}_m$. Observe la notación para el operador proyección $\mathbb{P}_m \equiv |u_i\rangle\langle u^i|_m$. Además es claro que estamos utilizando la convención de Einstein para la suma de índices.

4. Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales. Esto es, considere una transformación lineal $\mathbb{T} : \boldsymbol{V}_n \to \mathbf{V}_m$. Por lo tanto asociaremos

$$|y\rangle = \mathbb{T}|x\rangle \;\Rightarrow\; \left(y^1,y^2,y^3,\cdots,y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1,x^2,x^3,\cdots,x^n\right)\right] ,$$

a través de $n \times m$ números, a^i_j, organizados de la siguiente forma:

$$y^i = a^i_j\, x^j \qquad \text{con} \begin{cases} i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

Borrador Preliminar

una vez más,

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\left[\alpha|v\rangle+\beta|w\rangle\right] &= \mathbb{T}\left[\alpha\left(v^1,v^2,v^3,\cdots,v^n\right)+\beta\left(w^1,w^2,w^3,\cdots,w^n\right)\right]=\alpha a^i_j\,v^j+\beta a^i_j\,w^j\\ &= \mathbb{T}\left[\left(\alpha v^1+\beta w^1,\alpha v^2+\beta w^2,\alpha v^3+\beta w^3,\cdots,\alpha v^n+\beta w^n\right)\right]\\ &= a^i_j\;(\alpha v+\beta w)^j=\alpha a^i_j\,v^j+\beta a^i_j\,w^j=a^i_j\left(\alpha v^j+\beta w^j\right)\,.\end{aligned}$$

5. La derivada es un operador lineal

$$|v'\rangle=\mathbb{T}|v\rangle \quad\to\quad |y'\rangle=\mathbb{D}|y\rangle \quad\to\quad \mathbb{D}\left[y(x)\right]\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y(x)\right]\equiv\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\equiv y'(x)\,,$$

es claro que

$$\mathbb{D}\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]=\alpha\mathbb{D}[f(x)]+\beta\mathbb{D}[g(x)]\equiv\alpha f'(x)+\beta g'(x)\,.$$

Igualmente podemos asociar un operador diferencial de cualquier orden a una derivada del mismo orden, esto es

$$|y^{(n)}\rangle=\mathbb{D}^n|y\rangle\;\to\;\mathbb{D}^n\left[y(x)\right]\equiv\frac{\mathrm{d}^n y(x)}{\mathrm{d}x^n}\equiv y^{(n)}(x)\,.$$

6. Del mismo modo, cualquier ecuación diferencial lineal es un ejemplo de operador lineal, digamos

$$y''-3\,y'+2\,y=\left(\mathbb{D}^2-3\mathbb{D}+2\right)y(x)\,,$$

es claro que si $y(x)=\alpha f(x)+g(x)$ la linealidad es evidente:

$$\begin{gathered}(\alpha f(x)+g(x))''-3\;(\alpha f(x)+g(x))'+2\;(\alpha f(x)+g(x))=\alpha\left(f''-3\,f'+2\,f\right)+g''-3\,g'+2\,g\\ \uparrow\downarrow\\ \left(\mathbb{D}^2-3\mathbb{D}+2\right)(\alpha f(x)+g(x))=\left(\mathbb{D}^2-3\mathbb{D}+2\right)\alpha f(x)+\left(\mathbb{D}^2-3\mathbb{D}+2\right)g(x)\,;\end{gathered}$$

7. La integral también es un operador lineal:

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\;\leftrightarrows\;\mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$$

$$\int_a^x\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]\mathrm{d}t=\alpha\int_a^x\;\alpha f(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^x\;g(t)\mathrm{d}t\,.$$

◁

Considerando este último ejemplo, y como estudiaremos más adelante, existen otros ejemplos típicos de operadores de transformaciones integrales, es decir, transformaciones del tipo:

$$F(s)=\int_a^b\mathcal{K}\left(s,t\right)\;f(t)\mathrm{d}t\;\leftrightarrows\;\mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$$

donde $\mathcal{K}\left(s,t\right)$ es una función conocida de s y t, denominada el *kernel* o *núcleo* de la transformación. Si a y b son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita. Este tipo de función de dos variables dentro de una integral la consideramos con detalle en las secciones 3.5 y 3.6.1 del capítulo anterior.

Así, si

$$f(t)=\alpha f_1(t)+f_2(t)\,,$$

con $f_1(t)$ y $f_2(t)\in\mathcal{C}^\infty_{[a,b]}$, es obvio que:

$$F(s)\;=\;\int_a^b\mathcal{K}\left(s,t\right)\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha\int_a^b\mathcal{K}\left(s,t\right)\;f_1(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b\mathcal{K}\left(s,t\right)\;f_2(t)\mathrm{d}t\,,$$

$$F(s)\;=\;\alpha F(s_1)+\beta F(s_2)\quad\leftrightarrows\quad\mathbb{T}\left[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\right]=\alpha\mathbb{T}\left[f_1(t)\right]+\beta\mathbb{T}\left[f_2(t)\right]\,.$$

Dependiendo de la selección del núcleo y los limites tendremos distintas transformaciones integrales, en Física las más comunes son:

Borrador Preliminar

Nombre		$F(s) = \mathbb{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace		$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier de	senos cosenos	$F(s) = \int_0^\infty \begin{matrix}\mathrm{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^\infty \begin{matrix}\mathrm{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja		$F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{ist} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ist} F(s)\mathrm{d}s$
Hankel		$F(s) = \int_0^\infty t J_n(st) f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^\infty s J_n(ts) F(s)\mathrm{d}s$
Mellin		$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\, f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t}\, F(s)\mathrm{d}s$

En el capítulo anterior presentamos con algún detalle las Transformadas de Fourier en la sección 3.6.2 en el contexto de las bases continuas para un espacio de funciones.

4.1.1 Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\cdots\} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal si se dispone entre ellos de la operación suma y la multiplicación por un número. Así, claramente, dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\cdots\}$, y definida

$$(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})\,|v\rangle \equiv \lambda\mathbb{A}|v\rangle + \mathbb{B}|v\rangle \quad / \quad \begin{cases} \mathbb{A}\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{A}|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{A}|v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B}\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{B}|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{B}|v_2\rangle \end{cases}$$

es directo comprobar que:

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] &= \lambda\mathbb{A}\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] + \mathbb{B}\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] \\ &= \lambda\left(\alpha\,\mathbb{A}|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{A}|v_2\rangle\right) + \alpha\,\mathbb{B}|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{B}|v_2\rangle \\ &= \lambda\left(\alpha\,\mathbb{A}|v_1\rangle + \alpha\,\mathbb{B}|v_1\rangle\right) + \beta\,\mathbb{A}|v_2\rangle + \beta\,\mathbb{B}|v_2\rangle \\ &= \lambda\alpha\left(\mathbb{A}|v_1\rangle + \mathbb{B}|v_1\rangle\right) + \beta\left(\mathbb{A}|v_2\rangle + \mathbb{B}|v_2\rangle\right)\,.\end{aligned}$$

Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ lineales en $\boldsymbol{V}$,

$$\begin{aligned}\left[(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}\right]|v\rangle &= (\mathbb{A} + \mathbb{B})\,|v\rangle + \mathbb{C}|v\rangle \qquad \forall \quad |v\rangle \in \boldsymbol{V}_1 \\ &= \mathbb{A}|v\rangle + \mathbb{B}|v\rangle + \mathbb{C}|v\rangle \\ &= \mathbb{A}|v\rangle + (\mathbb{B} + \mathbb{C})\,|v\rangle \\ &= \left[\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})\right]|v\rangle\,,\end{aligned}$$

del mismo modo se puede comprobar fácilmente $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$.

Ahora bien, si definimos la transformación cero de $\boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ tal que $\mathbb{O}|v\rangle = |0\rangle\ \forall\ |v\rangle \in \boldsymbol{V}_1$, que asigna el vector $|0\rangle \in \boldsymbol{V}_2\ \forall\ |v\rangle \in \boldsymbol{V}_1$, entonces el operador lineal $\mathbb{O}$ será el elemento neutro respecto a la suma de operadores.

Borrador Preliminar

Finalmente, el elemento simétrico queda definido por

$$(-\mathbb{A})\,|v\rangle = -\mathbb{A}|v\rangle \;\;\Rightarrow\;\; (\mathbb{A}-\mathbb{A})\,|v\rangle = \mathbb{O}|v\rangle = |0\rangle\,.$$

Con ello queda demostrado que los operadores lineales forman un espacio vectorial el cual de ahora en adelante denominaremos $\mathcal{L}\,(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$.

4.1.2 Operadores Tensoriales

Tal y como vimos en la sección 3.2.3 los tensores forman un espacio vectorial. Ahora nos toca construir los operadores de actúan en esos espacios tensoriales. Sean $\mathbb{A}_{(1)}$ y $\mathbb{B}_{(2)}$ dos operadores lineales que actúan en dos espacios vectoriales $\boldsymbol{V}_1$, y $\boldsymbol{V}_2$, respectivamente. Entonces

$$\left(\mathbb{A}_{(1)}\otimes\mathbb{B}_{(2)}\right)|v(1)\;w(2)\rangle \equiv \left(\mathbb{A}_{(1)}\otimes\mathbb{B}_{(2)}\right)\left(|v(1)\rangle\otimes|w(2)\rangle\right) = \mathbb{A}_{(1)}|v(1)\rangle\otimes\mathbb{B}_{(2)}|w(2)\rangle\,.$$

De tal forma que si $\mathbb{A}_{(1)}$ y $\mathbb{B}_{(2)}$ son matrices $n\times n$ y $m\times m$ el operador tensorial será una matríz $nm\times nm$. Esto es

$$\mathbb{A}_{(1)}\otimes\mathbb{B}_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbb{B}_{(2)} & a_{12}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{1n}\mathbb{B}_{(2)} \\ a_{21}\mathbb{B}_{(2)} & a_{22}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{2n}\mathbb{B}_{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbb{B}_{(2)} & a_{n2}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{nn}\mathbb{B}_{(2)} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2 Lo ilustramos con un un ejemplo sencillo. Sean $\mathbb{A}_{(1)}$ y $\mathbb{B}_{(2)}$ dos matrices definidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

$$\mathbb{A}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{B}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

Entonces, el operador tensorial $\left(\mathbb{A}_{(1)}\otimes\mathbb{B}_{(2)}\right)$ definido en $\mathbb{R}^6$ se construye como

$$\mathbb{A}_{(1)}\otimes\mathbb{B}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

4.1.3 Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{AB}$ y significará que primero se aplica $\mathbb{B}$ y al resultado se aplica $\mathbb{A}$. Esto es:

$$\mathbb{AB}|v\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}|v\rangle\right) = \mathbb{A}|\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle\,. \tag{4.2}$$

La composición de operadores cumple con las siguientes propiedades:

$$(\mathbb{AB})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{BC})\,; \qquad \alpha\,(\mathbb{AB}) = (\alpha\mathbb{A})\,\mathbb{B} = \mathbb{A}\,(\alpha\mathbb{B})\,;$$
$$(\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2)\,\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B}+\mathbb{A}_2\mathbb{B}\,; \qquad \mathbb{A}\,(\mathbb{B}_1+\mathbb{B}_2) = \mathbb{AB}_1+\mathbb{AB}_2\,.$$

Es decir, que la composición de operadores es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

Por otro lado si $\mathbb{I}$ es el operador identidad: $\mathbb{I}|v\rangle = |v\rangle \;\Rightarrow\; \mathbb{AI} = \mathbb{IA} = \mathbb{A}$.

Borrador Preliminar

En general $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$ y podemos construir el conmutador de estos operadores como:

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{AB} - \mathbb{BA}\,, \tag{4.3}$$

por lo tanto:

$$[\mathbb{AB} - \mathbb{BA}]\,|v\rangle = \mathbb{AB}|v\rangle - \mathbb{BA}|v\rangle\,.$$

Algunas de las propiedades más útiles de los conmutadores son:

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A}, \mathbb{B}] &= -\,[\mathbb{B}, \mathbb{A}] && (4.4)\\
[\mathbb{A}, (\mathbb{B} + \mathbb{C})] &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}] + [\mathbb{A}, \mathbb{C}] && (4.5)\\
[\mathbb{A}, \mathbb{BC}] &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}]\,\mathbb{C} + \mathbb{B}\,[\mathbb{A}, \mathbb{C}] && (4.6)\\
[\mathbb{A}, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]] &= -\,[\mathbb{B}, [\mathbb{C}, \mathbb{A}]] - [\mathbb{C}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]]\,. && (4.7)
\end{aligned}$$

Un par de resultados inmediatos se derivan de la composición de operadores:

1. **Potencias de operadores**. Uno de los ejemplos más útiles en la composición de operadores lo constituyen las potencias de los operadores, las cuales provienen de la aplicación consecutiva de un mismo operador,

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}\,; \qquad \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}\,; \qquad \mathbb{A}^2 = \mathbb{AA}\,; \qquad \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{AAA}\;\cdots$$

es claro que las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números

$$\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m; \qquad (\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}\,.$$

Llamaremos *operadores nilpotentes de grado* n a los operadores $\mathbb{A}^n \neq 0$, del tipo $\mathbb{A}^n|v\rangle = |0\rangle\;\forall\,|v\rangle \in \boldsymbol{V}_1$ y $|0\rangle \in \boldsymbol{V}_2$. Es decir, un operador que lleva cualquier vector $|v\rangle$ al elemento neutro de $\boldsymbol{V}_2$. El ejemplo más notorio es el operador diferencial

$$\mathbb{D}^n|P^{n-1}\rangle = |0\rangle \quad \leftrightarrows \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}P_{n-1}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[a_i x^i\right] = 0\,,$$

con $|P^{n-1}\rangle$ perteneciente al espacio de polinomios de grado $n-1$.

2. **Operador ecuaciones diferenciales**. Si consideramos el espacio de funciones $f(x) \in \mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ podemos construir un operador diferencial

$$\left[a_0 + a_1\mathbb{D} + a_2\mathbb{D}^2 + \cdots + a_n\mathbb{D}^n\right]|f\rangle \;\Rightarrow\; \left(a_0 + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + a_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\right)f(x)\,,$$

con $\{a_0, a_1, a_2, \cdots a_n\}$ coeficientes constantes. De este modo, por ejemplo:

$$\left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right)y = (\mathbb{D} - 1)\,(\mathbb{D} - 2)\,y \;\Rightarrow\; \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2\right)y(x) = y'' - 3\,y' + 2\,y\,.$$

Ejemplo 4.3 Dados dos operadores lineales tales que:

$$\mathbb{AB} = -\mathbb{BA}, \quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{I}, \quad \mathbb{B}^2 = \mathbb{I} \text{ y } [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 2i\mathbb{C}\,.$$

- Mostraremos que: $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{AB} - \mathbb{BA} = 2i\mathbb{C} \;\Rightarrow\; 2\mathbb{AB} = 2i\mathbb{C} \;\Rightarrow\; \mathbb{ABAB} = -\mathbb{C}^2 \;\Rightarrow\; -\mathbb{AABB} = -\mathbb{C}^2 \;\Rightarrow\; \mathbb{I} = \mathbb{C}^2$$

- Y que: $[\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 2i\mathbb{A}$

$$[\mathbb{B}, \mathbb{C}] = -i\,(\mathbb{BAB} - \mathbb{ABB}) = 2i\mathbb{A} \;\Rightarrow\; -i\,(\mathbb{BAB} - \mathbb{A}) = 2i\mathbb{A} \;\Rightarrow\; -i\,(-\mathbb{BBA} - \mathbb{A}) = 2i\mathbb{A}\,.$$

- Evaluemos: $[[[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\,, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]]\,, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]]$.

$$\begin{aligned}
[[[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\,, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]]\,, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] &= [[2i\mathbb{C}, 2i\mathbb{A}]\,, 2i\mathbb{C}] = 8\,[[\mathbb{AB}, i\mathbb{A}]\,, \mathbb{AB}] = 8i\,[(\mathbb{ABA} - \mathbb{AAB})\,, \mathbb{AB}]\\
&= 8i\,[-2\mathbb{B}, \mathbb{AB}] = 16i\,(\mathbb{BAB} - \mathbb{ABB}) = 32i\mathbb{A}\,.
\end{aligned}$$

◁

Borrador Preliminar

Ejemplo 4.4 Dados tres operadores vectoriales:

$$\vec{\mathbb{A}} = \mathbb{A}^{(i)}|\mathrm{e}_i\rangle \equiv \mathbb{A}^{(1)}|\mathrm{e}_1\rangle + \mathbb{A}^{(2)}|\mathrm{e}_2\rangle + \mathbb{A}^{(3)}|\mathrm{e}_3\rangle\,,\ \vec{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^{(i)}|\mathrm{e}_i\rangle \text{ y } \vec{\mathbb{L}} = \mathbb{L}^{(i)}|\mathrm{e}_i\rangle\,,$$

que conmutan entre ellos, tales que:

$$\left[\mathbb{A}^{(i)}, \mathbb{B}^{(j)}\right] = \left[\mathbb{A}^{(k)}, \mathbb{L}^{(l)}\right] = \left[\mathbb{L}^{(m)}, \mathbb{B}^{(n)}\right] = 0\,, \qquad \text{con} \quad i,j,k,l,m,n = 1,2,3\,.$$

Donde los superíndices etiquetan distintos operadores, vale decir las componentes de un "operador vectorial" y no la potencia del operador. Adicionalmente, las componentes $\mathbb{L}^{(i)}$ cumplen con el álgebra $\varepsilon_{(k)(l)(m)}\mathbb{L}^{(k)} = \left[\mathbb{L}_{(l)}, \mathbb{L}_{(m)}\right]$

La notación vectorial de índices y el tensor de Levi-Civita, $\varepsilon_{(k)(l)(m)}$, fueron discutidos anteriormente en la sección 1.4.

Entonces demostramos la siguiente relación:

$$\left[\vec{\mathbb{A}}\cdot\vec{\mathbb{L}}, \vec{\mathbb{B}}\cdot\vec{\mathbb{L}}\right] = \left(\vec{\mathbb{A}}\times\vec{\mathbb{B}}\right)\cdot\vec{\mathbb{L}}\,.$$

Donde $\vec{\mathbb{A}}\times\vec{\mathbb{B}}$ define el "producto vectorial" de los "operadores vectoriales" $\vec{\mathbb{A}}$ y $\vec{\mathbb{B}}$.

Veamos:

$$\begin{aligned}\left[\vec{\mathbb{A}}\cdot\vec{\mathbb{L}}, \vec{\mathbb{B}}\cdot\vec{\mathbb{L}}\right] &= \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{L}_{(i)}\,\mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}_{(j)} - \mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}_{(j)}\,\mathbb{A}^{(i)}\mathbb{L}_{(i)} \\ &\equiv \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\,\mathbb{L}_{(i)}\mathbb{L}_{(j)} - \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\,\mathbb{L}_{(j)}\mathbb{L}_{(i)} \equiv \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\left(\left[\mathbb{L}_{(i)}, \mathbb{L}_{(j)}\right]\right)\,,\end{aligned}$$

donde las dos últimas equivalencias las hemos construido a partir de las propiedades de conmutación de los operadores $\mathbb{A}^{(i)}$, $\mathbb{B}^{(j)}$ y $\mathbb{L}^{(k)}$.

Seguidamente, invocamos el álgebra de los operadores $\mathbb{L}_{(l)}$ y $\mathbb{L}_{(m)}$ y se obtiene

$$\mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\left(\left[\mathbb{L}_{(i)}, \mathbb{L}_{(j)}\right]\right) = \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\left(\varepsilon_{(i)(j)(k)}\mathbb{L}^{(k)}\right) = \varepsilon_{(i)(j)(k)}\mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}^{(k)} = \left(\vec{\mathbb{A}}\times\vec{\mathbb{B}}\right)\cdot\vec{\mathbb{L}}\,.$$

◁

4.1.4 Proyectores

La notación de Dirac se hace particularmente conveniente para representar proyectores. Hasta ahora, hemos relacionado un funcional lineal, un *bra* $\langle w|$ del espacio dual $\boldsymbol{V}^*$, con un vector *ket* $|v\rangle$ del espacio vectorial directo $\boldsymbol{V}$ a través de su producto interno $\langle w|v\rangle$, el cual es, en general, un número complejo. Ahora escribiremos esta relación entre vectores y formas diferenciales de una manera diferente: la relación entre $\langle w|$ y $|v\rangle$ un *ket* $|\Psi\rangle$ o un *bra* $\langle\Phi|$ arbitrarios puede ser:

$$|v\rangle\langle w| \;\Rightarrow\; \begin{cases} |v\rangle\langle w|\Psi\rangle \\ \\ \langle\Phi|v\rangle\langle w| \end{cases}$$

La primera será la multiplicación del vector $|v\rangle$ por el número complejo $\langle w|\Psi\rangle$, mientras que la segunda relación será la multiplicación de la forma $\langle w|$ por el complejo $\langle\Phi|v\rangle$. Es imperioso señalar que el orden en la escritura de los vectores y formas es crítico, sólo los números complejos λ se pueden mover con impunidad a través de estas relaciones.

$$\lambda|v\rangle = |\lambda v\rangle = |v\rangle\lambda, \quad \lambda\langle w| = \langle\lambda w| = \langle w|\lambda$$
$$\langle w|\lambda|v\rangle = \lambda\langle w|v\rangle = \langle w|v\rangle\lambda \qquad \text{y} \qquad \mathbb{A}|\lambda v\rangle = \mathbb{A}\lambda|v\rangle = \lambda\mathbb{A}|v\rangle\,.$$

En general, la definición de un operador proyección a lo largo de un vector $|v\rangle$ será $\mathbb{P}^2_{|v\rangle} = \mathbb{P}_{|v\rangle}$. Por lo tanto, dado un vector $|v\rangle$, podemos construir un proyector $\mathbb{P}_{|v\rangle}$ a lo largo del vector $|v\rangle$,

$$\mathbb{P}_{|v\rangle} \equiv |v\rangle\langle v|\,, \quad \text{con } \langle v|v\rangle = 1\,,$$

Borrador Preliminar

siempre y cuando este operador lineal cumpla:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{|v\rangle}\left[\alpha\,|z_1\rangle+\beta\,|z_2\rangle\right] &= \alpha\,\mathbb{P}_{|v\rangle}|z_1\rangle+\beta\,\mathbb{P}_{|v\rangle}|z_2\rangle\,,\\ |v\rangle\langle v|\left[\alpha\,|z_1\rangle+\beta\,|z_2\rangle\right] &= |v\rangle\langle v|\alpha\,|z_1\rangle+|v\rangle\langle v|\beta\,|z_2\rangle=\alpha\,|v\rangle\langle v|z_1\rangle+\beta\,|v\rangle\langle v|z_2\rangle\,,\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2_{|v\rangle} &= \mathbb{P}_{|v\rangle} \quad\Longleftrightarrow\quad (|v\rangle\langle v|)\,(|v\rangle\langle v|)=|v\rangle\langle v|\\ \mathbb{P}_{|v\rangle}\,\mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle &= (|v\rangle\langle v|)\,(|v\rangle\langle v|)\,|z\rangle=|v\rangle\underbrace{\langle v|v\rangle}_{1}\langle v|z\rangle=|v\rangle\langle v|z\rangle=\mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle\,.\end{aligned}$$

Así, el operador $\mathbb{P}_{|v\rangle}$ actuando sobre el vector $|\Psi\rangle$ representará la proyección de $|\Psi\rangle$ a lo largo de $|v\rangle$

$$\mathbb{P}_{|v\rangle}\,|\Psi\rangle=|v\rangle\langle v|\Psi\rangle\equiv\langle v|\Psi\rangle|v\rangle\,.$$

Es inmediato construir un proyector de un vector sobre un subespacio $\boldsymbol{S}_q\subset\boldsymbol{V}^n$. Entonces sea: $\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle,\cdots,|\mathrm{e}_q\rangle\}$ un conjunto ortonormal de vectores que expande $\boldsymbol{S}_q$, por lo tanto, definiremos el proyector $\mathbb{P}_q$ al proyector sobre el subespacio $\boldsymbol{S}_q$ de la forma:

$$\mathbb{P}_q=|\mathrm{e}_i\rangle\langle\mathrm{e}^i|_q\,,$$

es claro que $\forall\ |v\rangle\in\boldsymbol{V}$ se tiene:

$$\mathbb{P}^2_q|v\rangle=\mathbb{P}_q\mathbb{P}_q|v\rangle\ \Rightarrow\ \mathbb{P}^2_q|v\rangle=\left(|\mathrm{e}_i\rangle\langle\mathrm{e}^i|_q\right)\left(|\mathrm{e}_j\rangle\langle\mathrm{e}^j|_q\right)|v\rangle=|\mathrm{e}_i\rangle\overbrace{\langle\mathrm{e}^i|\mathrm{e}_j\rangle}^{\delta^i_j}\langle\mathrm{e}^j|v\rangle=|\mathrm{e}_j\rangle\langle\mathrm{e}^j|v\rangle\equiv\mathbb{P}_q|v\rangle\,,$$

es decir, $\mathbb{P}^2_q=\mathbb{P}_q$ y de esta misma relación

$$\left(|\mathrm{e}_i\rangle\langle\mathrm{e}^i|_q\right)\left(|\mathrm{e}_j\rangle\langle\mathrm{e}^j|_q\right)=|\mathrm{e}_i\rangle\overbrace{\langle\mathrm{e}^i|\mathrm{e}_j\rangle}^{\delta^i_j}\langle\mathrm{e}^j|=|\mathrm{e}_i\rangle\langle\mathrm{e}^i|_q$$

concluimos que necesariamente, para construir un proyector la base tiene que ser ortonormal, $\langle\mathrm{e}^i|\mathrm{e}_j\rangle=\delta^i_j$, como lo mencionamos en el ejemplo de transformaciones generales de tensores en la página 179

Más aún, si la "proyección" la hacemos sobre todo el espacio, vale decir, convertimos ese sub-espacio en el espacio total haciendo $q\to n$ obtendremos el operador identidad $\mathbb{I}$. Consideremos, una vez mas una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle,\cdots,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ que expanda el espacio vectorial $\boldsymbol{V}$, entonces

$$|v\rangle=v^i|\mathrm{e}_i\rangle\quad\Rightarrow|\mathrm{e}_j\rangle\langle\mathrm{e}^j|v\rangle\equiv|\mathrm{e}_j\rangle\langle\mathrm{e}^j|\left(v^i|\mathrm{e}_i\rangle\right)=v^i|\mathrm{e}_j\rangle\overbrace{\langle\mathrm{e}^j|\mathrm{e}_i\rangle}^{\delta^i_j}=v^i|\mathrm{e}_i\rangle=|v\rangle\quad\Rightarrow|\mathrm{e}_j\rangle\langle\mathrm{e}^j|\equiv\mathbb{I}\,.$$

Esta manera curiosa de escribir un operador identidad, $|\mathrm{e}_j\rangle\langle\mathrm{e}^j|\equiv\mathbb{I}$, la utilizaremos muy frecuentemente en las próximas secciones.

4.1.5 Funciones de operadores

Para construir funciones de operadores lineales, procedemos por analogía, basándonos en el primero de los ejemplos de la sección 4.1.3. Vale decir que se puede construir un "polinomio" en potencias de los operadores a partir de la idea:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=a_ix^i\leftrightarrows P_n(\mathbb{A})|v\rangle=\left[a_0+a_1\mathbb{A}+\cdots+a_n\mathbb{A}^n\right]|v\rangle=\left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle\,,$$

$\forall\ |v\rangle\in\boldsymbol{V}_1$.

Si nos saltamos todos los detalles de convergencia de la serie anterior –los cuales dependerán de los autovalores de $\mathbb{A}$ y de su radio de convergencia– y nos inspiramos en el desarrollo de una función $F(z)$ como una serie de potencias de z en un cierto dominio, es posible expresar la función de un operador, $\mathbb{F}(\mathbb{A})$, como

Borrador Preliminar

una serie de potencias del operador $\mathbb{A}$, esto es:

$$F(z) = a_i z^i \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = \left[a_i \mathbb{A}^i\right]|v\rangle\,.$$

Tal y como se hace en el caso de funciones, "desarrollamos por Taylor" la función como una serie de potencias del operador:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle\,, \tag{4.8}$$

de esta manera podemos expresar la exponencial de un operador $\mathbb{A}$, como

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\cdots\right]|v\rangle\,.$$

En este caso hay que hacer una acotación, dado que, en general, $[\mathbb{A},\mathbb{B}] \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\mathbb{A}} \neq \mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$. Esta afirmación se corrobora de manera inmediata al desarrollar las exponenciales:

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbb{B}^m}{m!}\right]|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\frac{\mathbb{B}^m}{m!}\right]|v\rangle\,,$$

$$\mathrm{e}^{\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{B}^n}{n!}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^m}{m!}\right]|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbb{B}^n}{n!}\frac{\mathbb{A}^m}{m!}\right]|v\rangle\,,$$

y sólo en el caso en que $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0$ se tiene

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{A}+\mathbb{B})^n}{n!}\right]|v\rangle,$$

es decir, si $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}} = \mathrm{e}^{\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\mathbb{A}} = \mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$. La demostración no es inmediata y la haremos al final de la próxima sección en la cual desarrollaremos el concepto de derivada de operadores.

4.1.6 Diferenciación de operadores

Distinguiremos dos casos en la diferenciación de operadores: uno cuando el operador depende de una variable y diferenciamos respecto esa variable, $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathbb{A}(t)}}{\mathrm{d}t}|v\rangle$ y otro cuando diferenciamos respecto al operador mismo: $\frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}$.

Empecemos por considerar operadores $\mathbb{A}(t)$, es decir que pueden depender de una variable arbitraria t. Podremos entonces definir la derivada como:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbb{A}\left(t+\Delta t\right) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}\,.$$

Como era de esperarse, con esta definición se cumplirán todas las propiedades de las derivadas de funciones[1].

Empecemos por considerar el caso más simple: $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}t$, el operador dependen linealmente de la variable t. Si queremos conocer la expresión para $\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}$, para este caso elemental recordemos que

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\right]|v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A}t + \frac{(\mathbb{A}t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\cdots\right]|v\rangle\,, \tag{4.9}$$

[1]Más adelante, en la sección 4.3.6 consideraremos la expresión matricial de los operadores y serán evidentes estas propiedades que aquí presentamos sin mayores justificaciones.

Borrador Preliminar

por lo tanto, tendremos:

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}|v\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\right]|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\right)\right]|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^{n-1}\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}\mathbb{A}^{n-1}}{(n-1)!}\right]}_{e^{\mathbb{A}t}}\mathbb{A}|v\rangle\,.$$

Nótese que la suma es hasta infinito, por lo tanto, al cambiar de índice $p = n-1$, p sigue variando hasta infinito y la serie es la misma que la anterior. Finalmente, obtendremos[2]:

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}|v\rangle = e^{\mathbb{A}t}\mathbb{A}|v\rangle \equiv \mathbb{A}e^{\mathbb{A}t}|v\rangle \quad \Rightarrow \left[e^{\mathbb{A}t},\mathbb{A}\right] = 0\,.$$

En general también es fácil demostrar que $[\mathbb{F}(\mathbb{A}),\mathbb{A}] = 0$ ya que a partir del desarrollo (4.8) se hace evidente

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right)\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right)\,,$$

Ahora bien, cuando se presenta la siguiente situación:

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}\right)}{\mathrm{d}t}|v\rangle = \frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle + e^{\mathbb{A}t}\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{B}t}}{\mathrm{d}t}|v\rangle = \mathbb{A}e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle + e^{\mathbb{A}t}\mathbb{B}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle = e^{\mathbb{A}t}\mathbb{A}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle + e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}\mathbb{B}|v\rangle\,,$$

hay que cuidar el orden en el cual se presentan lo operadores. En particular en la expresión anterior hemos utilizado que siempre se cumple $\left[e^{\mathbb{B}t},\mathbb{B}\right] = 0$, pero no hemos supuesto (ni conocemos) nada de $[\mathbb{A},\mathbb{B}]$. Si, adicionalmente, $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0$ podremos factorizar $e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}$ y tendremos

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}\right)}{\mathrm{d}t}|v\rangle = (\mathbb{A}+\mathbb{B})\,e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle\,,$$

pero si $[\mathbb{A},\mathbb{B}] \neq 0$, el orden de aparición de los operadores es muy importante.

Para construir la expresión de la derivada de una función de operador respecto a su argumento, probaremos la siguiente afirmación:

$$\text{Si} \quad [\mathbb{A},[\mathbb{A},\mathbb{B}]] = [\mathbb{B},[\mathbb{A},\mathbb{B}]] = 0 \;\Rightarrow\; [\mathbb{A},F(\mathbb{B})] = [\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}\,. \tag{4.10}$$

Esta relación es fácilmente demostrable si suponemos $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = \mathbb{I}$, el operador identidad. Obviamente aquí se cumple que: $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = \mathbb{I} \;\Rightarrow\; [\mathbb{A},[\mathbb{A},\mathbb{B}]] = [\mathbb{B},[\mathbb{A},\mathbb{B}]] = 0\,.$

En ese caso es fácil demostrar que: $\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n\mathbb{B}^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} &= \mathbb{A}\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A} = (\mathbb{I}+\mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}\\
&= \mathbb{I}\,\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}\,(\mathbb{I}+\mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}\\
&= 2\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}^2(\mathbb{I}+\mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A} = \cdots = n\mathbb{B}^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Para demostrar la relación (4.10) "desarrollamos en serie de Taylor" la función $F(\mathbb{B})$ en el conmutador

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A},F(\mathbb{B})] &= \left[\mathbb{A},\sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{\mathbb{B}^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{[\mathbb{A},\mathbb{B}^n]}{n!} = [\mathbb{A},\mathbb{B}]\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{n\mathbb{B}^{n-1}}{n!}\\
&= [\mathbb{A},\mathbb{B}]\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{B}^{n-1}}{(n-1)!} = [\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}\,.
\end{aligned}$$

Para el caso más general: si

$$[\mathbb{A},\mathbb{C}] = [\mathbb{B},\mathbb{C}] = 0 \text{ con } \mathbb{C} = [\mathbb{A},\mathbb{B}] \;\Rightarrow\; [\mathbb{A},F(\mathbb{B})] \stackrel{?}{=} [\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}\,,$$

se procede del mismo modo.

[2]Es inmediato comprobarlo si consideramos la expansión 4.9

Borrador Preliminar

Probamos primero que: si

$$[\mathbb{A},\mathbb{C}]=[\mathbb{B},\mathbb{C}]=0\,,\quad \text{con } \mathbb{C}=[\mathbb{A},\mathbb{B}]\ \Rightarrow\ [\mathbb{A},\mathbb{B}^n]=\mathbb{A}\mathbb{B}^n-\mathbb{B}^n\mathbb{A}=n\,[\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\mathbb{B}^{n-1}\,.$$

Tendremos:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}\mathbb{B}^n-\mathbb{B}^n\mathbb{A}&=\mathbb{A}\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}-\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}=(\mathbb{C}+\mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-1}-\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}\\&=\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1}+\mathbb{B}\,(\mathbb{C}+\mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-2}-\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}\\&=2\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1}+\mathbb{B}^2(\mathbb{C}+\mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-3}-\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}=\cdots=n\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1}=n[\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\mathbb{B}^{n-1},\end{aligned}$$

con lo cual es inmediato demostrar que:

$$\begin{aligned}[\mathbb{A},F(\mathbb{B})]&=\left[\mathbb{A},\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{B}^n}{n!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{[\mathbb{A},\mathbb{B}^n]}{n!}=[\mathbb{A},\mathbb{B}]\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{n\mathbb{B}^{n-1}}{n!}\\&=[\mathbb{A},\mathbb{B}]\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{B}^{n-1}}{(n-1)!}=[\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}\,.\end{aligned}$$

4.1.7 La fórmula de Glauber

Ahora estamos en capacidad de demostrar limpiamente la fórmula de Glauber:

$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}}=\mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\mathbb{A},\mathbb{B}]}\,.$$

Para demostrarla, procedemos a considerar un operador $\mathbb{F}(t)=\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\mathrm{e}^{\mathbb{B}t}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbb{F}(t)}{\mathrm{d}t}|v\rangle&=\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\mathrm{e}^{\mathbb{B}t}}{\mathrm{d}t}|v\rangle=\mathbb{A}\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\mathrm{e}^{\mathbb{B}t}|v\rangle+\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\,\mathbb{B}\mathrm{e}^{\mathbb{B}t}|v\rangle=\left(\mathbb{A}+\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\,\mathbb{B}\mathrm{e}^{-\mathbb{A}t}\right)\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\mathrm{e}^{\mathbb{B}t}|v\rangle\\&=\left(\mathbb{A}+\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\mathbb{B}\mathrm{e}^{-\mathbb{A}t}\right)\mathbb{F}(t)|v\rangle\,.\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que: $[\mathbb{A},[\mathbb{A},\mathbb{B}]]=[\mathbb{B},[\mathbb{A},\mathbb{B}]]=0\ \Rightarrow\ [\mathbb{A},F(\mathbb{B})]=[\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}$,

entonces: $\left[\mathrm{e}^{\mathbb{A}t},\mathbb{B}\right]=t\,[\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\mathbb{B}=\mathbb{B}\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}+t\,[\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}$,

es decir: $\frac{\mathrm{d}\mathbb{F}(t)}{\mathrm{d}t}|v\rangle=\left(\mathbb{A}+\mathrm{e}^{\mathbb{A}t}\mathbb{B}\mathrm{e}^{-\mathbb{A}t}\right)\mathbb{F}(t)|v\rangle=\left(\mathbb{A}+\mathbb{B}+t\,[\mathbb{A},\mathbb{B}]\right)\mathbb{F}(t)\,|v\rangle$,

por tanteo uno puede darse cuenta que: $\mathbb{F}(t)=\mathrm{e}^{\left\{(\mathbb{A}+\mathbb{B})t+\frac{t^2}{2}[\mathbb{A},\mathbb{B}]\right\}}$,

cumple con la ecuación anterior, por lo tanto absorbiendo t en los operadores correspondientes llegamos a la fórmula de Glauber: $\mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}}=\mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\mathbb{A},\mathbb{B}]}$.

4.1.8 Ejercicios

1. Diga si las siguientes transformaciones, $|x'\rangle=\mathbb{T}|x\rangle$ son lineales
   (a). $\mathbb{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{T}\,[(x,y,z)]=(x+y,x+z)$.
   (b). $\mathbb{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbb{T}\,[(x,y,z)]=(x,y,y+z)$.
   (c). $\mathbb{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbb{T}\,[(x,y,z)]=(x,x+y,x-y)$.
   (d). $\mathbb{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $\mathbb{T}\,[(x,y,z)]=(x+y,x+z,2x+y+z,y-z)$.
   (e). $\mathbb{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbb{T}\,[(x,y,z)]=(\mathrm{sen}(x),\cos(y),0)$.
2. Cuál de las siguientes transformaciones definidas sobre $\boldsymbol{V}^3$ son lineales

Borrador Preliminar

(a). $\mathbb{T}|x\rangle = |x\rangle + |a\rangle$ donde $|a\rangle$ es un vector constante diferente de cero.
(b). $\mathbb{T}|x\rangle = |a\rangle$.
(c). $\mathbb{T}|x\rangle = \langle a|x\rangle|a\rangle$.
(d). $\mathbb{T}|x\rangle = \langle a|x\rangle|x\rangle$.

3. Considere las siguientes operaciones en el espacio de los polinomios en x y diga si corresponden a transformaciones lineales:
$a)$ La multiplicación por x. $b)$ La multiplicación por x^2. $b)$ La diferenciación.
4. Suponga que $\mathbb{AB} = \mathbb{BA}$. Demuestre que:
(a). $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{AB} + \mathbb{B}^2$.
(b). $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{AB}^2 + \mathbb{B}^3$.
¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$?
5. Suponga que un operador $\mathbb{L}$ puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que:

$$\text{Si} \quad \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle$$

y, del mismo modo, demuestre que:

$$\text{Si} \quad \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \quad \text{y} \quad |z\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}|z\rangle = (\lambda-1)|z\rangle\,.$$

Por ello es costumbre denominar a $\mathbb{L}_+$ y $\mathbb{L}_-$ los operadores de "subidas" y de "bajada" respectivamente, ya que ellos construyen otros vectores con autovalores mayores (menores) en una unidad al vector operado.

Practicando con Maxima

1. Si tenemos la siguiente transformación, $|x'\rangle = \mathbb{T}|x\rangle$:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\,,\ \mathbb{T}\left[(x,y,z)\right] = (2x+y, x-z, x+y+z, y+z)\ ,$$

entonces, para que sea una transformación lineal debe satisfacer lo siguiente:

- $\mathbb{T}\left[|v_1\rangle + |v_2\rangle\right] = \mathbb{T}\left[|v_1\rangle\right] + \mathbb{T}\left[|v_2\rangle\right]$.
- $\mathbb{T}\left[\alpha|v\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\left[|v\rangle\right]$.

```
(%i1) f(x,y,z):=[2*x+y,x-z,x+y+z,y+z];
```
(%o1) $f(x,y,z) := [2x+y, x-z, x+y+z, y+z]$

El lado derecho de la igualdad es:

```
(%i1) ld:f(x1+x2,y1+y2,z1+z2),factor;
```
(%o2) $[y_2+y_1+2\,x_2+2\,x_1, -(z_2+z_1-x_2-x_1)\,, z_2+z_1+y_2+y_1+x_2+x_1, z_2+z_1+y_2+y_1]$

El lado izquierdo,

```
(%i1) li:f(x1,y1,z1)+f(x2,y2,z2),factor;
```
(%o3) $[y_2+y_1+2\,x_2+2\,x_1, -(z_2+z_1-x_2-x_1)\,, z_2+z_1+y_2+y_1+x_2+x_1, z_2+z_1+y_2+y_1]$

Por lo tanto:

```
(%i1) ld-li,ratsimp;
```
(%o4) $[0,0,0,0]$

Borrador Preliminar

Para la segunda condición

```
(%i1) f(alpha*x,alpha*y,alpha*z)-alpha*f(x,y,z);
```
(%o5) $[-\alpha\,(y+2\,x)+\alpha\,y+2\,\alpha\,x,-\alpha\,z-\alpha\,(x-z)+\alpha\,x,-\alpha\,(z+y+x)+\alpha\,z+\alpha\,y+\alpha\,x,$
$-\alpha\,(z+y)+\alpha\,z+\alpha\,y]$

```
(%i1) factor(%);
```
(%o6) $[0,0,0,0]$

2. Consideremos ahora la siguiente transformación, $|x'\rangle = \mathbb{T}|x\rangle$:

$$\mathbb{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ ,\ \mathbb{T}\left[(x,y,z)\right]=\left(x^2,y+z,z^2\right)\ .$$

```
(%i1) f(x,y,z):=[x^2,y+z,z^2];
```
(%o7) $f(x,y,z):=[x^2,y+z,z^2];$

El lado derecho:

```
(%i1) ld:f(x1+x2,y1+y2,z1+z2),factor;
```
(%o8) $\left[(x_2+x_1)^2,z_2+z_1+y_2+y_1,(z_2+z_1)^2\right]$

El lado izquierdo:

```
(%i1) li:f(x1,y1,z1)+f(x2,y2,z2),factor;
```
(%o9) $\left[{x_2}^2+{x_1}^2,z_2+z_1+y_2+y_1,{z_2}^2+{z_1}^2\right]$

Por lo tanto:

```
(%i1) ld-li,ratsimp;
```
(%o10) $[2\,x_1\,x_2,0,2\,z_1\,z_2]$

No es una transformación lineal.

3. Dadas las siguientes transformaciones de $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{A}\left[(x,y,z)\right]=(2x-z,x+z,x)\ ,\ \mathbb{B}\left[(x,y,z)\right]=(z,x,y)\ .$$

Veamos si conmutan, es decir, $[\mathbb{A},\mathbb{B}]=\mathbb{AB}-\mathbb{BA}=0$. Podemos ver que $\mathbb{AB}=\mathbb{A}[\mathbb{B}|x\rangle]=(2z-y,z+y,z)$ y $\mathbb{BA}=\mathbb{B}[\mathbb{A}|x\rangle]=(x,2x-z,x+z)$.

```
(%i1) A(x,y,z):=[2x-z,x+z,x];
```
(%o11) $A(x,y,z):=[2x-z,x+z,x]$

```
(%i1) B(x,y,z):=[z,x,y];
```
(%o12) $B(x,y,z):=[z,x,y]$

```
(%i1) [x,y,z]: [z, x, y];
```
(%o13) $[x,y,z]:[z,x,y]$

```
(%i1) AB:A(x,y,z);
```
(%o14) $[2z-y,z+y,z]$

```
(%i1) kill(x,y,z);
```
(%o15) done

Borrador Preliminar

```
(%i1) [x,y,z]:[2*x-z, x+z,x];
```
(%o16) $[2x - z, z + x, x]$

```
(%i1) BA:B(x,y,z);
```
(%o17) $[x, 2x - z, z + x]$

```
(%i1) AB-BA;
```
(%o18) $[2\,z - y - x, 2\,z + y - 2\,x, -x]$

Por lo tanto no conmutan.

4.2 Tipos de operadores

Discutiremos en esta sección algunas de las propiedades que caracterizan a los operadores lineales. Además, tal y como están definidas las transformaciones lineales tiene sentido estudiar si ellas poseen la característica de ser: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Las transformaciones lineales tendrán nombres particulares para cada uno de estos casos.

Como ya fue señalado, una transformación lineal es una función, aplicación, operador o mapeo cuyos dominios y rangos son subconjuntos de espacios vectoriales y que hemos simbolizado como:

$$\mathbb{A} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2 \;\Rightarrow\; \mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle\,, \text{con} \quad |v\rangle \in \boldsymbol{V}_1 \;\text{ y }\; |v'\rangle \in \boldsymbol{V}_2\,.$$

En en lenguaje de la teoría de conjuntos a los elementos $|v'\rangle \in \boldsymbol{V}_2$ se les denomina la imagen de $|v\rangle$ debido a $\mathbb{A}$. Si $\boldsymbol{S}$ es un subconjunto de $\boldsymbol{V}_1$, entonces al conjunto de todas la imágenes, que denotaremos por $\mathbb{A}(\boldsymbol{S})$, se le denomina la imagen de $\boldsymbol{S}$ debido a la aplicación de $\mathbb{A}$ en $\boldsymbol{V}_1$. A la imagen del dominio de $\boldsymbol{V}_1$, $\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}_1\}$, se le llama el rango de $\mathbb{A}$ y es un subespacio de $\boldsymbol{V}_2$.

4.2.1 Espacio nulo e imagen de un operador

El conjunto de todos los $|v\rangle \in \boldsymbol{V}_1 \,/\, \mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbb{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\,(\mathbb{A})$. En símbolos diremos que:

$$\aleph(\mathbb{A}) = \{|v\rangle \in \boldsymbol{V}_1 \;\wedge\; \mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle\}\;.$$

Adicionalmente, $\aleph\,(\mathbb{A}) \subset \boldsymbol{V}_1$, es decir, será un subespacio de $\boldsymbol{V}_1$. La prueba de esta afirmación es inmediata. Dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \aleph(\mathbb{A})$, con $\mathbb{A}$ un operador lineal, es claro que:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{A}|v_1\rangle = |0\rangle \\ \\ \mathbb{A}|v_2\rangle = |0\rangle \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \alpha_1\,\mathbb{A}|v_1\rangle + \alpha_2\,\mathbb{A}|v_2\rangle = |0\rangle = \;\mathbb{A}\left(\alpha_1\,|v_1\rangle + \alpha_2\,|v_2\rangle\right)\;,$$

por la misma razón se tiene que el elemento neutro está contenido en $\aleph(\mathbb{A})$, esto es:

$$\mathbb{A}|\alpha\,v\rangle = |0\rangle \;\forall\; |v\rangle \in \boldsymbol{V}_1 \;\wedge\; \forall\;\alpha \;\therefore\; \mathbb{A}|0\rangle = |0\rangle \quad \text{si} \quad \alpha = 0\,,$$

por lo tanto, queda demostrado que $\aleph\,(\mathbb{A})$ es un subespacio de $\boldsymbol{V}_1$.

Por otra parte, definiremos la imagen (rango o recorrido) de $\mathbb{A}$, y la denotaremos como:

$$\mathbb{A}\,\{\boldsymbol{V}\} = \left\{|v'\rangle \in \boldsymbol{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle\right\}\;,$$

igualmente $\Im\,(\mathbb{A}) \subset \boldsymbol{V}_2$ también será un subespacio de $\boldsymbol{V}_2$ ya que si $|v\rangle = \alpha_1\,|v_1\rangle + \alpha_2\,|v_2\rangle$ y dado que $\mathbb{A}$ es

Borrador Preliminar

un operador lineal, se cumple que:

$$\mathbb{A}\left(\underbrace{\alpha_1\,|v_1\rangle+\alpha_2\,|v_2\rangle}_{|v\rangle}\right)=\alpha_1\,\underbrace{\mathbb{A}|v_1\rangle}_{|v_1'\rangle}+\alpha_2\,\underbrace{\mathbb{A}|v_2\rangle}_{|v_2'\rangle}=\underbrace{\alpha_1\,|v_1'\rangle+\alpha_2\,|v_2'\rangle}_{|v'\rangle}.$$

Es claro que si $\boldsymbol{V}$ es de dimensión finita n, el rango $\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}$ también será de dimensión finita n y tendremos:

$$\dim\left[\aleph(\mathbb{A})\right]+\dim\left[\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}\right]=\dim\left[\boldsymbol{V}\right]\,, \tag{4.11}$$

vale decir, que la dimensión del núcleo más la dimensión del recorrido o imagen de una transformación lineal es igual a la dimensión del dominio.

Para demostrar esta afirmación supongamos que $\dim\left[\boldsymbol{V}\right]=n$ y que $\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle\cdots|\mathrm{e}_k\rangle\}\in\boldsymbol{V}$ es una base de $\aleph(\mathbb{A})$, donde $k=\dim\left[\aleph(\mathbb{A})\right]\leq n$.

Como el conjunto: $\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle\cdots|\mathrm{e}_k\rangle\}\in\boldsymbol{V}$, entonces estos elementos forman una base y por lo tanto, son linealmente independientes. Ademas, necesariamente estos vectores formarán parte de una base mayor de $\boldsymbol{V}$, esto es: $\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle,\cdots,|\mathrm{e}_k\rangle,|\mathrm{e}_{k+1}\rangle,\cdots,|\mathrm{e}_{k+r-1}\rangle,|\mathrm{e}_{k+r}\rangle\}\in\boldsymbol{V}$ será una base de $\boldsymbol{V}$, donde $k+r=n$.

El esquema de la demostración será el siguiente:

- primero probaremos que los r elementos $\{\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+2}\rangle\},\cdots,\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r-1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r}\rangle\}\}$ forman una base para $\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}$. Esto significa que estaríamos probando que: $\dim\{\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}\}=r$, $k+r=n$.
- luego hay que demostrar que los elementos $\{\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+2}\rangle\},\cdots,\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r-1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r}\rangle\}\}$ son linealmente independientes.

Si los r elementos $\{\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+2}\rangle\},\cdots,\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r-1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}$ entonces cualquier elemento

$$|w\rangle\in\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}\;\;/\;|w\rangle=\mathbb{A}|v\rangle=C^i|\mathbb{A}\mathrm{e}_i\rangle\,,\quad\text{con }|\mathbb{A}\mathrm{e}_i\rangle=\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle\,.$$

Ahora bien, analicemos con cuidado los límites de la suma implícita del índice $i=1,2,\cdots,k+r$

$$|w\rangle=C^i|\mathbb{A}\mathrm{e}_i\rangle=\underbrace{C^1|\mathbb{A}\mathrm{e}_1\rangle+C^2|\mathbb{A}\mathrm{e}_2\rangle+\cdots+C^k|\mathbb{A}\mathrm{e}_k\rangle}_{=|0\rangle\quad\text{ya que }\mathbb{A}|\mathrm{e}_1\rangle=\mathbb{A}|\mathrm{e}_2\rangle=\mathbb{A}|\mathrm{e}_3\rangle\cdots=\mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle=|0\rangle}+C^{k+1}|\mathbb{A}\mathrm{e}_{k+1}\rangle+\cdots+C^{k+r}|\mathbb{A}\mathrm{e}_{k+r}\rangle\,.$$

Por lo tanto $\{\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+2}\rangle\},\cdots,\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r-1}\rangle\},\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}$.

Ahora bien, para demostrar que son base, demostraremos que son linealmente independientes. Para ello supondremos que:

$$\exists\quad\left\{C^{k+1},C^{k+2},\cdots,C^{k+r}\right\}\;/\;C^i|\mathbb{A}\mathrm{e}_i\rangle=0\,,\quad\text{con }i=k+1,k+2,\cdots,k+r\,,$$

y tenemos que demostrar que $C^{k+1}=C^{k+2}=\cdots=C^{k+r}=0$.

Entonces

$$C^i|\mathbb{A}\mathrm{e}_i\rangle=C^i\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle=\mathbb{A}\left(C^i|\mathrm{e}_i\rangle\right)=0\,,\quad\text{con }i=k+1,k+2,\cdots,k+r\,,$$

esto significa que el elemento $|v\rangle=C^i|\mathrm{e}_i\rangle\in\aleph(\mathbb{A})$, con $i=k+1,k+2,\cdots,k+r$.

Con lo cual, dado que:

$$\forall\;|v\rangle\in\aleph\left(\mathbb{A}\right),|v\rangle=C^i|\mathrm{e}_i\rangle\,,\text{con }i=1,2,\cdots,r\,,$$

entonces se puede hacer la siguiente resta:

$$|v\rangle-|v\rangle=\sum_{i=1}^{k}C^i|\mathrm{e}_i\rangle-\sum_{i=k+1}^{k+r}C^i|\mathrm{e}_i\rangle=|0\rangle\,,$$

y como los $\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle,\cdots,|\mathrm{e}_k\rangle,|\mathrm{e}_{k+1}\rangle,\cdots,|\mathrm{e}_{k+r-1}\rangle,|\mathrm{e}_{k+r}\rangle\}$ son una base de $\boldsymbol{V}$ entonces resulta que los coeficientes: $C^{k+1}=C^{k+2}=\cdots=C^{k+r}=0$.

Si el espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ es de dimensión infinita, entonces al menos uno de los dos subespacios $\aleph\left(\mathbb{A}\right)$ o

Borrador Preliminar

$\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\}$ será de dimensión infinita.

A continuación ejemplificaremos algunos casos que ilustran lo que representa un espacio nulo.

1. **Transformación identidad**: Sea $\mathbb{I} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$, la transformación identidad, entonces
$$\forall \quad |v\rangle \in \boldsymbol{V}_1 \ / \ \mathbb{I}|v\rangle = |v\rangle \ \Rightarrow \ \aleph(\mathbb{I}) = \{|0\rangle\} \subset \boldsymbol{V}_1 \ \wedge \ \mathbb{A}\{\boldsymbol{V}\} \equiv \boldsymbol{V}_1 \,.$$
2. **Sistemas de ecuaciones lineales**: En $\boldsymbol{V}^n$ las soluciones a los sistemas de ecuaciones lineales representan el espacio nulo, $\aleph(\mathbb{A})$, para vectores de $\boldsymbol{V}^n$
$$\mathbb{A}|x\rangle = |0\rangle \quad \leftrightarrows \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrows A^i_j x_i = 0 \,,$$
con j ecuaciones ($j = 1, 2, \cdots, n$). Recordemos que estamos utilizando la convención de Einstein para suma de índices.
3. **Ecuaciones diferenciales ordinarias**: Sea $\mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]}$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas doblemente diferenciables. Definimos $\mathbb{A} : \mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]} \to \mathcal{C}_{[-\infty,\infty]}$ como la transformación lineal $\left(\mathbb{D}^2 - 1\right)$ tal que para todas las $y(x) \in \mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]}$ se cumple:
$$\mathbb{A}|x\rangle = |0\rangle \quad \leftrightarrows \quad \left(\mathbb{D}^2 - 1\right) y(x) = 0 \quad \leftrightarrows \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 1\right) y(x) = y'' - y = 0 \,.$$
El núcleo o espacio nulo de $\mathbb{A}$, $\aleph(\mathbb{A})$, lo constituye el conjunto de soluciones para la mencionada ecuación diferencial. Por lo tanto, el problema de encontrar las soluciones de la ecuación diferencial es equivalente a encontrar los elementos del núcleo de $\mathbb{A}$.

4.2.2 Operadores biyectivos e inversos

Se dice que $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ es biyectiva (uno a uno o biunívoco) si dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \boldsymbol{V}_1, \ \wedge \ |v'\rangle \in \boldsymbol{V}_2$, se tiene que:
$$\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \ \wedge \ \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle \ \Rightarrow \ |v_1\rangle = |v_2\rangle \,,$$
es decir, será biyectiva si $\mathbb{A}$ transforma vectores distintos de $\boldsymbol{V}_1$ en vectores distintos de $\boldsymbol{V}_2$.

Más aún, se puede afirmar que una transformación lineal $\mathbb{A}$, será biyectiva si y sólo si $\aleph(\mathbb{A}) = \{|0\rangle\}$. Vale decir, si el subespacio nulo está constituido, únicamente por el elemento neutro del espacio vectorial.

La demostración es sencilla. Supongamos que $\mathbb{A}$ es biyectiva y que $\mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle$, entonces $|v\rangle = |0\rangle$, es decir, $\mathbb{A}|0\rangle = |0\rangle$, por consiguiente $\aleph(\mathbb{A}) = \{|0\rangle\}$. Recíprocamente, si
$$\left.\begin{array}{r} \aleph(\mathbb{A}) = \{|0\rangle\} \\ \wedge \\ \mathbb{A}|v_1\rangle = \mathbb{A}|v_2\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathbb{A}|v_1\rangle - \mathbb{A}|v_2\rangle = |0\rangle = \mathbb{A}\left(\underbrace{|v_1\rangle - |v_2\rangle}_{|v_1\rangle - |v_2\rangle = 0}\right) \ \Rightarrow \ |v_1\rangle = |v_2\rangle \,.$$

La importancia de las transformaciones lineales biyectivas reside en la posibilidad de definir inversa, debido a que siempre existe en $\boldsymbol{V}_2$ un vector $|v'\rangle$ asociado a través de $\mathbb{A}$ con un vector $|v\rangle \in \boldsymbol{V}_1$. Diremos que $\mathbb{A}^{-1}$: $\mathbf{V}_2 \to \boldsymbol{V}_1$ es el inverso de $\mathbb{A}$, si $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$.

Habría que hacer un par de comentarios al respecto. El primero es que, tal y como hemos enfatizado arriba, en general, los operadores no conmutan entre si, y los inversos no son una excepción. Es decir, debería existir (y de hecho existen) inversas por la izquierda $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}$ e inversas por la derecha $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$. Por simplicidad e importancia en Física obviaremos esta dicotomía y supondremos que $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$. El segundo comentario tiene que ver con la existencia y unicidad del inverso de un operador lineal. Algunos operadores tienen inverso, otros no,

Borrador Preliminar

pero aquellos que tienen inverso, ese inverso será único.

Supongamos:

$$\left.\begin{array}{c}\mathbb{A}_1^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |v\rangle \\ \wedge \\ \mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |v\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{A}_1^{-1}\mathbb{A}|v\rangle - \mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle = \underbrace{\left(\mathbb{A}_1^{-1} - \mathbb{A}_2^{-1}\right)}_{\mathbb{A}_1^{-1}=\mathbb{A}_2^{-1}}\mathbb{A}|v\rangle \Rightarrow \mathbb{A}_1^{-1} = \mathbb{A}_2^{-1}\,.$$

Ahora bien, un operador lineal $\mathbb{A}$ tendrá inverso si y sólo si para cada vector $|v'\rangle \in \boldsymbol{V}_2 \; \exists \; |v\rangle \in \boldsymbol{V}_1 \; / \; \mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$. Es decir, cada vector $|v'\rangle$ está asociado con uno y sólo un vector $|v\rangle$ a través de la transformación lineal $\mathbb{A}$. Dejaremos sin demostración esta afirmación pero lo importante es recalcar que para que exista inverso la transformación lineal $\mathbb{A}$, tiene que ser biyectiva y esto implica que se asocia uno y sólo un vector de $\boldsymbol{V}_1$ con otro de $\boldsymbol{V}_2$.

Esto nos lleva a la definición de espacios vectoriales isomorfos[3]:

Definición 4.2 (Espacios Vectoriales Isomorfos)

Dos espacios vectoriales $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ son *isomorfos* si existe una transformación

$$\mathbb{A} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2 \quad \Rightarrow \quad |v'\rangle = \mathbb{A}|v\rangle\,,$$

denominada *isomorfismo*, tal que:

1. $\mathbb{A}$ es biyectiva.
2. $\mathbb{A}$ es lineal: $\mathbb{A}\left[\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{A}|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{A}|v_2\rangle \qquad \forall \quad |v_1\rangle$ y $|v_2\rangle \in \boldsymbol{V}_1$.

El que $\mathbb{A}$ sea biyectiva nos garantiza que existe la transformación inversa $\mathbb{A}^{-1}$, que también será biyectiva. Es decir, podríamos hablar de manera equivalente de una transformación $\mathbb{F} : \boldsymbol{V}_2 \to \boldsymbol{V}_1$. Volveremos a este tema más adelante. Todavía podemos añadir algunas demostraciones que resultan ser consecuencias de las afirmaciones anteriores.

Sea la transformación lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ y supongamos además que $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas y equivalentes:

1. $\mathbb{A}$ es biyectiva en $\boldsymbol{V}_1$.
2. $\mathbb{A}$ es invertible y su inversa $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{A}\{\boldsymbol{V}_1\} \to \boldsymbol{V}_1$ es lineal.
3. $\forall\,|v\rangle \in \boldsymbol{V}_1,\; \mathbb{A}\{|v\rangle\} = |0\rangle \;\Rightarrow\; |v\rangle = |0\rangle$. Esto es, el espacio nulo $\aleph(\mathbb{A})$ únicamente contiene al elemento neutro de $\boldsymbol{V}_1$.

Si ahora suponemos que $\boldsymbol{V}_1$ tiene dimensión finita, digamos $\dim[\boldsymbol{V}_1] = n$, las siguientes afirmaciones serán válidas y equivalentes:

1. $\mathbb{A}$ es biyectiva en $\boldsymbol{V}_1$.
2. Si $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \cdots, |u_n\rangle\} \in \boldsymbol{V}_1$ son linealmente independientes, entonces, el conjunto de transformaciones lineales: $\{\mathbb{A}\{|u_1\rangle\}, \mathbb{A}\{|u_2\rangle\}, \mathbb{A}\{|u_3\rangle\}, \cdots, \mathbb{A}\{|u_n\rangle\}\} \in \mathbb{A}\{\boldsymbol{V}_1\}$ también será linealmente independiente.
3. $\dim[\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}_1\}] = n$.
4. Si $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\} \in \boldsymbol{V}_1$ es una base de $\boldsymbol{V}_1$, entonces $\{\mathbb{A}\{|\mathrm{e}_1\rangle\}, \mathbb{A}\{|\mathrm{e}_2\rangle\}, \mathbb{A}\{|\mathrm{e}_3\rangle\}, \cdots, \mathbb{A}\{|\mathrm{e}_n\rangle\}\} \in \mathbb{A}\{\boldsymbol{V}_1\}$ es una base de $\mathbb{A}\{\boldsymbol{V}_1\}$.

[3] Se dice que una transformación lineal es un *monomorfismo* si $\mathbb{A}$ es inyectiva, un *epimorfismo* si $\mathbb{A}$ es sobreyectiva y un *isomorfismo* si es biyectiva.

Borrador Preliminar

4.2.3 Operadores adjuntos

En la sección 4.1, definimos la acción de un operador lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ de tal forma que $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$. En esta sección definiremos el operador:

$$\mathbb{A}^\dagger : \boldsymbol{V}^* \to \boldsymbol{W}^* \text{ de tal forma que } \langle v'| = \langle v|\mathbb{A}^\dagger\,,$$

donde $\boldsymbol{V}^*$ y $\boldsymbol{W}^*$ son los duales de $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$, respectivamente. Diremos que el operador $\mathbb{A}^\dagger$ es el adjunto de $\mathbb{A}$[4].

Entonces, discutimos en la sección 3.1.1, a cada vector (*ket*) $|v\rangle$ le está asociado una forma lineal (*bra*) $\langle v|$, a cada *ket* transformado $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$ le corresponderá un *bra* transformado $\langle v'| = \langle v|\mathbb{A}^\dagger$. En pocas palabras:

$$|v\rangle \iff \langle v| \quad \Rightarrow \quad |v'\rangle = \mathbb{A}|v\rangle \iff \langle v'| = \langle v|\mathbb{A}^\dagger\,.$$

Si $\mathbb{A}$ es lineal, $\mathbb{A}^\dagger$ también lo será, dado que a un vector $|w\rangle = \lambda_1|z_1\rangle + \lambda_2|z_2\rangle$ le corresponde un *bra* $\langle w| = \lambda_1^*\langle z_1| + \lambda_2^*\langle z_2|$.[5] Por lo tanto, $|w'\rangle = \mathbb{A}|w\rangle = \lambda_1\,\mathbb{A}|z_1\rangle + \lambda_2\,\mathbb{A}|z_2\rangle$, por ser $\mathbb{A}$ lineal, entonces

$$|w'\rangle \iff \langle w'| \equiv \langle w|\mathbb{A}^\dagger = (\lambda_1^*\langle z_1| + \lambda_2^*\langle z_2|)\,\mathbb{A}^\dagger \equiv \lambda_1^*\langle z_1'| + \lambda_2^*\langle z_2'| = \lambda_1^*\langle z_1|\mathbb{A}^\dagger + \lambda_2^*\langle z_2|\mathbb{A}^\dagger\,.$$

Es claro que a partir de la definición de producto interno tendremos:

$$\langle\tilde{x}|y\rangle = \langle y|\tilde{x}\rangle^* \quad \forall \quad |\tilde{x}\rangle = \mathbb{A}|x\rangle, |y\rangle \in \boldsymbol{V} \;\Rightarrow\; \langle x|\mathbb{A}^\dagger|y\rangle = \langle y|\mathbb{A}|x\rangle^* \;\forall\; |x\rangle, |y\rangle \in \boldsymbol{V}\,.$$

Esta última relación

$$\langle x|\mathbb{A}^\dagger|y\rangle = \langle y|\mathbb{A}|x\rangle^* \quad \forall\; |x\rangle, |y\rangle \in \boldsymbol{V}\,, \tag{4.12}$$

nos permite asociar $\mathbb{A}^\dagger$ con $\mathbb{A}$. Esto es, conociendo las propiedades de $\mathbb{A}$ las extendemos a $\mathbb{A}^\dagger$ y es a partir de esta relación que podemos deducir las propiedades de los operadores adjuntos:

$$\left(\mathbb{A}^\dagger\right)^\dagger = \mathbb{A}\,, \quad (\lambda\mathbb{A})^\dagger = \lambda^*\mathbb{A}^\dagger\,, \quad (\mathbb{A}+\mathbb{B})^\dagger = \mathbb{A}^\dagger + \mathbb{B}^\dagger\,, \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger = \mathbb{B}^\dagger\mathbb{A}^\dagger\,.$$

Esta última propiedad es fácilmente demostrable y es educativa su demostración. Dado que $|v'\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}|v\rangle$, y además se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} |\bar{v}\rangle &= \mathbb{B}|v\rangle \\ |v'\rangle &= \mathbb{A}|\bar{v}\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle v'| = \langle\bar{v}|\mathbb{A}^\dagger = \langle v|\mathbb{B}^\dagger\mathbb{A}^\dagger = \langle v|\,(\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger\,.$$

A partir de las propiedades anteriores se deriva una más útil relacionada con el conmutador,

$$[\mathbb{A},\mathbb{B}]^\dagger = -\left[\mathbb{A}^\dagger,\mathbb{B}^\dagger\right] = \left[\mathbb{B}^\dagger,\mathbb{A}^\dagger\right]\,.$$

Las conclusiones a las que llegamos resultan ser que, para obtener el adjunto de una expresión, se debe proceder de la siguiente manera:

- Cambiar constantes por sus complejas conjugadas $\lambda \leftrightarrows \lambda^*$.
- Cambiar los *kets* por sus *bras* asociados y viceversa (*bras* por *kets*): $|v\rangle \leftrightarrows \langle v|$.
- Cambiar operadores lineales por sus adjuntos $\mathbb{A}^\dagger \leftrightarrows \mathbb{A}$.
- Invertir el orden de los factores.

De este modo $(|v\rangle\langle w|)^\dagger = |w\rangle\langle v|$, que se deduce fácilmente de la consecuencia de la definición de producto interno

$$\langle x|\left(\underline{|v\rangle\langle w|}\right)^\dagger|y\rangle = \langle y|\,(|v\rangle\langle w|)\,|x\rangle^* = \langle y||v\rangle^*\langle w||x\rangle^* = \langle x|\underline{|w\rangle\langle v|}|y\rangle\,.$$

[4]En la literatura también encontrarán que $\mathbb{A}^\dagger$ es el hermítico conjugado de $\mathbb{A}$, pero hemos creído conveniente llamarlo únicamente el adjunto de $\mathbb{A}$ para evitar confusiones con operadores hermíticos.

[5]La correspondencia es antilineal, note la conjugación de los números λ_1 y λ_2.

Borrador Preliminar

4.2.4 Operadores hermíticos

Existe un conjunto de operadores que se denominan hermíticos o autoadjuntos. Un operador hermítico (o autoadjunto) será aquel para el cual su adjunto es el mismo operador: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$[6]. Entonces, a partir de (4.12) tendremos:

$$\langle x|\mathbb{A}^\dagger|y\rangle \equiv \langle x|\mathbb{A}|y\rangle = \langle y|\mathbb{A}|x\rangle^* .$$

Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son "iguales a su propio complejo conjugado" y se utilizan como los observables en la Mecánica Cuántica. Claramente los proyectores son operadores autoadjuntos por construcción: $\mathbb{P}^\dagger_{|v\rangle} \equiv (|v\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle v|$.

4.2.5 Operadores unitarios

Por definición, un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto:

$$\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \;\Rightarrow \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I} .$$

De estos operadores podemos decir varias cosas:

- Las transformaciones unitarias dejan invariante al producto interno y consecuentemente la norma de vectores y esto se demuestra fácilmente. Dados dos vectores $|x\rangle, |y\rangle$ sobre los cuales actúa un operador unitario

$$\left.\begin{aligned} |x'\rangle &= \mathbb{U}|x\rangle \\ |y'\rangle &= \mathbb{U}|y\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle y'|x'\rangle = \langle y|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|x\rangle = \langle y|x\rangle .$$

  Es claro que si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, el operador $\mathbb{U} = \mathrm{e}^{i\mathbb{A}}$ es unitario.

$$\mathbb{U} = \mathrm{e}^{i\mathbb{A}} \;\Rightarrow\; \mathbb{U}^\dagger = \mathrm{e}^{-i\mathbb{A}^\dagger} = \mathrm{e}^{-i\mathbb{A}} \;\Rightarrow \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathrm{e}^{i\mathbb{A}}\mathrm{e}^{-i\mathbb{A}} = \mathbb{I} = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathrm{e}^{-i\mathbb{A}}\mathrm{e}^{i\mathbb{A}} .$$

- El producto de dos operadores unitarios también es unitario. Esto es, si $\mathbb{U}$ y $\mathbb{V}$ son unitarios entonces:

$$(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger(\mathbb{U}\mathbb{V}) = \mathbb{V}^\dagger\underbrace{\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}}_{\mathbb{I}}\mathbb{V} = \mathbb{V}^\dagger\mathbb{V} = \mathbb{I} \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbb{U}\mathbb{V})(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger = \mathbb{U}^\dagger\underbrace{\mathbb{V}^\dagger\mathbb{V}}_{\mathbb{I}}\mathbb{U} = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{I}$$

- La invariancia del producto interno implica que los operadores unitarios aplican una base ortogonal en otra: $\{|\mathrm{e}_i\rangle\} \xrightarrow{\mathbb{U}} \{|\mathrm{e}_{i'}\rangle\}$. Veamos, si $\{|\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\}$ es una base ortonormal para $\boldsymbol{V}$ entonces:

$$|\hat{\mathrm{e}}_{j'}\rangle = \mathbb{U}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \;\Rightarrow\; \langle\hat{\mathrm{e}}^{i'}|\hat{\mathrm{e}}_{j'}\rangle = \langle\hat{\mathrm{e}}^{i'}|\mathbb{U}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \langle\hat{\mathrm{e}}^{i}|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \langle\hat{\mathrm{e}}^{i}|\hat{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^i_j .$$

Ejemplo 4.5 Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos y un operador unitario definido como: $\mathbb{U} = \mathbb{A} + i\mathbb{B}$. Mostraremos que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$ y $\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$.

Comenzamos con $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$:

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger(\mathbb{A} + i\mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} - i\mathbb{B}) = (\mathbb{A} - i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})$$

$$\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{B} \;\Rightarrow\; [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = -[\mathbb{B}, \mathbb{A}] \;\Rightarrow\; [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0 .$$

Continuamos con la segunda de las afirmaciones, que se puede demostrar, a partir de:

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I} \;\Rightarrow\; (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} - i\mathbb{B}) = \left(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 + i(\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B})\right) \;\Rightarrow\; \mathbb{I} = \mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 .$$

◁

Ejemplo 4.6 En Mecánica Clásica la cantidad de momento angular viene definida como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Para pasar a Mecánica Cuántica se asocia $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar

[6] Si $\mathbb{A}^\dagger = -\mathbb{A}$ el operador lineal se denomina antihermítico.

Borrador Preliminar

sobre la función de onda nos proveen lo siguiente:

$$\langle r|\mathbb{X}|\psi\rangle = x\langle r|\psi\rangle = x\,\psi(\mathbf{r}) \qquad \langle r|\mathbb{P}_x|\psi\rangle = \left(-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r|\mathbb{Y}|\psi\rangle = y\langle r|\psi\rangle = y\,\psi(\mathbf{r}) \qquad \langle r|\mathbb{P}_y|\psi\rangle = \left(-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial y}\psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r|\mathbb{Z}|\psi\rangle = z\langle r|\psi\rangle = z\,\psi\,(\mathbf{r}) \qquad \langle r|\mathbb{P}_z|\psi\rangle = \left(-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial z}\psi(\mathbf{r})$$

En coordenadas cartesianas, en la representación de coordenadas $\{|r\rangle\}$ tendremos que

$$\langle r|\mathbb{R}|\psi\rangle = \mathbf{r}\,\psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle r|\mathbb{P}|\psi\rangle = -i\hbar\,\boldsymbol{\nabla}\,\psi(\mathbf{r})\,.$$

De forma que en Mecánica Cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular $\langle r|\mathbb{L}|\psi\rangle = -i\hbar\,(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\psi(\mathbf{r})$ son:

$$\langle r|\mathbb{L}|\psi\rangle = -i\hbar\,\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(\mathbf{r})\mathbf{i} - i\hbar\,\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\mathbf{r})\mathbf{j} - i\hbar\,\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(\mathbf{r})\mathbf{k}\,.$$

Utilizando las definiciones anteriores vamos a mostrar que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantidad de movimiento angular cumple la siguiente relación

$$[\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y]\,|\psi\rangle = i\hbar\mathbb{L}_z|\psi\rangle\,,$$

con: $\mathbb{L}^1 = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_x$; $\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_y$; $\mathbb{L}^3 = \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_z$. En general, $[\mathbb{L}_l, \mathbb{L}_m] = i\hbar\varepsilon_{lmn}\mathbb{L}^n$.

Dado que:

$$\begin{aligned}
[\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2]\,|\psi\rangle &= [\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y]\,|\psi\rangle = (\mathbb{L}_x\mathbb{L}_y - \mathbb{L}_y\mathbb{L}_x)\,|\psi\rangle \\
&= -i\hbar\,\left(\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\psi(\mathbf{r}) \\
&= \left[y\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\frac{\partial}{\partial y}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) - x\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\right]\psi\,(\mathbf{r})\,.
\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\left(yz\frac{\partial}{\partial z\partial x} + y\frac{\partial}{\partial x}\right) - xy\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \left(z^2\frac{\partial}{\partial y\partial x} - zx\frac{\partial}{\partial y\partial z}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(\left(zy\frac{\partial}{\partial x\partial z} - z^2\frac{\partial}{\partial y\partial x}\right) - \left(yx\frac{\partial}{\partial z^2} - zx\frac{\partial}{\partial z\partial y} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)\right]\psi(\mathbf{r}) \\
&= \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(\mathbf{r})\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7 Un operador cantidad de movimiento generalizado se define como aquel conjunto de operadores hermíticos que cumplen con:

$$[\mathbb{J}_x, \mathbb{J}_y] = i\hbar\mathbb{J}_z \quad [\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_z] = i\hbar\mathbb{J}_x \quad [\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x] = i\hbar\mathbb{J}_y\,, \quad \text{es decir} \quad [\mathbb{J}_i, \mathbb{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbb{J}_k\,,$$

con ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita (ver sección 1.4 y aquí los índices repetidos NO indican suma).

Adicionalmente, definimos los siguientes operadores:

$$\mathbb{J}^2 = \mathbb{J}_x^2 + \mathbb{J}_y^2 + \mathbb{J}_z^2; \quad \mathbb{J}_+ = \mathbb{J}_x + i\mathbb{J}_y \quad \text{y} \quad \mathbb{J}_- = \mathbb{J}_x - i\mathbb{J}_y\,.$$

Demostremos que: $\left[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_+\right] = \left[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_-\right] = \left[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_z\right] = 0\,.$

Para probar esta propiedad se puede demostrar de forma genérica que $\left[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_m\right] = 0$, donde $m = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$.

Borrador Preliminar

Esto es: cualquier componente $\mathbb{J}_m$ conmuta con $\mathbb{J}^2$. Consideremos el caso particular $m = 1 \equiv x$

$$\left[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_x\right] = \left[(\mathbb{J}_x\mathbb{J}_x + \mathbb{J}_y\mathbb{J}_y + \mathbb{J}_z\mathbb{J}_z), \mathbb{J}_x\right] = \left[\mathbb{J}_x\mathbb{J}_x, \mathbb{J}_x\right] + \left[\mathbb{J}_y\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x\right] + \left[\mathbb{J}_z\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x\right] = \left[\mathbb{J}_y\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x\right] + \left[\mathbb{J}_z\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x\right] .$$

Haciendo uso de $[\mathbb{A}\mathbb{B}, \mathbb{C}] = \mathbb{A}\,[\mathbb{B}, \mathbb{C}] + [\mathbb{A}, \mathbb{C}]\,\mathbb{B}$ tendremos que

$$\left[\mathbb{J}^y, \mathbb{J}_x\right] = \mathbb{J}_y\left[\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x\right] + \left[\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x\right]\mathbb{J}_y + \mathbb{J}_z\left[\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x\right] + \left[\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x\right]\mathbb{J}_z = -i\hbar\mathbb{J}_y\mathbb{J}_z - i\hbar\mathbb{J}_z\mathbb{J}_y + i\hbar\mathbb{J}_z\mathbb{J}_y + i\hbar\mathbb{J}_y\mathbb{J}_z = 0 .$$

Este desarrollo vale para todas las componentes y, al conmutar $\mathbb{J}^2$ con todas las componentes queda demostrado que:

$$\left[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_\pm\right] = \left[\mathbb{J}_x^2 + \mathbb{J}_y^2 + \mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_x \pm i\mathbb{J}_y\right] = \left[\mathbb{J}_y^2, \mathbb{J}_x\right] + \left[\mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_x\right] \pm i\left[\mathbb{J}_x^2, \mathbb{J}_y\right] \pm i\left[\mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_y\right] = 0 .$$

Practicando con Maxima

Consideremos la siguiente transformación lineal:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 ,\ \ \mathbb{T}\left[(x, y, z)\right] = (2x + y, x - z, x + y + z, y + z) .$$

Podemos preguntarnos si es una transformación biyectiva, para averiguarlo calculemos el núcleo de la transformación. Hagamos entonces lo siguiente:

```
(%i1) solve([2*x+y=0,x-z=0,x+y+z=0,y+z=0],[x,y,z]);
```
(%o1) $[[x = 0, y = 0, z = 0]]$

De manera que $\aleph\left(\mathbb{T}\right) = \left\{(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\right\}$ y la transformación es biyectiva. Consideremos ahora la transformación lineal:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 ,\ \ \mathbb{T}\left[(x, y, z)\right] = (x + y, x + z, 2x + y + z, y - z)$$

```
(%i2) solve([x+y=0,x+z=0,2*x+y+z=0,y-z=0],[x,y,z]);
```
(%o2) $[[x = -\%\mathtt{r}_1, y = \%\mathtt{r}_1, z = \%\mathtt{r}_1]]$

.

Por lo tanto $\aleph\left(\mathbb{T}\right) = \{(-\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$. En este caso, la transformación no es biyectiva. Notemos que el vector $|e\rangle = (-1, 1, 1)$ resulta ser el vector base para subespacio vectorial núcleo, por lo tanto, la dimensión de este espacio vectorial es: $\dim\left[\aleph\left(\mathbb{T}\right)\right] = 1$. Como veremos más adelante una base en el espacio imagen o rango es el conjunto: $\{\mathbb{T}\left[(1, 0, 0)\right], \mathbb{T}\left[(0, 1, 0)\right], \mathbb{T}\left[(0, 0, 1)\right]\}$.

Por lo tanto, podemos hacer los siguientes cálculos:

```
(%i3) T(x,y,z):=[x+y,x+z,2*x+y+z,y-z];
```
(%o3) $T(x, y, z) := [x + y, x + z, 2x + y + z, y - z]$

```
(%i4) M:matrix(T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1))$
```
(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

La función **triangularize** devolverá una matriz equivalente, pero en la forma triangular superior de la matriz M, obtenida por eliminación gaussiana.

```
(%i5) triangularize(M);
```
(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Borrador Preliminar

Eso significa que una base para el rango $\mathbb{T}\{\mathbb{R}^4\}$ será: $\{(1,1,2,0),(0,-1,-1,1)\}$, es decir, la dimensión se éste subespacio vectorial es $\dim\left[\mathbb{T}\left\{\mathbb{R}^4\right\}\right]=2$.

Por lo tanto:

$$\dim\left[\aleph\left(\mathbb{T}\right)\right]+\dim\left[\mathbb{T}\left\{\mathbb{R}^4\right\}\right]=\dim\left[\mathbb{R}^3\right]\ \Rightarrow\ 1+2=3\,.$$

Consideremos ahora el siguiente espacio vectorial $\boldsymbol{V}^3=\{(x,y,z):x+y+z=0\}$ en $\mathbb{R}^3$, y la siguiente transformación lineal de $\boldsymbol{V}^3\ \rightarrow\ \boldsymbol{V}^3$

$$F(x,y,z)=(x+y+z,x+y-z,2z)\,,$$

(%i6) F(x,y,z):=[x+y+z,x+y-z,2*z];
(%o6) $F(x,y,z):=[x+y+z,x+y-z,2z]$

Ahora bien, para obtener el núcleo de la transformación resolvemos

(%i7) linsolve([x+y+z=0,x+y-z=0,2*z=0],[x,y,z]); `solve: dependent equations eliminated: (1)`
(%o7) $[x=\%\mathtt{r}_1,y=-\%\mathtt{r}_1,z=0]$

La solución es: $x=C$, $y=-C$ y $z=0$, por lo tanto, una base para el espacio $\aleph\left[F\right]$ es: $\{(1,-1,0)\}$.

Si ahora evaluamos la transformación F para la base canónica resulta lo siguiente:

(%i8) Img:matrix(F(1,0,0),F(0,1,0),F(0,0,1));
(%o8) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$

Reduciremos la matriz anterior pero esta vez con la función **echelon**, que al igual que **triangularize** devuelve la forma escalonada de la matriz M, obtenida por eliminación gaussiana, pero normalizando el primer elemento no nulo de cada fila.

(%i9) echelon(Img);
(%o9) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

Es decir, una base para el espacio imagen o rango es el conjunto: $\{(1,1,0),(0,1,-1)\}$.

Podemos también calcular una base para $\boldsymbol{V}^3=\{(x,y,z):x+y+z=0\}$

(%i10) linsolve(x+y+z=0,[x,y,z]);
(%o10) $[x=-\%\mathtt{r}_3-\%\mathtt{r}_2,y=\%\mathtt{r}_3,z=\%\mathtt{r}_2]$

Es una solución del tipo: $x=-C_3-C_2$, $y=C_3$ y $z=C_2$. Una base vendrá dada por: $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.

Si evaluamos la transformación dada en esta base, resulta:

(%i11) matrix(F(-1,1,0),F(-1,0,1));
(%o11) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&2\end{pmatrix}$

El espacio vectorial tiene como base $\{(0,-2,2)\}$.

Borrador Preliminar

4.2.6 Ejercicios

1. Considere los siguientes operadores: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ hermítico, $\mathbb{K} = -\mathbb{K}^\dagger$ antihermítico; $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger$ unitario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos operadores genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:
   (a). En general:
      I. $\left(\mathbb{P}^\dagger\right)^{-1} = \left(\mathbb{P}^{-1}\right)^\dagger$.
      II. $(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$
      III. Si $[\mathbb{P}, \mathbb{Q}] = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathbb{Q})^{-1} = (\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{P}$
      IV. $\left(\mathrm{e}^{\mathbb{P}}\right)^\dagger = \mathrm{e}^{\mathbb{P}^\dagger}$
      V. $\mathbb{P}\mathrm{e}^{\mathbb{Q}}\mathbb{P}^{-1} = \mathrm{e}^{\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}}$
   (b). Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ también será un operador hermítico.
   (c). Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\mathrm{e}^{i\mathbb{A}}$ es unitario.
   (d). Si $\mathbb{K}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}$ es también lo será. En particular eso se cumple para $\tilde{\mathbb{K}} = i\mathbb{A}$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.
   (e). Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$, será hermítica *si y sólo si* $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmuntan.
   (f). Si $\mathbb{S}$ es un operador real y antisimétrico[7] y $\mathbb{I}$ el operador unidad, pruebe:
      I. Los operadores $(\mathbb{I} - \mathbb{S})$ y $(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ conmutan.
      II. El operador $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ es simétrico, mientras que $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$ es ortogonal.[8]
   (g). Considere una matriz ortogonal de la forma $\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, encuentre la expresión para $\mathbb{S}$ que reproduce $\mathbb{R} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$.
2. Si un operador lineal $\mathbb{C}$ genérico, entonces pruebe que $\left(\mathbb{C} + \mathbb{C}^\dagger\right)$ y $i\left(\mathbb{C} - \mathbb{C}^\dagger\right)$, con $i = \sqrt{-1}$, serán hermíticos. Esto, obviamente implica que siempre podremos separar un operador lineal como:
$$\mathbb{C} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{C} + \mathbb{C}^\dagger\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbb{C} - \mathbb{C}^\dagger\right).$$
   donde $\left(\mathbb{C} + \mathbb{C}^\dagger\right)$ representa su parte hermítica y $\left(\mathbb{C} - \mathbb{C}^\dagger\right)$ su parte antihermítica.

4.3 Representación matricial de operadores

Dados dos vectores $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ definiremos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno de dos vectores

$$\langle v_2|\left(\mathbb{A}|v_1\rangle\right) \equiv A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}\,, \tag{4.13}$$

es claro que $A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}$ será en general un número complejo, pero además el valor de ese número dependerá de los vectores $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ con los cuales se haga la operación (4.13).

El paso más importante para asociar un conjunto de números a un operador lo constituye realizar la operación (4.13) con los elementos de una base del espacio vectorial donde opera $\mathbb{A}$.

Supongamos un operador lineal $\mathbb{A}$ en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ donde $\dim(\boldsymbol{V}) = n$ y $\dim(\boldsymbol{W}) = m$, y sean $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}_1}\rangle, |\tilde{\mathrm{e}_2}\rangle, |\tilde{\mathrm{e}_3}\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales[9] para $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ respectivamente.

[7]Esto es $\mathbb{S}^\dagger \equiv \mathbb{S}^T = -\mathbb{S}$ con $\mathbb{S}^T$ el traspuesto de $\mathbb{S}$.

[8]Esto es $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}^{-1}$ con $\mathbb{A}^T$ el traspuesto de $\mathbb{A}$.

[9]Como hemos mencionado con anterioridad, las bases no necesariamente deben ser ortogonales (o mejor ortonormales), pero uno

Borrador Preliminar

Entonces en la ecuación (4.13) cada uno de los vectores $\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle \in \boldsymbol{W}$ nos conduce a:

$$\langle \tilde{\mathrm{e}^{\beta}}|\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle = A_i^{\beta} \quad \text{con } i = 1, 2, .., n \text{ y } \ \alpha\,, \beta = 1, 2, .., m\,. \tag{4.14}$$

Las cantidades A_j^{β} son la representación del operador $\mathbb{A}$ respecto a las bases $\{|\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ de $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ respectivamente. Es decir, definiremos una matriz A_j^{β} como un arreglo de números donde el superíndice, β, indica fila y el subíndice, j, columna:

$$A_j^{\beta} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_n^m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \end{pmatrix}.$$

Es importante señalar que cambiando el orden de los vectores dentro de la base cambia la representación matricial del operador. Esto significa que la organización de los número A_j^{β} dependerá del orden que le demos a los vectores en las bases $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}_i}\rangle\}$.

Definitivamente, las matrices son uno de los objetos más útiles de las matemáticas que permiten "aterrizar" conceptos y calcular cantidades. La palabra matriz fue introducida en 1850 por James Joseph Sylvester[10] y su teoría desarrollada por Hamilton[11] y Cayley[12]. Si bien los físicos las consideramos indispensables, no fueron utilizadas de manera intensiva hasta el aparición de la Mecánica Cuántica alrededor de 1925.

Ejemplo 4.8 Si tenemos un matriz $\mathbb{B}$, 2×3, de la forma

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

y suponemos las bases canónicas para $\boldsymbol{V}^3$ y $\boldsymbol{V}^2$: $\{|\mathrm{i}_1\rangle, |\mathrm{i}_2\rangle, |\mathrm{i}_3\rangle\}$ y $\{|\mathrm{i}_1\rangle, |\mathrm{i}_2\rangle\}$, respectivamente, entonces la matriz $\mathbb{B}$ representa la transformación $\mathbb{B} : \boldsymbol{V}^3 \to \boldsymbol{V}^2$ que lleva un vector genérico $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3)$ a un vector genérico $|y\rangle = (y_1, y_2)$ tal que:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{B}|x\rangle = |y\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + 0x_2 + 4x_3\,. \end{aligned}$$

Es claro que la representación matricial dependerá de la base en la cual se exprese.

Ejemplo 4.9 Si suponemos el operador diferencial $\mathbb{D}(\cdot) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ cuyo dominio está conformado por el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3, entonces tendremos que: $\mathbb{D}(\cdot) : \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^2$. En este caso las bases podrían ser: $|p_i\rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $|\tilde{p}_j\rangle = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbf{P}^3$ y $\mathbf{P}^2$ respectivamente.

---

siempre puede ortogonalizarlas (y ortonormalizarlas)

[10] James Joseph Sylvester (1814-1897 Londres, Inglaterra) Además de sus aportes con Cayley a la teoría de las matrices, descubrió la solución a la ecuación cúbica y fue el primero en utilizar el término discriminante para categorizar cada una de las raíces de la ecuación. Para vivir tuvo que ejercer de abogado durante una década. Por fortuna, otro matemático de la época (Arthur Cayley) frecuentaba los mismos juzgados y tribunales y pudieron interactuar. Por ser judío tuvo cantidad de dificultades para conseguir trabajo en la Academia.

[11] Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865, Dublin, Irlanda) Sus contribuciones en el campo de la óptica, dinámica del cuerpo rígido, teoría de ecuaciones algebraicas y teoría de operadores lineales.

[12] Arthur Cayley (1821, Richmond, 1895, Cambridge, Inglaterra) En sus cerca de 900 trabajos cubrió casi la totalidad de las áreas de las matemáticas de aquel entonces. Sus mayores contribuciones se centran el la teoría de matrices y la geometría no euclidiana. No consiguió empleo como matemático y tuvo que graduarse de abogado para ejercer durante más de 15 años, durante los cuales publicó más de 250 trabajos en matemáticas.

Borrador Preliminar

Al operar (diferenciar) sobre $|p_j\rangle \in \mathbf{P}^3$ y expresar ese resultado en la base de $\mathbf{P}^2$ tenemos:

$$\mathbb{D}|p_j\rangle \;\Rightarrow\; \begin{cases} \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} &= 0 &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} &= 1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x} &= 2x &= 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^3\right)}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \langle\tilde{p}^\alpha|\mathbb{D}|p_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes de esa expansión serán las columnas de la matriz que los representa. Para enfatizar, los elementos de una matriz, no sólo dependen de la base sino del orden en el cual la base se presente.

Consideremos que la base de $\mathbf{P}^2$ viene representada por $|\hat{p}_j\rangle = \left\{x^2, x, 1\right\}$, la representación matricial del operador $\mathbb{D}\left(\cdot\right) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ será:

$$\mathbb{D}|p_j\rangle \;\Rightarrow\; \begin{cases} \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} &= 0 &= 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\cdot 1 \\ \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} &= 1 &= 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1\cdot 1 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x} &= 2x &= 0\cdot x^2 + 2\cdot x + 0\cdot 1 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^3\right)}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 &= 3\cdot x^2 + 0\cdot x + 0\cdot 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \langle\hat{p}^\alpha|\mathbb{D}|p_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede ver que $\mathbb{D}|p_j\rangle$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; 1 + 2x + 3x^2\,,$$

y equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; 3x^2 + 2x + 1\,,$$

¡Es el mismo polinomio! Recuerde que las componentes del vector multiplican a los vectores bases en el mismo orden.

Ejemplo 4.10 Construyamos la representación para el mismo operador $\mathbb{D}$ del ejemplo anterior, pero ahora en las siguientes bases: $|p_i\rangle = \left\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\right\}$ y $|\tilde{p}_i\rangle = \left\{1, x, x^2\right\}$ de $\mathbf{P}^3$ y $\mathbf{P}^2$, respectivamente. Entonces, nuevamente vemos que $\mathbb{D}|p_j\rangle$ implica:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} &= 0 &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}(1+x)}{\mathrm{d}x} &= 1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(1+x+x^2\right)}{\mathrm{d}x} &= 1+2x &= 1\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(1+x+x^2+x^3\right)}{\mathrm{d}x} &= 1+2x+3x^2 &= 1\cdot 1 + 2\cdot x + 3\cdot x^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \langle\tilde{p}^\alpha|\mathbb{D}|p_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

4.3.1 Álgebra elemental de matrices

El álgebra de operadores que definimos en la sección 4.1.1, puede ser traducida al lenguaje de matrices. Por comodidad supondremos un único espacio vectorial, $\boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{W}$ y, por lo tanto nos basta una base ortogonal $\{|\mathrm{e}_n\rangle\}$. De este modo, es claro que se obtienen nuevamente las conocidas relaciones para matrices cuadradas

$$\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}+\mathbb{B}|\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle + \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{B}|\mathrm{e}_j\rangle = A^i_j + B^i_j\,.$$

Con lo cual tenemos la suma de matrices que todos hemos visto en los cursos básicos

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \vdots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1+B^1_1 & A^1_2+B^1_2 & \cdots & A^1_n+B^1_n \\ A^2_1+B^2_1 & A^2_2+B^2_2 & & A^2_n+B^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^n_1+B^n_1 & & & A^n_n+B^n_n \end{pmatrix}.$$

De igual modo, para la representación de composición de operadores que consideramos en la sección 4.1.3 tendremos:

$$\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}\mathbb{B}|\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}\,\mathbb{I}\,\mathbb{B}|\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}\left(|\mathrm{e}_k\rangle\langle \mathrm{e}^k|\right)\mathbb{B}|\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle\langle \mathrm{e}^k|\mathbb{B}|\mathrm{e}_j\rangle = A^i_k B^k_j\,,$$

que se traduce en la tradicional multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \vdots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_k B^k_1 & A^1_k B^k_2 & \cdots & A^1_k B^k_n \\ A^2_k B^k_1 & A^2_k B^k_2 & & A^2_k B^k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^n_k B^k_1 & & & A^n_k B^k_n \end{pmatrix},$$

como ya sabíamos $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A} \to A^i_k B^k_j \neq B^i_k A^k_j$.

Finalmente, es claro que la multiplicación de un número por una matriz es la multiplicación de todos sus elementos por ese número

$$\langle \mathrm{e}^i|\alpha\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle = \alpha\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle = \alpha A^i_j\,.$$

4.3.2 Bases y la representación matricial de operadores

Como es claro de la ecuación (4.14) la representación matricial de un operador depende de las bases de $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$, respectivamente. A continuación discutiremos algunos ejemplos particulares.

4.3.2.1 Representación diagonal

Dado un operador lineal $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$, donde $\dim(\boldsymbol{V}) = \dim(\boldsymbol{W}) = n$, y sea $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ una base ortonormal para $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$. Entonces, si adicionalmente se da el caso que $\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i|\mathrm{e}_i\rangle$, la representación matricial será diagonal

$$\langle \mathrm{e}^j|\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle = A^j_i = \lambda_i\langle \mathrm{e}^j|\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i\delta^j_i\,.$$

Es importante señalar que $\lambda_i\delta^j_i$, en la ecuación anterior, no se puede interpretar como suma, sino sencillamente que se repite para cada índice i. Como regla, pueden recordar que índices "arriba y abajo" indican suma, pero en el mismo nivel "arriba o abajo" no. Adicionalmente, que esta afirmación también es válida para $\dim(\boldsymbol{V}) \neq \dim(\boldsymbol{W})$ pero por simplicidad seguimos trabajando con matrices cuadradas.

Borrador Preliminar

4.3.2.2 Representación matricial de operadores adjuntos y hermíticos

Consideremos la representación matricial de un operador adjunto, tal y como lo desarrollamos en la sección 4.2.3,

$$\left(A^\dagger\right)^i_j = \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}^\dagger|\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^j|\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle^* = \left(A^j_i\right)^* ,$$

vale decir: la matriz que representa el operador adjunto $\mathbb{A}^\dagger$, es la traspuesta conjugada de la matriz que representa al operador $\mathbb{A}$.

Si el operador es hermítico: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A} \;\Rightarrow\; \left(A^\dagger\right)^i_j = A^i_j$. Por lo tanto, las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales.

Aquí vale la pena reexpresar, con matrices, algunas de las propiedades que arriba expusimos:

$$\left(\mathbb{A}^\dagger\right)^\dagger \to \left(\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}^\dagger|\mathrm{e}_j\rangle\right)^\dagger = \left(\left(A^\dagger\right)^i_j\right)^\dagger = \left(\left(A^j_i\right)^*\right)^\dagger = A^i_j \quad \text{y}$$

$$(\lambda\mathbb{A})^\dagger \to \langle \mathrm{e}^i|\lambda\mathbb{A}^\dagger|\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^j|\lambda\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle^* = \lambda^*\langle \mathrm{e}^j|\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle^* = \lambda^*\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}^\dagger|\mathrm{e}_j\rangle = \lambda^*\mathbb{A}^\dagger ,$$

pero más interesante es:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger \to \langle \mathrm{e}^i|\,(\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger\,|\mathrm{e}_j\rangle = \left(A^i_k B^k_j\right)^\dagger = (A^j_k)^*(B^k_i)^* = (A^\dagger)^k_j(B^\dagger)^i_k = (B^\dagger)^i_k(A^\dagger)^k_j =\to \mathbb{B}^\dagger\mathbb{A}^\dagger .$$

4.3.3 Representación matricial y transformaciones

Hemos dicho que dada una base particular en el espacio de acción de un operador, éste quedará representado por una matriz adaptada a esa base. Por lo tanto, si cambiamos la base que genera la representación, ese mismo operador tendrá otra matriz como representación.

Por comodidad volvamos a suponer un único espacio vectorial, $\boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{W}$, pero ahora supondremos que este espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ tiene dos bases discretas ortonormales $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones matriciales de $\mathbb{A}$: $\tilde{A}^i_j = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i|\mathbb{A}|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$ y $A^i_j = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}|\mathrm{e}_m\rangle$, están relacionadas por:

$$\langle \tilde{\mathrm{e}}^i|\mathbb{A}|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i|\Big(|\mathrm{e}_k\rangle\langle \mathrm{e}^k|\Big)\mathbb{A}\,(|\mathrm{e}_m\rangle\langle \mathrm{e}^m|)|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \underbrace{\langle \tilde{\mathrm{e}}^i|\mathrm{e}_k\rangle}_{S^i_k}\langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}|\mathrm{e}_m\rangle\underbrace{\langle \mathrm{e}^m|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \;\Leftrightarrow\; \tilde{A}^i_j = S^i_k\,A^k_m\,\tilde{S}^m_j , \tag{4.15}$$

donde $\tilde{A}^i_j$ es la representación del operador $\mathbb{A}$ en la base $\{|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ y A^k_m en la base $\{|\mathrm{e}_m\rangle\}$.

Más aún, siempre podremos expresar unos vectores base en términos de los otros de tal forma que:

$$|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \tilde{S}^m_j|\mathrm{e}_m\rangle = \tilde{S}^m_j\,(S^n_m|\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle) \quad \Rightarrow \langle \tilde{\mathrm{e}}^n|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^n_j = \tilde{S}^m_j S^n_m \equiv S^n_m\tilde{S}^m_j \quad \Rightarrow \tilde{S}^i_j = \left(S^i_j\right)^{-1} , \tag{4.16}$$

con lo cual la relación (4.15), $\tilde{A}^i_j = S^i_k\,A^k_m\,\tilde{S}^m_j$, puede ser reescrita como

$$\tilde{A}^i_j = S^i_k\,A^k_m\,\left(S^m_j\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{S}. \tag{4.17}$$

Diremos que dos representaciones matriciales A^i_j y $\tilde{A}^k_m$, de un mismo operador $\mathbb{A}$, son similares si están relacionadas entre si por (4.17), donde la matriz de transformación S^i_k y su inversa se construyen a partir de los productos internos de las bases. Esa misma afirmación se puede refrasear por el hecho que dos operadores $\tilde{\mathbb{A}}$ y $\mathbb{A}$ están relacionados por una transformación de similaridad (4.17) constituyen distintas representaciones de un mismo operador.

Adicionalmente, por la definición de producto interno, $\langle \mathrm{e}^k|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle = \langle \tilde{\mathrm{e}}^m|\mathrm{e}_k\rangle^*$ y tomando en cuenta (4.16), tendremos:

$$\tilde{S}^k_m = (S^m_k)^* \equiv \left(S^\dagger\right)^k_m = \left(S^k_m\right)^{-1} ,$$

es decir, las matrices de productos internos que transforman las representaciones matriciales de los operadores,

Borrador Preliminar

son unitarias y la relación (4.15) puede escribirse también como:

$$\tilde{A}^i_j = S^i_k\, A^k_m\, \tilde{S}^m_j \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}^i_j = S^i_k\, A^k_m\, \left(S^\dagger\right)^m_j \,. \tag{4.18}$$

En este caso, diremos que las representaciones matriciales de $\mathbb{A}$ están relacionadas a una transformación unitaria del tipo (4.18).

Ejemplo 4.11 Dada la siguiente transformación:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\,,\ \mathbb{T}\left[(x,y,z)\right] = (x+y, x-2z, x+2y+3z, y-2z)\ .$$

y tomemos como bases los conjuntos:

$$|\mathrm{e}_i\rangle = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \in \mathbb{R}^3\,, \quad |\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\} \in \mathbb{R}^4\,.$$

Queremos encontrar la representación matricial del operador $\mathbb{T}$, esto es

$$T^i_j = \langle\tilde{\mathrm{e}}^i|\mathbb{T}|\mathrm{e}_j\rangle = \langle\tilde{\mathrm{e}}^i|\left(C^k_j|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle\right) \equiv C^k_j\langle\tilde{\mathrm{e}}^i|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle\,,$$

por lo tanto los C^k_j son los coeficientes de la expansión de los vectores base de $\mathbb{R}^3$ transformados. Es decir

$$\mathbb{T}|\mathrm{e}_1\rangle = C^k_1|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle,\ \mathbb{T}|\mathrm{e}_2\rangle = C^k_2|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle,\ \mathbb{T}|\mathrm{e}_3\rangle = C^k_3|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle, \quad \text{y} \quad \mathbb{T}|\mathrm{e}_4\rangle = C^k_4|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle.$$

Entonces, podemos hacer las siguientes expansiones:

$$\mathbb{T}\left[(1,1,0)\right] = (2,1,3,1) = C^1_1(1,1,1,1) + C^2_1(0,1,1,1) + C^3_1(0,0,1,1) + C^4_1(0,0,0,1)\,,$$

y al resolver para $\{C^1_1, C^2_1, C^3_1, C^4_1\}$ obtener: $\{C^1_1 = 2, C^2_1 = -1, C^3_1 = 2, C^4_1 = -2\}$.

Para la siguiente base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{T}\left[(1,0,1)\right] = (1,-1,4,-2) = C^1_2(1,1,1,1) + C^2_2(0,1,1,1) + C^3_2(0,0,1,1) + C^4_2(0,0,0,1)\,,$$

resolviendo para $\{C^1_2, C^2_2, C^3_2, C^4_2\}$ se obtiene: $\{C^1_2 = 1, C^2_2 = -2, C^3_2 = 5, C^4_2 = -6\}$.

Y finalmente, para:

$$\mathbb{T}\left[(0,1,1)\right] = (1,-2,5,-1) = C^1_3(1,1,1,1) + C^2_3(0,1,1,1) + C^3_3(0,0,1,1) + C^4_3(0,0,0,1)\,,$$

resulta: $\{C^1_3 = 1, C^2_3 = -3, C^3_3 = 7, C^4_3 = -6\}$.

Por lo tanto, la representación matricial que hemos obtenido será:

$$\begin{aligned} T^1_1 &= C^k_1\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle = C^1_1\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle + C^2_1\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle + C^3_1\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_3\rangle + C^4_1\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_4\rangle\,, \\ T^1_2 &= C^k_2\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle = C^1_2\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle + C^2_2\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle + C^3_2\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_3\rangle + C^4_2\langle\tilde{\mathrm{e}}^1|\tilde{\mathrm{e}}_4\rangle\,, \cdots \end{aligned}$$

Vale decir:

$$\begin{aligned} T^1_1 &= 2\cdot 4 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 = 7\,, \\ T^1_2 &= 1\cdot 4 + (-2)\cdot 3 + 5\cdot 2 + (-6)\cdot 1 = 2\,, \quad \cdots \end{aligned}$$

Si continuamos haciendo todas las cuentas, para todas las demás componentes, tendremos la siguiente matriz:

$$\langle\tilde{\mathrm{e}}_j|\mathbb{T}|\mathrm{e}_i\rangle = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación para la transformación de cualquier vector es entonces:

$$\mathbb{T}|\tilde{x}_i\rangle = T^j_i|x_j\rangle \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \\ \tilde{x}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Pedimos al lector repetir los cálculos pero considerando las bases:

$$|\mathrm{e}_i\rangle = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \in \mathbb{R}^3\,, \quad |\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \in \mathbb{R}^4\,;$$

y también las siguientes bases canónicas

$$|\mathrm{e}_i\rangle = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \in \mathbb{R}^3\,, \quad |\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \in \mathbb{R}^4\,.$$

¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos de este último par de bases?

Ejemplo 4.12 Consideremos que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Definamos dos operadores $\mathbb{L}_z$ y $\mathbb{S}$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{L}_z|u_1\rangle = |u_1\rangle\,, \quad \mathbb{L}_z|u_2\rangle = 0\,, \quad \mathbb{L}_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle\,,$$
$$\mathbb{S}|u_1\rangle = |u_3\rangle\,, \quad \mathbb{S}|u_2\rangle = |u_2\rangle\,, \quad \mathbb{S}|u_3\rangle = |u_1\rangle\,.$$

1. Calculemos la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ del operador: $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$.
   La matriz será:
   $$\begin{pmatrix} \langle u^1|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_1\rangle & \langle u^1|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_2\rangle & \langle u^1|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_3\rangle \\ \langle u^2|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_1\rangle & \langle u^2|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_2\rangle & \langle u^2|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_3\rangle \\ \langle u^3|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_1\rangle & \langle u^3|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_2\rangle & \langle u^3|\mathbb{L}_z\mathbb{S} - \mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_3\rangle \end{pmatrix}$$
   con lo cual:
   $$\begin{pmatrix} \langle u^1|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_1\rangle - \langle u^1|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_1\rangle & \langle u^1|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_2\rangle - \langle u^1|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_2\rangle & \langle u^1|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_3\rangle - \langle u^1|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_3\rangle \\ \langle u^2|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_1\rangle - \langle u^2|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_1\rangle & \langle u^2|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_2\rangle - \langle u^2|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_2\rangle & \langle u^2|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_3\rangle - \langle u^2|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_3\rangle \\ \langle u^3|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_1\rangle - \langle u^3|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_1\rangle & \langle u^3|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_2\rangle - \langle u^3|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_2\rangle & \langle u^3|\mathbb{L}_z\mathbb{S}|u_3\rangle - \langle u^3|\mathbb{S}\mathbb{L}_z|u_3\rangle \end{pmatrix},$$
   de donde:
   $$\langle u^i|\,[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]\,|u_j\rangle = \begin{pmatrix} 0-0 & 0-0 & 1-(-1) \\ 0-0 & 0-0 & 0-0 \\ (-1)-1 & 0-0 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. ¿$\mathbb{L}_z, \mathbb{S}$ y $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$ serán biyectivas?
   Veamos. Por definición $\mathbb{S}$ es biyectiva ya que cada vector tiene su imagen, $\mathbb{L}_z$ no lo es por cuanto el vector $|u_2\rangle$ no tiene imagen y, finalmente $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$ tampoco será biyectiva dado que $\langle u^i|\,[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]\,|u_j\rangle$ no tiene inversa ya que $\det|\langle u^i|\,[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]\,|u_j\rangle| = 0$.
3. Calculemos la dimensión del dominio, del rango y del núcleo de la transformaciones $\mathbb{L}_z, \mathbb{S}$ y $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$.

	Dominio	Rango	Núcleo
$\mathbb{L}_z$	3	2	1
$\mathbb{S}$	3	3	0
$[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$	3	2	2

   dado que $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]\,|u_2\rangle = 0\,.$

Ejemplo 4.13 Buscaremos la expresión matricial para los operadores lineales de Pauli: $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ sabiendo que actúan como:

$$\sigma_z|+\rangle = |+\rangle\,,\ \sigma_z|-\rangle = -|-\rangle\,,\ \sigma_x|+\rangle_x = |+\rangle_x\,,\ \sigma_x|-\rangle_x = -|-\rangle_x\,,\ \sigma_y|+\rangle_y = |+\rangle_y\,,\ \sigma_y|-\rangle_y = -|-\rangle_y$$

Borrador Preliminar

con:

$$|+\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ |-\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle + |-\rangle \right] , \ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle - |-\rangle \right] ,$$

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle + i|-\rangle \right] , \ |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle - i|-\rangle \right] .$$

Ahora bien:

$$_x\langle +|+\rangle_x = 1 , \qquad _x\langle +|-\rangle_x =_x \langle -|+\rangle_x = 0 , \qquad _x\langle -|-\rangle_x = 1 ,$$

$$_y\langle +|+\rangle_y = 1 , \qquad _y\langle +|-\rangle_y =_y \langle -|+\rangle_y = 0 , \qquad _y\langle -|-\rangle_y = 1 .$$

Es decir, los vectores $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ y $\{|+\rangle_y, |-\rangle_y\}$ forman bases ortonormales, por lo que los vectores $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se pueden expresar en término de esas bases como:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_x + |-\rangle_x \right] , \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_x - |-\rangle_x \right] ,$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_y + |-\rangle_y \right] , \qquad |-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_y - |-\rangle_y \right] .$$

Así las expresiones matriciales serán:

$$(\sigma_z)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_z|+\rangle & \langle +|\sigma_z|-\rangle \\ \langle -|\sigma_z|+\rangle & \langle -|\sigma_z|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Para $(\sigma_x)^i_j$:

$$(\sigma_x)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_x|+\rangle & \langle +|\sigma_x|-\rangle \\ \langle -|\sigma_x|+\rangle & \langle -|\sigma_x|-\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[_x\langle +| +_x \langle -| \right] \sigma_x \left[|+\rangle_x + |-\rangle_x \right] & \left[_x\langle +| +_x \langle -| \right] \sigma_x \left[|+\rangle_x - |-\rangle_x \right] \\ \left[_x\langle +| -_x \langle -| \right] \sigma_x \left[|+\rangle_x + |-\rangle_x \right] & \left[_x\langle +| -_x \langle -| \right] \sigma_x \left[|+\rangle_x - |-\rangle_x \right] \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left[_x\langle +| +_x \langle -| \right] \left[|+\rangle_x - |-\rangle_x \right] & \left[_x\langle +| +_x \langle -| \right] \left[|+\rangle_x + |-\rangle_x \right] \\ \left[_x\langle +| -_x \langle -| \right] \left[|+\rangle_x - |-\rangle_x \right] & \left[_x\langle +| -_x \langle -| \right] \left[|+\rangle_x + |-\rangle_x \right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Borrador Preliminar

Y finalmente, para $(\sigma_y)^i_j$:

$$(\sigma_y)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_y|+\rangle & \langle +|\sigma_y|-\rangle \\ \\ \langle -|\sigma_y|+\rangle & \langle -|\sigma_y|-\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} [{}_y\langle +| + {}_y\langle -|]\,\sigma_y\,[|+\rangle_y + |-\rangle_y] & -i\,[{}_y\langle +| + {}_y\langle -|]\,\sigma_y\,[|+\rangle_y - |-\rangle_y] \\ \\ i\,[{}_y\langle +| - {}_y\langle -|]\,\sigma_y\,[|+\rangle_y + |-\rangle_y] & [{}_y\langle +| - {}_y\langle -|]\,\sigma_y\,[|+\rangle_y - |-\rangle_y] \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} [{}_y\langle +| + {}_y\langle -|]\,[|+\rangle_y - |-\rangle_y] & -i\,[{}_y\langle +| + {}_y\langle -|]\,[|+\rangle_y + |-\rangle_y] \\ \\ i\,[{}_y\langle +| - {}_y\langle -|]\,[|+\rangle_y - |-\rangle_y] & -\,[{}_y\langle +| - {}_y\langle -|]\,[|+\rangle_y + |-\rangle_y] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3.4 Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}(\mathbb{A})$, de un operador $\mathbb{A}$ es la suma de los elementos diagonales de su representación matricial $\mathbb{A}$. Esto es, dado un operador $\mathbb{A}$ y una base ortogonal $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ para $\boldsymbol{V}^n$, entonces:

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle = A^k_k\,.$$

La traza de la representación matricial de un operador es, por ejemplo:

$$A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}) = A^i_i = 15\,.$$

4.3.4.1 Propiedades de la Traza

Claramente la traza es lineal: $\mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) + \lambda\mathrm{Tr}\,(\mathbb{B})$, ya que

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}) = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}|\mathrm{e}_k\rangle = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle + \lambda\langle \mathrm{e}^k|\mathbb{B}|\mathrm{e}_k\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}) + \lambda\mathrm{Tr}\,(\mathbb{B})\;.$$

La traza de un producto conmuta, esto es, $\mathrm{Tr}\,(\mathbb{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{BA})$, y es fácilmente demostrable:

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbb{AB}) = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{AB}|\mathrm{e}_k\rangle = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}\underbrace{|\mathrm{e}_m\rangle\langle \mathrm{e}^m|}_{\mathbb{I}}\mathbb{B}|\mathrm{e}_k\rangle = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{B}\underbrace{|\mathrm{e}_m\rangle\langle \mathrm{e}^m|}_{\mathbb{I}}\mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{BA})\;.$$

Recuerde que $\langle \mathrm{e}^k|\mathbb{B}|\mathrm{e}_m\rangle$ y $\langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle$ son números que pueden ser reordenados. Donde una vez más hemos utilizado las dos relaciones de cierre $|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\langle\tilde{\mathrm{e}}^m| = |\mathrm{e}_k\rangle\langle \mathrm{e}^k| = \mathbb{I}$.

Del mismo modo es fácil demostrar que la traza de un triple producto de matrices respeta la ciclicidad del orden de la matrices en el producto: $\mathrm{Tr}\,(\mathbb{ABC}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{BCA}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbb{CAB})$.

Borrador Preliminar

4.3.4.2 Invariancia de la Traza

La traza de una matriz no depende de la base que seleccionemos, es un invariante que caracteriza al operador independientemente de la base en la cual se represente. Entonces, a partir de (4.15) tendremos:

$$A^k_k = \langle \mathrm{e}^k|\mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle = \langle \mathrm{e}^k \underbrace{|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\langle\tilde{\mathrm{e}}^m|}_{\mathbb{I}} \mathbb{A}|\mathrm{e}_k\rangle = \langle\tilde{\mathrm{e}}^m|\mathbb{A}\underbrace{|\mathrm{e}_k\rangle\langle\mathrm{e}^k|}_{\mathbb{I}}\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle = \langle\tilde{\mathrm{e}}^m|\mathbb{A}|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle = \tilde{A}^m_m\,.$$

Nótese que primero hemos introducido $|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\langle\tilde{\mathrm{e}}^m|$, luego hemos reubicado el término $\langle\mathrm{e}^k|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle$, para el lado derecho y, finalmente, hemos identificado el término $|\mathrm{e}_k\rangle\langle\mathrm{e}^k|$ como el operador unidad. Es claro que la traza caracteriza al operador independiente de su representación matricial.

4.3.5 Un paréntesis determinante

El determinante de un operador, $\mathbb{A}$, se define como una aplicación de su representación matricial, $\langle\mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle$ en $\mathbb{R}$, es decir, asocia un número real con la representación matricial del operador, y se define como:

$$\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots}A^1_iA^2_jA^3_k\cdots \equiv \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{vmatrix},$$

donde los elementos de la representación matricial se expresan como $A^i_j = \langle\mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle$ y hemos generalizado el tensor de Levi-Civita que presentamos en la sección 1.4.1, de tal forma que:

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} = \begin{cases} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ constituyen una permutación cíclica de } 1,2,3\cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ constituyen una permutación anticíclica de } 2,1,3\cdots n \end{cases}$$

Un ejemplo simplificado de esta asociación para el caso de representaciones matriciales 3×3 es el siguiente:

$$\langle\mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk}A^1_iA^2_jA^3_k = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix},$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\det|\mathbb{A}| &= \varepsilon^{123}A^1_1A^2_2A^3_3 + \varepsilon^{312}A^1_3A^2_1A^3_2 + \varepsilon^{231}A^1_2A^2_3A^3_1 + \varepsilon^{132}A^1_1A^2_3A^3_2 + \varepsilon^{321}A^1_3A^2_2A^3_1 + \varepsilon^{213}A^1_2A^2_1A^3_3 \\ &= A^1_1A^2_2A^3_3 + A^1_3A^2_1A^3_2 + A^1_2A^2_3A^3_1 - A^1_1A^2_3A^3_2 - A^1_3A^2_2A^3_1 - A^1_2A^2_1A^3_3\,.\end{aligned}$$

4.3.5.1 Propiedades de los determinantes

1. $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es el operador traspuesto de $\mathbb{A}$, esto es claro para las representaciones matriciales $\langle\mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle = A^i_j = \left(\langle\mathrm{e}^j|\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle\right)^T$.
   Esta propiedad proviene de la definición del índice de Levi-Civita: $\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots}A^1_iA^2_jA^3_k\cdots = \varepsilon_{ijk\cdots}A^i_1A^j_2A^k_3\cdots = \det|\mathbb{A}^T|$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{vmatrix}.$$

Borrador Preliminar

2. Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula

$$\varepsilon^{iik\cdots}A^1_iA^2_iA^3_k\cdots=\varepsilon_{iik\cdots}A^i_1A^i_2A^k_3\cdots=0\,,\quad\Leftrightarrow\quad\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_2&A^1_3\\A^1_1&A^1_2&A^1_3\\A^3_1&A^3_2&A^3_3\end{vmatrix}=0\,.$$

3. Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por el número

$$\varepsilon^{ijk\cdots}A^1_i\left(\lambda A^2_j\right)A^3_k\cdots=\lambda\varepsilon^{ijk\cdots}A^1_iA^2_jA^3_k\cdots=\lambda\det|\mathbb{A}|$$
$$\varepsilon_{ijk\cdots}A^i_1A^j_2\left(\lambda A^k_3\right)\cdots=\lambda\varepsilon_{ijk\cdots}A^i_1A^j_2A^k_3\cdots=\lambda\det|\mathbb{A}|\,,$$

de aquí claramente se desprende que si una fila o una columna es cero ($\lambda=0$) el determinante se anula. Más aún, si dos filas o dos columnas son proporcionales $A^1_i=\lambda A^2_j$ el determinante se anula, por cuanto se cumple la propiedad anterior:

$$\begin{vmatrix}A^1_1&\lambda A^1_2&A^1_3\\A^2_1&\lambda A^2_2&A^2_3\\A^3_1&\lambda A^3_2&A^3_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_2&A^1_3\\A^2_1&A^2_2&A^2_3\\\lambda A^3_1&\lambda A^3_2&\lambda A^3_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_2&A^1_3\\A^2_1&A^2_2&A^2_3\\A^3_1&A^3_2&A^3_3\end{vmatrix}.$$

Resulta obvio que:

$$\begin{vmatrix}A^1_1&0&A^1_3\\A^2_1&0&A^2_3\\A^3_1&0&A^3_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_2&A^1_3\\A^2_1&A^2_2&A^2_3\\0&0&0\end{vmatrix}=0\,,$$

al igual que:

$$\begin{vmatrix}A^1_1&\lambda A^1_1&A^1_3\\A^2_1&\lambda A^2_1&A^2_3\\A^3_1&\lambda A^3_1&A^3_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_2&A^1_3\\\lambda A^1_1&\lambda A^1_2&\lambda A^1_3\\A^3_1&A^3_2&A^3_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_1&A^1_3\\A^2_1&A^2_1&A^2_3\\A^3_1&A^3_1&A^3_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_2&A^1_3\\A^1_1&A^1_2&A^1_3\\A^3_1&A^3_2&A^3_3\end{vmatrix}=0\,.$$

4. Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.

$$\det|\mathbb{A}|=\varepsilon^{ijk\cdots}A^1_iA^2_jA^3_k\cdots=\begin{vmatrix}A^1_1&A^1_2&\cdots&A^1_n\\A^2_1&A^2_2&&A^2_n\\\vdots&&\ddots&\\A^n_1&A^n_2&&A^n_n\end{vmatrix}\Rightarrow\ \varepsilon^{ijk\cdots}A^1_jA^2_iA^3_k\cdots=-\det|\langle\mathrm{e}^i|\bar{\mathbb{A}}|\mathrm{e}_j\rangle|\,,$$

donde en la representación matricial $\langle\mathrm{e}^i|\bar{\mathbb{A}}|\mathrm{e}_j\rangle$ se han intercambiando un par de columnas. Claramente las propiedades del índice de Levi-Civita, obliga al cambio de signo $\det|\tilde{\mathbb{A}}|=-\det|\mathbb{A}|$.
Nótese que las propiedades anteriores nos lleva a reescribir el determinante de un operador de la siguiente manera:

$$\det|\mathbb{A}|=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\cdots}\det|\mathbb{A}|=\varepsilon_{ijk\cdots}A^i_\alpha A^j_\beta A^k_\gamma\cdots\Longleftrightarrow\det|\mathbb{A}|=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\cdots}\det|\mathbb{A}|=\varepsilon^{ijk\cdots}A^\alpha_iA^\beta_jA^\gamma_k\cdots$$

claramente, si $\alpha\beta\gamma\cdots\Longleftrightarrow 123\cdots$ obtenemos nuevamente la definición anterior. Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo debido al intercambio de dos índices griegos. Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante se anula debido a la propiedad de símbolo de Levi-Civita con índices griegos.

5. El determinante de la composición de operadores es el producto de los determinantes

$$\det|\mathbb{AB}|=\det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{B}|\,.$$

Antes de proceder a la demostración de esta importante propiedad jugaremos un poco más con las propiedades de las matrices. Si $\mathbb{A}$ es un operador con una representación matricial $m\times n$ y $\mathbb{B}$ es uno con una representación matricial $n\times p$, entonces tendremos $(\mathbb{AB})^\alpha=\mathbb{A}^\alpha\mathbb{B}$, esto es, la α-ésima fila de $\mathbb{AB}$ es

Borrador Preliminar

igual a la multiplicación de la α-ésima fila de $\mathbb{A}$, por toda la matriz $\mathbb{B}$.
Veamos: $C^i_j = (\mathbb{AB})^i_j = A^i_l B^l_j$, por lo tanto la α-ésima fila:

$$C^\alpha_j = A^\alpha_l B^l_j \;\Rightarrow\; C^\alpha_j = (A^\alpha_1, A^\alpha_2, A^\alpha_3, \cdots A^\alpha_n,) \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & B^n_n \end{pmatrix}.$$

Tendremos entonces:

$$\det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}|\left(\varepsilon_{ijk\cdots}B^i_1B^j_2B^k_3\cdots\right) = \left(\varepsilon_{ijk\cdots}A^i_\alpha A^j_\beta A^k_\gamma\cdots\right)\left(\varepsilon_{abc\cdots}B^a_1B^b_2B^c_3\cdots\right),$$

que siempre puede ser rearreglado como:

$$\left(\varepsilon^{ijk\cdots}A^\alpha_iA^\beta_jA^\gamma_k\cdots\right)\left(\varepsilon_{ijk\cdots}B^i_1B^j_2B^k_3\cdots\right) = A^\alpha_iB^i_1A^\beta_jB^j_2A^\gamma_kB^k_3\cdots = \det|\mathbb{AB}|.$$

Veamos este desarrollo para el caso de matrices 3×3:

$$\begin{aligned}\det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{B}| &= \left(\varepsilon^{123}A^1_1A^2_2A^3_3 + \varepsilon^{312}A^1_3A^2_1A^3_2 + \varepsilon^{231}A^1_2A^2_3A^3_1 + \varepsilon^{132}A^1_1A^2_3A^3_2\right.\\ &+ \left.\varepsilon^{321}A^1_3A^2_2A^3_1 + \varepsilon^{213}A^1_2A^2_1A^3_3\right).\left(\varepsilon^{123}B^1_1B^2_2B^3_3 + \varepsilon^{312}B^1_3B^2_1B^3_2 + \varepsilon^{231}B^1_2B^2_3B^3_1\right.\\ &+ \left.\varepsilon^{132}B^1_1B^2_3B^3_2 + \varepsilon^{321}B^1_3B^2_2B^3_1 + \varepsilon^{213}B^1_2B^2_1B^3_3\right),\end{aligned}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}&= A^1_1A^2_2A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 - B^1_1B^2_3B^3_2 - B^1_3B^2_2B^3_1 - B^1_2B^2_1B^3_3\right)\\ &+ A^1_3A^2_1A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right)\\ &+ A^1_2A^2_3A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right)\\ &- A^1_1A^2_3A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right)\\ &- A^1_3A^2_2A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right)\\ &- A^1_2A^2_1A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right).\end{aligned}$$

Como son números se pueden arreglar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&= A^1_1A^2_2A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right)\\ &+ A^1_3A^2_1A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right)\\ &+ A^1_2A^2_3A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right)\\ &- A^1_1A^2_3A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right)\\ &- A^1_3A^2_2A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right)\\ &- A^1_2A^2_1A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right)\\ &= \varepsilon_{ijk}A^i_\alpha B^\alpha_1 A^j_\lambda B^\lambda_2 A^k_\mu B^\mu_3.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_{ijk}A^i_\alpha B^\alpha_1 A^j_\lambda B^\lambda_2 A^k_\mu B^\mu_3 = \det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{B}| = \det|\mathbb{AB}|. \tag{4.19}$$

4.3.5.2 La invariancia del determinante

El resultado de expresado en la ecuación (4.19) tiene varias consecuencias importantes:

1. El determinante del operador inverso es el inverso del determinante, es decir:

$$\det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|} = \det|\mathbb{A}|^{-1}.$$

Borrador Preliminar

Esta afirmación es fácilmente demostrable

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{I}| = \det|\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}| = \det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{A}^{-1}| = 1 \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|}\,.$$

2. La segunda consecuencia es todavía más importante: el determinante de un operador no depende de su representación matricial. Es decir, el determinante, al igual que la traza, asocia un número real al operador, independientemente de su representación matricial:

$$\det|\mathbb{A}| \equiv \det|\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle| = \det|\langle \tilde{\mathrm{e}}^i|\mathbb{A}|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle| \equiv \det|\tilde{\mathbb{A}}|\,.$$

Es inmediato darse que cuenta que al aplicar la función determinante a la ecuación (4.17) se tiene:

$$\det|\tilde{A}^i_j| = \det|S^i_k\, A^k_m\, \left(S^m_j\right)^{-1}| \equiv \det|S^i_k|\det|A^k_m|\,\det|\left(S^m_j\right)^{-1}| = \det|S^i_k|\det|A^k_m|\frac{1}{\det|S^m_j|} = \det|A^k_m|\,.$$

Con lo cual queda demostrada la invariancia del determinante de representaciones matriciales de operadores en bases ortonormales.

4.3.5.3 Fórmula de Laplace

La fórmula de Laplace permite expresar el determinate de una matriz en términos de sus matrices menores o cofactores, matrices que definiremos en la siguiente sección.

$$\det|\mathbb{A}| = \sum_{j=1}^{n} A^i_j (A^c)^i_j\,, \quad \text{para cualquier } i\,. \tag{4.20}$$

Ejemplo 4.14 Para la matriz

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

el desarrollo de Laplace (4.20) para la primera fila ($i = 1$) es:

$$\begin{aligned} \det|\mathbb{A}| &= A^1_1(A^c)^1_1 + A^1_2(A^c)^1_2 + A^1_3(A^c)^1_3 \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(7) + 2(14) + 2(-7) = 35\,. \end{aligned}$$

4.3.6 Diferenciación de operadores y representación matricial

Retomemos, ahora en el lenguaje de representaciones matriciales de operadores, lo que desarrollamos en la sección 4.1.6. Dado un operador $\mathbb{A}(t)$, el cual supondremos dependiente de una variable arbitraria t, podremos definir la derivada como:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbb{A}\left(t+\Delta t\right) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}\,,$$

por lo tanto, si $\langle u^k|\mathbb{A}|u_i\rangle = A^k_i$ entonces:

$$\langle u^k|\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t}|u_i\rangle = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^k_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u^k|\mathbb{A}(t)|u_i\rangle = \frac{\mathrm{d}A^k_i}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A^1_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A^1_2}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}A^1_n}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}A^2_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A^2_2}{\mathrm{d}t} & & \frac{\mathrm{d}A^2_n}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\mathrm{d}A^n_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A^n_2}{\mathrm{d}t} & & \frac{\mathrm{d}A^n_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

La regla es simple, la representación matricial de la derivada de un operador será la derivada de cada uno de sus elementos. Por ejemplo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & \mathrm{e}^{-x} & 5x \\ 3x^3 & 3 & \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-x} & 5 \\ 9x^2 & 0 & -\mathrm{sen}(x) \end{pmatrix}.$$

De igual forma tendremos las reglas usuales de la diferenciación y por lo tanto se cumplirá

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{A}(t)+\mathbb{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{A}(t)\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t},$$

es decir:

$$\begin{aligned}\langle u^k|\frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{A}(t)+\mathbb{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t}|u_i\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u^k|\left(\mathbb{A}(t)+\mathbb{B}(t)\right)|u_i\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\langle u^k|\mathbb{A}(t)|u_i\rangle + \langle u^k|\mathbb{B}(t)|u_i\rangle\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u^k|\mathbb{A}(t)|u_i\rangle + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u^k|\mathbb{B}(t)|u_i\rangle \\ &= \langle u^k|\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t}|u_i\rangle + \langle u^k|\frac{\mathrm{d}\mathbb{B}(t)}{\mathrm{d}t}|u_i\rangle = \frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{A}(t)\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Del mismo modo se cumplirá:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t}\mathbb{B}(t) + \mathbb{A}(t)\frac{\mathrm{d}\mathbb{B}(t)}{\mathrm{d}t},$$

con la precaución que no se puede modificar el orden de aparición de los operadores. Es fácil ver que:

$$\begin{aligned}\langle u^k|\frac{\mathrm{d}\left(\mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t}|u_i\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u^k|\mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t)|u_i\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u^k|\mathbb{A}(t)\mathbb{I}\,\mathbb{B}(t)|u_i\rangle \\ &= \left(\langle u^k|\mathbb{A}(t)|u_m\rangle\langle u^m|\mathbb{B}(t)|u_i\rangle\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}\langle u^k|\mathbb{A}(t)|u_m\rangle}{\mathrm{d}t}\langle u^m|\mathbb{B}(t)|u_i\rangle + \langle u^k|\mathbb{A}(t)|u_m\rangle\frac{\mathrm{d}\langle u^m|\mathbb{B}(t)|u_i\rangle}{\mathrm{d}t} \\ &= \langle u^k|\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t}|u_m\rangle\langle u^m|\mathbb{B}(t)|u_i\rangle + \langle u^k|\mathbb{A}(t)|u_m\rangle\langle u^m|\frac{\mathrm{d}\mathbb{B}(t)}{\mathrm{d}t}|u_i\rangle.\end{aligned}$$

Practicando con Maxima

1. Consideremos la transformación lineal del ejercicio resuelto con anterioridad:

$$\mathbb{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4,\ \mathbb{T}\left[(x,y,z)\right] = (x+y, x-2z, x+2y+3z, y-2z).$$

```
(%i1) load(vect)$
(%i2) T(x,y,z):=[x+y,x-2*z,x+2*y+3*z,y-2*z];
```
(%o2) $T(x,y,z) := [x+y, x-2z, x+2y+3z, y-2z]$

Escribimos ahora los vectores de la base en $\mathbb{R}^4$:

```
(%i3) e1:[1,1,1,1];e2:[0,1,1,1];e3:[0,0,1,1]; e4:[0,0,0,1];
```
(%o3) $[1,1,1,1]$

(%o4) $[0,1,1,1]$

(%o5) $[0,0,1,1]$

(%o6) $[0,0,0,1]$

Entonces:

```
(%i7) linsolve(T(1,1,0)-C11*e1-C12*e2-C13*e3-C14*e4,[C11,C12,C13,C14]);
```
(%o7) $[[\mathtt{C11}=2, \mathtt{C12}=-1, \mathtt{C13}=2, \mathtt{C14}=-2]]$

Borrador Preliminar

```
(%i8) [C11,C12,C13,C14]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4])];
```
(%o8) $[2, -1, 2, -2]$

```
(%i9) linsolve(T(1,0,1)-C21*e1-C22*e2-C23*e3-C24*e4,[C21,C22,C23,C24]);
```
(%o9) $[[C21 = 1, C22 = -2, C23 = 5, C24 = -6]]$

```
(%i10) [C21,C22,C23,C24]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4])];
```
(%o10) $[1, -2, 5, -6]$

```
(%i11) linsolve(T(0,1,1)-C31*e1-C32*e2-C33*e3-C34*e4,[C31,C32,C33,C34]);
```
(%o11) $[[C31 = 1, C32 = -3, C33 = 7, C34 = -6]]$

```
(%i12) [C31,C32,C33,C34]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4])];
```
(%o12) $[1, -3, 7, -6]$

Calculemos ahora las componentes de la representación matricial:

```
(%i13) T11: C11*(e1.e1) + C12*(e1.e2) +C13*(e1.e3) + C14*(e1.e4);
```
(%o13) 7

```
(%i14) T21: C21*(e1.e1) + C22*(e1.e2) +C23*(e1.e3) + C24*(e1.e4);
```
(%o14) 2

```
(%i15) T31: C31*(e1.e1) + C32*(e1.e2) +C33*(e1.e3) + C34*(e1.e4);
```
(%o15) 3

```
(%i16) T12: C11*(e2.e1) + C12*(e2.e2) +C13*(e2.e3) + C14*(e2.e4);
```
(%o16) 5

```
(%i17) T22: C21*(e2.e1) + C22*(e2.e2) +C23*(e2.e3) + C24*(e2.e4);
```
(%o17) 1

```
(%i18) T32: C31*(e2.e1) + C32*(e2.e2) +C33*(e2.e3) + C34*(e2.e4);
```
(%o18) 2

```
(%i19) T13: C11*(e3.e1) + C12*(e3.e2) +C13*(e3.e3) + C14*(e3.e4);
```
(%o19) 4

```
(%i20) T23: C21*(e3.e1) + C22*(e3.e2) +C23*(e3.e3) + C24*(e3.e4);
```
(%o20) 2

```
(%i21) T33: C31*(e3.e1) + C32*(e3.e2) +C33*(e3.e3) + C34*(e3.e4);
```
(%o21) 4

```
(%i22) T14: C11*(e4.e1) + C12*(e4.e2) +C13*(e4.e3) + C14*(e4.e4);
```
(%o22) 1

```
(%i23) T24: C21*(e4.e1) + C22*(e4.e2) +C23*(e4.e3) + C24*(e4.e4);
```
(%o23) -2

```
(%i24) T34: C31*(e4.e1) + C32*(e4.e2) +C33*(e4.e3) + C34*(e4.e4);
```
(%o24) -1

Por lo tanto, la matriz que representa a la transformación es la siguiente:

```
(%i25) matrix([T11,T21,T31],[T12,T22,T32],[T13,T23,T33],[T14,T24,T34]);
```

Borrador Preliminar

(%o25) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Podemos repetir los cálculos pero ahora con la base canónica:

```
(%i26) e1:[1,0,0,0];e2:[0,1,0,0];e3:[0,0,1,0]; e4:[0,0,0,1];
```

(%o26) $[1,0,0,0]$

(%o27) $[0,1,0,0]$

(%o28) $[0,0,1,0]$

(%o29) $[0,0,0,1]$

Por ser la base ortonormal el cálculo de la representación matricial de la transformación es directa:

```
(%i30) linsolve(T(1,1,0)-C11*e1-C12*e2-C13*e3-C14*e4,[C11,C12,C13,C14]);
```

(%o30) $[\mathtt{C11}=2,\mathtt{C12}=1,\mathtt{C13}=3,\mathtt{C14}=1]$

```
(%i31) [C11,C12,C13,C14]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4])];
```

(%o31) $[2,1,3,1]$

```
(%i32) linsolve(T(1,0,1)-C21*e1-C22*e2-C23*e3-C24*e4,[C21,C22,C23,C24]);
```

(%o32) $[\mathtt{C21}=1,\mathtt{C22}=-1,\mathtt{C23}=4,\mathtt{C24}=-2]$

```
(%i33) [C21,C22,C23,C24]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4])];
```

(%o33) $[1,-1,4,-2]$

```
(%i34) linsolve(T(0,1,1)-C31*e1-C32*e2-C33*e3-C34*e4,[C31,C32,C33,C34]);
```

(%o34) $[\mathtt{C31}=1,\mathtt{C32}=-2,\mathtt{C33}=5,\mathtt{C34}=-1]$

```
(%i35) [C31,C32,C33,C34]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4])];
```

(%o35) $[1,-2,5,-1]$

La representación matricial que resulta ahora es:

```
(%i36) matrix([2,1,1],[1,-1,-2],[3,4,5], [1,-2,-1]);
```

(%o36) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

```
(%i37) kill(all)$
```

2. Dada una transformación $\mathbb{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, donde una base para $\mathbb{R}^3$ es:

$$|\mathrm{e}_i\rangle=\{(1,2,1),(1,1,0),(0,0,3)\}\in\mathbb{R}^3\,,$$

y las imágenes de esta base respecto a la base canónica en $\mathbb{R}^2$ son:

$$\mathbb{T}\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]=(3,3)\,,\ \mathbb{T}\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]=(6,3)\,,\ \mathbb{T}\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]=(3,6)\,.$$

¿Qué transformación está asociada a las coordenadas canónicas en $\mathbb{R}^3$?

Escribamos los vectores.

```
(%i1) e1:[1,2,1];e2:[1,1,0];e3:[0,0,3];
```

(%o1) $[1,2,1]$

Borrador Preliminar

(%o2) $[1,1,0]$

(%o3) $[0,0,3]$

Ahora introducimos las imágenes:

(%i4) Te1:[3,3];Te2:[6,3];Te3:[3,6];

(%o4) $[3,3]$

(%o5) $[6,3]$

(%o6) $[3,6]$

Respecto a estas coordenadas la transformación tiene la siguiente representación vectorial:

(%i7) A:matrix(Te1,Te2,Te3);

(%o7) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Lo que queremos es buscar la representación matricial de la transformación pero respecto a la base canónica, por lo tanto debemos buscar primero el cambio de base a la base canónica en $\mathbb{R}^3$

(%i8) E:invert(matrix([1,2,1],[1,1,0],[0,0,3]));

(%o8) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

En la base canónica la transformación tiene la siguiente representación:

(%i9) AE:transpose(E.A);

(%o9) $\begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Por lo tanto la transformación es:

(%i10) T(x,y,z):=[10*x-4*y+z,5*x-2*y+2*z];

(%o10) $T(x,y,z) := [10x-4y+z, 5x-2y+2z]$

Podemos verificar si el resultado es el correcto.

(%i11) solve(T(1,2,1)-a*[1,0]-b*[0,1],[a,b]);

(%o11) $[[a=3, b=3]]$

(%i12) solve(T(1,1,0)-a*[1,0]-b*[0,1],[a,b]);

(%o12) $[[a=6, b=3]]$

(%i13) solve(T(0,0,3)-a*[1,0]-b*[0,1],[a,b]);

(%o13) $[[a=3, b=6]]$

4.3.7 Ejercicios

1. Considere el espacio $\mathbf{P}_{(t)\,N}$ de polinomios de grado N en t, vale decir, $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n t^n$, considere además un operador $\mathbb{T} = \mathrm{e}^{x\mathbb{D}} \equiv \exp(x\mathbb{D})$, con $\mathbb{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Borrador Preliminar

(a). Muestre que $\mathbb{T}|p\rangle_t = |p\rangle_{t+x}$, esto es que el operador $\mathbb{T}$ puede ser considerado un operador traslación espacial para los polinomios $\mathcal{P}(t)$ de grado N.

(b). Considere que el espacio de polinomios está definido en el intervalo $[-1, 1]$, que definimos un producto interno de la forma $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} fg\,\mathrm{d}t$ y un espacio de polinomios de grado $N = 2$. ¿Cuál es la representación matricial de $\mathbb{T}$ en la base de polinomios de Legendre $\{P_0, P_1, P_2\}$?

2. Considere ahora el espacio vectorial $\mathbf{P}_{(t)\,4}$ de polinomios en t de grado 4, definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Esto es $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^{4} a_n t^n$ y este espacio está equipado con un producto interno de la forma $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Considere además para este espacio vectorial un operador lineal representado por $\mathbb{T} = \mathrm{e}^{\mathbb{D}} \equiv \exp(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Claramente, podemos encontrar dos bases para ese espacio vectorial: $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ y la base de polinomios de Legendre $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$

(a). Considere el polinomio $|f\rangle_t \leftrightarrow f(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3$. Encuentre la expresión de este polinomio en término de las bases arriba mencionadas. ¿Cuál es la matriz de transformación de las componentes de ese vector entre ambas bases?

(b). Construya un proyector sobre el subespacio $\mathbf{P}_{(t)\,2}$, de polinomios de grado 2 y encuentre la proyección de $|f\rangle_t$ en ese subespacio. Discuta las diferencias y semejanzas entre las proyecciones de $|f\rangle_t$ en ese subespacio expresado en las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{P_0, P_1, P_2\}$. Recuerde las relaciones entre proyectores y bases ortonormales de la sección 4.1.4.

(c). Para $\mathbf{P}_{(t)\,4}$, construya el operador inverso $\mathbb{T}^{-1}$, el adjunto del operador $\mathbb{T}^\dagger$ y precise si $\mathbb{T}$, es Hermítico o unitario.

(d). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de $\mathbb{T}$ en $\mathbf{P}_{(t)\,4}$, para cada una de las bases mencionadas? ¿Cómo transforman las representaciones? Compruebe que la traza y el determinante de ambas representaciones matriciales coinciden.

(e). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de $\mathbb{T}^{-1}$ y $\mathbb{T}^\dagger$ en $\mathbf{P}_{(t)\,4}$ para cada una de las bases mencionadas ? ¿Cómo transforman esas representaciones?

3. Heredando el formalismo de la Mecánica Clásica, se construye en Mecánica Cuántica el operador hamiltoniano, hermítico, para un sistema unidimensional como:

$$\mathbb{H} = \frac{\mathbb{P}^2}{2m} + \mathbb{V}(\mathbb{X})\,,$$

donde $\mathbb{H}$, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{X}$ son operadores, y $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ un operador que es una función de otro operador. Adicionalmente, uno puede construir el siguiente operador: $[\mathbb{X}, \mathbb{P}] = i\hbar\mathbb{I}$.

(a). Determine los siguientes conmutadores: $[\mathbb{H}, \mathbb{P}]$, $[\mathbb{H}, \mathbb{X}]$ y $[\mathbb{H}, \mathbb{X}\mathbb{P}]$.

(b). Suponga que $\mathbb{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ y entonces calcule la representación matricial del siguiente operador $\langle\psi^m|[\mathbb{A}, \mathbb{H}]|\psi_n\rangle$, para un operador arbitrario $\mathbb{A}$.

4. Considere la representación matricial de un operador en la base canónica de la forma:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existirá algún operador $\mathbb{B}$, no singular, tal que $\mathbb{D} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{B}$, con $\mathbb{D}$ un operador diagonal? Si ese fuera el caso ¿Cuál sería la representación matricial de ese operador $\mathbb{B}$, en la base canónica? Justifique su respuesta.

5. Si

$$M_i^j(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \mathrm{sen}(\omega t) \\ -\mathrm{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Demuestre que:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbb{M}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\mathbb{M}(t)\,.$$

6. Dada a matriz:

$$A_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Evalúe: $\mathbb{A}^2$, $\mathbb{A}^3$, $\mathbb{A}^{\mathbb{A}x}$.

7. Dada la matriz:

$$A_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}... = \mathbb{I}$, con $n \neq 0$.

8. Considere el siguiente "operador vectorial" $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x\mathbb{I} + \sigma_y\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k}$, donde las matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son los operadores de Pauli que discutimos en la sección 4.3.3 y, mucho antes definimos (en la página 107) su representación matricial en la base canónica como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El vector dirección puede escribirse como:

$$\mathbf{n} = \mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\mathbb{I} + \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\mathbf{j} + \cos(\theta)\mathbf{k} = n_x\mathbb{I} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}\,,$$

con lo cual: $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$.

A partir de todo lo anterior calcule la representación matricial del siguiente operador en la base canónica

$$\exp\left(\frac{i}{2}\psi\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right).$$

9. Dadas las siguientes matrices:

$$\mathbb{L}_x = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2}/2 & 0 \\ -i\sqrt{2}/2 & 0 & i\sqrt{2}/2 \\ 0 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre las siguientes reglas de conmutación:

(a). $\mathbb{L}_x\mathbb{L}_y - \mathbb{L}_y\mathbb{L}_x = i\mathbb{L}_z$.

(b). $\mathbb{L}_y\mathbb{L}_z - \mathbb{L}_z\mathbb{L}_y = i\mathbb{L}_x$.

(c). $\mathbb{L}_z\mathbb{L}_x - \mathbb{L}_x\mathbb{L}_z = i\mathbb{L}_y$.

(d). $\mathbb{L}_x^2 + \mathbb{L}_y^2 + \mathbb{L}_z^2 = 2$.

10. Calcule los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Borrador Preliminar

11. Utilizando las propiedades de los determinantes resuelva para x

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+4 & x-3 \\ x+3 & x & x+5 \\ x-2 & x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

12. Utilizando la propiedad lineal de los determinantes calcule:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & n+p \\ c+d & q+r \end{vmatrix}\,.$$

13. Encuentre el determinante de la matriz 4×4 definida por la función:

$$A^i_j = \frac{1}{i+j-x}\,.$$

14. Muestre que si las filas de un determinante de orden n son linealmente independientes, entonces sus columnas son también linealmente independientes.
15. Dada la representación matricial de un operador:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\,.$$

    (a). Encuentre la representación diagonal y la base que diagonaliza esta matriz.
    (b). Muestre que la traza y el determinante de ambas representaciones matriciales coinciden.
    (c). Encuentre la matriz de transformación a la representación diagonal.
16. Pruebe que la representación matricial, 2×2 más general para un operador unitario y simétrico (vale decir: $\mathbb{S}\mathbb{S}^\dagger = \mathbb{I}$ y $\mathbb{S}^T = \mathbb{S}$) puede ser escrita como:

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \alpha e^{2i\beta} & i\sqrt{1-\alpha^2}e^{i(\beta+\gamma)} \\ i\sqrt{1-\alpha^2}e^{i(\beta+\gamma)} & \alpha e^{2i\gamma} \end{pmatrix}\,,$$

    con α, β y γ parámetros reales y, adicionalmente $0 \leq \alpha \leq 1$.
17. Resuelva los ejercicios anteriores utilizando **Maxima**.

4.4 Un zoológico de matrices cuadradas

A continuación presentaremos un conjunto de matrices importantes y de operaciones que serán de gran utilidad para el resto de desarrollo del tema[13]. Es bueno tener en mente que las matrices pueden tener todas sus elementos reales, diremos que son matrices pertenecientes al espacio vectorial de matrices reales $\mathbb{R}_{n\times m}$ o tener como elementos números complejos, en este caso diremos que pertenecen al espacio vectorial de matrices complejas $\mathbb{C}_{n\times m}$.

4.4.1 Matriz unidad y la matriz nula

La matriz unitaria es aquella que sólo tiene elementos en la diagonal iguales a la unidad $\mathbb{I} \;\Rightarrow\; I^i_j = \delta^i_j$., y el resto cero. Mientras que la matriz nula es aquella con todos los elementos iguales a cero $\mathbb{O} \;\Rightarrow\; 0^i_j = 0$.

[13]Para mayores detalles sobre éstas y otros tipos de matrices pueden consultar Antony, R. and Alemayehu, H., A NOTE ON SPECIAL MATRICES, *Italian journal of pure and applied mathematics*, (2015), 587-604.

Borrador Preliminar

4.4.2 Matriz diagonal y diagonal a bloques

Una matriz diagonal es aquella que contiene elementos únicamente en la diagonal las demás componentes son cero: $A^i_j = 0 \; \forall \; i \neq j$. Como veremos más adelante, existen algunos métodos para reducir una matriz a su forma diagonal. Una propiedad importante de estas matrices es que conmutan entre si, es decir, $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$, si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son diagonales. Podemos tener matrices diagonales a bloques, vale decir:

$$D^i_j = \begin{pmatrix} D^1_1 & D^1_2 & 0 & 0 \\ D^2_1 & D^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^3_3 & D^3_4 \\ 0 & 0 & D^4_3 & D^4_4 \end{pmatrix} .$$

También tenemos las triangulares superior e inferior:

$$\check{D}^i_j = \begin{pmatrix} \check{D}^1_1 & \check{D}^1_2 & \check{D}^1_3 & \check{D}^1_4 \\ 0 & \check{D}^2_2 & D^2_3 & \check{D}^2_4 \\ 0 & 0 & \check{D}^3_3 & \check{D}^3_4 \\ 0 & 0 & 0 & \check{D}^4_4 \end{pmatrix} , \qquad \text{y} \qquad \hat{D}^i_j = \begin{pmatrix} \hat{D}^1_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{D}^2_1 & \hat{D}^2_2 & 0 & 0 \\ \hat{D}^3_1 & D^3_2 & \hat{D}^3_3 & 0 \\ \hat{D}^4_1 & \hat{D}^4_2 & \hat{D}^4_3 & \hat{D}^4_4 \end{pmatrix} .$$

4.4.3 Matriz traspuesta

Tal y como discutimos en la sección 4.3.2.2, cuando desarrollamos el concepto de matrices hermíticas conjungadas, la matriz traspuesta es aquella que se obtiene intercambiando filas por columnas: $\mathbb{A} = A^i_j \Rightarrow \mathbb{A}^T = A^j_i$. Si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, $(A^i_j = A^j_i)$, se dice que $\mathbb{A}$ es simétrica. Y si $\mathbb{A} = -\mathbb{A}^T$, $(A^i_j = -A^j_i)$, es llamada antisimétrica. Por lo tanto, una matriz cuadrada se puede representar por la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\left[\mathbb{A} + \mathbb{A}^T\right] + \frac{1}{2}\left[\mathbb{A} - \mathbb{A}^T\right] .$$

4.4.4 Matriz de cofactores

A una matriz $\mathbb{A}$ le podemos asociar una de cofactores $\mathbb{A}^c$ de la manera siguiente:

$$A^i_j = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^c)^i_j = \begin{pmatrix} (A^c)^1_1 & (A^c)^1_2 & (A^c)^1_3 \\ (A^c)^2_1 & (A^c)^2_2 & (A^c)^2_3 \\ (A^c)^3_1 & (A^c)^3_2 & (A^c)^3_3 \end{pmatrix} .$$

Donde los $(A^c)^i_j$ forman la matriz de cofactores, estos cofactores son:

$$(A^c)^1_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} , \quad (A^c)^1_2 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} , \quad (A^c)^1_3 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{vmatrix} ,$$

$$(A^c)^2_1 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} , \quad (A^c)^2_2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} , \quad (A^c)^2_3 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{vmatrix} ,$$

$$(A^c)^3_1 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_3 \end{vmatrix} , \quad (A^c)^3_2 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_3 \end{vmatrix} , \quad (A^c)^3_3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} .$$

Borrador Preliminar

4.4.5 Matriz adjunta

Llamaremos matriz adjunta, adj $[\mathbb{A}]$, a la traspuesta de la matriz de cofactores de una determinada matriz:

$$\text{adj}\,[\mathbb{A}] = (\mathbb{A}^c)^T \;\Rightarrow\; \text{adj}\,[A^i_j] = \left((A^c)^i_j\right)^T = (A^c)^j_i\,.$$

Por ejemplo: $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \text{adj}\,[\mathbb{A}] = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Una matriz será autoadjunta si adj $[\mathbb{A}] = \mathbb{A}$.

4.4.6 Matriz singular

$\mathbb{A}$ es singular si $\det|\mathbb{A}| = 0$. Si $\det|\mathbb{A}| \neq 0$, existirá un número r máximo de vectores filas, o columnas, linealmente independientes, llamaremos a ese número, $0 \leq r \leq n$, el rango de la matriz.

4.4.7 Matriz inversa

Hemos visto que dada una transformación lineal biyectiva, podemos definir una inversa para esa transformación lineal. Esa transformación lineal tendrá como representación un matriz. Por lo tanto, dado un operador lineal $\mathbb{A}$ diremos que otro operador lineal $\mathbb{B}$ será su inverso (por la derecha) si

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I} \to \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}\mathbb{B}|\mathrm{e}_j\rangle = \delta^i_j \to A^i_k B^k_j = \delta^i_j\,.$$

Ahora bien, como conocemos la matriz A^i_k y la suponemos no singular ($\det|A^i_k| \neq 0$) al tomar un j fijo tendremos un sistema de n ecuaciones lineales inhomogéneo con n incógnitas: $B^1_j, B^2_j, B^3_j, \cdots B^n_j$. Al resolver el sistema tendremos la solución.

Un procedimiento para encontrar la inversa es el método de eliminación de Gauss-Jordan. Veamos como funciona para una matriz 3×3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 & 1 & 0 & 0 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 & 0 & 1 & 0 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & B^1_1 & B^1_2 & B^1_3 \\ 0 & 1 & 0 & B^2_1 & B^2_2 & B^2_3 \\ 0 & 0 & 1 & B^3_1 & B^3_2 & B^3_3 \end{array}\right).$$

Algunas propiedades importantes:

$$\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A}\,, \quad \left(\mathbb{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^T\,, \quad \left(\mathbb{A}^\dagger\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^\dagger\,, \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}\,.$$

4.4.8 Matriz ortogonal

Anteriormente mencionamos, en la sección 1.4.3, que en el espacio real $\mathbb{R}^3$ podemos tener una transformación de coordenadas cartesianas: $(x, y, z) \to (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ que consiste en rotar, un ángulo θ, uno de los sistemas respecto al otro. Si la rotación se hace, digamos alrededor del eje z, la relación entre las coordenadas es la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} \tilde{x} = & x\cos(\theta) + y\,\text{sen}(\theta) \\ \tilde{y} = & -x\,\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \\ \tilde{z} = & z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \tilde{x}^1 = & x^1\cos(\theta) + x^2\,\text{sen}(\theta) \\ \tilde{x}^2 = & -x^1\,\text{sen}(\theta) + x^2\cos(\theta) \\ \tilde{x}^3 = & x^3 \end{array}\right. \Rightarrow\; \tilde{x}^i = \tilde{\alpha}^i_j x^j\,.$$

Si la longitud desde el origen a algún punto P del espacio es la misma para ambos sistemas de coordenadas

$$x^i x_i = \tilde{x}^i \tilde{x}_i = (\tilde{\alpha}^i_k x^k)(\tilde{\alpha}^j_i x_j) = x^k x_j \tilde{\alpha}^j_i \tilde{\alpha}^i_k\,.$$

entonces se tiene que cumplir que: $\tilde{\alpha}^j_i \tilde{\alpha}^i_k = \delta^j_k$.

Borrador Preliminar

Este resultado es una consecuencia de haber impuesto la condición para que las longitudes sean las mismas en ambos sistemas de coordenadas y se conoce como la *condición de ortogonalidad*. En el lenguaje de la matrices reales la condición de ortogonalidad se puede enunciar de diferentes formas, todas ellas equivalentes: $\mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}\,, \quad \mathbb{A}^T = \mathbb{A}^{-1}\,, \quad \sum_i A^j_i A^i_k = \delta^j_k$. y diremos que la matrices que las satisfacen son matrices ortogonales.

4.4.9 Matrices complejas

Las matrices con todas sus componentes reales no permite estudiar problemas que pueden aparecer en algunas ramas de la Física, como en la Mecánica Cuántica. Por lo tanto, de necesita generalizar nuestro estudio a espacios vectoriales a el de espacios vectoriales de matrices complejas: $\mathbb{C}_{n\times n}$, donde en las componentes de las matrices aparecen números complejos. Cuando las matrices son complejas surgen generalizaciones que podemos considerar, como mostramos a continuación.

- **La matriz adjunta o matriz traspuesta conjugada.** Estas matrices se construyen tomado el complejo conjugado de cada elemento y luego la traspuesta de la matriz. Se acostumbra denotarlas con $\mathbb{A}^\dagger = (\mathbb{A}^*)^T = (\mathbb{A}^T)^*$.
- **La matriz hermítica.** Son aquellas matrices que satisfacen la siguiente ecuación: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$. Notemos que si $\mathbb{A}$ es real, entonces $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}^T$, y por lo tanto las matrices hermíticas reales son matrices simétricas.
- **La matriz normal.** Se llama matriz normal a aquella que satisface $\mathbb{A}^\dagger\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger$.
- **La matriz unitaria.** La matriz $\mathbb{A}$ es unitaria si: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}^{-1}$. Si $\mathbb{A}$ es real, entonces $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$, de manera que las matrices unitarias reales son ortogonales. Es decir, las matrices unitarias son el análogo a las matrices ortogonales reales y son de fundamental importancia en la Mecánica Cuántica porque dejan la norma de los vectores invariantes.

Existe una relación importante entre matrices normales y matrices unitarias y es el hecho de que una matriz $\mathbb{A}$ es normal, si y sólo si, existe una matriz diagonal $\mathbb{D}$ y una unitaria $\mathbb{U}$ tal que: $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^\dagger$.

Más adelante veremos que los valores en la diagonal de $\mathbb{D}$ se denominan los *autovalores* de $\mathbb{A}$ y las columnas de $\mathbb{U}$ son los *autovectores* de $\mathbb{A}$.

4.4.10 Ejemplos

1. Queremos hallar la matriz inversa de $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Utilizando el método de Gauss-Jordan. Entonces, escribimos la siguiente matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

   Si multiplicamos la segunda fila por -1 y la sumamos con la primera fila obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Borrador Preliminar

Ahora multiplicamos la tercera fila por 2 y sumamos con la primera fila

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Multiplicamos la primera fila por -2 y sumamos con la tercera

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Multiplicamos la segunda fila por $-8/3$ y sumamos con la tercera, luego multiplicamos esa segunda fila por -3

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Multiplicamos la tercera fila por $-1/5$ y sumamos con la segunda fila, luego multiplicamos esa tercera fila por $-5/8$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right).$$

Se suma la primera fila con la segunda y luego se multiplica esta primera fila que resulta por $-1/4$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, la matriz inversa es: $\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. También se puede obtener la matriz inversa de la siguiente manera: $\mathbb{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}[\mathbb{A}]}{\det|\mathbb{A}|}$.

   Dada la siguiente matriz: $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Primero procedemos a calcular el determinante

   $\det|\mathbb{A}| = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 35$.

Borrador Preliminar

Calculemos ahora la matriz cofactor:

$$(A^c)^1_1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\,,\ (A^c)^1_2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14\,,\ (A^c)^1_3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7\,,$$

$$(A^c)^2_1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\,,\ (A^c)^2_2 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\,,\ (A^c)^2_3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11\,,$$

$$(A^c)^3_1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\,,\ (A^c)^3_2 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11\,,\ (A^c)^3_3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\,.$$

Por lo tanto, la matriz cofactor y la adjunta son:

$$\mathbb{A}^c = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 6 & -2 & -11 \\ 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}\,[\mathbb{A}] = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Y ahora si, la matriz inversa:

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Practicando con Maxima

En este ejercicio vamos a introducir algunos comandos básicos que nos permitirán realizar operaciones típicas con matrices. Dada la siguiente matriz:

```
(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,8,5],[9,5,4]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

La traspuesta es:

```
(%i2) transpose(A);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

El comando **adjoint(A)** calcula el adjunto de la matriz $\mathbb{A}$. La matriz adjunta es la traspuesta de la matriz de cofactores de $\mathbb{A}$.

```
(%i3) adjoint(A);
```

(%o3) $\begin{pmatrix} 7 & 7 & -14 \\ 29 & -23 & 7 \\ -52 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

Para la matriz inversa:

```
(%i4) invert(A);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{29}{91} & \frac{23}{91} & -\frac{1}{13} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$

```
(%i5) determinant(A);
```

(%o5) -91

Si se quiere, se puede calcular la inversa con el determinante afuera:

```
(%i6) invert(A),detout;
```

(%o6) $-\dfrac{\begin{pmatrix} 7 & 7 & -14 \\ 29 & -23 & 7 \\ -52 & 13 & 0 \end{pmatrix}}{91}$

Podemos comprobar que $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$

```
(%i7) invert(A).A;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para calcular la menor (i, j) de la matriz, es decir, eliminar la fila i y la columna j de una matriz se debe escribir:

Borrador Preliminar

(%i8) minor(A,2,2);

(%o8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

Para generar una matriz triangular superior a partir de una matriz dada se debe usar el siguiente comando: **triangularize**(). El comando **echelon**() es equivalente pero normaliza a 1 el primer elemento no nulo de cada fila utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

(%i9) triangularize(A);

(%o9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -13 & -23 \\ 0 & 0 & 91 \end{pmatrix}$

(%i10) echelon(A);

(%o10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{23}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Con el paquete **nchrpl** se puede calcular la traza de una matriz

(%i11) load(nchrpl)$

(%i12) mattrace(A);

(%o12) 13

Consideremos ahora la matriz

(%i13) M:matrix ([1, %i, 0], [1, 2 ,- %i], [%i, 1, 2]);

(%o13) $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Para el exponente de matrices tenemos la opción **domxexpt** (true o false). Cuando es *true* el $\exp(M)$ se interpreta como la matriz cuyo elemento i, j es igual a $\exp(M[i, j])$. En el otro caso, $\exp(M)$ se interpreta como $(x)^M$.

(%i14) (1-x)^ M;

(%o14) $\begin{pmatrix} 1-x & (1-x)^i & 1 \\ \frac{1}{1-x} & (1-x)^2 & \frac{1}{(1-x)^i} \\ (1-x)^i & 1-x & (1-x)^2 \end{pmatrix}$

(%i15) domxexpt:false$

(%i16) (1-x)^ M;

(%o16) $(1-x)^{\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

Y en cuanto al cálculo del rango de una matriz

(%i17) rank(M);

(%o17) 3

Borrador Preliminar

4.4.11 Ejercicios

1. Considere las matrices:
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{6} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Diga si son: (a) reales, (b) diagonales, (c) simétricas, (d) antisimétricas, (e) singulares, (f) ortogonales, (g) hermíticas, (h) antihermíticas, (i) unitarias o (j) normales.
2. Dada una matriz hermítica $\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 10 & 3i \\ -3i & 0 \end{pmatrix}$, construya la matriz unitaria $\mathbb{U}$, tal que $\mathbb{U}^\dagger \mathbb{H} \mathbb{U} = \mathbb{D}$ donde $\mathbb{D}$ es una matriz real y diagonal.
3. Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan encuentre la inversa de la matriz:
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
4. Encuentre la matriz inversa de las siguientes matrices:
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
Además, calcule: $\mathbb{B}^T(\mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}$ y $(2\mathbb{A} + (\mathbb{B})^{-1}\mathbb{B}^T)\mathbb{A}^T$.
5. Considere matrices ortogonales, reales 3×3 las cuales, adicionalmente cumplen con: $\det|\mathbb{M}| = 1$.
   (a). ¿Cuántos parámetros reales son necesarios para caracterizar unívocamente a este tipo de matrices?
   (b). ¿Este tipo de matrices forman grupo bajo la multiplicación de matrices?
   (c). Si ahora considera la matrices ortogonales reales con $\det|\mathbb{M}| = -1$ ¿Este tipo de matrices formarán grupo bajo la multiplicación? Justifique su respuesta.
6. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son dos matrices hermíticas que no conmutan: $\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = i\mathbb{C}$, entonces pruebe que $\mathbb{C}$ es hermítica.
7. Si $\mathbb{A} = \exp(i\alpha\mathbb{B})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $\mathbb{B}$ es hermítica entonces $\mathbb{A}$ es unitaria.
8. Pruebe que el producto directo de dos matrices unitarias resulta en una matriz unitaria.
9. Resuelva los problemas anteriores utilizando **Maxima**.

4.5 Sistemas de ecuaciones lineales

Una de las aplicaciones más útiles del álgebra de matrices es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + \cdots A^1_n x^n &= c^1 \\ A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 + \cdots A^2_n x^n &= c^2 \\ &\vdots \\ A^m_1 x^1 + A^m_2 x^2 + \cdots A^m_n x^n &= c^m, \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Este sistema puede ser expresado de una forma más compacta:

$$A_i^\alpha x^i = c^\alpha \quad \text{con} \;\; i = 1, 2, .., n \quad \text{y} \;\; \alpha = 1, 2, .., m\,,$$

por lo tanto, tendremos m ecuaciones lineales para n incógnitas $\left(x^1, x^2, \cdots x^n\right)$. Las cantidades A_i^α resultan ser las componentes de la matriz de los coeficientes.

Si todos los c^i son cero el sistema se denomina homogéneo, en caso contrario inhomogéneo. Puede resultar que el conjunto de las incógnitas $\{x^i\}$ represente una solución, infinitas soluciones o que simplemente no exista una solución para el sistema.

Este problema puede ser pensado como un problema de un operador $\mathbb{A}$ en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}\left(\mathbf{V}, \mathbf{W}\right)$, donde $\dim\left(\boldsymbol{V}\right) = n$ y $\dim\left(\boldsymbol{W}\right) = m$, con las c^α las componentes del vector transformado:

$$|c\rangle = \mathbb{A}|x\rangle \to c^\alpha = A_i^\alpha x^i\,.$$

El operador $\mathbb{A}$ aplicará todo vector de $\boldsymbol{V}$ en algún subespacio (o todo el espacio) de $\boldsymbol{W}$. A este subespacio se le denomina el rango o recorrido de $\mathbb{A}$ y su dimensión es igual al rango de la matriz $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}$ es no singular, entonces existe algún subespacio de $\boldsymbol{V}$ que es aplicado al vector cero de $\boldsymbol{W}$, es decir, se cumple que $\mathbb{A}|x'\rangle = |0\rangle$, donde al conjunto de vectores $\{|x'\rangle\}$ se le llama el espacio nulo de $\mathbb{A}$.

A continuación, mostraremos algunos métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

4.5.1 Eliminación de Gauss-Jordan

Uno de los métodos más utilizados es el de la eliminación de *Gauss-Jordan*, el cual se basa en el intercambio de ecuaciones y la multiplicación apropiada e inteligente por constantes y resta de ecuaciones. La idea es construir una matriz triangular superior para poder luego despejar desde abajo.

Veamos como se aplica el método para resolver el sistema de ecuaciones. Primeramente escribimos el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

entonces para eliminar x de la fila c (o la ecuación c) sumamos la fila a con la $c, a + c$ y esta nueva ecuación será la nueva c

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right],$$

ahora $-2a + b$ será la nueva b

$$\begin{array}{c} a \\ b' \\ c' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right],$$

finalmente $3b' + c'$

$$\begin{array}{c} a \\ b' \\ c'' \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right].$$

Este sistema es equivalente al primer sistema de ecuaciones, el lector puede verificar que poseen el mismo

Borrador Preliminar

determinante. Po lo tanto, la solución emerge rápidamente:

$$-5z = -15 \to z = 3\,, \quad -2y - z = -7 \to -2y - 3 = -7 \to y = 2\,, \quad 2x + 3\,(2) - 3 = 5 \to x = 1\,.$$

Es bueno recalcar que los sistemas de ecuaciones lineales no necesariamente tienen solución y a veces tienen más de una solución.

4.5.2 El método de la matriz inversa

El análisis matricial nos puede ayudar a investigar sobre las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, como vimos, en notación de matrices el sistema se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ A_1^m & A_2^m & \cdots & A_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^m \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{C}\,.$$

Podemos considerar a cada columna de la matriz $\mathbb{A}$ como un vector, entonces el *rango* r de la matriz $\mathbb{A}$ será igual al número de vectores linealmente independientes, este número es también la dimensión del espacio vectorial que expanden estos vectores.

Con respecto a las posibles soluciones del sistema podemos decir:

1. Si $\mathbb{C}$ pertenece al rango de $\mathbf{A}$ y además $r = n$, entonces todos los vectores del conjunto son linealmente independientes y el sistema tendrá como única solución al conjunto $\{x^1, x^2, \ldots x^n\}$.
2. Si $\mathbb{C}$ pertenece al rango de $\mathbf{A}$ y además $r < n$, entonces únicamente r vectores serán linealmente independientes. Esto significa que podremos escoger los coeficientes de los $n - r$ vectores de manera arbitraria sin dejar de satisfacer el sistema. Por tanto, existirá un número infinito de soluciones, que expanden un espacio vectorial de dimensión $n - r$.
3. La otra posibilidad es que el sistema no tenga solución, en este caso $\mathbb{C}$ no pertenece al rango de $\mathbb{A}$.

Cuando el sistema es homogéneo, $\mathbb{C} = \mathbb{O}$, claramente existe una solución que viene a ser la trivial: $\{x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0\}$, además, si $r = n$ ésta será la única solución. Es bueno anotar que si hay menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$) entonces automáticamente $r < n$, por lo tanto un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas con menos ecuaciones que incógnitas siempre tiene una infinidad de soluciones.

Debemos considerar el importante caso cuando $m = n$, es decir, la matriz $\mathbb{A}$ es cuadrada y existe igual número de ecuaciones como de incógnitas. Al ser cuadrada la matriz se tiene que la condición $r = n$ implica que la matriz es no singular ($\det|\mathbb{A}| \neq 0$). El caso $r < n$ se corresponde a que $\det|\mathbb{A}| = 0$.

Para resolver el sistema de ecuaciones consideremos lo siguiente: dada la matriz $\mathbb{A}$, $n \times n$ no singular, entonces $\mathbb{A}$ tiene una matriz inversa, tal que:

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}\,.$$

4.5.3 Factorización LU

El método de la matriz inversa es relativamente simple, pero laborioso cuando se trata de resolver sistemas de ecuaciones muy grandes. La factorización o descomposición LU (Lower-Upper) es una técnica, existen varias de este tipo, para factorizar una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior. Si $\mathbb{A}$ es un matriz cuadrada no singular, entonces:

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}\,,$$

las matrices $\mathbb{L}$ y $\mathbb{U}$ serán únicas.

Borrador Preliminar

Este método es básicamente una versión de el método de Gauss-Jordan, pero es más eficiente a la hora de ser implementado en algoritmos computacionales tanto algebraicos como numéricos.

Para matrices 3×3 el método se implementa de la siguiente manera.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_1^2 & 1 & 0 \\ L_1^3 & L_2^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ 0 & U_2^2 & U_3^2 \\ 0 & 0 & U_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ L_1^2 U_1^1 & L_1^2 U_2^1 + U_2^2 & L_1^2 U_3^1 + U_3^2 \\ L_1^3 U_1^1 & L_1^3 U_2^1 + L_2^3 U_2^2 & L_1^3 U_3^1 + L_2^3 U_3^2 + U_3^3 \end{pmatrix},$$

las nueve incógnitas se obtienen igualando con las componentes conocidas de la matriz $\mathbb{A}$. Con $\mathbb{L}$ y $\mathbb{U}$ determinadas tenemos entonces que

$$\mathbb{L}\mathbb{U}\mathbb{X} = \mathbb{C}\,,$$

por lo tanto, se debe realizar los cálculos en dos partes:

$$\text{primero} \quad \mathbb{L}\mathbb{Y} = \mathbb{C} \quad \text{y luego} \quad \mathbb{U}\mathbb{X} = \mathbb{Y}\,.$$

Con la matrices $\mathbb{L}$ y $\mathbb{U}$ se puede calcular el determinante de la matriz $\mathbb{A}$ de una manera más directa, es fácil ver que:

$$\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{L}|\det|\mathbb{U}| = \det|\mathbb{U}| = \prod_{i=1}^{n} U_i^i\,.$$

4.5.4 Método de Cramer

Un método alternativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales es la conocida *regla de Cramer*. El funcionamiento del método lo podemos ilustrar con un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + A_3^1 x^3 &= c^1 \\ A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + A_3^2 x^3 &= c^2 \\ A_1^3 x^1 + A_2^3 x^2 + A_3^3 x^3 &= c^3\,, \end{aligned}$$

Como mencionamos anteriormente, el determinate de una matriz, $\det|\mathbb{A}| = |\mathbb{A}|$,

$$|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix},$$

no cambia bajo la operación, por ejemplo, de sumarle a la primera columna las cantidades:

$$|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 + (x^2/x^1)A_2^1 + (x^3/x^1)A_3^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 + (x^2/x^1)A_2^2 + (x^3/x^1)A_3^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 + (x^2/x^1)A_2^3 + (x^3/x^1)A_3^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

lo cual es igual a:

$$|\mathbb{A}| = \frac{1}{x^1} \begin{vmatrix} c^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ c^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ c^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{x^1}|\Delta_1|\,.$$

Se puede hacer lo mismo con las otras dos columnas para obtener:

$$x^1 = \frac{|\Delta_1|}{|\mathbb{A}|}\,, \quad x^2 = \frac{|\Delta_2|}{|\mathbb{A}|}\,, \quad x^3 = \frac{|\Delta_3|}{|\mathbb{A}|}\,.$$

Borrador Preliminar

Donde los determinantes, $|\Delta_n|$, son los determinantes de Cramer:

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} c^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ c^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ c^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}, \quad |\Delta_2| = \begin{vmatrix} A_1^1 & c^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & c^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & c^3 & A_3^3 \end{vmatrix}, \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & c^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & c^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Se puede demostrar que si $|\mathbb{A}| \neq 0$, entonces la solución así obtenida es única.

4.5.5 Ejemplos

1. Resolver el sistema:

$$2x^1 + 4x^2 + 3x^3 = 4\,,\ x^1 - 2x^2 - 2x^3 = 0\,,\ -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = -7\,.$$

Utilizando el método de la matriz inversa.

Este sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{C} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{A}$ es la matriz de los coeficientes.

Luego de calcular la matriz inversa de $\mathbb{A}$ entonces resulta que

$$\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 13 & 7 \\ -3 & -18 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Existe entonces una única solución al sistema, que es: $\{x^1 = 2, x^2 = -3, x^3 = 4\}$.

2. Resolver el mismo sistema de ecuaciones anteriormente estudiado:

$$2x^1 + 4x^2 + 3x^3 = 4\,,\ x^1 - 2x^2 - 2x^3 = 0\,,\ -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = -7\,.$$

Pero utilizando el método de factorización $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

La matriz de los coeficientes es:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Cálculo de $\mathbb{L}$ y $\mathbb{U}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ L_1^2 U_1^1 & L_1^2 U_2^1 + U_2^2 & L_1^2 U_3^1 + U_3^2 \\ L_1^3 U_1^1 & L_1^3 U_2^1 + L_2^3 U_2^2 & L_1^3 U_3^1 + L_2^3 U_3^2 + U_3^3 \end{pmatrix}$$

Con los valores de inicio: $U_1^1 = 2,\ U_2^1 = 4,\ U_3^1 = 3$ se procede a resolver las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} L_1^2 U_1^1 = 1 & L_1^3 U_1^1 = -3 \\ L_1^2 U_2^1 + U_2^2 = -2 & L_1^2 U_3^1 + U_3^2 = -2 \\ L_1^3 U_2^1 + L_2^3 U_2^2 = 3 & L_1^3 U_3^1 + L_2^3 U_3^2 + U_3^3 = 2 \end{array}$$

por lo tanto

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & -9/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -7/2 \\ 0 & 0 & -11/8 \end{pmatrix}$$

Borrador Preliminar

- Resolvemos primero $\mathbb{L}\mathbb{Y} = \mathbb{C}$, lo cual es bastante fácil

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & -9/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y^1 = 4 \\ y^2 = -2 \\ y^3 = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

- Con este resultado resolvemos: $\mathbb{U}\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, y obtenemos la solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -7/2 \\ 0 & 0 & -11/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -11/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = 2 \\ x^2 = -3 \\ x^3 = 4 \end{cases}$$

3. Resolver, nuevamente, el sistema de ecuaciones:

$$2x^1 + 4x^2 + 3x^3 = 4\,,\ x^1 - 2x^2 - 2x^3 = 0\,,\ -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = -7\,.$$

Utilizando ahora los determinantes de Cramer.

Esto es:

$$\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbb{A}| = 11\,.$$

Los diferentes determinantes de Cramer son:

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 22\,, \quad |\Delta_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -33\,, \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 44\,.$$

de manera que

$$x^1 = \frac{22}{11} = 2\,, \quad x^2 = -\frac{33}{11} = -3\,, \quad x^3 = \frac{44}{11} = 4\,.$$

Practicando con Maxima

1. Resolveremos el siguiente sistema se ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x^1 + 4x^2 + 3x^3 &= 4 \\ x^1 - 2x^2 - 2x^3 &= 0 \\ -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 &= -7 \end{aligned}$$

Introducimos el sistema de ecuaciones:

```
(%i1) ecu1:2*x1+4*x2+3*x3=4; ecu2:x1-2*x2-2*x3=0; ecu3:-3*x1+3*x2+2*x3=-7;
```

(%o1) $3x_3 + 4\,x_2 + 2\,x_1 = 4$

(%o2) $-2\,x_3 - 2\,x_2 + x_1 = 0$

(%o3) $2x_3 + 3\,x_2 - 3\,x_1 = -7$

Construimos la matriz de coeficientes y la denominaremos A

```
(%i4) A:coefmatrix([ecu1,ecu2,ecu3],[x1,x2,x3]);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Le agregamos la columna con los elementos independientes

Borrador Preliminar

(%i5) M:addcol(A,[4,0,-7]);

(%o5) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

Reducimos la matriz M utilizando el algoritmo de Gauss-Jordan.

(%i6) echelon(M);

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

De la última fila es fácil determinar que $\mathtt{x}_3 = 4$. Los otros dos valores que resultan son $\mathtt{x}_2 = -3$ y $\mathtt{x}_1 = 2$. Por supuesto podemos recurrir al cálculo directo:

(%i7) linsolve([ecu1,ecu2,ecu3],[x1,x2,x3]);

(%o7) $[\mathtt{x}_1 = 2, \mathtt{x}_2 = -3, \mathtt{x}_3 = 4]$

2. Resolvamos nuevamente el mismo sistema

$$\begin{aligned} 2x^1 + 4x^2 + 3x^3 &= 4 \\ x^1 - 2x^2 - 2x^3 &= 0 \\ -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 &= -7 \end{aligned}$$

pero ahora por el método de la matriz inversa.

(%i8) ecu1:2*x1+4*x2+3*x3=4; ecu2:x1-2*x2-2*x3=0; ecu3:-3*x1+3*x2+2*x3=-7;

(%o8) $3\,\mathtt{x}_3 + 4\,\mathtt{x}_2 + 2\,\mathtt{x}_1 = 4$

(%o9) $-2\,\mathtt{x}_3 - 2\,\mathtt{x}_2 + \mathtt{x}_1 = 0$

(%o10) $2\,\mathtt{x}_3 + 3\,\mathtt{x}_2 - 3\,\mathtt{x}_1 = -7$

La matriz de cofactores:

(%i11) A:coefmatrix([ecu1,ecu2,ecu3],[x1,x2,x3]);

(%o12) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de A la denominaremos $Ainv$, y la calcularemos con el determinante afuera:

(%i13) Ainv:invert(A),detout;

(%o13) $\dfrac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 13 & 7 \\ -3 & -18 & -8 \end{pmatrix}}{11}$

La matriz con los términos inhomogéneos lo llamaremos C:

(%i14) C:matrix([4,0,-7]);

(%o14) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Borrador Preliminar

Para que finalmente podamos hacer la siguiente multiplicación de matrices:

(%i15) X:Ainv.C;

(%o15) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Por lo tanto: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$.

3. Vamos ahora a resolver el mismo sistema pero usando la técnica de factorización $\mathbb{LU}$.
Le podemos pedir al programa que factorize la matriz A por medio de la función **lu factor(A)**, consultar el manual de **Maxima** para más detalles.

(%i16) U:lu_ factor(A)$

(%i17) F:get_ lu_ factors(U);

(%o17) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{8} \end{pmatrix}\right]$

Por lo tanto, aquí tendremos que: $\mathbb{L} = F[2]$ y $\mathbb{U} = F[3]$.
Podemos resolver entonces la primera parte, $\mathbb{LY} = \mathbb{C}$:

(%i18) Y:invert(F[2]).C;

(%o18) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$

Y ahora $\mathbb{UX} = \mathbb{Y}$:

(%i19) X:invert(F[3]).Y;

(%o19) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Por lo que resulta que: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$.
Notemos que:

(%i20) determinant(A)=determinant(F[2])*determinant(F[3]);

(%o20) $11 = 11$

4. Utilicemos ahora los determinantes de Cramer. Para tal fin, construiremos las matrices eliminando las columnas correspondientes.

(%i21) A1:col(A,1)$A2 : col(A, 2)$ A3:col(A,3)$C : transpose(matrix([4, 0, -7]))$

Las tres matrices son entonces:

(%i22) D1:addcol(C,A2,A3);D2:addcol(A1,C,A3);D3:addcol(A1,A2,C);

(%o22) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Borrador Preliminar

(%o23) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

(%o24) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, los determinantes generan la solución a problema:

```
(%i25) x1:determinant(D1)/determinant(A);x2:determinant(D2)/determinant(A); x3:determinant(D3)/determinant(
```

(%o25) 2

(%o26) -3

(%o27) 4

5. Existen algunas consideraciones a tomar en cuenta.
   - El sistema puede contener más incógnitas que ecuaciones, por ejemplo:

     ```
     (%i28) ecu1:x+y+z=1; ecu2:x+2*y+z=0;
     ```

     (%o28) $z + y + x = 1$

     (%o29) $z + 2\,y + x = 0$

     ```
     (%i30) linsolve([ecu1,ecu2,ecu3],[x,y,z]);
     ```

     (%o30) $[x = 2 - \%\mathtt{r}_1, y = -1, z = \%\mathtt{r}_1]$

     El programa nos está señalando que las soluciones, en este caso infinitas, dependerán de un parámetro que aquí es indicado con el símbolo $\%\mathtt{r}_1$. Una solución puede ser entonces la siguiente: $\{x = 2, y = -1, z = 0\}$.
   - El sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, por ejemplo:

     ```
     (%i31) ecu1:x+y=5; ecu2:x+2*y=8; ecu3:3*x+y=9;
     ```

     (%o31) $y + x = 5$

     (%o32) $2\,y + x = 8$

     (%o33) $y + 3\,x = 9$

     ```
     (%i34) linsolve([ecu1,ecu2,ecu3],[x,y]);
     ```

     solve: dependent equations eliminated: (3)

     (%o34) $[x = 2, y = 3]$

     Aquí, **Maxima** encuentra una solución al eliminar una de las ecuaciones dependientes.
   - El sistema no tiene solución, por ejemplo:

     ```
     (%i35) ecu1:x+y=5; ecu2:x+2*y=8; ecu3:3*x+y=10;
     ```

     (%o35) $y + x = 5$

     (%o36) $2\,y + x = 8$

     (%o37) $y + 3\,x = 10$

     ```
     (%i38) linsolve([ecu1,ecu2,ecu3],[x,y]);
     ```

     (%o38) $[\ ]$

Borrador Preliminar

4.5.6 Ejercicios

1. Resuelva, utilizando dos de los métodos anteriormente vistos, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ x + y + z &= 6 \\ 5x - y + 10z &= 34 \end{aligned}$$

2. Resuelva, utilizando el método de la matriz inversa, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 1 \\ 3x^1 + 4x^2 + 5x^3 &= 2 \\ x^1 + 3x^2 + 4x^3 &= 3 \end{aligned}$$

3. Demuestre que el siguiente sistema sólo tiene solución si $\eta = 1$ o $\eta = 2$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= \eta \\ x + 4y + 10z &= \eta^2 \end{aligned}$$

4. Encuentre las condiciones sobre η para que al resolver el sistema

$$\begin{aligned} x^1 + \eta x^2 &= 1 \\ x^1 - x^2 + 3x^3 &= -1 \\ 2x^1 - 2x^2 + \eta x^3 &= -2 \end{aligned}$$

   (a). tenga una solución
   (b). no tenga solución
   (c). tenga infinitas soluciones

   Encuentre todas las soluciones que puedan existir.

5. Encuentre la factorización LU de las siguientes matrices:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -3 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   - Resuelva $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{C}$, cuando: $\mathbb{C} = (21\ 9\ 28)^T$ y $\mathbb{C} = (21\ 7\ 22)^T$.
   - Resuelva $\mathbb{B}\mathbb{X} = \mathbb{C}$ cuando: $\mathbb{C} = (-4\ 1\ 8\ -5)^T$ y $\mathbb{C} = (-10\ 0\ -3\ -24)^T$.

6. Utilizando la regla de Cramer resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 13x^1 + 22x^2 - 13x^3 &= 4 \\ 10x^1 - 8x^2 - 10x^3 &= 44 \\ 9x^1 - 18x^2 - 9x^3 &= 72\,. \end{aligned}$$

7. Utilizando cualquiera de los métodos anteriores resuelva:

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 &= 7 \\ 3x^1 + 2x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 &= -2 \\ x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 6x^5 &= 23 \\ 5x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 3x^4 - x^5 &= 12\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

8. Determine el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. ¿Cuál es la condición para que las siguientes rectas se intercepten en un mismo punto?

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0\,, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0\,, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0\,,$$

10. Resuelva los problemas anteriores utilizando **Maxima**.

4.6 Autovectores y autovalores

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo de la Mecánica Cuántica es una ecuación, que escrita en la forma de operadores, tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{H}|\Psi_E\rangle = E|\Psi_E\rangle\,,$$

donde $\mathbb{H}$ es un operador diferencial de segundo orden llamado el hamiltoniano y Ψ_E la función de onda, en este caso representada por $|\Psi_E\rangle$, *un estado propio* de $\mathbb{H}$ que corresponde a *un valor propio* de la energía E.

Por tratarse de un espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial con un producto interno bien definido, resulta de interés buscar soluciones en lo que se denomina el estado ligado de la ecuación de Schrödinger. Esto significa buscar los $|\Psi_E\rangle$ en el espacio de las funciones de cuadrado integrable introduciendo una base unidimensional para representar Ψ_E y una matriz para representar $\mathbb{H}$, en otras palabras: buscar una representación matricial para la ecuación de Schrödinger.

Los vectores propios, $|\Psi_E\rangle$, autovectores o "eigenvectores" de un operador lineal $\mathbb{H}$ son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar E recibe el nombre de valor propio, autovalor, valor característico o "eigenvalor". De manera que una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, autoespacio, "eigenespacio" o subespacio fundamental asociado al valor propio E es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

De manera general, llamaremos a $|\psi\rangle$ un autovector del operador $\mathbb{A}$ si se cumple que

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle\,, \tag{4.21}$$

en este caso λ (que, en general será un número complejo) se denomina el autovalor correspondiente al autovector $|\psi\rangle$. La ecuación (4.21) es conocida en la literatura como la ecuación de autovalores y se cumple para algunos valores particulares de los autovalores λ y, obviamente esto conduce a algunos vectores $|\psi\rangle$, los autovectores. Al conjunto de los autovalores se le denomina el espectro del operador $\mathbb{A}$.

Nótese que si $|\psi\rangle$ es autovector de $\mathbb{A}$ para un determinado autovalor λ entonces $|\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle$ (un vector proporcional a $|\psi\rangle$, con α un número complejo) también es un autovector para el mismo autovalor. Esto representa una incómoda ambigüedad: dos autovectores corresponden al mismo autovalor. Un intento de eliminarla es **siempre** considerar vectores $|\psi\rangle$ normalizados, i.e. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Sin embargo, no deja de ser un intento que no elimina la ambigüedad del todo porque siempre queda el ángulo de fase arbitrario. Esto es, el vector $\mathrm{e}^{i\theta}|\psi\rangle$, con θ un número real arbitrario, tiene la misma norma del vector $|\psi\rangle$. Sin embargo esta arbitrariedad es inofensiva y en Mecánica Cuántica las predicciones obtenidas con $|\psi\rangle$ son las mismas que con $\mathrm{e}^{i\theta}|\psi\rangle$.

Borrador Preliminar

4.6.1 Autovalores, autovectores e independencia lineal

La relación que existe entre los autovalores e independencia lineal de los autovectores asociados con cada autovalor es una de las herramientas más útiles que disponemos. Expondremos a continuación dos teoremas que establecen esta relación.

Teorema 4.1

Sean $\{|\psi_1\rangle,\ |\psi_2\rangle,\ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ autovectores del operador $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^m \to \boldsymbol{V}^n$. Supongamos que existen k autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$, distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$, entonces los $\{|\psi_1\rangle,\ |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_k\rangle\}$ son linealmente independientes.

Demostración La demostración de este teorema es por inducción y resulta elegante y sencilla.

- Primeramente demostramos para $j = 1$.
  Obvio que el resultado se cumple y es trivial para el caso $k = 1$ (un autovector $|\psi_1\rangle$ que corresponde a un autovalor λ_1 es obvia y trivialmente linealmente independiente).
- Seguidamente supondremos que se cumple para $j = k - 1$.
  Si existen $\{|\psi_1\rangle,\ |\psi_2\rangle,\ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_{k-1}\rangle\}$ autovectores de $\mathbb{A}$ correspondientes a $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k-1}\}$ entonces los $\{|\psi_1\rangle,\ |\psi_2\rangle,\ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_{k-1}\rangle\}$ son linealmente independientes.
- Ahora lo probaremos para $j = k$.
  Por lo cual si tenemos k autovectores $\{|\psi_1\rangle,\ |\psi_2\rangle,\ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$, podremos construir una combinación lineal con ellos, y si esa combinación lineal se anula serán linealmente independientes.
  $$c^j|\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k\,,$$
  al aplicar el operador $\mathbb{A}$ a esa combinación lineal, obtenemos: $c^j\mathbb{A}|\psi_j\rangle = 0 \;\Rightarrow\; c^j\lambda_j|\psi_j\rangle = 0\,,$ multiplicando por λ_k y restando miembro a miembro resulta:
  $$c^j\,(\lambda_j - \lambda_k)\,|\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k-1\,,$$
  (nótese que el último índice es $k-1$) pero, dado que los $k-1$ vectores $|\psi_j\rangle$ son linealmente independientes, entonces tendremos $k-1$ ecuaciones $c^j\,(\lambda_j - \lambda_k) = 0$, una para cada $j = 1, 2, \cdots, k-1$. Dado que $\lambda_j \neq \lambda_k$ necesariamente llegamos a que $c^j = 0$ para $j = 1, 2, \cdots, k-1$ y dado que:
  $$c^j|\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k \;\Rightarrow\; c^j \neq 0\,,$$
  con lo cual si $c^j|\psi_j\rangle = 0 \;\Rightarrow\; c^j = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k$, y los $\{|\psi_1\rangle,\ |\psi_2\rangle,\ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ son linealmente independientes y queda demostrado el teorema. ◀

Es importante acotar que este teorema nos recalca que si $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^m \to \boldsymbol{V}^n$ y $\mathbb{A}$ tiene $k \leq n$ autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$ entonces existirán, **cuando menos**, $k \leq n$ autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_k\rangle\}$ linealmente independientes, uno para cada autovalor. Hacemos énfasis en ese **cuando menos**, $k \leq n$ autovectores linealmente independientes, porque significa que el espacio $\boldsymbol{V}^m$ no podrá ser expandido por los autovectores de $\mathbb{A}$. Ese punto lo analizaremos en la sección 4.22.

El inverso de este teorema no se cumple. Esto es, si $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^m \to \boldsymbol{V}^n$ tiene $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$ autovectores linealmente independientes, no se puede concluir que existan n autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$.

4.6.2 El polinomio característico, autovalores y autovectores de un operador

Nos toca ahora generar un método para calcular los autovalores $\{\lambda_j\}$, con $k = 1, 2, \cdots k \leq n$ para un operador lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ suponiendo que existe una base ortonormal $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots |\mathrm{e}_n\rangle\}$. Entonces la

Borrador Preliminar

ecuación (4.21) nos ilustra la representación matricial de la ecuación de autovalores:

$$\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle\langle \mathrm{e}^j||\psi\rangle = \lambda\langle \mathrm{e}^i|\psi\rangle \;\Rightarrow\; A^i_j\, c^j = \lambda c^i \;\Rightarrow\; \left(A^i_j - \lambda\delta^i_j\right) c^j = 0\,,$$

con $j = 1, 2, \cdots, n$. El conjunto de ecuaciones: $\left(A^i_j - \lambda\delta^i_j\right) c^j = 0$, puede ser considerado un sistema (lineal y homogéneo) de ecuaciones con n incógnitas c^j, el cual tendrá solución si el determinante de los coeficientes se anula. Tendremos entonces que $\left(A^i_j - \lambda\delta^i_j\right) c^j = 0 \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}| = 0$, es decir:

$$P(\lambda) = \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = 0\,. \tag{4.22}$$

Esta ecuación se denomina ecuación característica (o secular) y a partir de ella emergen los autovalores (el espectro) del operador $\mathbb{A}$, esto es:

$$\det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = \begin{vmatrix} A^1_1 - \lambda & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 - \lambda & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Es importante señalar que el polinomio característico será independiente de la base a la cual esté referida la representación matricial $\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{u}_j\rangle$ del operador $\mathbb{A}$, porque hereda del determinante, esa invariancia de la representación matricial tal y como vimos en la página 265.

El resultado será un polinomio de grado n (el polinomio característico). Las raíces de este polinomio serán los autovalores que estamos buscando. Es claro que estas raíces podrán ser reales y distintas, algunas reales e iguales y otras imaginarias.

Para el caso de raíces reales, tendremos el mismo número de raíces que el grado del polinomio, generado por la representación matricial del operador con ese mismo grado. Es decir, tendremos un operador $\mathbb{A}$ con una representación matricial de dimensión $n \times n$, con n autovalores distintos, que estará asociados a n autovectores que serán linealmente independientes y que generarán una representación matricial diagonal.

4.6.3 El caso degenerado

Sea el operador lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ y calculamos el polinomio característico de grado n a partir de (4.22). Se puede dar el caso que al menos una de las raíces del polinomio característico presenten algún grado de multiplicidad. Entonces el polinomio característico se podrá factorizar de la forma:

$$P(\lambda) = \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = (\lambda - \lambda_1)^k(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m). \tag{4.23}$$

Entonces existirán $m = n - k$ raíces simples que podrán ser asociadas con $n - k$ autovectores linealmente independientes y una raíz, λ_1, con multiplicidad k que podrá ser asociada con $1, 2, \cdots$ hasta k autovectores linealmente independientes con los anteriores. Es decir, ese autovalor estará asociado a un subespacio vectorial, denominado autoespacio $\boldsymbol{S}_{\lambda_1}$ tal que $\dim(\boldsymbol{S}_{\lambda_1}) \leq$ grado de multiplicidad del autovalor λ_1[14]. La demostración general de la afirmación anterior queda fuera de los alcance de este trabajo, pero en la próxima sección ilustraremos la multiplicidad algebraica vs multiplicidad geométrica con varios ejemplos. Más adelante, cuando analicemos el caso particular de los autovalores para la matrices hermíticas en la sección 4.7.1, retomaremos la relación de la multiplicidad del autovalor y la dimensión del autoespacio que genera este autovalor degenerado.

[14]Este problema se conoce en la literatura como la relación entra la multiplicidad algebraica del autovalor y la multiplicidad geométrica del autoespacio

Borrador Preliminar

4.6.4 Ejemplos

1. **Reflexión respecto al plano** xy. Si $\mathbb{R} : \boldsymbol{V}^3 \to \boldsymbol{V}^3$ es tal que $\mathbb{R}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$ donde se ha realizado una reflexión en el plano xy. Esto es

$$\mathbb{R}|\mathrm{i}\rangle = |\mathrm{i}\rangle; \quad \mathbb{R}|\mathrm{j}\rangle = |\mathrm{j}\rangle; \quad \mathbb{R}|\mathrm{k}\rangle = -|\mathrm{k}\rangle\,,$$

con $|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle, |\mathrm{k}\rangle$ los vectores unitarios cartesianos. Es claro que cualquier vector en el plano xy será autovector de $\mathbb{R}$ con un autovalor $\lambda = 1$, mientras que cualquier otro vector $|\psi\rangle \in \boldsymbol{V}^3$ y que no esté en el mencionado plano cumple con $|\psi\rangle = c|\mathrm{k}\rangle$ y también será autovector de $\mathbb{R}$ pero esta vez con un autovalor $\lambda = -1$.

2. **Dos visiones de rotaciones de ángulo fijo** θ. La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.
   (a). Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\boldsymbol{V}^2$ con una base cartesiana canónica: $|\mathrm{i}\rangle = (1,0)\,,\ |\mathrm{j}\rangle = (0,1)$, esto es, si:

$$\mathbb{R}|a\rangle = \lambda|a\rangle \ \Rightarrow\ \text{el ángulo de rotación} = n\pi\,, \quad \text{con } n \text{ entero.}$$

   (b). Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = r\mathrm{e}^{i\theta}$ por lo cual:

$$\mathbb{R}|z\rangle = r\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)} = \mathrm{e}^{i\alpha}|z\rangle\,,$$

   si queremos $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.

3. **Proyectores: autovalores y autovectores**. Es interesante plantearse la ecuación de autovalores con la definición del proyector para un determinado *autoespacio*. Esto es, dado $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ si este proyector cumple con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ supuestamente arbitrario

$$P_\psi|\varphi\rangle = \lambda\,|\varphi\rangle \ \Rightarrow\ P_\psi|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\varphi\rangle \ \Rightarrow\ |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle\,,$$

es decir, necesariamente $|\varphi\rangle$ es colineal con $|\psi\rangle$. Más aún, si ahora el $|\varphi\rangle$ no es tan arbitrario sino que es ortogonal a $|\psi\rangle, \langle\psi|\varphi\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 0$, entonces el espectro del operador $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es 0 y 1, el primero de los cuales es infinitamente degenerado y el segundo es simple. Esto nos lleva a reflexionar que si existe un autovector de un determinado operador, entonces su autovalor es distinto de cero, pero pueden existir autovalores nulos que generan un autoespacio infinitamente degenerado.

4. **El operador diferenciación**. $\mathbb{D}|f\rangle \to D\,(f) = f'$. Los autovectores del operador diferenciación necesariamente deben satisfacer la ecuación:

$$\mathbb{D}|f\rangle = \lambda|f\rangle \to D\,(f)\,(x) = f'(x) = \lambda f(x)\,,$$

la solución a esta ecuación será una exponencial. Esto es, $|f\rangle \to f(x) = c\mathrm{e}^{\lambda x}$, con $c \neq 0$, y donde las $f(x)$ se denominarán *autofunciones* del operador.

5. **Ejemplos de autovalores y autovectores matrices reales**. El procedimiento para el cálculo de los autovectores y autovalores es el siguiente. Una vez obtenidas las raíces del polinomio característico (los autovalores), se procede a determinar el autovector, $|\psi_j\rangle$, correspondiente a cada autovalor. Distinguiremos en esta determinación casos particulares dependiendo del tipo de raíz del polinomio característico. Ilustraremos estos casos con ejemplos para el caso específico de matrices reales 3×3.
   (a). **Todos los autovalores reales son distintos.** Hemos presentado y analizado en la sección 4.6.1 tres teoremas que discuten la relación entre los autovalores, y la independencia lineal de los autovectores asociados con éstos. En esta sección ilustraremos el caso que surge cuando las raíces del polinomio característico (4.22) son reales y distintas.

Borrador Preliminar

Consideremos la siguiente representación matricial de un operador $\mathbb{A}$ en la base canónica

$$\langle e^i|\mathbb{A}|e_j\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

con lo cual el polinomio característico (4.22) queda expresado como:

$$\lambda^3 - 24\lambda^2 + 65\lambda - 42 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-21) = 0\,,$$

y es claro que tiene 3 raíces distintas. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores (4.21) para cada autovalor. Esto es:

- $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & x^3\,, \end{array}$$

  que constituye un sistema de ecuaciones algebraicas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Resolviendo el sistema tendremos el primer autovector:

$$|\psi\rangle_{\lambda_1=1} = |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  con α un número distinto de cero. Este α indica la indeterminación que discutimos a comienzos de la sección 4.6 correspondiente a esa ambigüedad que impone la presencia de una constante arbitraria de proporcionalidad.

- $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & 2x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & 2x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & 2x^3\,. \end{array}$$

  Resolviendo el sistema se tiene el segundo autovector

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_3 = 21$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 21\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & 21x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & 21x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & 21x^3\,. \end{array}$$

  Al resolver este sistema el tercer autovector

$$|\psi\rangle_{\lambda_3} = |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Como hemos dicho, podemos eliminar la ambigüedad de la fase arbitraria si normalizamos los autovectores:

$$|\hat{\psi}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\hat{\psi}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |\hat{\psi}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Notemos que $\langle\hat{\psi}^i|\hat{\psi}_j\rangle = \delta^i_j$, es decir la base de autovectores es, necesariamente, ortonormal.

(b). **Autovalores degenerados.** En esta sección discutiremos algunos ejemplos de autovalores degenerados, vale decir cuando alguna de las raíces del polinomio característico (4.22) tiene una multiplicidad. Arriba en la página 293 discutimos el caso de la diferencia de la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica. Esto es que la dimensión del autoespacio siempre es menor o igual a la multiplicidad de la raíz degenerada del polinomio característico $\dim(\boldsymbol{S}_{\lambda_1}) \leq$ grado de multiplicidad del autovalor.

I. **Multiplicidad geométrica igual a multiplicidad algebraica**. Consideremos una matriz real 3×3

$$\langle e^i|\mathbb{A}|e_j\rangle = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 7 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0\,,$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ es un autovalor degenerado de orden 2.

Ahora resolveremos la ecuación de autovalores para cada autovalor.

- $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} 4x^1 - 3x^2 + x^3 &= -3x^1 \\ 4x^1 - x^2 &= -3x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 &= -3x^3\,. \end{aligned}$$

Resolviendo $|\psi\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\hat{\psi}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{174}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = 1$ (autovalor degenerado de orden 2)

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} 4x^1 - 3x^2 + x^3 &= x^1 \\ 4x^1 - x^2 &= x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 &= x^3\,. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tendremos el segundo autovector

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\hat{\psi}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Claramente $\left\{|\hat{\psi}_1\rangle, |\hat{\psi}_2\rangle\right\}$ son linealmente independientes como nos los había anunciado el teorema 1 en la sección 4.6.1, sin embargo, esos autovectores no presentan ninguna relación de ortogonalidad $\langle\hat{\psi}^i|\hat{\psi}_j\rangle \neq \delta^i_j$.

Más, aún, este autovector puede descomponerse en infinitas parejas de vectores linealmente independientes que expenden el subespacio $\mathbb{S}_{\lambda=1}$, asociado con $\lambda = 1$, el autovalor degenerado de multiplicidad $k = 2$. Una posible combinación lineal podría ser:

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = \alpha|\psi_1\rangle_{\lambda_2} + \beta|\psi_2\rangle_{\lambda_2} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Por lo tanto, la multiplicidad geométrica –la dimensión del autoespacio, $\boldsymbol{S}_{\lambda_2=1}$, asociado con el autovalor degenerado $\lambda = 1$– coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor $\lambda = 1$ como raíz del polinomio característico. Es decir, podemos determinar la dimensión del subespacio que alberga al vector $|\psi\rangle_{\lambda_2}$. Es importante recalcar que ninguno de los (infinitos) dos vectores linealmente independientes, será autovector de $\mathbb{A}$ por separado. Unicamente lo será la combinación lineal en la que resulta $|\psi\rangle_{\lambda_2}$.

II. **Multiplicidad geométrica menor a multiplicidad algebraica.** Consideremos, para ilustrar este caso la siguiente matriz real 3×3

$$\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

En este caso, el polinomio característico es:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 1)^2 = 0\,.$$

Una vez más, el polinomio característico tiene 2 raíces iguales y una distinta y, como en el caso anterior $\lambda = 1$ es un autovalor degenerado de orden 2. Pasemos a resolver la ecuación de autovalores para cada autovalor.

- $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} x^1 + x^2 + 2x^3 & = & 2x^1 \\ x^2 + 3x^3 & = & 2x^2 \\ 2x^3 & = & 2x^3\,. \end{array}$$

Resolviendo el sistema obtenemos al primer autovector: $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} x^1 + x^2 + 2x^3 & = & x^1 \\ x^2 + 3x^3 & = & x^2 \\ 2x^3 & = & x^3 \end{array}$$

Con el correspondiente segundo autovector: $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una vez más los dos vectores NO son ortogonales, $\langle\psi^i|\psi_j\rangle \neq \delta^i_j$, pero SI linealmente independientes. En este caso, asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$, tenemos además del autovector $|\psi_2\rangle$, el autovector nulo y esto genera una imposibilidad de determinar la dimensión del autoespacio. Los autovectores siguen siendo linealmente independientes, pero aquí la dimensión del autoespacio es NECESARIAMENTE 1, $\dim(\boldsymbol{S}_{\lambda_2=1}) = 1$, por lo tanto ilustra que la multiplicidad geométrica es menor que la multiplicidad aritmética de las raíces del polinomio característico.

III. Vamos ilustrar un tercer ejemplo que se presenta para uno de los autovalores degenerados. Consideremos entonces otra matriz 3×3 con autovalores repetidos

$$\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

Borrador Preliminar

con lo cual el polinomio característico es:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 = 0\,,$$

que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ vuelve a ser un autovalor degenerado de orden 2. Volvemos a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor

- $\lambda_1 = 7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + x^3 & = & 7x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 & = & 7x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 & = & 7x^3\,. \end{array}$$

  Al resolver el sistema

$$|\psi\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,.$$

- $\lambda_2 = 1$. En este caso el autovalor degenerado de orden 2 presenta una pequeña patología. Veamos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + x^3 & = & x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 2x^3 & = & x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 & = & x^3\,. \end{array}$$

  Resolviendo

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = \begin{cases} |\psi_1\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ |\psi_2\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

  con lo cual el autovector $|\psi\rangle_{\lambda_2}$ correspondiente al autovalor $\lambda_2 = 1$, está asociado con a dos vectores linealmente independientes $\{|\psi_1\rangle_{\lambda_2}, |\psi_2\rangle_{\lambda_2}\}$ y, por lo tanto aquí también la multiplicidad aritmética coincide con la multiplicidad geométrica. Una vez más los autovectores, correspondientes a distintos autovalores no son ortogonales pero si linealmente independientes.

(c). Finalmente, consideremos una matriz 3×3 con 1 autovalor real y dos autovalores complejos

$$\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det |A^i_j - \lambda \delta^i_j| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 15\lambda - 18 = (\lambda - 6)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 3\right) = 0\,.$$

En este caso $\lambda_1 = 6$ es un autovalor real. Adicionalmente existen dos autovalores complejos, uno el complejo conjugado del otro: $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{3}\right)$ y $\lambda_3 = -\frac{1}{2}\left(3 - i\sqrt{3}\right)$. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para cada

Borrador Preliminar

autovalor real. En este caso existe **un único** autovalor real $\lambda = 6$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & 6x^1 \\ 4x^1 - x^2 & = & 6x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & 6x^3 \,. \end{array}$$

Tendremos que para $\lambda = 6$

$$|\psi\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

6. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados y un operador unitario definido como: $\mathbb{U} = \mathbb{A} + i\mathbb{B}$. Vamos a mostrar que:
   (a). Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan, $[\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$, los autovectores de $\mathbb{A}$ también lo son de $\mathbb{B}$.
   Si $\{|u_i\rangle\}$ son autovectores de $\mathbb{A}$ entonces
   $$\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \;\Rightarrow\; \mathbb{B}\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle\,, \quad \text{como } [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0\,, \quad \text{entonces } \mathbb{A}\mathbb{B}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle\,.$$
   Por lo tanto, $\mathbb{B}|u_i\rangle$ es un autovector de $\mathbb{A}$. Pero la solución para la ecuación de autovectores $(\mathbb{A} - \lambda_i\mathbb{I})\,|u_i\rangle = 0$ es única, por lo cual todos los autovectores de $\mathbb{A}$ son proporcionales. Esto es: $\mathbb{B}|u_j\rangle = \mu_j|u_j\rangle$, con lo cual queda demostrado que los autovectores de $\mathbb{A}$ son autovectores de $\mathbb{B}$.
   (b). Si $\mathbb{U}|v_i\rangle = \mu_i|v_i\rangle$, entonces $|\mu_i| = 1$.
   Es claro que: $\langle v^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|v_i\rangle = \langle v^j|\mathbb{I}|v_i\rangle \;\Rightarrow\; \mu_j^*\mu_i\langle v^j|v_i\rangle = \langle v^j|\mathbb{I}|v_i\rangle \;\Rightarrow\; \mu_i^2 = 1\,.$
7. Dada una matriz de la forma
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{A}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$$
   con α y β números complejos distintos de cero. Vamos a encontrar:
   (a). Las relaciones que deben cumplir α y β para que λ_i sea real.
   El polinomio característico y la condición para que λ sea real es:
   $$(1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - \alpha\beta) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{\alpha\beta} \;\Rightarrow\; \alpha\beta > 0 \;\wedge\; \alpha\beta \in \mathbb{R}\,.$$
   (b). Las relaciones que deben cumplir α y β para que $\langle v^j|v_i\rangle = \delta_i^j$.
   Los autovalores y autovectores para esta matriz serán:
   $$\lambda_1 = 1 \Rightarrow |v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \lambda_2 = 1 + \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \lambda_3 = 1 + \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow |v_3\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
   con lo cual: $\langle v^2|v_3\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = 1 \;\Rightarrow\; |\alpha| = |\beta|\,.$
   (c). Supongamos que $\mathbb{A}$ es hermítica, encontremos las relaciones que deben cumplir α y β.
   Si $\mathbb{A}$ es hermítica, entonces $\alpha^* = \beta$, con lo cual se cumplen automáticamente ambas aseveraciones.
8. Dadas las siguientes matrices:
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$
   Determinemos cuales conmutan entre ellas y busquemos la base de autovectores comunes.
   Notamos que: $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = [\mathbb{A}, \mathbb{D}] = [\mathbb{D}, \mathbb{B}] = 0$, y
   $$[\mathbb{A}, \mathbb{C}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbb{B}, \mathbb{C}] = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbb{D}, \mathbb{C}] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Borrador Preliminar

Los autovectores comunes a $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$, serán:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Dada la representación matricial de dos operadores

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a). Evaluemos $[\mathbb{A}, \mathbb{B}]$.

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{B}\mathbb{A} \;\Rightarrow\; [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$$

(b). Vamos a mostrar que $\mathbb{A}$ tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, con λ_1 un autovalor degenerado. Y construyamos luego la base de autovectores para $\mathbb{A}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Entonces para:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)\lambda - (1-\lambda) = \left(\lambda^2 - 1\right)(1-\lambda) = 0\,,$$

se tienen dos autovalores: $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Para el caso de $\lambda = -1$ se cumple que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} z = -x \\ y = -y \\ x = -z \end{matrix}$$

con lo cual el autovector asociado con el autovalor $\lambda = -1$ tendrá la forma de:

$$|u\rangle_{-1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 1$ se cumple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} z = x \\ y = y \\ x = z \end{matrix}$$

hay dos vectores linealmente independientes asociados con $\lambda = 1$, a saber:

$$|u\rangle_{1a} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |u\rangle_{1b} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } y \text{ arbitrario}\,.$$

Nótese que estos tres autovectores: $\{|u\rangle_{1a}, |u\rangle_{1b}, |u\rangle_{-1}\}$ son ortogonales entre si.

(c). ¿Cuál es la representación matricial de $\mathbb{A}$ en la base de autovectores?

Borrador Preliminar

Veamos lo siguiente:

$$\tilde{A}^i_j = \begin{pmatrix} \langle u^1|\mathbb{A}|u_1\rangle & \langle u^1|\mathbb{A}|u_2\rangle & \langle u^1|\mathbb{A}|u_3\rangle \\ \langle u^2|\mathbb{A}|u_1\rangle & \langle u^2|\mathbb{A}|u_2\rangle & \langle u^2|\mathbb{A}|u_3\rangle \\ \langle u^3|\mathbb{A}|u_1\rangle & \langle u^3|\mathbb{A}|u_2\rangle & \langle u^3|\mathbb{A}|u_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ya que los autovectores forman una base ortogonal. Obviamente se cumple que:

$$\det|\mathbb{A}| = \det|\tilde{\mathbb{A}}| = -1 \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \mathrm{Tr}(\tilde{\mathbb{A}}) = 1\,.$$

(d). A partir de los autovectores de $\mathbb{A}$ vamos a calcular los autovalores y autovectores de $\mathbb{B}$. Claramente $\mathbb{B}|u_{-1}\rangle = -|u_{-1}\rangle$ con lo cual tenemos el primer autovector de $\mathbb{B}$ asociado al autovalor $\lambda = -1$. Para encontrar los otros autovectores tendremos:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Practicando con Maxima

En este ejercicio aprenderemos a resolver el problema de autovalores y autovectores. Primeros lo haremos de manera indirecta, realizando los cálculos por pasos, y luego utilizando las funciones específicas del programa.

1. Dada la matriz $\mathbb{A}$ del primer ejemplo anteriormente resuelto:

(%i1) A:matrix([2,1,3], [1,2,3], [3,3,20]);

(%o1) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

Generamos la matriz identidad 3×3 con el comando **ident(n)**.

(%i2) I:ident(3);

(%o2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escribimos la ecuación de autovalores de manera matricial y la llamaremos M.

(%i3) M:A-lambda*I;

(%o3) $$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante nos dará el polinomio característico, luego resolvemos para λ.

(%i4) factor(determinant(M));

(%o4) $-(\lambda-21)\,(\lambda-2)\,(\lambda-1)$

(%i5) solve(%=0);

(%o5) $[\lambda=1, \lambda=2, \lambda=21]$

Los autovalores son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 21$. Para cada autovalor evaluaremos una matriz correspondiente:

(%i6) M1:M,lambda=1; M2:M,lambda=2; M3:M,lambda=21;

(%o6) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 19 \end{pmatrix}$$

(%o7) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

(%o8) $$\begin{pmatrix} -19 & 1 & 3 \\ 1 & -19 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos ahora resolver, para cada autovalor, la ecuación de autovectores: $\mathbb{A}\mathbb{X} = \lambda_i \mathbb{X}$. Así que podemos escribir las siguientes matrices:

(%i9) M1:M1.[x,y,z]; M2:M2.[x,y,z]; M3:M3.[x,y,z];

Borrador Preliminar

(%o9) $\begin{pmatrix} 3\,z+y+x \\ 3\,z+y+x \\ 19\,z+3\,y+3\,x \end{pmatrix}$

(%o10) $\begin{pmatrix} 3\,z+y \\ 3\,z+x \\ 18\,z+3\,y+3\,x \end{pmatrix}$

(%o11) $\begin{pmatrix} 3\,z+y-19\,x \\ 3\,z-19\,y+x \\ -z+3\,y+3\,x \end{pmatrix}$

Iremos ahora resolviendo cada uno de los sistemas de ecuaciones. Para $\lambda_1 = 1$:

```
(%i12) ec1:M1[1,1]=0; ec2:M1[2,1]=0; ec3:M1[3,1]=0;
```

(%o12) $3\,z+y+x=0$

(%o13) $3\,z+y+x=0$

(%o14) $19\,z+3\,y+3\,x=0$

```
(%i15) solve([ec1,ec2,ec3],[x,y,z]);
```
solve: dependent equations eliminated: (2)

(%o15) $[[x=-\%r_4, y=\%r_4, z=0]]$

Recordemos que **Maxima** nos indica con el símbolo $\%r_n$ que se trata de una constante. Así que de las infinitas soluciones escogemos alguna de las más simples: $(1,-1,0)$.

Repetimos los cálculos para el segundo autovalor, es decir, $\lambda_2 = 2$:

```
(%i16) ec1:M2[1,1]=0; ec2:M2[2,1]=0; ec3:M2[3,1]=0;
```

(%o16) $3\,z+y=0$

(%o17) $3\,z+x=0$

(%o18) $18\,z+3\,y+3\,x=0$

```
(%i19) solve([ec1,ec2,ec3],[x,y,z]);
```
solve: dependent equations eliminated: (3)

(%o19) $[[x=-3\,\%r_5, y=-3\,\%r_5, z=\%r_5]]$

Por lo tanto un autovector puede ser: $(1,1,-1/3)$.

Finalmente, para $\lambda_3 = 21$:

```
(%i20) ec1:M3[1,1]=0; ec2:M3[2,1]=0; ec3:M3[3,1]=0;
```

(%o20) $3\,z+y-19\,x=0$

(%o21) $3\,z-19\,y+x=0$

(%o22) $-z+3\,y+3\,x=0$

```
(%i23) solve([ec1,ec2,ec3],[x,y,z]);
```
solve: dependent equations eliminated: (3)

(%o23) $\left[\left[x=\frac{\%r_6}{6}, y=\frac{\%r_6}{6}, z=\%r_6\right]\right]$

Podemos tomar como autovector a: $(1,1,6)$.

2. **Maxima** ofrece la posibilidad de resolver el problema de autovalores a través de un determinado número de funciones. Por ejemplo, la función **charpoly** nos dará el polinomio característico directamente de la matriz que queremos estudiar y respecto de la variable que seleccionemos, es este caso será λ.

```
(%i24) charpoly(A,lambda);
```

Borrador Preliminar

(%o24) $\lambda + ((2-\lambda)\ (20-\lambda) - 9)\ (2-\lambda) + 3\ (3 - 3\ (2-\lambda)) - 11$

(%i25) factor(%);
(%o25) $-(\lambda - 21)\ (\lambda - 2)\ (\lambda - 1)$

(%i26) solve(%=0);
(%o26) $[\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 21]$

El programa también permite obtener los autovalores directamente de la matriz problema. Esto se hace con el comando **eigenvalues(M)**. El resultado será una lista conformada a su vez por dos listas: la primera sublista la forman los valores propios de la matriz M y la segunda con su multiplicidad correspondientes. Veamos:

(%i27) eigenvalues(A);
(%o27) $[[1, 2, 21], [1, 1, 1]]$

La función para calcular los autovectores es **eigenvectors(M)**. El resultado será una lista con dos elementos; el primero está formado por dos listas: la primera con los valores propios de M y la segunda con su respectiva multiplicidad, el segundo elemento es una lista de listas de vectores propios, una por cada valor propio.

(%i28) eigenvectors(A);
(%o28) $\left[[[1, 2, 21], [1, 1, 1]], \left[[[1, -1, 0]], \left[\left[1, 1, -\frac{1}{3}\right]\right], [[1, 1, 6]]\right]\right]$

3. Consideremos otro de los ejemplos tratado anteriormente. Dada la matriz:

(%i29) B:matrix([4,-3,1], [4,-1,0], [1,7,-4]);
(%o29) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}$
(%i30) eigenvectors(B);
(%o30) $[[[-3, 1], [1, 2]], [[[1, -2, -13]], [[1, 2, 3]]]]$

Notemos que sólo se obtienen dos autovectores.

4. Consideremos la matriz:

(%i31) C:matrix([2,1,1], [2,3,2], [3,3,4]);
(%o31) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
(%i32) eigenvectors(C);
(%o32) $[[[7, 1], [1, 2]], [[[1, 2, 3]], [[1, 0, -1], [0, 1, -1]]]]$

5. Y finalmente, dada la matriz:

(%i33) D:matrix([1,2,3], [3,1,2], [2,3,1]);
(%o33) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Borrador Preliminar

(%i34) eigenvectors(D);

(%o34) $\left[\left[\left[-\frac{\sqrt{3}\,i+3}{2},\frac{\sqrt{3}\,i-3}{2},6\right],[1,1,1]\right],\left[\left[\left[1,\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2},-\frac{\sqrt{3}\,i+1}{2}\right]\right]\right],\left[\left[1,-\frac{\sqrt{3}\,i+1}{2},\frac{\sqrt{3}\,i-1}{2}\right]\right],[[1,1,1]]\right]\right]$

4.6.5 Ejercicios

1. Si $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ son autovectores del operador lineal $\mathbb{A}$ que corresponden a distintos autovalores. Muestre que $\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle$ $(\alpha\neq 0,\beta\neq 0)$ no puede ser un autovector de $\mathbb{A}$.
2. Demuestre que si todo vector de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ es un autovector del operador lineal $\mathbb{A}$, entonces $\mathbb{A}=\lambda\mathbb{I}$. Donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad.
3. Demuestre que si el operador lineal $\mathbb{A}$ conmuta con todos operadores que actúan em un determinado espacio vectorial, entonces $\mathbb{A}=\lambda\mathbb{I}$.
4. Si un operador lineal $\mathbb{A}$ tiene un autovector $|v_0\rangle$ con autovalor λ_0. Demuestre que $|v_0\rangle$ es también un autovector del operador $\mathbb{A}^2$ con autovalor λ_0^2.
5. Aun si un operador lineal $\mathbb{A}$ no tiene autovectores el operador $\mathbb{A}^2$ puede llegar a tenerlos. Demuestre que si $\mathbb{A}^2$ tiene un autovector con un autovalor no degenerado $\lambda_0=\mu^2$, entonces $\mathbb{A}$ tiene un autovector.
6. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\3&4&-2\\-1&-2&2\end{pmatrix},\ \mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\4&-7&1\end{pmatrix},\ \mathbb{C}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ \mathbb{D}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$
y la matriz $\mathbb{E}=\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$. Verifique si los autovectores son ortogonales entre ellos.
7. Demuestre que la matriz
$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\-6&4&4\\3&-1&0\end{pmatrix},$$
no tiene tres autovectores linealmente independientes y que cualquier autovector tiene la forma:
$$\begin{pmatrix}\lambda\\3\lambda-2\nu\\\nu\end{pmatrix}.$$
8. Construimos un sistema con tres partículas, de masa m_i rígidamente unidas, colocadas en tres puntos distintos de la siguiente forma:
$$m_1=1\to\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad m_2=2\to\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad m_3=1\to\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$
   (a). Encuentre la matriz del tensor de inercia.
   (b). Diagonalice esa matriz y encuentre los ejes principales de inercia.
9. En Mecánica Cuántica, el problema del oscilador armónico simple puede ser representado por un problema de autovalores
$$\mathbb{L}|\psi>=\lambda|\psi>\Rightarrow<x|\mathbb{L}|\psi>=\lambda<x|\psi>\leftrightarrow\mathbb{L}\psi(x)=\lambda\psi(x)\,,\quad\text{donde}:\quad\mathbb{L}\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\,.$$

Borrador Preliminar

Si construimos un par de operadores:

$$\mathbb{L}_+ = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_- = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,,$$

utilice los resultados del problema anterior y construya las nuevas autofunciones de $\mathbb{L}$ con sus autovalores.

10. Considere las siguiente representación matricial para dos operadores:

$$\langle u^i|\mathbb{A}|u_j\rangle = A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \langle u^m|\mathbb{B}|u_n\rangle = B^m_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

    (a). Muestre como actúan $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ sobre un vector genérico $|\psi>$ expandido en esa base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ (vale decir $|\psi\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$).

    (b). Muestre que los autovalores de $\mathbb{A}$ son degenerados para $\delta = 0$ y que sus autovectores son ortogonales para $\delta \neq 0$ e incluso para $\delta \to 0$.

    (c). Muestre que también $\mathbb{B}$ tiene autovalores degenerados para $\delta = 0$ y encuentre la expresión (en función de $0 \leq \delta \leq 1$) para el coseno del ángulo entre dos autovectores.

11. Dada la siguiente representación matricial de un operador en la base canónica:

$$\langle u^i|\mathbb{M}|u_j\rangle = M^i_j = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad |u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    (a). Encuentre los autovectores $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ para ese operador en la base canónica.

    (b). Encuentre las representaciones matriciales de los operadores proyección sobre los auto espacios, $\mathbb{P}_{|\varphi_i\rangle} = |\varphi_i\rangle\langle\varphi^i|$, en esa misma base canónica.

    (c). Encuentre las representaciones matriciales de los operadores proyección sobre los complementos ortogonales de los autoespacios $U^n_m = |\varphi_m\rangle\langle\varphi^n|$ en esa misma base y con ella calcule $M = M^i_j U^j_i$.

12. Las matrices de Pauli :

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

las hemos visto en varios momentos de estas notas: como cuaterniones en los ejercicios 2.2.4 y como operadores lineales en los ejercicios 4.7.7.

    (a). Muestre si las matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbb{I}$ forman un grupo respecto a la siguiente operación:

$$\boldsymbol{\sigma}_j \odot \boldsymbol{\sigma}_k \equiv \boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k = i\epsilon_{jkm}\boldsymbol{\sigma}^m + \delta_{jk}\mathbb{I} \quad \text{con } j,k,m = x,y,z$$

    donde ϵ_{jkm} es el símbolo de Levi-Civita y $i = \sqrt{-1}$.

    (b). Muestre si las matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$, conjuntamente con la matriz identidad $\mathbb{I}$ son linealmente independientes.

    (c). ¿Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas 2×2? ¿Por qué? Si forman una base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

    en términos de esa base.

    (d). Derive la expresión general para $[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k]$.

    (e). Suponga ahora que $\boldsymbol{\sigma}_z$ actúa de la siguiente forma: $\boldsymbol{\sigma}_z|+\rangle = |+\rangle$, $\boldsymbol{\sigma}_z|-\rangle = -|-\rangle$, con:

$$|+\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Encuentre la expresión para los autovalores y autovectores de las otras matrices de Pauli:

$$\boldsymbol{\sigma}_x|+\rangle_x = \lambda_{+x}|+\rangle_x\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_x|-\rangle_x = \lambda_{-x}|-\rangle_x\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_y|+\rangle_y = \lambda_{+y}|+\rangle_y\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_y|-\rangle_y = \lambda_{-y}|-\rangle_y\,.$$

(f). Muestre que cualquier representación matricial de un operador genérico $\mathbb{M}$ puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli.

(g). El polinomio característico para ese operador genérico $\mathbb{M}$ se puede expresar como

$$P_\lambda = \lambda^2 - \lambda \mathrm{Tr}(\mathbb{M}) + \det|\mathbb{M}|\,.$$

Donde los λ son sus autovalores.

4.7 Autovalores y autovectores de matrices importantes

Consideremos la ecuación de autovalores (4.21) y la definición de operadores adjuntos que hemos discutido en la sección 4.2.3. Podemos afirmar sin perder generalidad que dado un conjunto de vectores $\{|\mathrm{u}_1\rangle,\ |\mathrm{u}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{u}_n\rangle\}$ y de cantidades $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ que cumplan con $\mathbb{A}|\mathrm{u}_i\rangle = \lambda_i\,|\mathrm{u}_i\rangle$ con $i = 1, 2, \cdots n$, entonces

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbb{A}|\mathrm{u}_i\rangle = \lambda_i\,|\mathrm{u}_i\rangle & \Rightarrow & \langle \mathrm{u}^j|\mathbb{A}|\mathrm{u}_i\rangle = \lambda_i\langle \mathrm{u}^j|\mathrm{u}_i\rangle \\ \\ \langle \mathrm{u}^j|\mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^*\langle \mathrm{u}^j| & \Rightarrow & \langle \mathrm{u}^j|\mathbb{A}^\dagger|\mathrm{u}_i\rangle = \lambda_j^*\langle \mathrm{u}^j|\mathrm{u}_i\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathrm{u}^j|\mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger|\mathrm{u}_i\rangle = (\lambda_i - \lambda_j^*)\langle \mathrm{u}^j|\mathrm{u}_i\rangle\,. \tag{4.24}$$

Vale decir, hemos proyectado las ecuaciones de autovalores de un operador genérico y su adjunto a lo largo de los vectores y las formas correspondientes, $\langle \mathrm{u}^j|$ y $|\mathrm{u}_i\rangle$, para luego restar esas expresiones miembro a miembro.

Es evidente que si no conocemos el tipo de operador, poco se puede decir de sus autovectores y autovalores. Hay que imponer algunas restricciones sobre el tipo de operador para poder sacar algunas conclusiones respecto al tipo de autovalores y autovectores que ese operador pueda tener. Por ejemplo:

- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, $(i \neq j)$ entonces de la ecuación (4.24) se deduce que esos autovectores serán ortogonales, $\langle \mathrm{u}^j|\mathrm{u}_i\rangle \propto \delta_i^j$.
- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son los mismos, $(i = j)$ entonces los autovalores son reales: $\lambda_i = \lambda_i^*$.

Este caso lo analizaremos en la próxima sección.

Borrador Preliminar

4.7.1 Autovalores y autovectores de matrices hermíticas y unitarias

Tal y como mencionamos en la sección 4.2.4 un operador hermítico o autoadjunto cumple con $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$ y luego en la sección 4.3.2.2, comprobamos que su representación matricial es igual a su traspuesta conjugada. Por lo tanto, la representación matricial de un operador autoadjunto es una matriz simétrica con números reales en su diagonal. Veamos ahora cómo se comportan sus autovalores.

Teorema 4.2

Supongamos un operador lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$, hermítico: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$, con autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Entonces:

- Los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son reales.
- Los autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$, correspondientes a cada uno de los autovalores, serán ortogonales.

Demostración:

- Para demostrar que los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son reales, proyectamos la ecuación de autovalores en cada uno de los autovectores:

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \;\Rightarrow\; \langle\psi|\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle\,.$$

  Ahora bien, dado que $\langle\psi|\psi\rangle$ es real, si demostramos que $\langle\psi|\mathbb{A}|\psi\rangle$ es real, estará demostrado que λ lo será también. Pero como $\mathbb{A}$ es hermítico:

$$\langle\psi|\mathbb{A}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\mathbb{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbb{A}|\psi\rangle \;\Rightarrow\; \langle\psi|\mathbb{A}|\psi\rangle \in \mathbb{R}\,,$$

  por consiguiente los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son reales. Más aún, si $\mathbb{A}$ es hermítico, y como sus autovalores son reales entonces:

$$\langle\psi|\mathbb{A}^\dagger = \lambda^*\langle\psi| = \lambda\langle\psi| \;\Rightarrow\; \langle\psi|\mathbb{A}|\phi\rangle = \lambda\langle\psi|\phi\rangle\,.$$

- Para demostrar que los autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$ son ortogonales, consideremos dos autovectores con sus correspondientes autovalores de tal forma que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbb{A}|\varphi\rangle = \mu|\varphi\rangle\,,$$

  pero como $\mathbb{A}$ es hermítico entonces se cumple que: $\langle\varphi|\mathbb{A} = \mu\langle\varphi|$, multiplicando a la izquierda por $|\psi\rangle$ y a $\langle\psi|\mathbb{A} = \lambda\langle\psi|$ por $\langle\varphi|$ a la derecha:

$$\left.\begin{array}{r}(\langle\varphi|\mathbb{A} = \mu\langle\varphi|)\,|\psi\rangle \\ \\ \langle\varphi|\,(\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\langle\varphi|\mathbb{A}|\psi\rangle = \mu\langle\varphi|\psi\rangle \\ \\ \langle\varphi|\mathbb{A}|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow\; (\lambda - \mu)\,\langle\varphi|\psi\rangle = 0\,,$$

  y como hemos supuesto que $\lambda \neq \mu$ con lo cual $\langle\varphi|\psi\rangle = 0$, los autovectores correspondientes a dos autovalores son ortogonales. ◀

Es importante señalar el hecho de que si la matriz $\mathbb{A}$ es real, entonces $\mathbb{A} = \mathbb{P}\check{\mathbb{A}}\mathbb{P}^T$, con $\check{\mathbb{A}}$ diagonal y $\mathbb{P}$ ortogonal: $\mathbb{P}^T = \mathbb{P}^{-1}$.

En resumen, si $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ es un operador lineal hermítico entonces:

- Sus autovalores son reales.
- Los autovectores correspondientes a cada autovalor son ortogonales.
- Los autovectores de $\mathbb{A}$ resultan ser una base ortonormal del espacio vectorial $\boldsymbol{V}^n$.

Borrador Preliminar

4.7.2 Autoespacios y autovalores degenerados

Una vez más, consideraremos el caso autovalores degenerados, para operadores hermíticos o autoadjuntos. El siguiente teorema garantiza la existencia de al menos un subespacio $\boldsymbol{S}(\lambda_0) \subset \boldsymbol{V}^n$.

Teorema 4.3

Sea un operador lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$, hermítico, con una representación matricial $n \times n$, tal que su polinomio característico $\mathcal{P}(\lambda) = \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = 0$ tiene al menos una raíz degenerada $\lambda = \lambda_0$, de orden $k \leq n$. Entonces existen k autovectores, no triviales, que cumplen con: $\mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle$ para $j = 1, 2, \cdots, k$.

Demostración: La demostración también emerge de una variante del *Método de Inducción Completa*. Para ello, probamos que se cumple para $j = 1$. Esta afirmación es obvia. Si existe un $\lambda = \lambda_0$ existe un $|\psi_j\rangle$, tal que cumple con la ecuación anterior y es linealmente independiente con él mismo.

Suponemos que se cumple para $1 \leq j = m \leq k$. Es decir, existen m autovectores $|\psi_j\rangle$ de $\mathbb{A}$ para el autovalor λ_0. Definamos un subespacio $\boldsymbol{S}_{\lambda_0} = \boldsymbol{S}(\lambda_0) \subset \boldsymbol{V}^n$ donde:

$$|\psi_j\rangle \in \boldsymbol{S}_{\lambda_0} \quad / \quad \mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle \;\Rightarrow\; \mathbb{A}|\psi_j\rangle \in \boldsymbol{S}_{\lambda_0} \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, m\,,$$

por lo tanto, podremos separar $\boldsymbol{V}^n$ como una suma directa entre el subespacio $\boldsymbol{S}_{\lambda_0}$ y $\boldsymbol{\mathcal{N}}$, su complemento ortogonal:

$$\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{S}_{\lambda_0} \oplus \boldsymbol{\mathcal{N}} \quad / \quad \mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle \quad \wedge \quad |\phi\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{N}} \quad \Rightarrow \quad \langle\phi|\psi_j\rangle = 0\,,$$

claramente $\boldsymbol{S}_{\lambda_0}$ es un subespacio invariante de $\mathbb{A}$ por cuanto su acción se circunscribe dentro del mismo subespacio $\boldsymbol{S}_{\lambda_0}$.

Mostraremos que se cumple para operadores hermíticos, por cuanto no es verdad en general, entonces:

$$\left.\begin{array}{c} \langle\phi|\psi_j\rangle = 0 \\ \wedge \\ \mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \langle\psi_j|\phi\rangle = 0 = \langle\psi_j|\mathbb{A}^\dagger|\phi\rangle = \langle\psi_j|\mathbb{A}|\phi\rangle\,,$$

de donde se concluye que el vector es ortogonal a $\boldsymbol{S}_{\lambda_0}$ y por lo tanto está en el complemento ortogonal $\mathbb{A}|\phi\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$ (por hipótesis $|\phi\rangle \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$). Esto implica que $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ también es un espacio invariante del operador hermítico $\mathbb{A}$.

Entonces, el espacio $\boldsymbol{V}^n$ puede expresarse como una suma directa de los dos subespacios invariantes respecto al operador lineal $\mathbb{A}$ y su representación matricial en la base de autovectores tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques:

$$\langle\psi^j|\mathbb{A}|\psi_i\rangle = A^j_i \to \begin{pmatrix} Q^1_1 & \cdots & Q^1_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q^m_1 & & Q^m_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R^{m+1}_{m+1} & \cdots & R^{m+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R^n_{m+1} & \cdots & R^n_n \end{pmatrix},$$

donde Q^α_β y R^μ_υ son matrices $m \times m$ y $(n-m) \times (n-m)$, respectivamente. La matriz Q^α_β opera en $\boldsymbol{S}_{\lambda_0}$ mientras que R^μ_υ actúa sobre el complemento ortogonal $\boldsymbol{\mathcal{N}}$.

El polinomio característico de $\mathbb{A}$ puede expresarse como:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det|A^i_j - \lambda\delta^i_j| = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(\lambda) = \det|Q^i_j - \lambda\delta^i_j|\det|R^i_j - \lambda\delta^i_j| = 0\,,$$

Borrador Preliminar

y como $\lambda = \lambda_0$ es la raíz múltiple del polinomio característico que anula el $\det|Q^i_j - \lambda\delta^i_j|$, tendremos que

$$\det|Q^i_j - \lambda_0\delta^i_j| = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m\,\mathcal{F}(\lambda)\;, \quad \text{con } \mathcal{F}(\lambda_0) \neq 0\,,$$

donde λ_0 no es raíz del polinomio $\mathcal{F}(\lambda)$. Ahora bien, para que se cumpla cuando $j = k$, el polinomio característico es

$$j = k \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k\,\mathcal{R}(\lambda) \;\Rightarrow\; (\lambda-\lambda_0)^m\,\mathcal{F}(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k\,\mathcal{R}(\lambda)\;.$$

Otra vez, λ_0 no es raíz del polinomio $\mathcal{R}(\lambda)$. La ecuación anterior se cumple para todo λ, en particular para $\lambda = \lambda_0$. Por lo tanto:

$$1 = (\lambda-\lambda_0)^{k-m}\,\frac{\mathcal{R}(\lambda)}{\mathcal{F}(\lambda)}\,.$$

Es claro que $\lambda = \lambda_0$ obliga a que $k = m$. ◀

4.7.3 Autovalores y autovectores de matrices unitarias

Para finalizar esta sección volvamos a considerar la ecuación de autovalores (4.21) y la definición de operadores adjuntos que hemos discutido en la sección 4.2.3. Entonces, si un operador $\mathbb{U}$ es unitario, se cumple que $\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^{-1}$ entonces si $|\psi_j\rangle$ es un autovector, normalizado del operador $\mathbb{U}$, correspondiente a un autovalor λ_j tendremos que la norma al cuadrado de $\mathbb{U}|\psi_j\rangle$ será igual a:

$$\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \;\Rightarrow\; \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1 = \lambda^*_j\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda^*_j\lambda_j \;\Rightarrow\; \lambda_j = \mathrm{e}^{i\varphi_j}\;,$$

con φ_u una función real.

Con lo cual podemos concluir que, necesariamente, los autovalores de los operadores unitarios serán números complejos de módulo 1. Cuando los autovalores son diferentes, digamos $k \neq j$, entonces esta condición implica que $\langle\psi^k|\psi_j\rangle = 0$, con lo cual los autovectores de un operador unitarios son ortogonales.

4.7.4 Autovalores y autovectores de matrices similares

Como discutimos en la sección 4.3.3, dos operadores $\tilde{\mathbb{A}}$ y $\mathbb{A}$ que están relacionados por una transformación de similaridad. La ecuación (4.17), $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S}$, conecta las distintas representaciones matriciales de un mismo operador, las cuales tendrán la misma traza y el mismo determinante, independientemente de su representación matricial. Tal y como se desprende de ecuación (4.15) la representación matricial de los operadores $\mathbb{S}$ corresponde a la matriz de productos internos de los vectores base $\langle\tilde{\mathrm{e}}^i|\mathrm{e}_k\rangle$.

A continuación presentamos un teorema que ilustra como se construye la transformación de similaridad

Teorema 4.4

Un operador lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ tendrá un máximo de n autovalores distintos. Adicionalmente, si $\mathbb{A}$ tiene *precisamente* n autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, entonces los n autovectores, $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$ (uno para cada autovalor), forman una base para $\boldsymbol{V}^n$ y existirá una transformación de similaridad $\mathbb{S}$ que diagonaliza $\mathbb{A}$ de la forma

$$\mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{D}} \equiv \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\;. \tag{4.25}$$

y la transformación es la matriz con los autovectores como columnas $[|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle]$,

Si construimos una matriz con las componentes n autovectores como columnas y la denotamos como $\mathbb{S} = [|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle]$, claramente

$$\mathbb{A}\,[|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle] = [\lambda_1|\psi_1\rangle, \lambda_2|\psi_2\rangle, \cdots, \lambda_n|\psi_n\rangle] = [|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle]\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\;.$$

Borrador Preliminar

Esto se ve mas claro en el lenguaje matricial

$$\mathbb{A}|\psi\rangle_k = \lambda_k|\psi\rangle_k \xrightarrow{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle\langle \mathrm{e}^j|\psi\rangle_k = \lambda_k\langle \mathrm{e}^i|\psi\rangle_k \;\Rightarrow\; A^i_j\,\psi^j_k = \lambda_k\psi^i_k \equiv \psi^i_k\delta^k_m\lambda_m \;\Leftrightarrow\; \mathbb{A}\mathbb{S} = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{D}}\,,$$

Note que hemos representado $\mathbb{S} \leftrightarrow \psi^i_k$, como una matriz con los autovectores como columnas, además, como dijimos anteriormente, índices repetidos "arriba y abajo" indican suma, pero los índices en el mismo nivel no. Adicionalmente, hemos denotado como $\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{D}}$ a la matriz diagonal con de los autovalores, $\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{D}} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ del mismo modo que en la sección 4.3.2.1.

Finalmente, como $\mathbb{S}$ es invertible porque los autovectores son linealmente independientes tendremos

$$\mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{D}} \equiv \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\,.$$

Es decir, como lo presentamos en la sección 4.3.3, existe una transformación de similaridad que lleva $\mathbb{A}$ a su representación diagonal $\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{D}}$, donde los n autovalores ocupan la diagonal.

Ahora nos toca identificar otra propiedad fundamental inherente al operador y no a su representación matricial. Para ello complementaremos los teoremas expuestos allá con el siguiente.

Teorema 4.5

Dos matrices, A^k_l y $\tilde{A}^i_j$, $n \times n$, similares tienen el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores.

Demostración: Es inmediato verificar que: $\tilde{\mathbb{A}} - \lambda\mathbb{I} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} - \lambda\mathbb{I} = \mathbb{S}^{-1}\left(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}\right)\mathbb{S}$, y dado que

$$\det|\tilde{\mathbb{A}} - \lambda\mathbb{I}| = \det|\mathbb{S}^{-1}\left(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}\right)\mathbb{S}| = \det|\mathbb{S}^{-1}|\det|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}|\det|\mathbb{S}| = \det|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}|\,.$$

Por lo tanto, ambos operadores $\tilde{\mathbb{A}}$ y $\mathbb{A}$, tendrán el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores. ◀

Haremos una lista de todas la propiedades para los autovalores y autovectores de operadores, expuestas en ésta y en la sección anterior.

Sea un operador lineal $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ con un polinomio característico que tiene n raíces distintas: $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Entonces tendremos que:

- Los diferentes autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$ correspondientes a los $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, formarán una base para $\boldsymbol{V}$.
- que los autovectores del operador $\mathbb{A}$ no son necesariamente ortogonales. Solo los autovectores de operadores hermíticos serán ortogonales. Eso lo mostramos con detalle en la sección 4.7.1. En este caso la representación matricial del operador $\langle\psi^k|\mathbb{A}|\psi_m\rangle$ en la base de autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$, será diagonal:

$$D^k_m = \langle\psi^k|\mathbb{A}|\psi_m\rangle = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,.$$

- Cualquier otra representación matricial, $\langle u^k|\mathbb{A}|u_m\rangle$, del operador $\mathbb{A}$ en otra base de $\boldsymbol{V}$, estará relacionada con la representación diagonal mediante una transformación de similaridad:

$$\mathbb{D} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = S^i_k\langle u^k|\mathbb{A}|u_m\rangle\left(S^{-1}\right)^m_j\,, \tag{4.26}$$

  donde $S^m_j = \psi^m_j$ es una matriz construida con las componentes de los autovectores como columnas.
- los autovalores de un operador son independientes de la base en la cual se represente el operador. Vale decir, al igual que la traza y el determinante, los autovalores etiquetan al operador independiente de su representación matricial.
- los dos teoremas que presentamos se cumplen también para cualquier función del operador, construida en el sentido que presentamos en la sección 4.1.5. Esto es, los autovalores y autovectores de un operador

Borrador Preliminar

$\mathbb{A}$ también lo serán para cualquier función de éste:

$$\mathbb{F}(\mathbb{A})|\psi\rangle_k = \lambda_k|\psi\rangle_k \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}^{-1}\mathbb{F}(\mathbb{A})\mathbb{S} = \mathbb{F}(\tilde{\mathbb{A}}_{\mathbb{D}}) \equiv \mathbb{F}(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n))$$

- Considere $|\tilde{\phi}_i\rangle = \mathbb{U}|\phi_i\rangle$, es decir un vector transformado con un operador unitario $\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^{-1}$. Además suponga $\mathbb{A}|\phi_i\rangle = \lambda_i|\phi_i\rangle$ entonces $\tilde{\mathbb{A}}|\tilde{\phi}_i\rangle = \lambda_i|\tilde{\phi}_i\rangle$, con $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger$. Los operadores transformados mediante matrices unitarias tienen los mismos autovalores y autovectores transformados un del otro.

4.7.5 Conjunto completo de observables que conmutan

Como hemos dicho en varias oportunidades los autovalores puedes ser degenerados con variados grados de multiplicidad. En ese caso el operador hermítico $\mathbb{A}$ no tendrá una representación diagonal. A lo mas tendrá una representación diagonal a bloques tal y como la presentamos en la sección 4.4.2. En estos casos, construiremos otro operador hermítico $\mathbb{B}$ tal que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y podremos encontrar una base que diagonalice a ambos. La intención será etiquetar, de manera unívoca, con los autovalores de ambos a los autovectores que serán acomunes a ambos operadores

Comencemos con una definición de observable común en Física

Definición 4.3

Diremos que un operador $\mathbb{A} : \boldsymbol{V}^n \to \boldsymbol{V}^n$ es un *observable* si el conjunto de autovectores $\{|u_{i(\mu)}\rangle\}$ de un operador hermítico $\mathbb{A}$, forman una base de $\boldsymbol{V}^n$.

$$\mathbb{A}|u_{i(\mu)}\rangle = \lambda_i|u_{i(\mu)}\rangle \;\Rightarrow\; |u_{i(\mu)}\rangle\langle u^{i(\mu)}| = 1 \iff \langle u^{i(\mu)}|u_{j(\nu)}\rangle = \delta^i_j\delta^\mu_\nu\,,$$

donde el índice μ indica el grado de degeneración del autovalor λ_i.

Un ejemplo trivial de un observable lo constituyen los proyectores $\mathbb{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$, con $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Claramente, la ecuación de autovalores para un proyector obliga a que tenga dos autovalores 0 y 1. El autovalor nulo es infinitamente degenerado y está asociado a todos los vectores ortogonales a $|\psi\rangle$, mientras que el autovalor 1 corresponde a un autovalor simple y está asociado a todos los vectores colineales al mismo vector $|\psi\rangle$. Esto es:

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = 0 \quad \text{si } \langle\psi|\phi\rangle = 0\,.$$

Más aún, sea un vector arbitrario $|\varphi\rangle \in \boldsymbol{V}^n$, siempre se podrá expresar como:

$$|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle + \left(\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}\right)|\varphi\rangle \;\Rightarrow\; \mathbb{P}_{|\psi\rangle}\left(|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle + \left(\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}\right)|\varphi\rangle\right)\,,$$

por lo tanto:

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}\left(\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle\right) + \left(\mathbb{P}_{|\psi\rangle} - \mathbb{P}^2_{|\psi\rangle}\right)|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle \implies \mathbb{P}_{|\psi\rangle}\left(\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle\right) = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle\,,$$

ya que $\mathbb{P}^2_{|\psi\rangle} = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}$, por definición de proyector. Entonces, se deduce que $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 1. Igualmente $\left(\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}\right)|\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 0, y la demostración es inmediata:

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle}\left(\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}\right)|\varphi\rangle = \left(\mathbb{P}_{|\psi\rangle} - \mathbb{P}^2_{|\psi\rangle}\right)|\varphi\rangle = 0\,.$$

Para el caso de autoespacios correspondientes a autovalores degenerados se puede definir un observable $\mathbb{A}$ de la forma:

$$\mathbb{A} = \sum_i a_i\mathbb{P}_i \quad \text{con: } \mathbb{P}_i = \left(|\psi_{\cdot(\mu)}\rangle\langle\psi^{\cdot(\mu)}|\right)_i \quad \text{para:} \quad \mu = 1, 2, \cdots, k\,.$$

Para los observables que conmutan se tienen los siguientes teoremas:

Borrador Eliminar

Teorema 4.6

Si dos operadores lineales $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, hermíticos, conmutan, $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0$, y $|\psi\rangle$ es autovector de $\mathbb{A}$ con autovalor σ, entonces $\mathbb{B}|\psi\rangle$ también será autovector de $\mathbb{A}$ con el mismo autovalor σ.

Demostración: La demostración es sencilla:

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \;\Rightarrow\; \mathbb{B}\left(\mathbb{A}|\psi\rangle = \sigma|\psi\rangle\right) \;\Rightarrow\; \mathbb{B}\mathbb{A}|\psi\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}|\psi\rangle\right) = \sigma\left(\mathbb{B}|\psi\rangle\right) . \quad \blacktriangleleft$$

Ahora bien, de esta situación se puede distinguir un par de casos:

- si el autovalor σ es no degenerado los autovectores asociados con este autovalor son, por definición, colineales con $|\psi\rangle$. Por lo tanto $\mathbb{B}|\psi\rangle$, será necesariamente colineal con $|\psi\rangle$. La conclusión a esta afirmación es que NECESARIAMENTE $|\psi\rangle$ es autovector de $\mathbb{B}$.
- si el autovalor σ es degenerado, $\mathbb{B}|\psi\rangle \in \boldsymbol{S}_\sigma$, es decir $\mathbb{B}|\psi\rangle$ está en el autoespacio $\boldsymbol{S}_\sigma$ con lo cual $\boldsymbol{S}_\sigma$ es globalmente invariante bajo la acción de $\mathbb{B}$.

Teorema 4.7

Si dos observables $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan, $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de $\mathbb{A}$ para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle = 0$

Demostración: Si $\mathbb{A}|\psi_1\rangle = \sigma_1|\psi_1\rangle$ y $\mathbb{A}|\psi_2\rangle = \sigma_2|\psi_2\rangle$ entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\psi^1|\left[\mathbb{A},\mathbb{B}\right]|\psi_2\rangle = \langle\psi^1|\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}|\psi_2\rangle = \left(\langle\psi^1|\mathbb{A}\right)\mathbb{B}|\psi_2\rangle - \langle\psi^1|\mathbb{B}\left(\mathbb{A}|\psi_2\rangle\right) \\ &= \sigma_1\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle - \sigma_2\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle = (\sigma_1 - \sigma_2)\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle \;\Rightarrow\; \langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle = 0 . \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Teorema 4.8

Si dos observables $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, son hermíticos, y conmutan, $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0$, los autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ comunes a $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ constituyen una base ortonormal para $\boldsymbol{V}^n$.

Demostración: Denotemos los autovectores de $\mathbb{A}$ como $|\psi_{i(\mu)}\rangle$, de tal modo que:

$$\mathbb{A}|\psi_{i(\mu)}\rangle = \sigma_i|\psi_{i(\mu)}\rangle \quad \text{donde } i = 1,2,..,n-k_n+1 \quad \text{y} \quad \mu = 1,2,..,k_n ,$$

k_n indica el orden de la degeneración de un determinado autovalor σ_n.

Dado que $\mathbb{A}$ es un observable, los $|\psi_{i(\mu)}\rangle$ forman una base, claramente:

$$\langle\psi^{i(\mu)}|\psi_{j(\nu)}\rangle = \delta^i_j\delta^\mu_\nu .$$

Dado que los elementos de la matriz $\langle\psi^{i(\nu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\nu)}\rangle = \delta^i_j$, entonces esto quiere decir que los elementos $B^{i(\mu)}_{j(\nu)} = \langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\nu)}\rangle$ serán nulos para $i \neq j$, pero no podemos decir nada *a priori* para el caso $\mu \neq \upsilon$ y $i = j$. En general, al ordenar la base:

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, \cdots |\psi_{1(k_1)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, \cdots, |\psi_{2(k_2)}\rangle, \cdots, |\psi_{3(1)}\rangle, \cdots |\psi_{n-k_n(1)}\rangle ,$$

para el caso que consideraremos será:

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, |\psi_{1(3)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, |\psi_{3(1)}\rangle, |\psi_{4(1)}\rangle, |\psi_{4(2)}\rangle, |\psi_{5(1)}\rangle .$$

La representación matricial de $\mathbb{B}$ en esa base, $\langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\nu)}\rangle$, tendrá la forma de una matriz diagonal a

Borrador Preliminar

bloques:

$$\begin{pmatrix} B^{1\ (1)}_{1\ (1)} & B^{1\ (1)}_{1\ (2)} & B^{1\ (1)}_{1\ (3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^{1\ (2)}_{1\ (1)} & B^{1\ (2)}_{1\ (2)} & B^{1\ (2)}_{1\ (3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B^{1\ (3)}_{1\ (1)} & B^{1\ (3)}_{1\ (2)} & B^{1\ (3)}_{1\ (3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^{2\ (1)}_{2\ (1)} & B^{2\ (1)}_{2\ (2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^{2\ (2)}_{2\ (1)} & B^{2\ (2)}_{2\ (2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{3\ (1)}_{3\ (1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{4\ (1)}_{4\ (1)} & B^{4\ (1)}_{4\ (2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{4\ (2)}_{4\ (1)} & B^{4\ (2)}_{4\ (2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{5\ (1)}_{5\ (1)} \end{pmatrix}$$

Tal y como hemos mencionado los subespacios: $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, y $\boldsymbol{E}_4$ corresponden a los autovalores degenerados σ_1, σ_2, y σ_4 (de orden $3, 2$ y 2 respectivamente).

Una vez más surgen dos casos a analizar:

- Si σ_n es un autovalor no degenerado, entonces existe un único autovector asociado a este autovalor (la dimensión del autoespacio es $1 \to k_j = 1$, y no hace falta). Esto corresponde al ejemplo hipotético anterior para los autovalores simples σ_3, y σ_5.
- Si σ_n es un autovalor degenerado, entonces existe un conjunto de autovectores asociados a este autovalor σ_n (en este caso la dimensión del autoespacio es k_n). Como los $|\psi_{j(\mu)}\rangle$ son autovectores de $\mathbb{A}$ su representación matricial será diagonal a bloques. Ahora bien, como el autoespacio $\boldsymbol{S}_a$ es globalmente invariante bajo la acción de $\mathbb{B}$ y $B^{i\ (\mu)}_{j(\mu)} = \langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\mu)}\rangle$ es hermítico, por ser $\mathbb{B}$ hermítico, entonces $\mathbb{B}$ es diagonalizable dentro del bloque que la define. Es decir, se podrá conseguir una base $|\chi_{j(\mu)}\rangle$ tal que la representación matricial de $\mathbb{B}$ en esa base es diagonal
$$B^{i(\mu)}_j = \langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\mu)}\rangle \implies \langle\chi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\chi_{j(\mu)}\rangle = \tilde{B}^{i(\mu)}_{j(\mu)} = \beta_{j(\mu)}\delta^i_j\,,$$
que no es otra cosa que los vectores $|\chi_{j(\mu)}\rangle$ serán autovectores de $\mathbb{B}$
$$\mathbb{B}|\chi_{j(\mu)}\rangle = \beta_{j(\mu)}|\chi_{j(\mu)}\rangle\,. \blacktriangleleft$$

Es importante recalcar que los autovectores $|\psi_{j(\mu)}\rangle$ de $\mathbb{A}$ asociados con un autovalor degenerado NO son necesariamente autovectores de $\mathbb{B}$. Sólo que como $\mathbb{B}$ es hermítico puede ser diagonalizado dentro del autoespacio.

De ahora en adelante denotaremos los autovectores comunes a dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ con distintos autovalores como $|u_{i|j(\mu)}\rangle$ tal que
$$\mathbb{A}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \sigma_n|u_{n|m(\mu)}\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbb{B}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \beta_m|u_{n|m(\mu)}\rangle\,,$$
donde hemos dejado "espacio" para permitir la degeneración la cual será indicada por el índice μ.

La prueba del inverso del teorema anterior es bien simple.

Teorema 4.9

Si existe una base de autovectores $\{|u_{j(\mu)}\rangle\}$ comunes a $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, entonces $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$.

Demostración: Es claro que:
$$\mathbb{A}\mathbb{B}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \beta_m\mathbb{A}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \beta_m\sigma_n|u_{n|m(\mu)}\rangle\,,$$
$$\mathbb{B}\mathbb{A}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \sigma_n\mathbb{B}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \sigma_n\beta_m|u_{n|m(\mu)}\rangle\,,$$

Borrador Preliminar

restando miembro a miembro obtenemos de manera inmediata

$$(\mathbb{AB} - \mathbb{BA})\,|u_{n|m(\mu)}\rangle = [\mathbb{A},\mathbb{B}]\,|u_{n|m(\mu)}\rangle = (\beta_m\sigma_n - \sigma_n\beta_m)\,|u_{n|m(\mu)}\rangle = 0\,. \blacktriangleleft$$

Definición 4.4

Los operadores: $\{\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D}\cdots\}$ constituye un conjunto completo de observables que conmutan si:

1. Los operadores del conjunto conmutan entre ellos:

$$[\mathbb{A},\mathbb{B}] = [\mathbb{A},\mathbb{C}] = [\mathbb{A},\mathbb{D}] = [\mathbb{B},\mathbb{C}] = [\mathbb{B},\mathbb{D}] = [\mathbb{C},\mathbb{D}] = \cdots = 0$$

2. Al determinar el conjunto de autovalores para los operadores

$$\{\alpha_n,\beta_m,\gamma_k,\delta_l,\cdots\}$$

se especifica **de manera unívoca** un único autovector común a todos estos operadores

$$\{\alpha_n,\beta_m,\gamma_k,\delta_l,\cdots\} \;\Rightarrow\; |u_{n|m|k|l\cdots\,(\mu)}\rangle\,.$$

4.7.6 Ejemplos

1. Consideremos una vez más la transformación $\mathbb{D} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{AS}$, descrita en la ecuación (4.26), donde $\mathbb{D}$ es un operador diagonal cuya representación matricial será

$$\mathbb{D} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{AS} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \equiv \lambda_j\delta^i_j = \left(S^{-1}\right)^i_k A^k_m S^m_j\,,$$

con $A^k_m = \langle u^k|\mathbb{A}|u_m\rangle$. Tal y como hemos comentado en la sección 4.7, debe haber restricciones sobre el operador $\mathbb{A}$ para que sea diagonalizable. En particular, allí pudimos comprobar que si $\mathbb{A}$ era hermítico, su representación matricial en la base de autovectores era diagonal. Entonces para este caso supondremos que $\mathbb{A}$ es diagonalizable mediante la transformación (4.26). Claramente esto implica que

$$\mathbb{D} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{AS} \quad\Rightarrow \mathbb{SD} = \mathbb{AS} \quad\Longleftrightarrow\quad S^i_m\lambda_j\delta^m_j = A^i_m S^m_j \quad\Rightarrow A^i_m S^m_j = \lambda_j S^i_j,$$

y esta última ecuación sugiere una ecuación de autovalores fijando un valor particular para j. Esto es:

$$A^i_m S^m_1 = \lambda_1 S^i_1;\quad A^i_m S^m_2 = \lambda_2 S^i_2;\quad A^i_m S^m_3 = \lambda_3 S^i_3;\quad \cdots A^i_m S^m_j = \lambda_j S^i_j \cdots \quad A^i_m S^m_n = \lambda_n S^i_n.$$

Cada una de estas ecuaciones es una ecuación de autovalores para autovectores $S^i_1, S^i_2, S^i_3, \cdots S^i_n$. Vale decir la matriz de transformación S^m_j está construida por columnas de autovectores. Con lo cual al resolver la ecuación de autovalores para la matriz $\mathbb{A}$ es inmediato construir la matriz de transformación $\mathbb{S}$ a partir de los autovectores de $\mathbb{A}$.

2. Para ejemplificar numéricamente el ejemplo anterior, consideremos la siguiente matriz real y simétrica:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores y autovectores para $\mathbb{A}$ son respectivamente:

$$P(\lambda) = -(\lambda-4)(\lambda+2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 4\,,\; \lambda_2 = -2\,,\; \lambda_3 = -2\,,$$

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; |u_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El lector debe verificar que este conjunto de vectores son mutuamente ortogonales porque claramente la matriz es simétrica. Por lo tanto, la matriz $\mathbb{A}$ se puede diagonalizar a través de la transformación $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{AC}$,

Borrador Preliminar

donde $\mathbb{C}$ se construye con los autovectores normalizados de $\mathbb{A}$ como columnas.

$$\mathbb{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Entonces, a pesar que los autovalores de $\mathbb{A}$ son degenerados ($\lambda = 4, -2, -2$) sus tres autovectores son linealmente independientes, y se tiene que:

$$\mathbb{C}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

3. Dada la siguiente matriz:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} ,$$

Aquí también se cumple que $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, con lo cual se puede diagonalizar. Calculemos nuevamente una matriz $\mathbb{C}$ que permita diagonalizar a la matriz $\mathbb{A}$.

Primeramente procedemos a calcular los autovalores de $\mathbb{A}$.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda+6) = 0 .$$

- Para $\lambda = -6$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 14x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0 \\ 2x^1 + 11x^2 + 4x^3 = 0 \\ -2x^1 + 4x^2 + 11x^3 = 0 \end{cases}$$

  Un autovector puede ser:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{u}_1\rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

- Para el autovalor degenerado $\lambda = 3$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0 \\ 2x^1 - 7x^2 + 4x^3 = 0 \\ -2x^1 + 4x^2 - 7x^3 = 0 \end{cases}$$

  En este caso podemos tomar como autovectores:

$$|u_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{u}_2\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} , \; |u_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{u}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

El lector debe comprobar que en este caso los autovectores NO son mutuamente ortogonales. Construimos la matriz $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Borrador Preliminar

De manera que:

$$\mathbb{C}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{5}}{9} & \frac{\sqrt{5}}{9} & -\frac{\sqrt{5}}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{5\sqrt{2}}{9} & \frac{4\sqrt{2}}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. La siguiente matriz es un ejemplo de una matriz hermítica o autoadjunta:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1+2i & i \\ -1-2i & 2 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$$

Los autovalores de esta matriz son:

$$P(\lambda) = -(\lambda-4)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 4\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = 1+\sqrt{5}\,,\ \lambda_3 = 1-\sqrt{5}\,.$$

Los tres autovalores *reales* generan los siguientes autovectores:

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow |u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1+\sqrt{5} \Rightarrow |u_2\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{5}\,i \\ -\sqrt{5}-2-\left(1+\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 1-\sqrt{5} \Rightarrow |u_3\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{5}\,i \\ \sqrt{5}-2-\left(1-\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix}.$$

Estos vectores normalizados son:

$$|\hat{u}_1\rangle = \frac{|u_1\rangle}{\sqrt{\langle u_1|u_1\rangle}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix},\quad |\hat{u}_2\rangle = \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{\langle u_2|u_2\rangle}} = \frac{3}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{5}\,i \\ -\sqrt{5}-2-\left(1+\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix},$$

$$|\hat{u}_3\rangle = \frac{|u_3\rangle}{\sqrt{\langle u_3|u_3\rangle}} = \frac{3}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{5}\,i \\ \sqrt{5}-2-\left(1-\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que los autovectores son ortogonales:

$$\langle u_1|u_2\rangle = (u_1)^\dagger u_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{5}\,i \\ -\sqrt{5}-2-\left(1+\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle u_1|u_3\rangle = (u_1)^\dagger u_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{5}\,i \\ \sqrt{5}-2-\left(1-\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle u_2|u_3\rangle = (u_2)^\dagger u_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1+\sqrt{5}\,i & -\sqrt{5}-2+\left(1+\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{5}\,i \\ \sqrt{5}-2-\left(1-\sqrt{5}\right)i \end{pmatrix} = 0$$

La matriz $\mathbb{A}$ es entonces diagonalizable si construimos la siguiente matriz a partir de los autovectores

Borrador Preliminar

normalizados:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}} & \frac{9}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{3\left(1-\sqrt{5}\,i\right)}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}} & \frac{3\left(1+\sqrt{5}\,i\right)}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{2} & \frac{3\left(-\sqrt{5}-2-\left(1+\sqrt{5}\right)i\right)}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}} & \frac{3\left(\sqrt{5}-2-\left(1-\sqrt{5}\right)i\right)}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \end{pmatrix}.$$

Si elegimos la matriz diagonal a partir de los autovalores:

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

entonces resulta que es posible factorizar la matriz $\mathbb{A}$ de la siguiente forma (Para el lector se deja la comprobación)

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^{\dagger}.$$

5. Dada la matriz:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es unitaria, ya que: $\mathbb{A}^{\dagger} = \mathbb{A}^{-1}$.
Los autovalores se obtienen de la manera usual:

$$P(\lambda) = (\lambda - i)\left[2\,\lambda^2 - \sqrt{2}(1+i)\lambda + 2\,i\right] = 0\,,$$

es decir:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}(1+i) - 2\sqrt{-3i}}{4}\,,\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}(1+i) + 2\sqrt{-3i}}{4}\,,\ \lambda_3 = i\,.$$

Notemos que los valores propios están normalizados a la unidad:

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_1^* &= \left(\frac{\sqrt{2}(1+i) - 2\sqrt{-3i}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}(1-i) - 2\sqrt{3i}}{4}\right) = 1 \\ \lambda_2\lambda_2^* &= \left(\frac{\sqrt{2}(1+i) + 2\sqrt{-3i}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}(1-i) + 2\sqrt{3i}}{4}\right) = 1 \\ \lambda_3\lambda_3^* &= i(-i) = 1 \end{aligned}$$

Estos tres autovalores generan los siguientes autovectores:

$$|u_1\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i-\sqrt{-6i}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ |u_2\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i+\sqrt{-6i}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ |u_3\rangle_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Borrador Preliminar

Se puede demostrar que los autovectores son ortogonales:

$$\begin{aligned}
\langle u_1|u_2\rangle &= (u_1)^\dagger u_2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i-\sqrt{6i}-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i+\sqrt{-6i}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,, \\
\langle u_1|u_3\rangle &= (u_1)^\dagger u_3 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i-\sqrt{6i}-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,, \\
\langle u_2|u_3\rangle &= (u_2)^\dagger u_3 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i+\sqrt{6i}-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,.
\end{aligned}$$

Con los autovectores normalizados construimos la matriz $\mathbb{U}$, que también será unitaria, y la matriz diagonal $\mathbb{D}$ con los autovalores.

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 0 \\ -\frac{(1-i)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{(1-i)(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}(1+i)-2\sqrt{-3i}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}(1+i)+2\sqrt{-3i}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

6. Considere que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por una base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$. Definimos dos operadores $\mathbb{L}_z$ y $\mathbb{S}$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{L}_z|\xi_1\rangle = |\xi_1\rangle,\ \mathbb{L}_z|\xi_2\rangle = 0\,,\ \mathbb{L}_z|\xi_3\rangle = -|\xi_3\rangle,\ \mathbb{S}|\xi_1\rangle = |\xi_3\rangle,\ \mathbb{S}|\xi_2\rangle = |\xi_2\rangle,\ \mathbb{S}|\xi_3\rangle = |\xi_1\rangle.$$

En la base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$ las representaciones matriciales para $\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_z^2, \mathbb{S}$ y $\mathbb{S}^2$ serán las siguientes:

$$\langle \xi^i|\mathbb{L}_z|\xi_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \langle \xi^i|\mathbb{L}_z^2|\xi_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\langle \xi^i|\mathbb{S}|\xi_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \langle \xi^i|\mathbb{S}^2|\xi_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que estas matrices son reales y simétricas y, por lo tanto, son hermíticas y, al ser el espacio de dimensión finita, deben ser diagonalizables y sus autovectores formarán base para ese espacio. Por lo tanto, $\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_z^2, \mathbb{S}$ y $\mathbb{S}^2$ son observables. Ahora bien: ¿Cuál será la forma más general de una representación matricial de un operador que conmute con $\mathbb{L}_z$?

Notamos que los vectores de la base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$ son autovectores para $\mathbb{L}_z$ con autovalores $\{1, 0, -1\}$, con lo cual su representación matricial tiene que ser diagonal. Recuerde que si dos observables $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de $\mathbb{A}$ para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\langle \psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle = 0$, con lo cual:

$$[\mathbb{M}, \mathbb{L}_z] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \xi^i|\mathbb{M}|\xi_j\rangle = \begin{pmatrix} M_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^3 \end{pmatrix}.$$

Borrador Preliminar

Esto se desprende de manera directa de:

$$0 = \langle \xi^i | [\mathbb{M}, \mathbb{L}_z] | \xi_j \rangle = \langle \xi^i | \mathbb{M}\mathbb{L}_z - \mathbb{L}_z \mathbb{M} | \xi_j \rangle = (\lambda_j - \lambda_i) \langle \xi^i | \mathbb{M} | \xi_j \rangle \,, \quad \text{con} \quad (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \quad \text{para } i \neq j \,.$$

Si nos planteamos la misma pregunta para $\mathbb{L}_z^2$, vemos que sus autovalores son $\{1, 0\}$. Esto es:

$$\mathbb{L}_z^2 |\xi_1\rangle = |\xi_1\rangle; \quad \mathbb{L}_z^2 |\xi_2\rangle = 0; \quad \mathbb{L}_z^2 |\xi_3\rangle = |\xi_3\rangle \,,$$

con lo cual tendremos que la representación matricial de ese operador que conmute con $\mathbb{L}_z^2$, no será diagonal, es decir:

$$[\mathbb{N}, \mathbb{L}_z^2] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \xi^i | \mathbb{N} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} N_1^1 & 0 & N_3^1 \\ 0 & N_2^2 & 0 \\ N_1^3 & 0 & N_3^3 \end{pmatrix} \,,$$

ya que:

$$0 = \langle \xi^1 | [\mathbb{N}, \mathbb{L}_z^2] | \xi_3 \rangle \;\Rightarrow\; \langle \xi^1 | \mathbb{N} | \xi_3 \rangle = \langle \xi^1 | \mathbb{N} | \xi_3 \rangle \,,$$

y vale para cualquier elemento N_3^1 (y equivalentemente para N_1^3).

Finalmente, la representación matricial, más general, de un operador que conmute con $\mathbb{S}^2$ es:

$$[\mathbb{P}, \mathbb{S}^2] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \xi^i | \mathbb{P} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 & P_3^1 \\ P_1^2 & P_2^2 & P_3^2 \\ N_1^3 & P_2^3 & P_3^3 \end{pmatrix} .$$

Ahora intentaremos construir una base común de autovectores para $\mathbb{L}_z^2$ y $\mathbb{S}$. Para ello notamos que $|\xi_2\rangle$ es un autovector común a $\mathbb{L}_z^2$ y $\mathbb{S}$, por lo tanto, existirá un subespacio expandido por: $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle\}$. En ese subespacio las representaciones matriciales para $\mathbb{L}_z^2$ y $\mathbb{S}$, serán:

$$\langle \xi^i | \mathbb{L}_z^2 | \xi_j \rangle_{\mathcal{S}_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \langle \xi^i | \mathbb{S} | \xi_j \rangle_{\mathcal{S}_{13}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Acto seguido planteamos el problema de autovalores para $\mathbb{S}$, utilizando la base $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle\}$, esto es:

$$\mathbb{S}|q_j\rangle = \lambda_j |u_j\rangle \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\xi_1\rangle + |\xi_3\rangle \right) \\ \\ |q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\xi_1\rangle - |\xi_3\rangle \right) \end{cases}$$

con lo cual tendremos los resultados mostrados en la tabla 4.1. Es decir, hemos expresado los autovetores de $\mathbb{S}$, $|q_2\rangle$ y $|q_3\rangle$, como combinación lineal de la base $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle\}$.

Adicionalmente, si ordenamos la base de autovectores de $\mathbb{L}_z$, como $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle, |\xi_2\rangle\}$, tendremos entonces como representación matricial diagonal a bloques, correspondiente a un autovalor degenerado 1, a:

$$\langle \xi^i | \tilde{\mathbb{N}} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} N_1^1 & N_3^1 & 0 \\ N_1^3 & N_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & N_2^2 \end{pmatrix} .$$

Autovectores	Autovalor $\mathbb{L}_z^2$	Autovalor $\mathbb{S}$
$\lvert q_1\rangle = \lvert \xi_2\rangle$	0	1
$\lvert q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lvert \xi_1\rangle + \lvert \xi_3\rangle \right)$	1	1
$\lvert q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lvert \xi_1\rangle - \lvert \xi_3\rangle \right)$	1	-1

Figura 4.1: Dado que no hay líneas repetidas $\mathbb{L}_z^2$ y $\mathbb{S}$ forman un CCOC.

Es costumbre representar esta base común de autovectores de $\mathbb{L}_z^2$ y $\mathbb{S}$ haciendo referencia a los autovalores asociados a los operadores

$$|q_1\rangle \Leftrightarrow |0; 1\rangle \,, \quad |q_2\rangle \Leftrightarrow |1; 1\rangle \,, \quad |q_3\rangle \Leftrightarrow |1; -1\rangle \,.$$

7. Consideremos otro ejemplo proveniente de la Mecánica Clásica. Se trata de dos osciladores armónicos, de igual masa, acoplados con resortes con la misma constante elástica k. La ecuaciones de movimiento

Borrador Preliminar

para este sistema son:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 + kx_1 - k(x_2 - x_1) &= 0\,, \\
m\ddot{x}_2 + kx_2 + k(x_2 - x_1) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

Podremos expresar estas ecuaciones en forma de operadores:

$$
\mathbb{D}|x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} m\frac{d^2}{dt^2} + 2k & -k \\ -k & m\frac{d^2}{dt^2} + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = 0\,.
$$

Si pensamos esta ecuación como una ecuación de autovalores, el autovalor es claramente $\lambda = 0$, y como las masas y las constantes elásticas son iguales podemos intercambiar las partículas y la física (las ecuaciones de movimiento) no cambian. Esto se puede expresar matemáticamente como el operador permutación de las partículas:

$$
\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.
$$

Es inmediato comprobar que $[\mathbb{D}, \mathbb{P}] = 0$, con lo cual existirá una combinación lineal de autovectores de $\mathbb{D}$ (asociados con el autovalor $\lambda = 0$) los cuales también serán autovectores de $\mathbb{P}$. Para ello procedamos a calcular los autovalores y autovectores de $\mathbb{P}$:

$$
\mathbb{P}|x\rangle = \lambda|x\rangle \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda \pm 1 \;\Leftrightarrow\; |\hat{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\hat{e}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Fácilmente podemos expresar el vector posición como una combinación lineal de estos dos autovectores de $\mathbb{P}$, esto es:

$$
\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{cases}
$$

Es claro que

$$
|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},
$$

son autovectores de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{D}$.

8. Si definimos los autovectores comunes a $\mathbb{J}^2$ y $\mathbb{J}_z$ como $|j, m\rangle$ de la siguiente manera:

$$
\mathbb{J}^2|j,m\rangle = j\,(j+1)\,\hbar^2|j,m\rangle\,, \quad \mathbb{J}_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle\,, \quad \text{con: } \langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}\,,
$$

y adicionalmente tenemos que:

$$
\mathbb{J}_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j,m-1\rangle\,, \quad \mathbb{J}_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j,m+1\rangle.
$$

Si se supone (es fácil demostrarlo) que $-j \leq m \leq j$. Esto quiere decir que dado algún valor j, m varían entre $-j$ y j de uno en uno, esto es: $m = -j, -j+1, -j+2, \cdots, j-2, j-1, j$. Supongamos ahora que $j = \frac{1}{2}$.

Busquemos:

(a). La representación matricial para: $\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+, \mathbb{J}^2$, en la base de autovectores de $\mathbb{J}_z$ y $\mathbb{J}^2$.

Si $|j,m\rangle$ son autovectores de $\mathbb{J}^2$ y $\mathbb{J}_z$ su representación matricial será diagonal y como m varía entre $-j$ y j con incrementos de 1 tendremos que serán matrices 2×2. La base ortogonal de autovectores

Borrador Preliminar

será: $\left\{|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right\}$.

$$\begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}_z|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}_z|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}_z|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}_z|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}^2|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}^2|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}^2|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}^2|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La representación matricial para $\mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+$ obviamente no será diagonal:

$$\begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}_+|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}_+|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}_+|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}_+|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\mathbb{J}_-|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\mathbb{J}_-|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). Calculemos los autovalores y autovalores para: $\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+, \mathbb{J}^2$.
Otra vez, $\left\{|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\right\}$ son autovectores de $\mathbb{J}^2$ y $\mathbb{J}_z$. En el caso de $\mathbb{J}^2$ con un autovalor de $\frac{3}{4}\hbar^2$ para ambos autovectores y en el caso de $\mathbb{J}_z$ los autovalores serán $\pm\frac{\hbar}{2}$ respectivamente. Para $\mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+$ no tendrán autovalor distinto de cero en esta base.

Practicando con Maxima

Consideremos uno de los ejemplos anteriores donde:

```
(%i1) A:matrix([1,0,3], [0,-2,0], [3,0,1]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i2) eigenvectors(A);
```

(%o2) $[[[-2,4],[2,1]],[[[1,0,-1],[0,1,0]],[[1,0,1]]]]$

El resultado es una lista con los autovalores y su multiplicidad, y para cada autovalor los autovectores como sublistas. Es necesario manipular estas sublistas para obtener los autovectores. Entonces, es mejor escribir:

```
(%i3) [val,vec]:eigenvectors(A);
```

(%o3) $[[[-2,4],[2,1]],[[[1,0,-1],[0,1,0]],[[1,0,1]]]]$

Por lo tanto, una lista con los autovalores es la siguiente:

```
(%i4) autovalores:val[1];
```

(%o4) $[-2,4]$

Notemos el orden: los dos primeros vectores corresponden al autovalor -2 y el tercero al autovalor 4.
Los autovectores como listas son:

```
(%i5) L1:vec[1];L2:vec[2];
```

Borrador Preliminar

(%o5) $[[1,0,-1],[0,1,0]]$

(%o6) $[[1,0,1]]$

Pero resulta conveniente separar cada autovector.

(%i7) L1[1];L1[2];L2[1];

(%o7) $[1,0,-1]$

(%o8) $[0,1,0]$

(%o9) $[1,0,1]$

Vamos ahora a normalizar los autovectores:

(%i10) V1:L1[1]/sqrt(L1[1].L1[1]);V2:L1[2]/sqrt(L1[2].L1[2]);V3:L2[1]/sqrt(L2[1].L2[1]);

(%o10) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

(%o11) $[0,1,0]$

(%o12) $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Hacemos una lista con los vectores normalizados:

(%i13) Lvec:[V1,V2,V3];

(%o13) $\left[\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right],[0,1,0],\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]$

Y construimos la matriz $\mathbb{C}$:

(%i14) C:transpose(apply('matrix,Lvec));

(%o14) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Para finalmente comprobar:

(%i15) transpose(C).A.C;

(%o15) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Consideremos ahora otro de los ejemplos, donde teníamos la siguiente matriz:

(%i16) A:matrix([1,-1+2* %i, %i],[-1-2* %i,2,-1],[- %i,-1,3]);

(%o16) $\begin{pmatrix} 1 & 2\,i-1 & i \\ -2\,i-1 & 2 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Es fácil ver que se trata de una matriz hermítica

(%i17) transpose(conjugate(A))=A;

Borrador Preliminar

(%o17) $\begin{pmatrix} 1 & 2\,i-1 & i \\ -2\,i-1 & 2 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\,i-1 & i \\ -2\,i-1 & 2 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos los autovalores y autovectores:

(%i18) [val,vec]:eigenvectors(A)$

Al primer elemento de la lista, le asignaremos la variable `autovalores`, como se muestra a continuación:

(%i19) autovalores:val[1];

(%o19) $\left[1-\sqrt{5}, \sqrt{5}+1, 4\right]$

Ahora procedemos a aislar los diferentes autovectores, es importante tener en mente el orden para utilizar las etiquetas apropiadas.

(%i20) L1:vec[1]$ L1[1]; L2:vec[2]$ L2[1]; L3:vec[3]$ L3[1];

(%o21) $\left[1, \frac{\sqrt{5}\,i+1}{3}, \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\,i+\sqrt{5}-2}{3}\right]$

(%o23) $\left[1, -\frac{\sqrt{5}\,i-1}{3}, -\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\,i+\sqrt{5}+2}{3}\right]$

(%o25) $[1, -i-1, 1]$

Los autovectores normalizados son:

(%i26) u1:L1[1]/sqrt(L1[1].L1[1]),ratsimp;

(%o26) $\left[\frac{3}{\sqrt{-\left(4\,\sqrt{5}-14\right)\,i-2\,\sqrt{5}+8}}, \frac{\sqrt{5}\,i+1}{\sqrt{-\left(4\,\sqrt{5}-14\right)\,i-2\,\sqrt{5}+8}}, \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\,i+\sqrt{5}-2}{\sqrt{-\left(4\,\sqrt{5}-14\right)\,i-2\,\sqrt{5}+8}}\right]$

(%i27) u2:L2[1]/sqrt(L2[1].L2[1]),ratsimp;

(%o27) $\left[\frac{3}{\sqrt{\left(4\,\sqrt{5}+14\right)\,i+2\,\sqrt{5}+8}}, -\frac{\sqrt{5}\,i-1}{\sqrt{\left(4\,\sqrt{5}+14\right)\,i+2\,\sqrt{5}+8}}, -\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\,i+\sqrt{5}+2}{\sqrt{\left(4\,\sqrt{5}+14\right)\,i+2\,\sqrt{5}+8}}\right]$

(%i28) u3:L3[1]/sqrt(L3[1].L3[1]),ratsimp;

(%o28) $\left[\frac{1}{\sqrt{2\,i+2}}, \frac{i+1}{\sqrt{2\,i+2}}, \frac{1}{\sqrt{2\,i+2}}\right]$

Estos vectores serán ortogonales, como podemos ver:

(%i29) conjugate(u1).u2,ratsimp;conjugate(u1).u3,ratsimp;conjugate(u3).u2,ratsimp;

(%o29) 0

(%o30 0

(%o31) 0

Para construir la matriz C preparamos primero el siguiente arreglo:

(%i32) Lvec:[u1,u2,u3]$

Con cada autovector como columna construimos la matriz C:

(%i33) C:transpose(apply('matrix,Lvec));

Borrador Preliminar

(%o33) $$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{-\left(4\sqrt{5}-14\right)i-2\sqrt{5}+8}} & \frac{3}{\sqrt{\left(4\sqrt{5}+14\right)i+2\sqrt{5}+8}} & \frac{1}{\sqrt{2i+2}} \\ \frac{\sqrt{5}i+1}{\sqrt{-\left(4\sqrt{5}-14\right)i-2\sqrt{5}+8}} & -\frac{\sqrt{5}i-1}{\sqrt{\left(4\sqrt{5}+14\right)i+2\sqrt{5}+8}} & -\frac{i+1}{\sqrt{2i+2}} \\ \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)i+\sqrt{5}-2}{\sqrt{-\left(4\sqrt{5}-14\right)i-2\sqrt{5}+8}} & -\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)i+\sqrt{5}+2}{\sqrt{\left(4\sqrt{5}+14\right)i+2\sqrt{5}+8}} & \frac{1}{\sqrt{2i+2}} \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz C se obtiene como ya sabemos:

(%i34) Cinv:invert(C),ratsimp$

Aquí aplicamos una rutina de simplificación a cada uno de los elementos de la matriz. Esto lo hicimos con el comando `ratsimp`.

Para finalmente poder calcular $C^{-1}AC$ y obtener:

(%i35) Cinv.A.C,ratsimp;

(%o35) $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.7.7 Ejercicios

1. Encuentre los autovalores y autovectores de las matrices:

   (a).
$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} \Leftrightarrow B^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

   (b).
$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A^i_j = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} \Leftrightarrow B^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 5 & -3 \\ -2i & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

   (c).
$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} \Leftrightarrow B^i_j = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Entonces

   (a). En cada caso, encuentre los autovalores y autovectores

   (b). Encuentre también, para cada caso, las matrices de transformación que las lleven a su representación diagonal, cada una de

   (c). Para la primera pareja de operadores lineales, muestre si es posible, encontrar una base de autovectores comunes que los diagonalice.

Borrador Preliminar

2. Demuestre que la matriz
$$\mathbb{C} \Rightarrow C^i_j = \begin{pmatrix} x & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$
es igual a $\mathbb{C} = x\boldsymbol{\sigma}_1 + y\boldsymbol{\sigma}_2 + z\boldsymbol{\sigma}_3$. Donde las matrices $\boldsymbol{\sigma}_i$ son la matrices de Pauli. Encuentre los autovalores y autovectores de esta matriz.
3. Considere dos operadores genéricos que conmutan: $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ tal que $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0$, definidos $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ cuya representaciones matriciales en la base canónica $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ son
$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A^i_j = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} \Leftrightarrow B^i_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -i\sqrt{2} & i \\ i\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ -i & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix},$$
y determine si es posible encontrar una base común de autovectores.
Para ello, repase la sección 4.7.5 e inspírese en el ejercicio de la página 319 y siga los siguientes pasos
   (a). Resuelva el problema de autovalores $\mathbb{A}|\mathrm{u}_i\rangle = \lambda_i|\mathrm{u}_i\rangle$
   (b). Si alguno de los autovalores λ_i es degenerado utilice el hecho que existe un segundo operador $\mathbb{B}$ que conmuta con $\mathbb{A}$ y encuentre la representación matricial, diagonal a bloques, del operador $\mathbb{B}$ en la base de autovectores $\{|u_i\rangle\}$.
   (c). Resuelva el problema de autovalores para el autoespacio degenerado. Esto es diagonalice el bloque 2×2, para encontrar una base común de autovectores que diagonalice a ambos, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.
   (d). Identifique la base de los tres autovectores comunes y las tres parejas de autovalores de $\mathbb{A} \leftrightarrow \lambda_i$ y $\mathbb{B} \leftrightarrow \mu_i$ que etiquetan cada uno de esos autoestados.
4. Las transformaciones de Lorentz se pueden escribir de manera matricial como
$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
con $\gamma = (\sqrt{1-v^2/c^2})^{-1}$. ¿será ortogonal? ¿será unitaria? Encuentre sus autovalores y autovectores.
5. Dado un observable $\mathbb{A}$ y un vector de estado $|\psi\rangle$ general, definiremos el valor esperado de $\mathbb{A}$ a la cantidad $\langle\mathbb{A}\rangle = \langle\psi|\mathbb{A}|\psi\rangle$, y la relación de dispersión de $\mathbb{A}$ como:
$$\langle(\Delta\mathbb{A})^2\rangle = \langle(\mathbb{A} - \langle\mathbb{A}\rangle\mathbb{I})^2\rangle = \langle\mathbb{A}^2\rangle - \langle\mathbb{A}\rangle^2 \equiv \langle\psi|\mathbb{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\mathbb{A}|\psi\rangle^2\,,$$
donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad. Nótese que el valor esperado es un número que representa la dispersión de un observable y tiene la misma estructura e interpretación de la varianza en estadística.
   (a). Muestre que la dispersión siempre es positiva, i.e $\langle(\Delta\mathbb{A})^2\rangle \geqslant 0$. Para ello:
      I. Inicie mostrando que para cualquier operador hermítico $\mathbb{C}$ se cumple $\langle\mathbb{C}^2\rangle \geqslant 0$.
      II. Termine mostrando que $\mathbb{A} - \langle\mathbb{A}\rangle\mathbb{I}$ es un operador hermítico.
   (b). Muestre que la dispersión se anula para el caso en que $|\psi\rangle$ es autovector de $\mathbb{A}$ con autovalor $\langle\mathbb{A}\rangle$.
   (c). Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz muestre que las relaciones de dispersión entre dos observables $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ siempre cumplen con:
$$\langle(\Delta\mathbb{A})^2\rangle\langle(\Delta\mathbb{B})^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}|\langle[\mathbb{A},\mathbb{B}]\rangle|^2 \quad \text{con} \quad [\mathbb{A},\mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}\,.$$
   Esta es la forma general de la relación de incertidumbre.[15]

[15]Para detalles de las implicaciones de este problema se puede consultar Dumitru, S. "On the uncertainty relations and quantum measurements: conventionalities, short comings, reconsideration. arXiv preprint quant-ph/0504058 (2005). Y también Dumitru, S. "A

Borrador Preliminar

(d). En Mecánica Cuántica se define el operador de spin como $\mathbb{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, donde las σ_i son las matrices de Pauli y los valores de $i = 1, 2, 3$ representan las direcciones x, y, z, respectivamente.

I. Encuentre la expresión para el conmutador: $[\mathbb{S}_i, \mathbb{S}_j]$, con $i, j = 1, 2, 3$.

II. Considere un vector de estado general $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, donde a y b son números complejos que cumplen con: $a^2 + b^2 = 1$ y $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ la base de autovectores de $\mathbb{S}_z$. Muestre que:

$$\langle(\Delta\mathbb{S}_z)^2\rangle\langle(\Delta\mathbb{S}_x)^2\rangle \geqslant \hbar^4[\mathrm{Im}(ab^*)]^2\,,$$

con $\mathrm{Im}(\circ)$ la parte imaginaria del argumento.

6. Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2q & 2^2 & q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 4(2^2) & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4(N-3)^2 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 4(N-2)^2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 4(N-1)^2 \end{pmatrix}$$

Encuentre los autovalores y autovectores cuando $q = 1$ y $N = 10$.

Borrador Preliminar

possible general approach regarding the conformability of angular observables with mathematical rules of Quantum Mechanics. arXiv preprint quant-ph/0602147 (2006).

Bibliografía

[1] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[2] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analisys** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[4] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J:*)

[5] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*

[6] Hauser, W (1971) **Introduction to Principles of Electromagnetism** (*Addison-Wesley Pub Co Reading*)

[7] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press*)

[8] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)

[9] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)

[10] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaums Outline Series, McGraw Hill New York*)

Borrador Preliminar

Capítulo 5

Coordenadas curvilíneas, campos y operadores diferenciales

La ruta de este capítulo

Comenzaremos este capítulo señalando el hecho de que al derivar cantidades vectoriales, por ejemplo con respecto al tiempo, es necesario considerar que esta dependencia temporal puede estar indicada no solamente en las componentes del vector sino en los vectores base en el cual se representa. Extenderemos esta idea para estudiar la representación de curvas expresadas de manera paramétrica. En la sección 5.1 introduciremos las coordenadas curvilíneas generalizadas, resaltando la utilidad que particularmente tienen las coordenadas curvilíneas ortogonales. En la sección 5.1.6 construiremos las expresiones de vectores y tensores a partir de sus leyes de transformación para luego introducir los conceptos de campos tensoriales, sección 5.1.7, y los diferentes operadores vectoriales en coordenadas generalizadas, sección 5.2. En las secciones 5.3 - 5.4 desarrollaremos un estudio sobre la integración de campos vectoriales y los principales teoremas integrales que permiten relacionar las variaciones de un campo vectorial con las fuentes que lo producen.

5.1 Coordenadas curvilíneas generalizadas y campos tensoriales

Tal y como discutimos en la sección 3.2.8, siempre es posible definir un sistema de coordenadas generalizadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ tales que

$$q^{i'} = q^{i'}(q^j) \quad \Leftrightarrow \quad q^i = q^i(q^{j'}), \quad \text{con} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Donde, no hemos hecho otra cosa que re-escribir la ecuación (3.12), para el caso tridimensional y con una notación más cercana al análisis vectorial que nos compete en este capítulo.

Entonces, nuestro vector posición en la base canónica o, equivalentemente en coordenadas cartesianas[1], se puede escribir como

$$|r\rangle \equiv \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3) = x(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_z\rangle \tag{5.1}$$

y el vector desplazamiento diferencial, no es otra cosa que el diferencial total del vector $\mathbf{r}$, vale decir:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \equiv |\mathrm{d}r\rangle = \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1 + \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^2}\mathrm{d}q^2 + \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^3}\mathrm{d}q^3\,. \tag{5.2}$$

[1]Nótese que estamos representando la base cartesiana como $|\mathrm{e}_x\rangle = \hat{\mathbf{i}}$, $|\mathrm{e}_y\rangle = \hat{\mathbf{j}}$ y $|\mathrm{e}_z\rangle = \hat{\mathbf{k}}$.

Borrador Preliminar

Por consiguiente, podemos construir la métrica, los factores de escala y la base asociada con estas coordenadas a partir de las ecuaciones (3.10) y (3.11), como

$$\mathrm{d}s^2 \equiv \langle \mathrm{d}r \,|\mathrm{d}r\rangle = \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^j}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q^j = g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j\,, \tag{5.3}$$

donde:

$$g_{ij} = \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^j}\,,\ h_j = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^j}\right\|\,,\ |\mathrm{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\|}\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^j}\ \text{ y }\ \langle \mathrm{e}^j| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_j}\right\|}\frac{\partial\,\langle r|}{\partial q_j}\,,$$

con: $i, j = 1, 2, 3$..

Es importante hacer notar el papel fundamental que juega expresar el vector posición en coordenadas cartesianas (ecuación (5.1)), para luego generar el vector desplazamiento diferencial (5.2) en función de las coordenadas generalizadas y, finalmente, determinar los factores de escala, la métrica y los vectores base asociados al nuevo sistema de coordenadas (ecuaciones (5.3)).

Más adelante, en la sección 5.1.5, mostraremos un método para construir sistemas de coordenadas sin necesidad de la intermediación de las coordenadas cartesianas. Construiremos los sistemas de coordenadas adaptados a las curvas parametrizadas con alguna cantidad.

Hay que señalar que, tal y como lo hicimos en la ecuación (3.10), aquí hemos denotado la base generalizada para vectores como $\left\{\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\}$, mientras $\left\{\frac{\partial\langle r|}{\partial q_i}\right\}$ será la base para los covectores o 1-formas asociados a los vectores antes mencionados. Al final, en la sección 5.1.6 analizaremos con detalle las 1-formas y los tensores en coordenadas curvilíneas.

Para fijar ideas y porque lo utilizaremos en los casos particulares de las próximas secciones, escribiremos explícitamente, tal y como lo discutimos en las sección 3.2.7: los vectores base, los factores de escala y la métrica de un sistema generalizado de coordenadas ortogonales de la siguiente forma:

- la tríada de vectores base $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ ortonormales:

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\right\|}\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^1}\,;\quad |\mathrm{e}_2\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\right\|}\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^2}\,;\quad \text{y}\quad |\mathrm{e}_3\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\right\|}\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^3};$$

  que corresponden a los vectores tangentes a las curvas que definen al radio vector $|r\rangle$, como veremos con detalles en la sección 5.1.5.
- la tríada de 1-formas base $\{\langle \mathrm{e}^j|\}$ ortonormales:

$$\langle \mathrm{e}^1| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_1}\right\|}\frac{\partial\,\langle r|}{\partial q_1}\,;\quad \langle \mathrm{e}^2| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_2}\right\|}\frac{\partial\,\langle r|}{\partial q_2}\,;\quad \text{y}\quad \langle \mathrm{e}^3| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_3}\right\|}\frac{\partial\,\langle r|}{\partial q_3};$$

- los factores de escala:

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^1}\right\|;\quad h_2 = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^2}\right\|;\quad \text{y}\quad h_3 = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial q^3}\right\|\,;$$

- el elemento de línea (3.11) en términos de las coordenadas generalizadas como

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^j = \left(h_1\,\mathrm{d}q^1\right)^2 + \left(h_2\,\mathrm{d}q^2\right)^2 + \left(h_3\,\mathrm{d}q^3\right)^2\,;$$

  donde, como en 3.8, hemos identificado los factores de escala con las componentes del tensor métrico como: $h_1 = \sqrt{g_{11}}\,,\ h_2 = \sqrt{g_{22}}$ y $h_3 = \sqrt{g_{33}}\,.$

En la figura 5.1 hemos representado algunos de los sistemas coordenados y su relación con las expresiones que generan las transformaciones de coordenadas, que discutimos con detalle en la sección 3.2.8, y en las secciones que siguen haremos explícitos algunos casos particulares.

Borrador Preliminar

Figura 5.1: Algunas coordenadas curvilíneas en 2D. Podemos apreciar algunos ejemplos de sistemas de coordenadas: en el cuadrante I coordenadas polares: $x = \rho\cos(\varphi)$; $y = \rho\ \mathrm{sen}(\varphi)$. En el cuadrante II coordenadas elípticas: $x = a\cosh(u)\cos(v)$; $y = a\mathrm{senh}(u)\mathrm{sen}(v)$. En III coordenadas parabólicas: $x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)$; $y = uv$ y en el cuadrante IV coordenadas bipolares: $x^2 + [y - a\cot(u)]^2 = a^2\csc^2(u)$; $\left[x - a\frac{\mathrm{senh}(v)}{\cosh(v)}\right]^2 + y^2 = \frac{a^2}{\mathrm{senh}^2(v)}$.

5.1.1 Coordenadas cartesianas

El primer caso particular lo constituyen las coordenadas cartesianas, $(q^1, q^2, q^3) \Longleftrightarrow (x, y, z)$, y el vector posición lo construimos a partir de la ecuación (5.1) como:

$$|r\rangle = x\,|\mathrm{e}_x\rangle + y\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,|\mathrm{e}_z\rangle \Longleftrightarrow \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,,$$

mientras que el vector desplazamiento diferencial también será inmediato a partir de (5.2)

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \Rightarrow |\mathrm{d}r\rangle = \left(\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial z}\right)\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{d}y\,|\mathrm{e}_y\rangle + \mathrm{d}z\,|\mathrm{e}_z\rangle\ ,$$

y, consecuentemente, los factores de escala quedan definidos como

$$h_1 = h_x = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial x}\right\| = 1\,,\quad h_2 = h_y = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial y}\right\| = 1\,,\quad h_3 = h_z = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial z}\right\| = 1\,,$$

mientras que la tríada ortonormal es

$$|\mathrm{e}_x\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial x}\right\|}\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial x}\,,\quad |\mathrm{e}_y\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial y}\right\|}\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial y}\,,\quad |\mathrm{e}_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|}\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial z}\,.$$

Finalmente, el elemento de línea viene definido a partir de (5.3) como

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1\,\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(h_2\,\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(h_3\,\mathrm{d}x^3\right)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\,,$$

y el tensor métrico será $g_{11} = g_{xx} = 1$; $g_{22} = g_{yy} = 1$; y $g_{22} = g_{zz} = 1$.

Borrador Preliminar

5.1.2 Coordenadas cilíndricas

El segundo caso en complejidad son las coordenadas cilíndricas, $(q^1, q^2, q^3) \Longleftrightarrow (\rho, \varphi, z)$. Sus vectores base y su métrica se construyen a partir de las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) expresándolas como función de las nuevas coordenadas. Esto es

$$|r\rangle = x(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,|\mathrm{e}_z\rangle \Longleftrightarrow \mathbf{r} = x(\rho,\varphi)\hat{\mathbf{i}} + y(\rho,\varphi)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,,$$

con: $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$.

Las componentes de x, y, z del vector posición expresada en las nuevas coordenadas pueden ser identificadas a partir de las leyes de transformación respecto a las coordenadas cartesianas:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos(\varphi) \\[2ex] y = y(\rho,\varphi) = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi) \\[2ex] z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \cos(\varphi)\mathrm{d}\rho - \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\[2ex] \mathrm{d}y = \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\rho + \rho\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\[2ex] \mathrm{d}z = \mathrm{d}z\,. \end{array}$$

Por lo que el vector posición en estas coordenadas es: $|r\rangle = \rho\cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,|\mathrm{e}_z\rangle$, donde es fácil identificar:

$$\begin{array}{rclll} \dfrac{\partial}{\partial\rho}x\,(\rho,\varphi) & = & \cos(\varphi)\,, & \dfrac{\partial}{\partial\rho}y\,(\rho,\varphi) = \mathrm{sen}(\varphi)\,, & \dfrac{\partial}{\partial\rho}z = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\varphi}x\,(\rho,\varphi) & = & -\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\,, & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}y\,(\rho,\varphi) = \rho\cos(\varphi)\,, & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}z = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}x(\rho,\varphi) & = & 0\,, & \dfrac{\partial}{\partial z}y(\rho,\varphi) = 0\,, & \dfrac{\partial}{\partial z}z = 1\,, \end{array}$$

y de allí calcular los respectivos factores de escala:

$$\begin{aligned} h_\rho &= \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial\rho}\right\| = \left\|\frac{\partial\left[x\,(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,|\mathrm{e}_z\rangle\right]}{\partial\rho}\right\| = \left\|\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\,|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\,|\mathrm{e}_y\rangle\right\| \\ &= \|\cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle\| = 1\,. \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$h_\varphi = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial\varphi}\right\| = \rho\,; \quad h_z = \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial z}\right\| = 1\,.$$

Mientras que los vectores unitarios serán

$$|\mathrm{e}_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} = \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\,|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\,|\mathrm{e}_y\rangle = \cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle\ ,$$

$$|\mathrm{e}_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\,|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}\,|\mathrm{e}_y\rangle\right) = -\mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle\ ,$$

$$|\mathrm{e}_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}\,|\mathrm{e}_z\rangle = |\mathrm{e}_z\rangle\ .$$

Claramente, el sistema de coordenadas, para el caso 2D ($z = 0$) se reduce al sistema de coordenadas polares que ilustramos en el cuadrante I de la figura 5.1.

El caso 3D lo ilustramos en la figura 5.2, izquierda y puede apreciarse que el vector unitario $|\mathrm{e}_\rho\rangle$ es un vector normal a las superficies cilíndricas y apunta en la dirección donde crece el radio ρ. El vector unitario $|\mathrm{e}_\varphi\rangle$ es tangente a las superficies cilíndricas, perpendicular a los planos $\varphi =$ constante y apunta en la dirección donde aumenta el ángulo azimutal φ. El vector $|\mathrm{e}_z\rangle$ es el mismo vector cartesiano $\hat{\mathbf{k}}$.

Borrador Preliminar

Figura 5.2: Coordenadas cilíndricas y esféricas. Para el caso de las coordenadas cilíndricas (figura izquierda), el vector unitario $|\mathrm{e}_\rho\rangle$ es un vector normal a las superficies cilíndricas y apunta en la dirección donde crece el radio ρ. El vector unitario $|\mathrm{e}_\varphi\rangle$ es tangente a las superficies cilíndricas, perpendicular a los planos $\varphi =$ constante y apunta en la dirección donde aumenta el ángulo azimutal φ. El vector $|\mathrm{e}_z\rangle$ es el mismo vector cartesiano $\hat{\mathbf{k}}$.

La expresión para el vector desplazamiento infinitesimal será

$$\mathrm{d}\,|r\rangle = \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\rho\,|\mathrm{e}_\rho\rangle + \rho\mathrm{d}\varphi\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle + \mathrm{d}z\,|\mathrm{e}_z\rangle\ .$$

Notemos que en este caso, y a diferencia de las coordenadas cartesianas, si φ varía en una cantidad $\mathrm{d}\varphi$, con ρ y z constantes, entonces el desplazamiento no será $\mathrm{d}\varphi$ sino $\rho\mathrm{d}\varphi$.

El elemento de línea viene definido como

$$\mathrm{d}s^2 = \left(h_1\mathrm{d}q^1\right)^2 + \left(h_2\mathrm{d}q^2\right)^2 + \left(h_3\mathrm{d}q^3\right)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2\,,$$

y el tensor métrico:

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1\,.$$

5.1.3 Coordenadas esféricas

Para construir el sistema de coordenadas esféricas tenemos:

$$(q^1, q^2, q^3) \Longleftrightarrow (r, \theta, \varphi)\,,$$

$$|r\rangle = x(r,\theta,\varphi)\,|\mathrm{i}\rangle + y(r,\theta,\varphi)\,|\mathrm{j}\rangle + z(r,\theta,\varphi)\,|\mathrm{k}\rangle \Longleftrightarrow \mathbf{r} = x(r,\theta,\varphi)\hat{\mathbf{i}} + y(r,\theta,\varphi)\hat{\mathbf{j}} + z(r,\theta,\varphi)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Con: $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. A r se le denomina la coordenada radial, a θ la coordenada polar y a φ la coordenada azimutal.

Tendremos entonces:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \Rightarrow\ |\mathrm{d}r\rangle = \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\,.$$

Estas cantidades pueden ser identificadas de las leyes de transformación respecto a las coordenadas

Borrador Preliminar

cartesianas

$$\left.\begin{array}{l} x = x(r,\theta,\varphi) = r\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta) \\ \\ y = y(r,\theta,\varphi) = r\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta) \\ \\ z = z(r,\theta,\varphi) = r\cos(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}r - r\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\varphi + r\cos(\varphi)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\ \\ \mathrm{d}y = \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}r + r\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\varphi + r\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta \\ \\ \mathrm{d}z = \cos(\theta)\mathrm{d}r - r\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta \end{array}$$

El vector posición es de la forma

$$|r\rangle = r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + r\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle + r\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_z\rangle\ .$$

Derivando:

$$\begin{array}{rclll} \dfrac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial r} & = & \cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,, & \dfrac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial r} = \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,, & \dfrac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial r} = \cos(\theta) \\ \dfrac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} & = & r\cos(\varphi)\cos(\theta)\,, & \dfrac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} = r\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)\,, & \dfrac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \dfrac{\partial x(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} & = & -r\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,, & \dfrac{\partial y(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} = r\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,, & \dfrac{\partial z(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} = 0\,. \end{array} \tag{5.4}$$

Los factores de escala son los siguientes:

$$\begin{aligned} h_r &= \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial r}\right\| = \|\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_y\rangle + \cos(\theta)\,|\mathrm{e}_z\rangle\| \\ &= \sqrt{\cos^2(\varphi)\mathrm{sen}^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\varphi)\mathrm{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} h_\theta &= \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial \theta}\right\| = \|r\cos(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_x\rangle + r\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_y\rangle - r\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_z\rangle\| \\ &= \sqrt{(r\cos(\varphi)\cos(\theta))^2 + (r\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta))^2 + (r\mathrm{sen}(\theta))^2} = r\,, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} h_\varphi &= \left\|\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial \varphi}\right\| = \|-r\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_x\rangle + r\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_y\rangle\| \\ &= \sqrt{(r\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta))^2 + (r\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta))^2} = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Mientras que para los vectores unitarios tenemos

$$|\mathrm{e}_r\rangle = \tfrac{1}{h_r}\tfrac{\partial|r\rangle}{\partial r} = \cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_y\rangle + \cos(\theta)\,|\mathrm{e}_z\rangle\ ,$$

$$|\mathrm{e}_\theta\rangle = \tfrac{1}{h_\theta}\tfrac{\partial|r\rangle}{\partial \theta} = \cos(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_y\rangle - \mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_z\rangle\ ,$$

$$|\mathrm{e}_\varphi\rangle = \tfrac{1}{h_\varphi}\tfrac{\partial|r\rangle}{\partial \varphi} = -\mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle\ .$$

El desplazamiento infinitesimal en estas coordenadas es de la forma

$$\mathrm{d}\,|r\rangle = \left(\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial r}\right)\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\theta + \left(\frac{\partial\,|r\rangle}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}r\,|\mathrm{e}_r\rangle + r\mathrm{d}\theta\,|\mathrm{e}_\theta\rangle + r\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\varphi\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle\ .$$

Por lo tanto, para el elemento de línea tenemos

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1\,\mathrm{d}q^1\right)^2 + \left(h_2\,\mathrm{d}q^2\right)^2 + \left(h_3\,\mathrm{d}q^3\right)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2\,.$$

Y para el tensor métrico

$$g_{11} = g_{rr} = 1; \quad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2; \quad g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2\mathrm{sen}^2(\theta)\,.$$

Borrador Preliminar

5.1.4 Otros sistemas coordenados

Por completitud, enumeraremos algunos otros sistemas de coordenadas y dejaremos al lector la labor de calcular los vectores unitarios y la métrica del espacio expresada en esas coordenadas.

- **Coordenadas toroidales**

$$\left(q^1, q^2, q^3\right) \Longleftrightarrow (\sigma, \tau, \phi)$$

$$|r\rangle = x\,(\sigma,\tau,\phi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y\,(\sigma,\tau,\phi)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,(\sigma,\tau,\phi)\,|\mathrm{e}_z\rangle \Longleftrightarrow \mathbf{r} = x\,(\sigma,\tau,\phi)\,\hat{\mathbf{i}} + y\,(\sigma,\tau,\phi)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,(\sigma,\tau,\phi)\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Con $0 \leq \sigma < 2\pi$, $0 \leq \tau < \infty$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

La transformación de coordenadas está definida de la siguiente forma (con a constante)

$$x = a\,\frac{\operatorname{senh}(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}\cos(\phi)\,, \quad y = a\,\frac{\operatorname{senh}(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}\operatorname{sen}(\phi)\,, \quad z = a\,\frac{\operatorname{sen}(\sigma)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}\,,$$

Las superficies τ constante representan toros alrededor del eje z; las superficies σ constante son esferas con centro sobre el eje z y finalmente las superficies ϕ constante son planos que contiene al eje z.

La métrica en estas coordenadas es:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \left(h_1\,\mathrm{d}q^1\right)^2 + \left(h_2\,\mathrm{d}q^2\right)^2 + \left(h_3\,\mathrm{d}q^3\right)^2\,, \\ &= \left(\frac{a}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}\right)^2 \mathrm{d}\sigma^2 + \left(\frac{a}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}\right)^2 \mathrm{d}\tau^2 + \left(\frac{a\,\operatorname{senh}(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}\right)^2 \mathrm{d}\phi^2\,. \end{aligned}$$

- **Coordenadas elipsoidales** Dados tres números a, b y c, con $a > b > c > 0$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+\alpha} + \frac{y^2}{b^2+\alpha} + \frac{z^2}{c^2+\alpha} = 1\,,$$

representa las superficies cuádricas[2] homofocales (con el mismo foco u origen en $(x = 0, y = 0, z = 0)$). Dependiendo del valor del parámetro α, estas ecuaciones representarán superficies

Elipsoides	si	$\alpha > -c^2$
Hiperboloides de una hoja	si	$-c^2 > \alpha > -b^2$
Hiperboloides de dos hojas	si	$-b^2 > \alpha > -c^2$

Esto quiere decir que por cada punto (x, y, z) del espacio, pasan tres superficies cuádricas (dependiendo del valor de α). Conocidos a, b y c y el punto, $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$, los valores de α vienen dados por las raíces de la ecuación cúbica

$$\frac{x^2}{a^2+\alpha} + \frac{y^2}{b^2+\alpha} + \frac{z^2}{c^2+\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \alpha^3 + \Delta\,\alpha^2 + \Phi\,\alpha + \Omega = 0\,,$$

con

$$\begin{aligned} \Delta &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - b^2 - c^2\,, \\ \Phi &= \left(b^2+c^2\right)x_0^2 + \left(a^2+c^2\right)y_0^2 + \left(a^2+b^2\right)z_0^2 - a^2b^2 - \left(a^2+b^2\right)c^2\,, \\ \Omega &= x_0^2b^2c^2 + y_0^2a^2c^2 + z_0^2a^2b^2 - a^2b^2c^2\,. \end{aligned}$$

Las raíces de esta ecuación $(\alpha_1 = \lambda; \alpha_2 = \mu; \alpha_3 = \nu)$ definen las coordenadas elipsoidales del punto $(x, y, z) = (x\,(\lambda,\mu,\nu)\,, y\,(\lambda,\mu,\nu)\,, z\,(\lambda,\mu,\nu))$.

Tenemos entonces:

$$\left(q^1, q^2, q^3\right) \Longleftrightarrow (\lambda, \mu, \nu)\,,$$

$$|r\rangle = x\,(\lambda,\mu,\nu)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y\,(\lambda,\mu,\nu)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,(\lambda,\mu,\nu)\,|\mathrm{e}_z\rangle \Longleftrightarrow \mathbf{r} = x\,(\lambda,\mu,\nu)\,\hat{\mathbf{i}} + y\,(\lambda,\mu,\nu)\,\hat{\mathbf{j}} + z\,(\lambda,\mu,\nu)\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

[2]Nótese que la proyección de estas superficies en el plano xy representan curvas cónicas homofocales.

Borrador Preliminar

Y la ley de transformación:

$$x=\sqrt{\frac{[a^2+\lambda]\,[a^2+\mu]\,[a^2+\nu]}{[a^2-b^2]\,[a^2-c^2]}}\,,y=\sqrt{\frac{[b^2+\lambda]\,[b^2+\mu]\,[b^2+\nu]}{[b^2-a^2]\,[b^2-c^2]}}\,,z=\sqrt{\frac{[c^2+\lambda]\,[c^2+\mu]\,[c^2+\nu]}{[c^2-b^2]\,[c^2-a^2]}}\,,$$

por cual la métrica será

$$\mathrm{d}s^2=\frac{[\lambda-\mu]\,[\lambda-\nu]\,\mathrm{d}\lambda^2}{4\,[a^2+\lambda]\,[b^2+\lambda]\,[c^2+\lambda]}+\frac{[\mu-\lambda]\,[\mu-\nu]\,\mathrm{d}\mu^2}{4\,[a^2+\mu]\,[b^2+\mu]\,[c^2+\mu]}+\frac{[\nu-\mu]\,[\nu-\lambda]\,\mathrm{d}\nu^2}{4\,[a^2+\nu]\,[b^2+\nu]\,[c^2+\nu]}\,.$$

Ejemplo 5.1 **Velocidades y aceleraciones.** Para fijar conceptos repasaremos los cálculos de las expresiones de las velocidades y las aceleraciones, que expusimos en la sección 1.5.3, solo que ahora los desarrollaremos en coordenadas generalizadas. Para ello recordamos que los vectores velocidad y aceleración se representan como

$$|v\rangle=v^j\,|\mathrm{e}_j\rangle=\dot{x}^j\,|\mathrm{e}_j\rangle=v^{j'}\,|\mathrm{e}_{j'}\rangle=\dot{x}^{j'}\,|\mathrm{e}_{j'}\rangle\quad\text{y}\quad|a\rangle=a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle=\ddot{x}^j\,|\mathrm{e}_j\rangle=a^{j'}\,|\mathrm{e}_{j'}\rangle=\ddot{x}^{j'}\,|\mathrm{e}_{j'}\rangle\,,$$

respectivamente.

Para determinar estos vectores en cualquier sistema de coordenadas, es suficiente con encontrar las expresiones de sus componentes covariantes o contravariantes. Como sabemos, podremos encontrar una a partir de las otras con la ayuda de la métrica del sistema de coordenadas.

Entonces, el vector velocidad en la base cartesiana se puede expresar como

$$|v\rangle=v_x\,|\mathrm{e}_x\rangle+v_y\,|\mathrm{e}_y\rangle+v_z\,|\mathrm{e}_z\rangle=\dot{x}\,|\mathrm{e}_x\rangle+\dot{y}\,|\mathrm{e}_y\rangle+\dot{z}\,|\mathrm{e}_z\rangle=\dot{x}^j\,|\mathrm{e}_j\rangle\,,$$

con: $|\mathrm{e}_1\rangle=|\mathrm{e}_x\rangle\,,|\mathrm{e}_2\rangle=|\mathrm{e}_y\rangle$ y $|\mathrm{e}_3\rangle=|\mathrm{e}_z\rangle$.

Claramente las componentes contravariantes del vector velocidad en un sistema generalizado de coordenadas son $v^j=\dot{q}^j$.

Recordamos que para cualquier base generalizada de vectores o formas las componentes covariantes se expresan en término de la base cartesiana (de vectores o formas) como

$$|\mathrm{e}_{j'}\rangle=\frac{\partial x^i}{\partial q^{j'}}\,|\mathrm{e}_i\rangle\quad\text{y}\quad\left\langle\mathrm{e}^{i'}\right|=\frac{\partial q^{i'}}{\partial x^j}\,\langle\mathrm{e}^j|\,.$$

Entonces, las componentes covariantes del vector velocidad en una base generalizada serán

$$v_{j'}=\langle v\,|\mathrm{e}_{j'}\rangle=\left(\dot{x}_{m'}\left\langle\mathrm{e}^{m'}\right|\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial q^{j'}}\,|\mathrm{e}_i\rangle\right)=\dot{x}_{m'}\frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}}=\dot{x}_{m'}\frac{\frac{\partial x^{m'}}{\partial t}}{\frac{\partial q^{j'}}{\partial t}}=\dot{x}_{m'}\frac{\partial\dot{x}^{m'}}{\partial\dot{q}^{j'}}=\frac{\partial\left(\frac{v_{m'}v^{m'}}{2}\right)}{\partial\dot{q}^{j'}}\,.$$

Resulta fácil expresar las componentes covariantes una vez que conocemos el módulo del vector expresado en ese sistema de coordenadas, el cual siempre viene escrito a partir del diferencial

$$\mathrm{d}\,|r\rangle\;\Rightarrow\;\frac{\mathrm{d}\,|r\rangle}{\mathrm{d}t}\,.$$

Para encontrar la expresión para la aceleración se procede de manera análoga.

$$a_{j'}=\langle a\,|\mathrm{e}_{j'}\rangle=\left(\ddot{x}_{m'}\left\langle\mathrm{e}^{m'}\right|\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial q^{j'}}\,|\mathrm{e}_i\rangle\right)=\ddot{x}_{m'}\frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_{m'}\frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}}\right)-\dot{x}_{m'}\frac{\partial\dot{x}^{m'}}{\partial q^{j'}}\,,$$

y otra vez

$$\frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}}=\frac{\partial\dot{x}^{m'}}{\partial\dot{q}^{j'}}\;\Rightarrow\;a_{j'}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_{m'}\frac{\partial\dot{x}^{m'}}{\partial\dot{q}^{j'}}\right)-\dot{x}_{m'}\frac{\partial\dot{x}^{m'}}{\partial q^{j'}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}^{j'}}\left(\frac{\dot{x}_{m'}\dot{x}^{m'}}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q^{j'}}\left(\frac{\dot{x}_{m'}\dot{x}^{m'}}{2}\right)\,,$$

para finalmente

$$a_{j'}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}^{j'}}\left(\frac{v_{m'}v^{m'}}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q^{j'}}\left(\frac{v_{m'}v^{m'}}{2}\right)\,.$$

◁

Ejemplo 5.2 Calculemos las componentes cartesianas del vector que, en coordenadas cilíndricas, tiene las

Borrador Preliminar

siguiente componentes: $(1, \pi/3, 3)$.

Ese vector en coordenadas cilíndricas se puede escribir como: $\mathbf{V} = |\mathrm{e}_r\rangle + \frac{\pi}{3}|\mathrm{e}_\varphi\rangle + 3|\mathrm{e}_z\rangle$. En general, las componentes de los vectores transforman como

$$a^{i'} = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^{1'} = \dfrac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \\ \\ a^{2'} = \dfrac{\partial x^{2'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \\ \\ a^{3'} = \dfrac{\partial x^{3'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \end{array} \right\} \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} x^{1'} = x \\ \\ x^{2'} = y \\ \\ x^{3'} = z \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^1 = r \\ \\ x^2 = \varphi \\ \\ x^3 = z \end{array} \right\}$$

y la ley de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas es

$$x = x(r, \varphi) = r\cos(\varphi); \quad y = y(r, \varphi) = r\mathrm{sen}(\varphi) \quad \text{y} \quad z = z\,,$$

con lo cual es fácil identificar

$$\frac{\partial x(r,\varphi)}{\partial r} = \cos(\varphi) \qquad \frac{\partial x(r,\varphi)}{\partial \varphi} = -r\mathrm{sen}(\varphi) \qquad \frac{\partial x(r,\varphi)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y(r,\varphi)}{\partial r} = \mathrm{sen}(\varphi) \qquad \frac{\partial y(r,\varphi)}{\partial \varphi} = r\cos(\varphi) \qquad \frac{\partial y(r,\varphi)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Por lo tanto

$$a^{1'} = \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^k} a^k = \frac{\partial \tilde{x}^{1'}(x^m)}{\partial x^1} a^1 + \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^3} a^3$$

$$a^{1'} = \frac{\partial x(r,\varphi)}{\partial r}(1) + \frac{\partial x(r,\varphi)}{\partial \varphi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(\varphi) - r\mathrm{sen}(\varphi)\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - (1)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}}\,,$$

del mismo modo

$$a^{2'} = \frac{\partial y(r,\varphi)}{\partial r}(1) + \frac{\partial y(r,\varphi)}{\partial \varphi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{sen}(\varphi) + r\cos(\varphi)\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + (1)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{27}+\pi}{6}\,,$$

$$a^{3'} = 3\,.$$

Con lo cual

$$\mathbf{V} = |\mathrm{e}_r\rangle + \frac{\pi}{3}|\mathrm{e}_\varphi\rangle + 3|\mathrm{e}_z\rangle = \frac{\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}}\,|\mathrm{i}\rangle + \frac{\sqrt{27}+\pi}{6}\,|\mathrm{j}\rangle + 3\,|\mathrm{k}\rangle\,.$$

◁

Ejemplo 5.3 Dado el siguiente vector en coordenadas cilíndricas $\mathbf{a} = -2|\mathrm{e}_\rho\rangle + 5|\mathrm{e}_{\tilde{\varphi}}\rangle + 4|\mathrm{e}_z\rangle$. Vamos a ver como queda expresado en coordenadas esféricas.

La primera forma de hacerlo es transformando las componentes al conocer como transforman las coordenadas. Es decir conociendo $x^i = x^i\left(x^{m'}\right)$ y $x^{j'} = x^{j'}(x^m)$ expresar $a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k$. Dado que

$$\begin{aligned} x(\rho, \tilde{\varphi}) &= \rho\cos(\tilde{\varphi}) = x(r, \varphi, \theta) = r\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta) \\ y(\rho, \tilde{\varphi}) &= \rho\,\mathrm{sen}(\tilde{\varphi}) = y(r, \varphi, \theta) = r\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= z = r\cos(\theta)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\rho = r\mathrm{sen}(\theta)\,, \quad \tilde{\varphi} = \varphi\,, \quad z = r\cos(\theta) \;\Rightarrow\; r = \sqrt{\rho^2 + z^2}; \quad \theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right); \quad \varphi\tilde{\varphi}\,.$$

Borrador Preliminar

En forma matricial:

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\, a^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial \rho} & \frac{\partial \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial \rho} & \frac{\partial \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial \varphi} & \frac{\partial \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & \frac{-\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Resultando, que en esféricas

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{sen}(\theta) + 4\cos(\theta) \\ 5 \\ \frac{-2\cos(\theta)}{r} - \frac{4\ \mathrm{sen}(\theta)}{r} \end{pmatrix} = (-2\mathrm{sen}(\theta) + 4\cos(\theta))\,|\mathrm{e}_r\rangle + 5\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle - \left(\frac{2\cos(\theta)}{r} + \frac{4\mathrm{sen}(\theta)}{r}\right)|\mathrm{e}_\theta\rangle\ .$$

La otra forma es expresar la base ortonormal cilíndrica en términos de la base ortonormal esférica. Otra vez, utilizamos la base cartesiana como intermediaria. Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} |\mathrm{e}_\rho\rangle = \cos(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{j}\rangle\ , \\ |\mathrm{e}_{\tilde{\varphi}}\rangle = -\mathrm{sen}(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{i}\rangle + \cos(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{j}\rangle \\ |\mathrm{e}_z\rangle = |\mathrm{k}\rangle \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |\mathrm{i}\rangle = \cos(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{e}_\rho\rangle - \mathrm{sen}(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{e}_{\tilde{\varphi}}\rangle \\ |\mathrm{j}\rangle = \mathrm{sen}(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{e}_\rho\rangle + \cos(\tilde{\varphi})\,|\mathrm{e}_{\tilde{\varphi}}\rangle \\ |\mathrm{k}\rangle = |\mathrm{e}_z\rangle \end{array}\right.$$

Mientras que en esféricas, donde

$$\begin{aligned} |\mathrm{e}_r\rangle &= \cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{j}\rangle + \cos(\theta)\,|\mathrm{k}\rangle \\ |\mathrm{e}_\varphi\rangle &= -\mathrm{sen}(\varphi)\ |\mathrm{i}\rangle + \cos(\varphi)\,|\mathrm{j}\rangle \\ |\mathrm{e}_\theta\rangle &= \cos(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{j}\rangle - \mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{k}\rangle \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |\mathrm{i}\rangle &= \cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle + \cos(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle - \mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle \\ |\mathrm{j}\rangle &= \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle + \cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle \\ |\mathrm{k}\rangle &= \cos(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle - \mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} |\mathrm{e}_\rho\rangle &= \cos(\varphi)\,[\cos(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle + \cos(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle - \mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle] \\ &+ \mathrm{sen}(\varphi)\,[\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle + \cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle] \\ &= \mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle + \cos(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle \\ |\mathrm{e}_\varphi\rangle &= |\mathrm{e}_\varphi\rangle \\ |\mathrm{e}_z\rangle &= \cos(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle - \mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{a} = -2\,|\mathrm{e}_\rho\rangle + 5\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle + 4\,|\mathrm{e}_z\rangle = -2\,(\mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle + \cos(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle) + 5\,(|\mathrm{e}_\varphi\rangle) + 4\,(\cos(\theta)\,|\mathrm{e}_r\rangle - \mathrm{sen}(\theta)\,|\mathrm{e}_\theta\rangle)$$

Finalmente

$$\mathbf{a} = (-2\mathrm{sen}(\theta) + 4\cos(\theta))\,|\mathrm{e}_r\rangle + 5\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle - (2\cos(\theta) + 4\mathrm{sen}(\theta))\,|\mathrm{e}_\theta\rangle\ .$$

Borrador Preliminar

◁

Ejemplo 5.4 Dado el sistema de coordenadas parabólicas

$$x = \xi\eta\cos(\varphi); \qquad y = \xi\eta\mathrm{sen}(\varphi); \qquad z = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \xi^2\right)$$

Vamos a calcular el diferencial de volumen $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ en estas coordenadas

Hay varias maneras de resolver este problema. La más intuitiva es que, dado que las coordenadas parabólicas son un sistema de coordenadas ortogonales entonces multiplicar largo, por ancho, por alto con las longitudes de arco en cada una de las direcciones ortogonales. Esto es

$$\mathrm{d}s^2 = g_{nu}\mathrm{d}q^n\mathrm{d}q^u = g_{11}\left(\mathrm{d}q^1\right)^2 + g_{22}\left(\mathrm{d}q^2\right)^2 + g_{33}\left(\mathrm{d}q^3\right)^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}s^2_{\to 1} = g_{11}\left(\mathrm{d}q^1\right)^2 \\ \mathrm{d}s^2_{\to 2} = g_{22}\left(\mathrm{d}q^2\right)^2 \\ \mathrm{d}s^2_{\to 3} = g_{33}\left(\mathrm{d}q^3\right)^2 \end{cases}$$

por consiguiente

$$\mathrm{d}v = \left(\mathrm{d}s_{\to 1}\right)\left(\mathrm{d}s_{\to 2}\right)\left(\mathrm{d}s_{\to 3}\right) = \sqrt{g_{11}}\mathrm{d}q^1\sqrt{g_{22}}\mathrm{d}q^2\sqrt{g_{33}}\mathrm{d}q^3 = h_1h_2h_3\mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3$$

con

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}\right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^1}\right)^2}$$

$$h_2 = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^2}\right\| = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^2}\right)^2}$$

$$h_3 = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^3}\right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^3}\right)^2}$$

por lo cual, dado que $\mathbf{r} = x\left(\eta,\xi,\varphi\right)\hat{\mathbf{i}} + y\left(\eta,\xi,\varphi\right)\hat{\mathbf{j}} + z\left(\eta,\xi\right)\hat{\mathbf{k}}$, entonces

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}\right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\left(\eta\cos(\varphi)\right)^2 + \left(\eta\mathrm{sen}(\varphi)\right)^2 + \left(\xi\right)^2} = \sqrt{\left(\eta^2+\xi^2\right)}$$

$$h_2 = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^2}\right\| = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{\left(\xi\cos\varphi\right)^2 + \left(\xi\mathrm{sen}(\varphi)\right)^2 + \left(-\eta\right)^2} = \sqrt{\left(\eta^2+\xi^2\right)}$$

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}\right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\left(-\xi\eta\mathrm{sen}(\varphi)\right)^2 + \left(\xi\eta\cos(\varphi)\right)^2 + \left(0\right)^2} = \xi\eta$$

y finalmente

$$\mathrm{d}v = h_1h_2h_3\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi = \xi\eta\left(\eta^2+\xi^2\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi\,.$$

La otra forma de resolverlo, también intuitiva, es hacer el producto mixto de los tres vectores ortogonales base sin normalizar. Esto es

$$\mathrm{d}v = \left\|\left(\mathrm{d}q^1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}\right)\cdot\left(\mathrm{d}q^2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^2}\times\mathrm{d}q^3\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^3}\right)\right\| = \mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3\left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^2}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^3}\right)\right\|\,.$$

En general

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3\left[\det\begin{vmatrix} \frac{\partial x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^1} & \frac{\partial y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^1} & \frac{\partial z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^2} & \frac{\partial y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^2} & \frac{\partial z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^2} \\ \frac{\partial x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^3} & \frac{\partial y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^3} & \frac{\partial z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial q^3} \end{vmatrix}\right]$$

$$= \mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3\det\left|J\left(x\left(q^1,q^2,q^3\right),y\left(q^1,q^2,q^3\right),z\left(q^1,q^2,q^3\right)\right)\right|$$

Borrador Preliminar

donde $J\left(x\left(q^1,q^2,q^3\right),y\left(q^1,q^2,q^3\right),z\left(q^1,q^2,q^3\right)\right)$ es la matriz Jacobiana de la transformación.

Entonces

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi\left(\det\begin{vmatrix}\eta\cos(\varphi) & \eta\,\mathrm{sen}(\varphi) & \xi\\ \xi\cos(\varphi) & \xi\,\mathrm{sen}(\varphi) & -\eta\\ -\xi\eta\,\mathrm{sen}(\varphi) & \xi\eta\cos(\varphi) & 0\end{vmatrix}\right)=\xi\eta\left(\eta^2+\xi^2\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi$$

En general, el diferencial del volumen viene expresado como un producto mixto de la base ortonormal $\{|\mathrm{q}_1\rangle,|\mathrm{q}_2\rangle,|\mathrm{q}_3\rangle\}$

$$\mathrm{d}v=\left\|\left(\mathrm{d}q^1\,|\mathrm{q}_1\rangle\right)\cdot\left(\mathrm{d}q^2\,|\mathrm{q}_2\rangle\times\mathrm{d}q^3\,|\mathrm{q}_3\rangle\right)\right\|=\mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3\,\left\||\mathrm{q}_1\rangle\cdot\left(|\mathrm{q}_2\rangle\times|\mathrm{q}_3\rangle\right)\right\|$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}q_n\,\langle\mathrm{q}^n|\left(\epsilon^{123}\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\,|\mathrm{q}_1\rangle\right)=g_{nu}\mathrm{d}q^u g_{22}\mathrm{d}q^2 g_{33}\mathrm{d}q^3\underbrace{\langle\mathrm{q}^n\,|\mathrm{q}_1\rangle}_{\delta^n_1}=g_{11}\mathrm{d}q^1 g_{22}\mathrm{d}q^2 g_{33}\mathrm{d}q^3\,.$$

◁

5.1.5 Curvas y parámetros

Tal y como se expuso en la sección 1.5, los vectores podrán ser constantes o variables y, esa característica se verificará tanto en las componentes como en la base. En esta sección lo mostramos para el caso de los vectores 3D, pero el concepto es generalizable a cualquier dimensión. Esto quiere decir que, cuando un vector es variable podrán variar su módulo, su dirección, su sentido, todo junto o por separado. Obviamente, esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese, por lo cual un mismo vector podrá tener una componente constante en una base y variable en otra, es decir

$$|a\rangle_{(t)}=a^k(t)\,|e_k\rangle_{(t)}=a^{k'}\,|e_{k'}\rangle_{(t)}=a^{\hat{k}}(t)\,|e_{\hat{k}}\rangle\ . \tag{5.8}$$

De esta manera, cuando uno considera un vector variable, $|a\rangle_{(t)}\Longleftrightarrow\mathbf{a}(t)$, podemos establecer un cociente incremental:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|a\rangle_{(t+\Delta t)}-|a\rangle_{(t)}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\,|a\rangle_{(t)}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\,|a\rangle_{(t)}}{\mathrm{d}t}.$$

La misma propuesta se cumplirá para las formas diferenciales ${}_{(t)}\langle a|$.

Como siempre, las propiedades de esta diferenciación serán:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|a\rangle_{(t)}+|b\rangle_{(t)}\right)&=\frac{\mathrm{d}\,|a\rangle_{(t)}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\,|b\rangle_{(t)}}{\mathrm{d}t}\ ,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha(t)\,|a\rangle_{(t)}\right)&=\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\,|a\rangle_{(t)}+\alpha(t)\frac{\mathrm{d}\,|a\rangle_{(t)}}{\mathrm{d}t}\quad\text{y}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left({}_{(t)}\langle a\,|b\rangle_{(t)}\right)&=\frac{\mathrm{d}({}_{(t)}\langle a|)}{\mathrm{d}t}\,|b\rangle_{(t)}+{}_{(t)}\langle a|\,\frac{\mathrm{d}\,|b\rangle_{(t)}}{\mathrm{d}t}\,.\end{aligned}$$

Reproducimos aquí la ecuación (1.22), de la sección 1.5.2, ahora en notación de Dirac:

$$|a\rangle_{(t)}=a^k(t)\,|e_k\rangle_{(t)}\quad\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\,|a\rangle_{(t)}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^k(t)\,|e_k\rangle_{(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}a^k(t)}{\mathrm{d}t}\,|e_k\rangle_{(t)}+a^k(t)\frac{\mathrm{d}\,|e_k\rangle_{(t)}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{5.9}$$

con lo cual, como dijimos en 1.5.2, hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de la base y componentes. Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que serán constantes y otros con bases variables.

Podemos generalizar la ecuación (5.9) si consideramos una curva descrita por un radio vector $|r\rangle$ función de un parámetro λ, de manera que el vector posición, **en coordenadas cartesianas**, queda escrito como $|r\rangle=\mathbf{r}(\lambda)=\mathbf{r}\left(x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\right)$, donde las funciones: $\{x(\lambda),y(\lambda),z(\lambda)\}$ son las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por el vector posición $\mathbf{r}$.

Borrador Preliminar

Para el vector desplazamiento infinitesimal $|\mathrm{d}r\rangle = (\mathrm{d}x(\lambda), \mathrm{d}y(\lambda), \mathrm{d}z(\lambda))$, a lo largo de la curva descrita por el parámetro λ, resulta:

$$|\mathrm{d}r\rangle = \mathrm{d}\mathbf{r}\left(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\right) = \frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right]\mathrm{d}\lambda\,,$$

con lo cual podemos hacer la siguiente asociación:

$$\frac{\mathrm{d}\,(\,)}{\mathrm{d}\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\,(\,)}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\,(\,)}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\,(\,)}{\partial z}\,,$$

y considerar a las cantidades $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)$ como las componentes del vector $\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)$ (y, en general, del operador $\frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}\lambda}$) tangente a la trayectoria parametrizada con λ. Más aún, podemos asociar a las cantidades: $\left(\frac{\partial(\,)}{\partial x}, \frac{\partial(\,)}{\partial y}, \frac{\partial(\,)}{\partial z}\right)$ con los vectores base en esas coordenadas. Este tipo de parametrización es la que hemos usado en los cursos de mecánica, allí el parámetro utilizado ha sido el tiempo.

Otra forma alternativa de parametrizar el vector posición es a través de funciones que representen la curva espacial:

$$|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}\left(\lambda, f(\lambda), g(\lambda)\right)\,,$$

o por medio de la intersección de superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$.

Figura 5.3: Vector posición $\mathbf{r}(t)$, en $\mathbb{R}^2$, que describe paramétricamente una curva.

Por otro lado, el cuadrado de la distancia infinitesimal recorrida es:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda) = \frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}(\mathrm{d}\lambda)^2 = (\mathrm{d}x(\lambda))^2 + (\mathrm{d}y(\lambda))^2 + (\mathrm{d}z(\lambda))^2\,,$$

entonces

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\,,$$

por lo tanto, la longitud de arco entre dos puntos sobre la curva $\mathbf{r}(\lambda)$ será

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\right]^{1/2}\mathrm{d}\lambda\,.$$

Consideramos ahora un conjunto de coordenadas generalizadas: $\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)$, tendremos

$$|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)\,,$$

por lo tanto

$$\mathrm{d}\mathbf{r}\left(q^i(\lambda)\right) = \frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} + \frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} + \frac{\mathrm{d}q^3}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}}_{\mathbf{u}_1} + \frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}}_{\mathbf{u}_2} + \frac{\mathrm{d}q^3}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}}_{\mathbf{u}_3}\,,$$

Borrador eliminar

donde: $\left\{\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}, \mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}\right\}$, son la base del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ tangente a la curva descrita por $\mathbf{r}(\lambda)$.

Como sabemos, el módulo del vector $\|\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)\|$ representará la longitud de arco $\mathrm{d}s$ para esa curva.

Por consiguiente

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda) = \frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}(\mathrm{d}\lambda)^2 = \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}(\mathrm{d}\lambda)^2$$

$$= \frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}\underbrace{\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{d}q^i}\underbrace{\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{d}q^j} = \frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}\,\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j\,.$$

Dado que

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = \tilde{g}_{ij}\,\mathrm{d}\tilde{x}^i\,\mathrm{d}\tilde{x}^j = \bar{g}_{ij}\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^j = \underbrace{\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}}_{\bar{g}_{ij}}\,\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j\,,$$

identificamos claramente a las componentes del tensor g_{ij}:

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}\,.$$

Por otro lado, cuando $\mathbf{r}(\lambda)$ describe una curva Γ en el espacio, en cada punto de ésta curva podemos asociar un vector $\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$, esto es, un vector que es tangente a la curva Γ en un punto dado y apuntando en la dirección en la que aumenta λ.

Si el parámetro a utilizar es la propia longitud de arco s, entonces, $\mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a la curva Γ y lo denotaremos por $\hat{\boldsymbol{\tau}}$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}\,.$$

Como el vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es de magnitud constante, $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}/\mathrm{d}s$ será un vector perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. Al vector unitario en la dirección perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ lo denotaremos $\hat{\boldsymbol{n}}$.

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\right|\hat{\boldsymbol{n}} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}}\,.$$

Figura 5.4: La tríada de vectores unitarios $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$ para una curva en el plano.

A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*. De manera intuitiva, la curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una linea recta.

Con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\boldsymbol{n}}$, que denominaremos vector *binormal* a Γ, esto es: $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}\times\hat{\boldsymbol{n}}$. Tenemos entonces la tríada $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$ al que podemos anclar un sistema de coordenadas cartesiano en cada punto de Γ. Es claro que este conjunto de vectores irá

Borrador Preliminar

cambiando a medida que $\mathbf{r}$ va cambiando al variar el parámetro. Este sistema de coordenadas, no inercial, estará rotando constantemente a medida que el observador se mueve a lo largo de la curva en el espacio.

Continuando con el razonamiento anterior, por ser $\hat{\boldsymbol{b}}$ de magnitud constante, entonces

$$\hat{\boldsymbol{b}} \perp \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \quad \wedge \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

Al ser $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}/\mathrm{d}s$ perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\boldsymbol{b}}$, entonces será proporcional a $\hat{\boldsymbol{n}}$:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{\boldsymbol{n}} \quad \Rightarrow \tau = -\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s}\,,$$

esta constante de proporcionalidad se denomina la *torsión* de la curva Γ en un punto dado, y a $1/\tau$ el radio de torsión. Intuitivamente, la *torsión* mide que lejos está una curva de permanecer en un plano.

Para finalizar, a partir del hecho de que $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{b}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}}$:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{b}} \times \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = -\tau(\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}}) + \kappa(\hat{\boldsymbol{b}} \times \hat{\boldsymbol{n}}) = \tau\hat{\boldsymbol{b}} - \kappa\hat{\boldsymbol{\tau}}\,.$$

A las ecuaciones

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{\boldsymbol{n}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \tau\hat{\boldsymbol{b}} - \kappa\hat{\boldsymbol{\tau}}\,.$$

se les conoce como las fórmulas de Frenet-Serret de la geometría diferencial.

Ejemplo 5.5 Para una curva en el plano xy dada por $y = y(x)$ y $z = 0$ podemos escribir

$$|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \lambda\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(\lambda)\,|\mathrm{e}_y\rangle \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda} = |\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\,|\mathrm{e}_y\rangle \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda} = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\,,$$

al hacer $\lambda = x$ se tiene

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{\mathrm{d}\,(\mathbf{r}(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}\,(\mathbf{r}(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda}\right]^{1/2} \mathrm{d}\lambda = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}x\,.$$

◁

Ejemplo 5.6 Vamos a considerar el siguiente arco de hélice: $C(t) = [2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 4t]$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Podemos calcular la parametrización en s de la siguiente manera.

Como

$$\dot{C}(t) = \frac{\mathrm{d}\,(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t} = [-2\,\mathrm{sen}(t), 2\cos(t), 4]$$

entonces

$$s = \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}\,(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\,(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t}\right]^{1/2} \mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t) + 16}\,\mathrm{d}t = \int_0^t 2\sqrt{5}\mathrm{d}t = 2\sqrt{5}t\,.$$

Por lo tanto $t = s/2\sqrt{5}$ y la curva parametrizada con s es

$$C(s) = \mathbf{r}(s) = 2\left[\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \mathrm{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \frac{s}{\sqrt{5}}\right]\,.$$

Al derivar se tiene que

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\mathrm{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 2\right]$$

con $s \in [0, 4\sqrt{5}\pi]$.

La curvatura es simplemente

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\right| = \sqrt{\frac{1}{10^2}\cos^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{10^2}\mathrm{sen}^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{10}\,,$$

es decir, la curvatura es constante y el radio de curvatura es $\rho = 10$. El vector normal unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$ que resulta es

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left[-\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 0\right]\,.$$

Borrador Preliminar

Los vectores $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}$ se encuentran en un plano, el plano oscuador, del cual podemos construir el vector unitario binormal:

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 2\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 1\right] .$$

Calculemos ahora la torsión

$$\tau = -\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{5}\mathrm{sen}^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{5}\cos^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5} .$$

Dejamos al lector la demostración de que se satisfacen las fórmulas de Frenet-Serret.

◁

5.1.6 Covectores, tensores y coordenadas curvilíneas

Retomemos los conceptos que expresamos en la sección 3.1.3, de tal forma que podemos expresar vectores y formas como

$$|a\rangle = a^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = a^x\,|\mathrm{e}_x\rangle + a^y\,|\mathrm{e}_y\rangle + a^z\,|\mathrm{e}_z\rangle \equiv a^\rho\,|\mathrm{e}_\rho\rangle + a^\varphi\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle + a^z\,|\mathrm{e}_z\rangle$$

y equivalentemente para las 1-formas

$$\langle a| = a^i\,\langle \mathrm{e}_i| = a^x\,\langle \mathrm{e}_x| + a^y\,\langle \mathrm{e}_y| + a^z\,\langle \mathrm{e}_z| \equiv a^\rho\,\langle \mathrm{e}_\rho| + a^\varphi\,\langle \mathrm{e}_\varphi| + a^z\,\langle \mathrm{e}_z| ,$$

en ambos casos hemos hecho la comparación entre un sistema de coordenadas cartesiana y uno cilíndrico. Lo que es importante notar es lo que insistimos en la sección 3.1.3, que los vectores y 1-formas, se expresan de forma equivalente en los distintos sistemas de coordenadas.

Siguiendo la misma lógica argumental que en la sección 3.2.2 construimos tensores en cualquier sistema de coordenadas curvilíneo a partir del producto tensorial de vectores y formas:

$$\mathcal{T} = T^{ij}\,|\mathrm{e}_i\rangle \otimes |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle , \quad T_i^j\,\langle \mathrm{e}^i| \otimes |\tilde{\mathrm{e}}_{\mathrm{j}}\rangle \quad \text{o} \quad T_{ij}\,\langle \mathrm{e}^i| \otimes \langle \tilde{\mathrm{e}}^{\mathrm{j}}| .$$

Nótese T^{ij}, constituyen **las componentes** contravariantes de un tensor; T_i^j las componentes mixtas de un tensor y, finalmente, las componentes covariantes de ese tensor. Es importante recalcar que el tensor $\mathcal{T}$ es un objeto geométrico que se expresa en una base (tensorial) particular y que las base de vectores $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y 1-formas $\{\langle \tilde{\mathrm{e}}^{\mathrm{j}}|\}$, en principio, no necesariamente pueden ser las mismas, vale decir:

$$\mathcal{T} = T^{x\rho}\,|\mathrm{e}_x;\mathrm{e}_\rho\rangle + T^{x\varphi}\,|\mathrm{e}_x;\mathrm{e}_\varphi\rangle + T^{xz}\,|\mathrm{e}_x;\mathrm{e}_z\rangle + T^{y\rho}\,|\mathrm{e}_y;\mathrm{e}_\rho\rangle + T^{y\varphi}\,|\mathrm{e}_y;\mathrm{e}_\varphi\rangle + T^{yz}\,|\mathrm{e}_y;\mathrm{e}_z\rangle + \cdots + T^{zz}\,|\mathrm{e}_z;\mathrm{e}_z\rangle ,$$

donde hemos desarrollado el caso particular de un tensor bizarro parte cartesiano y parte cilíndrico. Este tipo de objetos es solo un ejemplo. Nótese que estamos utilizando la notación $|\mathrm{e}_i;\mathrm{e}_j\rangle \equiv |\mathrm{e}_i\rangle \otimes |\tilde{\mathrm{e}_j}\rangle$.

Solo para fijar ideas vamos a extender algunos conceptos que presentamos en la sección 1.2.6.1:

5.1.6.1 Producto escalar

El producto escalar es independiente de la base en la cual se exprese

$$\langle a|\,b\rangle = a_i b^i = a_{j'} b^{j'} = g_{ij} a^i b^j = g_{i'j'} a^{i'} b^{j'}$$

donde, como es de esperar, las leyes de transformación entre el sistema de coordenadas cartesianas $x^i = x^i(q^j)$ y un sistema de coordenadas curvilíneas $q^j = q^j(x^i)$ permiten la traducción de las componentes de vectores, formas y tensores como:

$$b^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^{k'}} b^{k'}, \quad a_j = \frac{\partial q^{k'}}{\partial x^j} a_{k'}, \quad \text{y} \quad g_{ij} = \frac{\partial q^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial q^{m'}}{\partial x^j} g_{k'm'}$$

Borrador Preliminar

5.1.6.2 Producto vectorial

El producto vectorial tal y como lo construimos la sección 1.2.6.2 se expresa como

$$|c\rangle = c^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k\,|\mathrm{e}_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left|c'\right\rangle = c^{i'}\,|\mathrm{e}_{i'}\rangle = \left|a'\right\rangle \times \left|b'\right\rangle = \epsilon^{i'j'k'} a_{j'} b_{k'}\,|\mathrm{e}_{i'}\rangle\ .$$

Donde ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas definido en la sección 1.4.1 y que luego generalizamos en la sección 4.3.5. Es decir, queremos construir la versión del producto vectorial que tenga la misma forma que en el caso cartesiano pero en cualquier sistema de coordenadas. De la relación anterior es claro que, el tensor de Levi-Civita transformará como un tensor, es decir

$$\epsilon^{i'j'k'} = \epsilon^{lmn} \frac{\partial q^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial q^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial q^{k'}}{\partial x^n} = J\,\epsilon^{ijk} = \sqrt{g}\,\epsilon^{ijk}$$

donde J es el determinante de la matriz jacobiana, que discutimos en 3.2.8 y g el determinante de la métrica. Por lo tanto,

$$|c\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = a_j b_k \epsilon^{ijk}\,|\mathrm{e}_i\rangle = \epsilon^{ijk} a_{l'} \frac{\partial q^{l'}}{\partial x^j} b_{m'} \frac{\partial q^{m'}}{\partial x^k} \frac{\partial q^{n'}}{\partial x^i}\,|\mathrm{e}_{n'}\rangle = \epsilon^{ijk} \frac{\partial q^{l'}}{\partial x^j} \frac{\partial q^{m'}}{\partial x^k} \frac{\partial q^{n'}}{\partial x^i}\, a_{l'} b_{m'}\,|\mathrm{e}_{n'}\rangle\ ,$$

con lo cual

$$|c\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \underbrace{a_j b_k \epsilon^{ijk}}_{c^i}\,|\mathrm{e}_i\rangle = \underbrace{a_{m'} b_{n'} \epsilon^{l'm'n'}}_{c^{l'}}\,|\mathrm{e}_{l'}\rangle = J\,\epsilon^{l'm'n'} a_{m'} b_{n'}\,|\mathrm{e}_{l'}\rangle = \sqrt{g}\,\epsilon^{l'm'n'} a_{m'} b_{n'}\,|\mathrm{e}_{l'}\rangle$$

5.1.7 Campos tensoriales

En la sección 5.1.5, cuando avanzamos en la derivación de vectores vimos vectores que dependían de un parámetro. Ahora podemos generalizar este concepto a tensores que dependen de una variable[3] Cuando discutimos los vectores variables en la sección 1.5.1 vimos que la dependencia funcional de un vector se puede concretar en la variación de sus componentes, cuando la base es constante; la dependencia de los vectores base manteniendo constante las componentes y, finalmente la variación de ambas: base y componentes. Del mismo modo, podemos generalizarlo para los tensores. Así distinguimos los mismos tres casos: bases constantes y componentes variables

$$T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)\ \langle w^i(1)| \otimes \langle u^j(2)| \otimes \cdots \otimes \left\langle v^k(m)\right| \otimes |x_m(1)\rangle \otimes |y_n(2)\rangle \otimes \cdots \otimes |z_l(n)\rangle\ ;$$

bases variables y componentes constantes

$$\check{T}^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}\ \langle \check{w}^i(1)|_{(t)} \otimes \langle \check{u}^j(2)|_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left\langle \check{v}^k(m)\right|_{(t)} \otimes |\check{x}_m(1)\rangle_{(t)} \otimes |\check{y}_n(2)\rangle_{(t)} \otimes \cdots \otimes |\check{z}_l(n)\rangle_{(t)}\ ,$$

y, finalmente ambas (bases y componentes) variables

$$T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)\ \langle \check{w}^i(1)|_{(t)} \otimes \langle \check{u}^j(2)|_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left\langle \check{v}^k(m)\right|_{(t)} \otimes |\check{x}_m(1)\rangle_{(t)} \otimes |\check{y}_n(2)\rangle_{(t)} \otimes \cdots \otimes |\check{z}_l(n)\rangle_{(t)}\ .$$

Al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese.

Así, tendremos tensores cuyas componentes, en una determinada base, serán variables y en otra no. Mientras que una de las bases puede ser variable y otra no.

Igualmente, recurriremos al cociente incremental para conocer la velocidad de variación:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{T}\left[\circ,\cdots;\bullet,\cdots\right]_{(t+\Delta t)} - \mathbf{T}\left[\circ,\cdots;\bullet,\cdots\right]_{(\mathbf{t})}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{T}\left[\circ,\cdots;\bullet,\cdots\right]_{(t)}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{T}\left[\circ,\cdots;\bullet,\cdots\right]_{(t)}\right)$$

Si la base es constante, la dependencia funcional y su variación (derivada) recae sobre sus componentes.

[3]Por simplicidad y, desviaciones profesionales de físico utilizaremos un parámetro t que nos recuerda al tiempo

Borrador Preliminar

Así podemos construir la derivada de las componentes como

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}\left(t+\Delta t\right)-T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}\left(t\right)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\left(T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}(t)\right)}{\mathrm{d}t}\,.$$

Siguiendo con el proceso de generalización, podemos pensar en una dependencia funcional multilineal. Esto es que en vez de que el tensor dependa de un solo parámetro t, i.e. $\mathbf{T}\left[\circ,\circ,\cdots;\bullet,\bullet,\cdots\right]_{(t)}$, podemos pensar que el argumento de la "función" tensorial sea otro tensor : $\mathbf{T}\left[\circ,\circ,\cdots;\bullet,\bullet,\cdots\right]_{(\mathbf{G}[\circ,\circ,\cdots;\bullet,\bullet,\cdots])}$. A ese objeto se le llama *Campo Tensorial*, pero vamos con calma y analicemos lo casos más simples que son los verdaderamente útiles.

Como era de esperarse, tendremos varios casos que se pueden construir a partir de esta idea:

- Campos homogéneos:

$$\begin{aligned}\text{Función} &: \varphi=\varphi(t)\\ \text{Vector} &: |r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)\rightsquigarrow r^i(t)\\ \text{Tensor} &: \mathbf{T}=\mathbf{T}\left[\circ,\circ,\cdots,\circ;\bullet,\bullet,\cdots,\bullet\right]_{(t)}\rightsquigarrow T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}(t)\end{aligned}$$

- Campos constantes o estacionarios $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}(t)$

$$\begin{aligned}\text{Campo Escalar} &: \varphi=\varphi\left(\mathbf{r}\right)\\ \text{Campo Vectorial} &: |a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a}=\mathbf{a}\left(\mathbf{r}\right)\rightsquigarrow a^i\left(\mathbf{r}\right)\\ \text{Campo Tensorial} &: \mathbf{T}=\mathbf{T}\left[\circ,\circ,\cdots,\circ;\bullet,\bullet,\cdots,\bullet\right]_{(|r\rangle)}\rightsquigarrow T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}\left(\mathbf{r}\right)\end{aligned}$$

- Campos variables o no estacionarios

$$\begin{aligned}\text{Campo Escalar Variable} &: \varphi=\varphi\left(\mathbf{r}(t),t\right)\\ \text{Campo Vectorial} &: |a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a}=\mathbf{a}\left(\mathbf{r}(t),t\right)\rightsquigarrow a^i\left(\mathbf{r}(t),t\right)\\ \text{Campo Tensorial} &: \mathbf{T}=\mathbf{T}\left[\circ,\circ,\cdots,\circ;\bullet,\bullet,\cdots,\bullet\right]_{(|r\rangle)}\rightsquigarrow T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}\left(\mathbf{r}(t),\right)\end{aligned}$$

La idea de los campos escalares, vectoriales, tensoriales, con argumento vectorial, es la de asociar un valor de la componente (escalar, vectorial o tensorial) a cada punto del espacio (si el vector está en $\mathbb{R}^3$). Obviamente, los campos escalares asocian un número a cada posición y los campos vectoriales, además del número (módulo) asocian una dirección y un sentido.
Ejemplos de campos escalares serán las distribuciones de densidad $\rho\left(\mathbf{r}(t)\right)$, presiones $P\left(\mathbf{r}(t)\right)$ y temperaturas $T\left(\mathbf{r}(t)\right)$ de la atmósfera terrestre, o la distribución de intensidades del campo eléctrico en una superficie.

Figura 5.5: Ejemplo de campo escalar $\phi=\phi\left(\mathbf{r}\right)$

Podemos, por ejemplo, considerar el potencial eléctrico:

$$\phi\left(\mathbf{r}\right)=\phi(x,y)=\ln\left((x+1)^2+y^2\right)-\ln\left((x-1)^2+y^2\right)\,.$$

La representación de este campo escalar se puede apreciar en la figura 5.5.

Borrador Preliminar

5.1.7.1 Campos escalares y superficies

En la figura 5.6 se ilustra el campo escalar de temperaturas para la siguiente función:

$$T = T(x, y) = 70 + 180\mathrm{e}^{-(x-3)^2/10-(y-2)^2/10}\,.$$

Por lo tanto, por un campo escalar entenderemos a toda función escalar de argumento vectorial, es decir, la función que asociará cada punto del espacio con un número. Esto es:

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\phi = \phi\left(\mathbf{r}\right) \quad \Rightarrow \phi = \phi\left(x^i\right) = \phi\left(\tilde{x}^i\right)\,.$$

Estamos enfatizando el hecho que un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento. Adicionalmente recalcamos que es indistinto hablar de vectores $\phi = \phi\left(\mathbf{r}\right)$ o sus coordenadas $\phi = \phi\left(x^i\right)$.

Figura 5.6: Campo escalar $T = T(x, y)$

En un mapa o diagrama de temperaturas, es posible unir los diferentes puntos con igual temperatura, y así tendremos las curvas isotermas, tal y como se observa en la figura 5.7.

Por otra parte, un campo escalar $\phi = \phi\left(x^1, x^2\right)$ definirá diferentes superficies si la representamos en $\mathbb{R}^3$ de la forma: $x^3 = \phi\left(x^1, x^2\right)$. De esta manera tendremos curvas de nivel o isocurvas las cuales se corresponden a las soluciones de $\phi = \phi\left(x^i\right) =$ cte. Tal y como se ilustra en la figura 5.8, los diferentes planos para $z =$cte, cortan la superficie dada por la función z y definen las diferentes curvas de nivel $g(x, y) = k$.

Figura 5.7: Curvas Isotermas $T = T(x, y) =$ cte.

Figura 5.8: Curvas de nivel para una función $z = g(x, y) =$ cte.

5.1.7.2 Campos vectoriales y curvas integrales

Consideremos ahora un campo vectorial $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)$ y estudiemos su representación, y lo que es más importante, su variación. Los campos vectoriales vienen a ser funciones vectoriales de varias variables en la que a cada punto del espacio o dominio se le asigna el vector, es decir: $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Tal y como hemos dicho y volvemos a representar en la figura 5.9, los campos vectoriales asocian un vector (con su módulo dirección y sentido) a cada punto del espacio. Comúnmente, nos referimos a campos vectoriales

Borrador Preliminar

Figura 5.9: Campos vectoriales

según el caso: *campos de fuerza* (el vector del campo es una fuerza), *campo de velocidades* (el vector del campo es una velocidad).

Del mismo modo, a aquellas líneas a las cuales los vectores son tangentes se les dominan *líneas de campo, curvas integrales* o simplemente *líneas de flujo* o de *corriente*. A las trayectorias ortogonales a estas líneas, vale decir, a aquellas líneas cuyos vectores tangentes son ortogonales al campo, se les denominarán *líneas equipotenciales*.

El ejemplo más emblemático lo constituye el gradiente de un campo escalar $\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y)$. Las *líneas equipotenciales* las define el campo escalar mismo, $\phi(x,y) = z =$ cte (curva de nivel) y construimos un campo vectorial con su gradiente, $\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y)$. Como el gradiente es perpendicular a la curva de nivel tendremos que las *curvas integrales*, (líneas de flujo o líneas de corriente) del campo vectorial $\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y)$ serán *trayectorias ortogonales* a las *curvas equipotenciales*.

Consideremos el caso bidimensional[4] en coordenadas cartesianas, y tomemos el desplazamiento diferencial $\mathrm{d}\mathbf{r}$ en la dirección del campo vectorial $\mathbf{A}$, es fácil convencerse que:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \propto \mathbf{A}(x,y) = A_x(x,y)\hat{\mathbf{i}} + A_y(x,y)\hat{\mathbf{j}} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}x}{A_x(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y(x,y)}\,,$$

con lo cual encontramos las *líneas de flujo* o *curvas integrales* $y\,(x)$ del campo $\mathbf{A}(x,y)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)} \;\Rightarrow\; y\,(x) = \int \frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)}\mathrm{d}x\,.$$

Otra forma, equivalente de ver lo anterior es que si $\mathbf{A} = \mathbf{a}\,(x(t),y(t),z(t),t)$, entonces:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \propto \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{A} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0\,.$$

Por lo cual $[A_z\mathrm{d}y - A_y\mathrm{d}z]\,\hat{\mathbf{i}} + [A_x\mathrm{d}z - A_z\mathrm{d}x]\,\hat{\mathbf{j}} + [A_y\mathrm{d}x - A_x\mathrm{d}y]\,\hat{\mathbf{k}} = 0$, para que finalmente

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x\,(x(t),y(t),z(t),t)} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y\,(x\,(t)\,,y(t),z(t),t)} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z\,(x(t),y(t),z\,(t)\,,t)}\,.$$

La integral de estas ecuaciones definirán las líneas de flujo o curvas integrales.

[4]El caso tridimensional sólo añade complicaciones técnicas y no riqueza conceptual.

Borrador Preliminar

5.1.7.3 Trayectorias ortogonales a las líneas de flujo

Para encontrar las *trayectorias ortogonales* al campo vectorial o las *líneas equipotenciales* construimos un campo vectorial $\mathbf{A}^{\perp}(x,y)$ que sea ortogonal en todo punto a $\mathbf{A}(x,y)$

$$\mathbf{A}^{\perp}(x,y)\cdot\mathbf{A}(x,y)=0 \;\Rightarrow\; A_x(x,y)A_x^{\perp}(x,y)+A_y(x,y)A_y^{\perp}(x,y)=0 \;\Rightarrow\; \frac{A_x(x,y)}{A_y(x,y)}=-\frac{A_y^{\perp}(x,y)}{A_x^{\perp}(x,y)}\,,$$

donde $\mathbf{A}^{\perp}(x,y)=A_x^{\perp}(x,y)\hat{\mathbf{i}}+A_y^{\perp}(x,y)\hat{\mathbf{j}}$, y ahora procedemos del mismo modo pero con el campo vectorial $\mathbf{A}^{\perp}(x,y)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{A_y^{\perp}(x,y)}{A_x^{\perp}(x,y)} \;\Rightarrow\; y\,(x)=-\int\frac{A_y^{\perp}(x,y)}{A_x^{\perp}(x,y)}\mathrm{d}x\,.$$

Ejemplo 5.7 A continuación mostraremos como afectan las transformaciones de coordenadas a los tensores. Tal y como expresamos en la sección 3.2.8, el mismo esquema de transformación que tienen las componentes de los vectores (y de las forma) son los que se requieren para transformar a los tensores. Obviamente habrá que cuidar que tipo de componentes (covariantes o contravariante) del tensor estamos transformando.

Consideremos el siguiente tensor

$$T^i_j=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&4\\1&2&2\end{pmatrix}\,,\qquad \text{en la base:}\quad \{|\mathrm{e}_1\rangle\,,|\mathrm{e}_2\rangle\,,|\mathrm{e}_3\rangle\}\equiv\{|\mathrm{i}\rangle\,,|\mathrm{j}\rangle\,,|\mathrm{k}\rangle\}\,.$$

Es un tensor que hemos expresado en coordenadas cartesianas y queremos ahora pasarlo a cilíndricas. Como recién mencionamos:

$$T^{k'}_{m'}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\,T^i_j\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \;\Rightarrow\; T^{k'}_{m'}=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&\operatorname{sen}(\varphi)&0\\-\frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\rho}&\frac{\cos(\varphi)}{\rho}&0\\0&0&1\end{pmatrix}T^i_j\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&-\rho\operatorname{sen}(\varphi)&0\\\operatorname{sen}(\varphi)&\rho\cos(\varphi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,$$

sustituyendo el tensor y multiplicando las matrices

$$T^{k'}_{m'}=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&\operatorname{sen}(\varphi)&0\\-\frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\rho}&\frac{\cos(\varphi)}{\rho}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&4\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\varphi)&-\rho\operatorname{sen}(\varphi)&0\\\operatorname{sen}(\varphi)&\rho\cos(\varphi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,$$

se obtiene

$$T^{k'}_{m'}=\begin{pmatrix}-\cos^2(\varphi)+3\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)+3&\rho\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi)-2\rho+3\rho\cos^2(\varphi)&3\cos(\varphi)+4\operatorname{sen}(\varphi)\\\frac{\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)+3\cos^2(\varphi)-1}{\rho}&-3\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)+\cos^2(\varphi)+2&-3\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi)}{\rho}+4\frac{\cos(\varphi)}{\rho}\\\cos(\varphi)+2\operatorname{sen}(\varphi)&-\rho\operatorname{sen}(\varphi)+2\rho\cos(\varphi)&2\end{pmatrix}\,.$$

Si suponemos que el origen del sistema de coordenadas cilíndrico está en el vector $|a\rangle=3\,|\mathrm{i}\rangle+4\,|\mathrm{j}\rangle+3\,|\mathrm{k}\rangle$. Esto es

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow \rho=\sqrt{3^2+4^2}=5\\[2ex] \varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \Rightarrow \varphi=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\,,\end{cases}$$

Borrador Preliminar

entonces

$$T^{k'}_{m'} = \begin{pmatrix} \frac{102}{25} & -\frac{11}{5} & 5 \\ \frac{14}{125} & \frac{23}{25} & 0 \\ \frac{11}{25} & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

◁

Ejemplo 5.8 Definimos una transformación ortogonal (una transformación de un sistema de coordenadas ortogonales a otro ortogonal también) si se cumple

$$x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} x^k + a^i; \qquad x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} x^{k'} + a^{i'}; \qquad \text{donde } \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\right) = \det\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) = \pm 1\,.$$

con

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} = \delta^k_l\,.$$

Vamos a demostrar que las transformaciones de Galileo en 2 dimensiones

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^1_{o\tilde{o}} t \\ V^2_{o\tilde{o}} t \end{pmatrix}$$

son transformaciones ortogonales. Notemos que $V^1_{o\tilde{o}}$, y $V^2_{o\tilde{o}}$ son las velocidades en la dirección 1 y 2, respectivamente, del observador $\tilde{O}$ con coordenadas $x^{i'}$ respecto al observador O con coordenadas x^i, mientras t es el tiempo medido por ambos observadores.

Una vez más, identificando

$$x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} x^k + a^i \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = \cos(\theta) & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -\text{sen}(\theta) & a^1 = V^1_{o\tilde{o}} t \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = \text{sen}(\theta) & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = \cos(\theta) & a^2 = V^2_{o\tilde{o}} t \end{array} \qquad \det\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta^2 = 1\,.$$

◁

Ejemplo 5.9 Las transformaciones de Galileo nos permiten relacionar las posiciones de una partícula respecto a dos observadores los cuales se encuentran en movimiento, uno respecto al otro. Consideremos entonces el movimiento de una partícula visto desde el sistema de coordenadas x^i tal que

$$x = V_{0x} t; \qquad y = V_{0y} t - g\frac{t^2}{2}\,.$$

Vamos a expresar el vector velocidad $\mathbf{V}$ de esta partícula visto del sistema de coordenadas $x^{i'}$.

Tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = x = V_{0x} t \\ \\ x^2 = y = V_{0y} t - g\frac{t^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V^1 = V_x = \frac{\mathbf{d}x^1}{\mathbf{d}t} = V_{0x} \\ \\ V^2 = V_y = \frac{\mathbf{d}x^2}{\mathbf{d}t} = V_{0x} - gt \end{array}$$

por lo cual

$$\begin{pmatrix} V^{1'} \\ V^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^1_{o\tilde{o}} t \\ V^2_{o\tilde{o}} t \end{pmatrix}$$

Borrador Preliminar

Finalmente

$$\mathbf{V} = V^{1'}\hat{\mathbf{i}} + V^{2'}\hat{\mathbf{j}} \quad \text{con} \begin{cases} V^{1'} = V^1\cos(\theta) - V^2\text{sen}(\theta) + V^1_{o\tilde{o}}t \\ \\ V^{2'} = V^1\text{sen}(\theta) + V^1\cos(\theta) + V^2_{o\tilde{o}}t \end{cases}$$

◁

Ejemplo 5.10 Considere ahora la siguiente transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^\alpha = L^\alpha_\beta\, x^\beta + a^\alpha; \quad \text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^i v_i}}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

y

$$L^0_0 = \gamma\,, \quad L^i_0 = L^0_i = \gamma v^i\,, \quad L^i_j = L^j_i = \delta^i_j + v^i v_j \frac{(\gamma - 1)}{v^k v_k}\,.$$

Las L^α_β se denominan impulso (boost) de Lorentz y donde las v^k son las componentes tridimensionales de la velocidad relativa entre los observadores $\tilde{O}$ y O con coordenadas $\tilde{x}^\alpha$ y x^β, respectivamente. La coordenada x^0 representa el tiempo medido por el observador O mientras que las x^j representan las coordenadas espaciales x, y, z para el mismo observador O con $i, j = 1, 2, 3$ respectivamente. Nótese que $0 \leq v^k v_k < 1$. Supongamos, por facilidad, que el movimiento es en una dimensión: $\alpha, \beta = 0, 1$ y $i, j = 1$.

Esto implica

$$L^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L}^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix}$$

1. Vamos a mostrar que los tiempos se alargan cuando son medidos por observadores en movimiento. Tenemos que $\Delta t = t_2 - t_1 = x^0_2 - x^0_1$ medido por el observador en reposo y equivalentemente: $\Delta\tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}^0_2 - \tilde{x}^0_1$ medido por el observador en movimiento.

$$\Delta\tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}^0_2 - \tilde{x}^0_1 = \left(L^0_\beta\, x^\beta_2 + a^0\right) - \left(L^0_\beta\, x^\beta_1 + a^0\right) = L^0_\beta\, x^\beta_2 - L^0_\beta\, x^\beta_1 = L^0_\beta\left(x^\beta_2 - x^\beta_1\right)$$
$$= L^0_0\left(x^0_2 - x^0_1\right) + L^0_1\left(x^1_2 - x^1_1\right) = \frac{\left(x^0_2 - x^0_1\right)}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}}\,.$$

Claramente

$$\lim_{v \to 1} \Delta\tilde{t} = \infty$$

Nótese que hemos supuesto que el reloj que marca el Δt y que está en reposo respecto al sistema x^β se encuentra en la misma posición espacial $x^0_2 = x^0_1$.

2. Demostremos ahora como las distancias se acortan cuando son medidas por observadores en movimiento. Igualmente la distancia entre dos puntos espaciales será

$$l = x^1_2 - x^1_1 = \left(\tilde{L}^1_\beta\, \tilde{x}^\beta_2 + a^1\right) - \left(\tilde{L}^1_\beta\, \tilde{x}^\beta_1 + a^1\right) = L^1_\beta\left(\tilde{x}^\beta_2 - \tilde{x}^\beta_1\right) = \tilde{L}^1_0\left(\tilde{x}^0_2 - \tilde{x}^0_1\right) + \tilde{L}^1_1\left(\tilde{x}^1_2 - \tilde{x}^1_1\right)$$

Si suponemos que la distancia en el sistema en movimiento $\tilde{x}^\beta$ la medimos en el mismo tiempo, entonces $\tilde{x}^0_2 = \tilde{x}^0_1$ con lo cual

$$l = \tilde{L}^1_1\left(\tilde{x}^1_2 - \tilde{x}^1_1\right) = \frac{\left(\tilde{x}^1_2 - \tilde{x}^1_1\right)}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \Rightarrow \tilde{l} = \sqrt{1 - v^2}\, l \quad \Rightarrow \lim_{v \to 1} \sqrt{1 - v^2}\, l = 0\,.$$

◁

Borrador Preliminar

Practicando con Maxima

1. El paquete **ctensor** dispone de herramientas para manipular componentes de tensores. El uso de esta librería permite que los objetos geométricos tensoriales se representen como arreglos o matrices. Para poder hacer uso de **ctensor** es necesario cargarlo previamente en memoria ejecutando **load(ctensor)**.
Con la función **ct_ coordsys**(sistema coordenadas) se prepara un sistema de coordenadas predefinido y una métrica.

```
(%i1) load(ctensor)$
(%i2) ct_ coordsys([r*sin(theta)*cos(phi),r*sin(theta)*sin(phi),r*cos(theta), [r,theta,phi]])$
```

O de manera equivalente escribiendo el nombre de las coordenadas a utilizar. Ver el manual de **Maxima** para la lista completa con los nombres de las coordenadas disponibles.

```
(%i3) ct_ coordsys(spherical)$
```

La métrica se almacena en el sistema como la matriz **lg** y se obtiene de manera sencilla:

```
(%i4) trigsimp(lg);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\sin^2\theta \end{pmatrix}$

Aquí utilizamos **trigsimp** para simplificar. La métrica inversa se almacena en la matriz **ug** y se obtiene escribiendo

```
(%i5) cmetric()$
(%i6) ug;
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta} \end{pmatrix}$

Si **cframe_ flag** vale **false**, la función **cmetric()** calcula la métrica inversa **ug** a partir de la métrica **lg** definida por el usuario. Pero si **cframe_ flag** toma el valor **true**, la función espera a que los valores de **fri** (la matriz del sistema de referencia inverso) o **lfg** (la matriz de la métrica del sistema de referencia) estén definidos. A partir de ellos, se calculan la matriz del sistema de referencia **fr** y su métrica inversa **ufg**.
La función **init_ ctensor** reinicia el paquete **ctensor**. De esta manera se borran todos los arreglos y matrices utilizadas.

```
(%i7) init_ ctensor()$
(%i8) cframe_ flag:true$
(%i9) ct_ coordsys([r*sin(theta)*cos(phi),r*sin(theta)*sin(phi),r*cos(theta),[r,theta,phi]])$
```

La matriz de transformación, ecuaciones (5.4), se obtiene así:

```
(%i10) fri;
```

(%o10) $\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta & \cos\varphi\,r\,\cos\theta & -\sin\varphi\,r\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta & \sin\varphi\,r\,\cos\theta & \cos\varphi\,r\,\sin\theta \\ \cos\theta & -r\,\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

La matriz del sistema de referencia se calcula de la siguiente manera (nuevamente usaremos el comando **trigsimp** para que se realicen las simplificaciones trigonométricas que correspondan)

```
(%i11) cmetric()$
```

Borrador Preliminar

(%i12) trigsimp(fr);

(%o12) $$\begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta & \frac{\cos\varphi\,\cos\theta}{r} & -\frac{\sin\varphi}{r\,\sin\theta} \\ \sin\varphi\,\sin\theta & \frac{\sin\varphi\,\cos\theta}{r} & \frac{\cos\varphi}{r\,\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

La métrica:

(%i13) trigsimp(lg);

(%o13) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Para finalizar, veamos a continuación como obtener la métrica y los factores de escala para las coordenadas toroidales. (Ver 5.1.4)

(%i14) init_ctensor()$

(%i15) x:a*sinh(tau)*cos(phi)/(cosh(tau)-cos(sigma));

(%o15) $$\frac{a\,\cos\varphi\,\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}$$

(%i16) y:a*sinh(tau)*sin(phi)/(cosh(tau)-cos(sigma));

(%o16) $$\frac{a\,\sin\varphi\,\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}$$

(%i17) z:a*sin(sigma)/(cosh(tau)-cos(sigma));

(%o17) $$\frac{a\,\sin\sigma}{\cosh\tau-\cos\sigma}$$

(%i18) ct_coordsys([x,y,z,[sigma,tau,phi]])$

(%i19) lg:factor(trigsimp(lg));

(%o19) $$\begin{pmatrix} \frac{a^2}{(\cosh\tau-\cos\sigma)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(\cosh\tau-\cos\sigma)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2\,(\cosh\tau-1)\,(\cosh\tau+1)}{(\cosh\tau-\cos\sigma)^2} \end{pmatrix}$$

Los factores de escala son entonces

(%i20) radexpand:all$

(%i21) h1:sqrt(lg[1,1]);

(%o21) $$\frac{a}{\cosh\tau-\cos\sigma}$$

(%i22) h2:sqrt(lg[2,2]);

(%o22) $$\frac{a}{\cosh\tau-\cos\sigma}$$

Maxima no logra simplificar en su conjunto la expresión para la tercera componente, sin embargo podemos simplificar el numerador por separado. Aquí **num** nos permite aislar el numerador y **denom** el denominador.

(%i23) h3:sqrt(trigsimp(num(lg[3,3]))/denom(lg[3,3]));

(%o23) $$\frac{a\,\sinh\tau}{\cosh\tau-\cos\sigma}$$

Borrador Preliminar

2. Dado el segmento de la hélice

$$C(t) = [2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 4t]$$

```
(%i24) load(vect)$
(%i25) C(t):=[2*cos(t), 2*sin(t),4*t];
```
(%o25) $C(t) := [2\cos(t), 2\sin(t), 4t]$

```
(%i26) dC: diff(C(t),t);
```
(%o26) $[-2\,\sin t, 2\,\cos t, 4]$

Buscamos la relación entre los parámetros s y t

```
(%i27) 'integrate(sqrt(dC.dC),t,0,t)=integrate(sqrt(dC.dC),t,0,t); Is t positive, negative or zero?p;
```
(%o27) $\int_0^t \sqrt{4\,\sin^2 t + 4\,\cos^2 t + 16}\,dt = 2\sqrt{5}\,t$

Por lo tanto, en función del parámetro s el vector posición es:

```
(%i28) r(s):=[2*cos(s/(2*sqrt(5))), 2*sin(s/(2*sqrt(5))),2*s/sqrt(5)];
```
(%o28) $r(s) := [2\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 2\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \frac{2s}{\sqrt{5}}]$

El vector tangente a la curva es

```
(%i29) tau: diff(r(s),s);
```
(%o29) $\left[-\frac{\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}, \frac{\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

La curvatura:

```
(%i30) kappa:trigsimp(sqrt(diff(tau,s).diff(tau,s)));
```
(%o30) $\frac{1}{10}$

El vector normal es

```
(%i31) n:1/kappa*diff(tau,s);
```
(%o31) $\left[-\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), -\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 0\right]$

Y el binormal:

```
(%i32) b:trigsimp(express(tau~ n));
```
(%o32) $\left[\frac{2\,\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}, -\frac{2\,\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

La torsión:

```
(%i33) tor: trigsimp(-n.diff(b,s));
```
(%o33) $\frac{1}{5}$

Borrador Preliminar

Podemos comprobar que cada uno de los vectores es unitario.

```
(%i34) trigsimp(sqrt(tau.tau));trigsimp(sqrt(n.n));trigsimp(sqrt(b.b));
```

(%o34) 1

(%o35) 1

(%o36) 1

Y que se satisfacen las fórmulas de de Frenet-Serret.

```
(%i37) diff(tau,s)-kappa*n;
```

(%o37) $[0,0,0]$

```
(%i38) diff(b,s)+tor*n;
```

(%o38) $[0,0,0]$

```
(%i39) diff(n,s)-tor*b+kappa*tau;
```

(%o39) $[0,0,0]$

3. Consideremos el siguiente tensor en coordenadas cartesianas

$$T^i_j = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y nuestro deseo es escribirlo en coordenadas cilíndricas. Escribamos el jacobiano de la transformación

```
(%i40) x:rho*cos(phi)$y:rho*sin(phi)$
(%i41) J:jacobian([x,y,z], [rho,phi,z]);
```

(%o41) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\,\rho & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi\,\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i42) T:matrix([2,1,3],[2,3,4],[1,2,2]);
```

(%o42) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

```
(%i43) trigsimp(invert(J).T.J);
```

(%o43) $\begin{pmatrix} 3\,\cos\varphi\,\sin\varphi - \cos^2\varphi + 3 & \left(\cos\varphi\,\sin\varphi + 3\,\cos^2\varphi - 2\right)\,\rho & 4\,\sin\varphi + 3\,\cos\varphi \\ \frac{\cos\varphi\,\sin\varphi + 3\,\cos^2\varphi - 1}{\rho} & -3\,\cos\varphi\,\sin\varphi + \cos^2\varphi + 2 & -\frac{3\,\sin\varphi - 4\,\cos\varphi}{\rho} \\ 2\,\sin\varphi + \cos\varphi & (2\,\cos\varphi - \sin\varphi)\,\rho & 2 \end{pmatrix}$

Podemos evaluar el resultado anterior para algún punto en particular

```
(%i44) ev(%,rho=5, phi=atan(4/3));
```

(%o44) $\begin{pmatrix} \frac{102}{25} & -\frac{11}{5} & 5 \\ \frac{14}{125} & \frac{23}{25} & 0 \\ \frac{11}{5} & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas

$$|\mathrm{e}_1\rangle = a\,|\mathrm{i}\rangle + b\,|\mathrm{j}\rangle\,; \qquad |\mathrm{e}_2\rangle = c\,|\mathrm{i}\rangle + d\,|\mathrm{j}\rangle$$

Para una base genérica, $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ la métrica viene definida por

$$g_{ij} \equiv g_{ji} = \mathbf{g}\left[|\mathrm{e}_i\rangle\,,|\mathrm{e}_j\rangle\right] \equiv \left\langle \mathrm{e}^i\,|\mathrm{e}_j\right\rangle$$

Podemos introducir la métrica como una matriz

Borrador Preliminar

```
(%i45) load(ctensor)$
(%i46) lg:matrix([a^ 2+b^ 2,a*c+b*d],[a*c+b*d,c^ 2+d^ 2]);
```

(%o46) $\begin{pmatrix} b^2+a^2 & b\,d+a\,c \\ b\,d+a\,c & d^2+c^2 \end{pmatrix}$

Recordemos que calcular la métrica inversa es un proceso sencillo

```
(%i47) cmetric()$
(%i48) factor(ug);
```

(%o48) $\begin{pmatrix} \frac{d^2+c^2}{(a\,d-b\,c)^2} & -\frac{b\,d+a\,c}{(a\,d-b\,c)^2} \\ -\frac{b\,d+a\,c}{(a\,d-b\,c)^2} & \frac{b^2+a^2}{(a\,d-b\,c)^2} \end{pmatrix}$

En este caso, la matriz que permite la transformación de componentes del sistema de coordenadas oblicuo al cartesiano es

```
(%i49) L:matrix([d/(a*d-b*c),-c/(a*d-b*c)],[-b/(a*d-b*c),a/(a*d-b*c)]);
```

(%o49) $\begin{pmatrix} \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{c}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{b}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{pmatrix}$

Es claro que

```
(%i50) Linv:factor(invert(L));
```

(%o50) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Si tenemos el tensor

```
(%i51) T:matrix([4,2],[1,4]);
```

(%o51) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

La transformación de coordenadas es entonces

$$\tilde{T}_{ij} = g_{ik}\tilde{T}^k_j = g_{ik}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m}T^m_n\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j}$$

```
(%i52) Tnue:factor(lg.L.T.Linv);
```

(%o52) $\begin{pmatrix} 4\,b^2+3\,a\,b+4\,a^2 & 4\,b\,d+2\,a\,d+b\,c+4\,a\,c \\ 4\,b\,d+a\,d+2\,b\,c+4\,a\,c & 4\,d^2+3\,c\,d+4\,c^2 \end{pmatrix}$

Para el caso particular $a=1, b=0, c=\sqrt{2}/2, d=\sqrt{2}/2$, resulta

```
(%i53) factor(ev(Tnue,a=1,b=0,c=sqrt(2)/2,d=sqrt(2)/2));
```

(%o53) $\begin{pmatrix} 2^2 & 3\sqrt{2} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$

4. A continuación, aprovecharemos la ocasión para mostrar algunas opciones que tienen que ver con los comandos para graficar curvas de nivel.
Es recomendable consultar el manual de **Maxima** para tener acceso al resto de posibilidades.
Dado el campo de temperaturas

$$T = T(x,y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10-(y-2)^2/10},$$

Borrador Preliminar

(%i54) T(x, y):=70+180*exp(-(x-3)^ 2/10-(y-2)^ 2/10);

(%o54) $T(x,y) := 70 + 180\mathtt{exp}\left(-\frac{(x-3)^2}{10} - \frac{(y-2)^2}{10}\right)$

El gráfico más simple que podemos realizar es el siguiente

(%i55) wxplot2d([contour,T(x,y)],[x,-2,10],[y,-4,10],[legend,false]);
(%55)

Otra perspectiva es

(%i56) wxplot3d(T(x, y),[x,-2,10],[y,-4,10],[gnuplot_ preamble,"set contour"]);
(%o56)

Borrador Preliminar

También se puede usar el comando **draw**.

```
(%i57) wxdraw3d(enhanced3d=true,explicit(T(x, y),x,-2,10,y,-4,10), contour_ levels=8,contour=surface);
(%o57)
```

```
(%i58) wxdraw3d(enhanced3d=true,explicit(T(x, y),x,-2,10,y, -4,10), contour_ levels=8,contour=map);
(%o58)
```

5.1.8 Ejercicios

1. Exprese el vector

$$\mathbf{r} = yz\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}} + xz^2\hat{\mathbf{k}}$$

   en coordenadas cilíndricas.

   Nota: Antes, se deben expresar los vectores base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ en términos de los vectores base $\{\boldsymbol{\xi}_\rho, \boldsymbol{\xi}_\varphi, \boldsymbol{\xi}_z\}$.
2. Exprese los vectores base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ en término de los vectores base $\{\boldsymbol{\xi}_r, \boldsymbol{\xi}_\theta, \boldsymbol{\xi}_\varphi\}$.
3. Encuentre las componentes de la velocidad y aceleración, en coordenadas esféricas, de una partícula en movimiento.
4. Calcule los factores de escala, la métrica y los vectores base para los siguientes sistemas de coordenadas:

Borrador preliminar

(a). cilíndricas parabólicas (u, v, φ) definidas por

$$x = uv\cos(\varphi)\,, \quad y = uv\,\mathrm{sen}(\varphi)\,, \quad z = \frac{u^2 - v^2}{2}\,.$$

(b). hiperbólicas (u, v, φ) definidas por

$$x = \cosh(u)\cos(v)\cos(\varphi)\,, \quad y = \cosh(u)\cos(v)\mathrm{sen}(\varphi)\,, \quad z = \mathrm{senh}(u)\mathrm{sen}(v)\,.$$

5. Escriba el siguiente vector en coordenadas esféricas

$$|a\rangle = 2xy\,|\mathrm{i}\rangle - x\,|\mathrm{e}_y\rangle + 3x\,|\mathrm{k}\rangle\ .$$

Encuentre las componentes covariantes y contravariantes del vector $|a\rangle$ en términos de: r, θ, φ.

6. Diga si la siguiente transformación de coordenadas es ortogonal

$$x = 2uv\,, \quad y = u^2 - v^2\,, \quad z = w\,.$$

7. El siguiente tensor está expresado en coordenadas cartesianas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Escriba sus componentes en coordenadas esféricas.

8. Demuestre que la aceleración de una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}.$$

¿Cuál es el significado del término v^2/ρ?

9. La siguiente curva: $F(x, y, z) = y^3 + 27axz - 81a^2y = 0$ viene parametrizada por

$$x = au(3 - u^2)\,, \quad y = 3au^2\,, \quad z = au(3 + u^2)\,.$$

Encuentre

(a). $\mathrm{d}s/\mathrm{d}u$, si s es la distancia sobre la curva medida desde el origen.

(b). La longitud de la curva desde el origen al punto cartesiano $(2a, 3a, 4a)$.

(c). El radio de curvatura en el punto u.

(d). La torsión y la curvatura para todo punto de la curva.

(e). Escriba las expresiones que resultan de usar las fórmulas de Frenet-Serret.

10. Encuentre las curvas integrales y las trayectorias ortogonales de los siguientes campos vectoriales

(a). $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{x}{2}\mathbf{i} - \frac{y}{2}\mathbf{j}$,

(b). $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$,

(c). $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

11. El vector área para una superficie S se define como $\mathbf{S} = \iint_s \mathrm{d}\mathbf{S}$, encuentre el vector área de la superficie: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $z \leq 0$. Utilice el hecho de que en coordenadas esféricas $\mathrm{d}\mathbf{S} = a^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r$.

5.2 La fauna de los operadores diferenciales vectoriales

A partir del concepto de campo escalar, presentaremos ahora una variedad de objetos diferenciales en el espacio tridimensional. Salvo que se diga lo contrario, utilizaremos el sistema de coordenadas cartesianas, que discutimos en la sección 5.1.1 en la página 331.

Borrador Preliminar

5.2.1 Derivada direccional de campos escalares

Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos "instantes de tiempo", para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi\left(\mathbf{r}(t)\right) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}\phi(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,;$$

donde hemos representado

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{j}}\,.$$

A $\boldsymbol{\nabla}\phi\left(x^i(t)\right)$ lo llamaremos el *gradiente* del campo escalar $\phi\left(x^i(t)\right)$, y también son muy comunes otras notaciones para el gradiente:

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(x(t), y(t)) = \phi_x(x, y)\hat{\mathbf{i}} + \phi_y(x, y)\hat{\mathbf{j}} = \partial^i\phi(x, y)\hat{\mathbf{i}}_i = \phi^{,i}(x, y)\hat{\mathbf{i}}_i\,,$$

El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles del cálculo vectorial, el cual lo hemos utilizado de manera operacional y no nos hemos detenido a reflexionar sobre sus propiedades.

Es claro que cuando se tienen curvas de nivel $g(x, y) = z = \phi\left(\mathbf{r}(t)\right) = k = cte$, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\phi(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\phi(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = 0 = \boldsymbol{\nabla}\phi\left(x(t), y(t)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

con lo cual, dado que $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ es la tangente a la curva, entonces, el gradiente es perpendicular a la curva, tal y como se muestra en la figura 5.11.

Figura 5.10: Derivada direccional

Si se da el caso que la función dependa de manera explícita del parámetro t, $\phi = \phi\left(x^i(t), t\right)$ tendremos que

$$\phi = \phi\left(x(t), y(t), z(t), t\right) \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi\left(x^i(t), t\right)}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\phi\left(x^i(t), t\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

y, en el caso particular en que el parámetro es la longitud de arco λ a lo largo de la curva, la derivada total de ϕ con respecto a λ a lo largo de la curva vendrá dada por

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i(\lambda), \lambda) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}\,, \tag{5.10}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado.

Por otro lado, la derivada direccional indicará la tasa de cambio del campo escalar en la dirección que apuntemos. Es una generalización de la idea que surge de parametrizar la curva o de la derivada total respecto al tiempo. Dados dos puntos M y M' definiremos la derivada en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}} \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$

Borrador eliminar

como se muestra a continuación:

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi \equiv \lim_{M'\to M} \frac{\phi\left(M'\right)-\phi\left(M\right)}{\left|\overrightarrow{M'M}\right|} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x,y)\cdot\hat{\mathbf{u}}\,. \tag{5.11}$$

Tal y como se puede apreciar en la figura 5.10 la derivada direccional está representada por la pendiente de la recta tangente a la curva que surge como intersección entre la superficie $\phi(x,y)=z=k=cte$, el plano vertical formado por el eje z y el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$.

En este punto, varias reflexiones se pueden derivar del concepto de derivada total.

- La primera es que dado que, la derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es

  $$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\hat{\mathbf{u}} = |\boldsymbol{\nabla}\phi|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{\nabla}\phi,\hat{\mathbf{u}}}\right),$$

  (donde hemos denotado por $\widehat{\boldsymbol{\nabla}\phi,\hat{\mathbf{u}}}$ como el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{\nabla}\phi$ y $\hat{\mathbf{u}}$), el valor máximo de la derivada direccional será

  $$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}}\phi_{\text{máx}} = |\boldsymbol{\nabla}\phi| = \sqrt{\partial^i\phi\partial_i\phi} \equiv \sqrt{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)^2}\,.$$

  Es decir, cuando $\hat{\mathbf{u}}$ apunta en la dirección del gradiente o, lo que es lo mismo, en la dirección de la mayor tasa de cambio; el valor máximo lo indica la dirección del gradiente. O dicho de otro modo, en un determinado punto M de las superficie $\phi(x,y)=z$ el vector $\boldsymbol{\nabla}\phi$ apunta en la dirección de la máxima tasa de cambio, tal y como podemos apreciar en la figura 5.11 panel izquierdo.
- La segunda reflexión es que el gradiente es perpendicular a la superficie $z=\phi(x,y)$. En general, si hacemos $\phi(x^i(\lambda),\lambda)=k=cte$, como $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\hat{\boldsymbol{\tau}}$ tangente a esta superficie en algún punto, es claro que $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\lambda=0$ en esa dirección y $\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}=0$. Por lo tanto, $\boldsymbol{\nabla}\phi$ será normal a la superficie $\phi(x^i(\lambda),\lambda)=k$ (ver figura 5.11 panel derecho).
- La tercera reflexión es dado que el gradiente es ortogonal a la superficie, los vectores perpendiculares a él conformarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.
- Finalmente, la cuarta emerge de la misma definición (5.11), es claro que la derivada direccional es un escalar, por lo tanto, como $\hat{\mathbf{u}}$ es un vector, $\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y)$ debe ser una $1-$forma. Vale decir, como veremos con mas detalle en las secciones 5.2.1.2 y 5.2.2

  $$\text{grad}\,\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q^1}\left\langle \mathrm{e}^1\right| + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q^2}\left\langle \mathrm{e}^2\right| + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q^3}\left\langle \mathrm{e}^3\right| = \frac{\left\langle \mathrm{e}^i\right|}{h_{\tilde{i}}}\frac{\partial\phi}{\partial q^i} = \frac{\left\langle \mathrm{e}^i\right|}{h_{\tilde{i}}}\partial_i\phi\,.$$

  Donde denotamos $h_{\tilde{i}} = \left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^i}\right\| = \sqrt{g_{ii}}$ los factores de escala que acompaña a la base $\left\langle \mathrm{e}^i\right|$ generalizada.

5.2.1.1 Gradiente y flujo de un campo vectorial

Podemos utilizar la idea de flujo de un campo vectorial y generalizar la definición de gradiente para que sea independiente de las coordenadas.

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \phi(x,y,z)\mathrm{d}\mathbf{S} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \phi(x,y,z)\,\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S\,.$$

Supongamos que construimos un campo vectorial de la forma siguiente

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\,,\quad \text{con } \mathbf{c}=cte\,,$$

con lo cual

$$F = \iint_s \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S\,.$$

Es claro que esta expresión vale para todos los sistemas de coordenadas. En particular, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes coordenados.

Borrador Preliminar

Figura 5.11: Dirección de máxima variación en una función. Gradiante y tangente de una función.

Entonces se tiene que las caras del cubo serán

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_{x+} = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\,\hat{\mathbf{i}}\,; \quad \mathrm{d}\mathbf{S}_{x-} = -\,(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\,\hat{\mathbf{i}}\,; \quad \mathrm{d}\mathbf{S}_{y+} = (\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z)\,\hat{\mathbf{j}}\,; \quad \mathrm{d}\mathbf{S}_{y-} = -\,(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z)\,\hat{\mathbf{j}}\,;$$
$$\mathrm{d}\mathbf{S}_{z+} = (\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\,\hat{\mathbf{k}}\,; \quad \mathrm{d}\mathbf{S}_{z-} = -\,(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\,\hat{\mathbf{k}}\,,$$

con lo cual, el flujo por las seis caras es

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{x+} + \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{x-} + \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{y+} \\ &+ \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{y-} + \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{z+} + \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{z-}\,, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \mathbf{c}\,[\phi\,(x+\mathrm{d}x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \phi(x,y,z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \phi\,(x,y+\mathrm{d}y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - \phi(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &+ \phi\,(x,y,z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \phi(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y] \\ &= \mathbf{c}\,[\{\phi\,(x+\mathrm{d}x,y,z) - \phi\,(x,y,z)\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \{\phi\,(x,y+\mathrm{d}y,z) - \phi(x,y,z)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \\ &+ \{\phi\,(x,y,z+\mathrm{d}z) - \phi\,(x,y,z)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]\,. \end{aligned}$$

Como estamos considerando un "cubo diferencial" podemos desarrollar por Taylor hasta primer orden, por lo que:

$$\phi\,(x+\mathrm{d}x,y,z) \approx \phi(x,y,z) + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x\,, \quad \phi\,(x,y+\mathrm{d}y,z) \approx \phi(x,y,z) + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y\,,$$
$$\phi\,(x,y,z+\mathrm{d}z) \approx \phi(x,y,z) + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial\phi\,(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}V \quad \Rightarrow dF = \mathrm{grad}\,\phi\,\mathrm{d}V\,, \end{aligned}$$

entonces

$$\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{F_2 - F_1}{V_2 - V_1} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \phi(x,y,z)\mathrm{d}\mathbf{S} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \phi(x,y,z)\,\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S\,.$$

Nótese que hemos supuesto que $\Delta V \equiv V_2 \equiv V$ y que $F_2 = \iint_s \phi(x,y,z)\mathrm{d}\mathbf{S}$. Que quiere decir que tanto $V_1 \sim 0$ con lo cual el flujo a través de un punto se anula, $F_1 \sim 0$.

Borrador Preliminar

5.2.1.2 Gradiente y coordenadas curvilíneas

La generalización de la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas es inmediata a partir de diferencial total de una función $\phi(q^1, q^2, q^3)$. Esto es

$$\phi(q^1, q^2, q^3) = \phi\left(q^j\right) \quad \Rightarrow \mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j$$

con

$$\operatorname{grad}\phi\left(q^i\right) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^1}\right\|}\frac{\partial\phi}{\partial q^1}\left\langle \mathrm{e}^1\right| + \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^2}\right\|}\frac{\partial\phi}{\partial q^2}\left\langle \mathrm{e}^2\right| + \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^3}\right\|}\frac{\partial\phi}{\partial q^3}\left\langle \mathrm{e}^3\right| ,$$

y

$$\langle \mathrm{d}r| = \frac{\partial\langle r|}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1 + \frac{\partial\langle r|}{\partial q^2}\mathrm{d}q^2 + \frac{\partial\langle r|}{\partial q^3}\mathrm{d}q^3 \equiv \left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^1}\right\|\left\langle \mathrm{e}^1\right|\,\mathrm{d}q^1 + \left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^2}\right\|\left\langle \mathrm{e}^2\right|\,\mathrm{d}q^2 + \left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^3}\right\|\left\langle \mathrm{e}^3\right|\,\mathrm{d}q^3 ,$$

ya que, al igual que en el caso de los vectores, la base del espacio dual se construye como

$$\left\langle \mathrm{e}^1\right| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^1}\right\|}\frac{\partial\langle r|}{\partial q^1}; \quad \left\langle \mathrm{e}^2\right| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^2}\right\|}\frac{\partial\langle r|}{\partial q^2}; \quad \text{y} \quad \left\langle \mathrm{e}^3\right| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^3}\right\|}\frac{\partial\langle r|}{\partial q^3} .$$

Es decir, la forma general del gradiente para un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\operatorname{grad}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q^1}\left\langle \mathrm{e}^1\right| + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q^2}\left\langle \mathrm{e}^2\right| + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q^3}\left\langle \mathrm{e}^3\right| = \frac{\left\langle \mathrm{e}^i\right|}{h_{\tilde{i}}}\frac{\partial\phi}{\partial q^i} = \frac{\left\langle \mathrm{e}^i\right|}{h_{\tilde{i}}}\partial_i\phi .$$

Donde denotamos $h_{\tilde{i}} = \left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q^i}\right\| = \sqrt{g_{ii}}$ el factor de escala que acompaña a la base $\left\{\left\langle \mathrm{e}^i\right|\right\}$ y **debe quedar claro** que en el lado derecho de la ecuación (5.2.1.2) la suma es únicamente sobre los índices de $|\mathrm{e}_i\rangle$ y ∂_i. La tilde en el índice $\tilde{i}$ es para indicar que simplemente replica el valor que toma el índice i.

Ejemplo 5.11 Para el campo escalar $\phi = x^2y + yz$, en el punto $M = (-1, 2, 1)$, tenemos que el gradiente es

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = 2xy\hat{\mathbf{i}} + \left(x^2 + z\right)\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\phi(-1, 2, 1) = -4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} .$$

en ese punto, la taza de cambio en la dirección del vector $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ será:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = \left(2xy\hat{\mathbf{i}} + \left(x^2 + z\right)\hat{\mathbf{j}} + y\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\left(\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}\right)\Big|_M = \frac{6}{\sqrt{14}} .$$

Por lo tanto, en el punto $M = (-1, 2, 1)$ la taza de cambio $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ máxima se produce en la dirección $\boldsymbol{\nabla}\phi = -4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ con un valor de $|\boldsymbol{\nabla}\phi| = \sqrt{24}$.

◁

5.2.2 Divergencia y flujo en campos vectoriales

Revisando con un poco más de cuidado la expresión para el gradiente podemos ver que

$$\operatorname{grad}\phi = \left(\frac{\langle \mathrm{e}_1|}{h_1}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{h_2}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{h_3}\frac{\partial}{\partial q^3}\right)\phi ,$$

es decir, con esta inspiración podemos construir un funcional lineal

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3} ,$$

donde: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.

Con lo cual, si cuidamos el orden de operación, podremos realizar un "producto interno entre una 1-forma,

Borrador Preliminar

$\boldsymbol{\nabla}$ y un vector $\mathbf{a}$" de la forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\frac{\partial}{\partial q^1}+\frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial q^2}+\frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\frac{\partial}{\partial q^3}\right]\cdot\left[a^1\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_2\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_3\right\rangle\right]\\ &= \frac{\langle \mathrm{e}_1|}{\mathcal{H}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_2\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_3\right\rangle\right]}{\partial q^1}+\frac{\langle \mathrm{e}_2|}{\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_2\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_3\right\rangle\right]}{\partial q^2}\\ &+ \frac{\langle \mathrm{e}_3|}{\mathcal{G}}\cdot\frac{\partial\left[a^1\left|\mathrm{e}_1\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_2\right\rangle+a^2\left|\mathrm{e}_3\right\rangle\right]}{\partial q^3}\,.\end{aligned}$$

Aquí es importante tener cuidado con la posible variación de los vectores base. Notemos que si consideremos el caso de coordenadas cartesianas: $\{q^i\}\to(x,y,z)$, donde la base $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}\to\{|\mathrm{e}_x\rangle,|\mathrm{e}_y\rangle,|\mathrm{e}_z\rangle\}$ es constante, entonces tendremos de forma inmediata:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\frac{\partial a^i\left(x^j\right)}{\partial x^i}\equiv\partial_i a^i\left(x^j\right)=\frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\,.$$

5.2.2.1 Divergencia como medida de flujo

El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\equiv\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}S\,.$$

Es decir, el flujo por unidad de volumen. Otra vez, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes coordenados. Entonces se tiene que las caras del cubo son como las describimos anteriormente, ver ecuaciones (5.2.1.1). El flujo por las seis caras será

$$\mathrm{d}F=\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{x+}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{x-}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{y+}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{y-}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{z+}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_{z-}\,,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= a_x\left(x+\mathrm{d}x,y,z\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-a_x(x,y,z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+a_y\left(x,y+\mathrm{d}y,z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z-a_y(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\\ &+ a_z\left(x,y,z+\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-a_z(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \left[a_x\left(x+\mathrm{d}x,y,z\right)-a_x(x,y,z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[a_y\left(x,y+\mathrm{d}y,z\right)-a_y\left(x,y,z\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ &+ \left[a_z\left(x,y,z+\mathrm{d}z\right)-a_z(x,y,z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Desarrollando por Taylor otra vez, tendremos

$$a_x\left(x+\mathrm{d}x,y,z\right)\approx a_x(x,y,z)+\frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x\,;\quad a_y\left(x,y+\mathrm{d}y,z\right)\approx a_y(x,y,z)+\frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y\,;$$

$$a_z\left(x,y,z+\mathrm{d}z\right)\approx a_z(x,y,z)+\frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

Para obtener

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= \frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial a_y\left(x,y,z\right)}{\partial y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\left(\frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\,.\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$F=\iint_S\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V\left(\frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\equiv\iiint_V\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}\right)\mathrm{d}V\,.$$

La primera conclusión es que podemos convertir una integral de superficie cerrada de un campo vectorial, en una integral de volumen encerrada por esa misma superficie. Lo hemos demostrado para el caso de coordenadas cartesianas, pero como el flujo $F=\iint_S\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ es un escalar, esta afirmación vale para **cualquier sistema de**

Borrador Preliminar

coordenadas.

Esto se conoce como el *Teorema de la Divergencia* el cual veremos más adelante (ver sección 5.3.4.1 en la página 399). A partir de este teorema tenemos que si la divergencia de un campo vectorial es positiva, lo interpretaremos como flujo hacia afuera (saliente) del volumen V encerrado por la superficie, S, y si la divergencia del campo es negativa tendremos flujo entrante. Como ilustración puede ver el ejemplo de la página 366.

5.2.2.2 Divergencia y coordenadas curvilíneas

Para encontrar la expresión para la divergencia en coordenadas curvilíneas generalizadas, $q^i = (q^1, q^2, q^3)$, partimos de la definición invariante de sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a}\cdot \hat{\mathbf{n}}_s \,\mathrm{d}S = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} \,\mathrm{d}S \,.$$

Al igual que procedimos en coordenadas cartesianas, ahora consideraremos un "paralelepípedo curvilíneo" con tres de sus aristas alineadas con el sistema ortogonal curvilíneo. Las caras de este "paralelepípedo curvilíneo podrán ser representadas como

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{S}_{q^1+} &= \left(\mathrm{d}s_{\to q^2}\, \mathrm{d}s_{\to q^3}\right)_{\mathrm{d}q^1} |\mathrm{e}_1\rangle \,, \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^1-} = -\left(\mathrm{d}s_{\to q^2}\, \mathrm{d}s_{\to q^3}\right) |\mathrm{e}_1\rangle \,, \\
\mathrm{d}\mathbf{S}_{q^2+} &= \left(\mathrm{d}s_{\to q^3}\, \mathrm{d}s_{\to q^1}\right)_{\mathrm{d}q^2} |\mathrm{e}_2\rangle \,, \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^2-} = -\left(\mathrm{d}s_{\to q^3}\, \mathrm{d}s_{\to q^1}\right) |\mathrm{e}_2\rangle \,, \\
\mathrm{d}\mathbf{S}_{q^3+} &= \left(\mathrm{d}s_{\to q^1}\, \mathrm{d}s_{\to q^2}\right)_{\mathrm{d}q^3} |\mathrm{e}_3\rangle \,, \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^3-} = -\left(\mathrm{d}s_{\to q^1}\, \mathrm{d}s_{\to q^2}\right) |\mathrm{e}_3\rangle \,,
\end{aligned}$$

donde denotamos $\mathrm{d}s_{\to q^i}$ el arco de curva a lo largo de la coordenadas curvilíneas generalizada q^i. Los paréntesis $(\cdot)_{\mathrm{d}q^i}$ indican que esta superficie es evaluada en $q^i + \mathrm{d}q^i$. Adicionalmente, es de hacer notar que

$$\mathrm{d}s_{\to q^i} = \sqrt{g_{ii}}\mathrm{d}q^i = h_i \mathrm{d}q^i \,, \quad \text{aquí los índices repetidos NO indican suma.}$$

Ahora bien, dado que $|a\rangle \equiv \mathbf{a} = a^i(q^j)\,|\mathrm{e}_i\rangle$, el flujo por las seis caras será

$$\mathrm{d}F = \left(\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^1+}\right) + \left(\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^1-}\right) + \left(\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^2+}\right) + \left(\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^2-}\right) + \left(\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^3+}\right) + \left(\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^3-}\right) \,.$$

Para comenzar vemos que **es** el flujo del campo vectorial, $a^i(q^j)$, lo que está siendo evaluado en dos puntos distintos:

$$\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^1-} = a^1(q^i)\, h_2 h_3\, \mathrm{d}q^2 \mathrm{d}q^3 \,, \quad \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^2-} = a^2(q^i)\, h_3 h_1\, \mathrm{d}q^3 \mathrm{d}q^1 \,, \quad \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}_{q^3-} = a^3(q^i)\, h_1 h_2\, \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 \,.$$

Con lo cual **es** el flujo lo que debemos desarrollar por Taylor.

$$\begin{aligned}
a^1\left(q^1 + \mathrm{d}q^1, q^2, q^3\right) h_2 h_3 &= a^1(q^i) h_2 h_3 + \frac{\partial\left(a^1(q^i) h_2 h_3\right)}{\partial q^1} \mathrm{d}q^1 \,, \\
a^2\left(q^1, q^2 + \mathrm{d}q^2, q^3\right) h_3 h_1 &= a^2(q^i) h_3 h_1 + \frac{\partial\left(a^2(q^i) h_3 h_1\right)}{\partial q^2} \mathrm{d}q^2 \,, \\
a^3\left(q^1, q^2, q^3 + \mathrm{d}q^3\right) h_1 h_2 &= a^3(q^i) h_1 h_2 + \frac{\partial\left(a^3(q^i) h_1 h_2\right)}{\partial q^3} \mathrm{d}q^3 \,.
\end{aligned}$$

Nótese que el caso cartesiano no se hizo explícito este hecho por cuanto $h_3 = h_2 = h_1 = 1$. Entonces el flujo diferencial para el caso de coordenadas curvilíneas será

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial\left(a^1(q^i) h_2 h_3\right)}{\partial q^1} \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 \mathrm{d}q^3 + \frac{\partial\left(a^2(q^i) h_3 h_1\right)}{\partial q^2} \mathrm{d}q^2 \mathrm{d}q^3 \mathrm{d}q^1 + \frac{\partial\left(a^3(q^i) h_1 h_2\right)}{\partial q^3} \mathrm{d}q^3 \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 \,.$$

Recordamos que el diferencial de volumen es

$$\mathrm{d}V = \left(\mathrm{d}s_{\to q^1}\right)\left(\mathrm{d}s_{\to q^2}\right)\left(\mathrm{d}s_{\to q^3}\right) = \sqrt{g_{11}}\, \mathrm{d}q^1 \sqrt{g_{22}}\, \mathrm{d}q^2 \sqrt{g_{33}}\, \mathrm{d}q^3 = h_1 h_2 h_3\, \mathrm{d}q^1 \mathrm{d}q^2 \mathrm{d}q^3 \,,$$

donde denotamos a $\mathrm{d}s_{\to q^i}$ como el arco de curva a lo largo de la coordenadas curvilíneas generalizada q^i.

Borrador Preliminar

Con lo cual identificamos la forma genérica de la divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(a^1(q^i)h_2h_3\right)}{\partial q^1} + \frac{\partial\left(a^2(q^i)h_3h_1\right)}{\partial q^2} + \frac{\partial\left(a^3(q^i)h_1h_2\right)}{\partial q^3}\right].$$

Si hacemos $h = h_1h_2h_3$, entonces podemos escribir la divergencia de manera más compacta

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{a^i(q^j)h}{h_{\hat{i}}}\right].$$

pero **siempre teniendo en cuenta** que la suma es sobre los índices de a^i y $\partial/\partial q^i$, por lo que queda indicado que $\hat{i}$ simplemente replica el valor que tome el índice i.

Consideremos con más cuidado el caso en el cual la superficie S **contiene** el origen de coordenadas. Es claro que si el volumen contenido entre dos esferas de distintos radio $\tilde{r} < r$, centradas en el origen y con superficies $\tilde{S}$ y S respectivamente no contiene al origen entonces el flujo será nulo

$$F = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,\mathrm{d}V = 0 = \iint_s \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S + \iint_s \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}}\,\mathrm{d}\tilde{S}\,.$$

El campo vectorial sobre la superficie $\tilde{S}$ de la esfera de radio $\tilde{r}$ es

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\tilde{r}^2}\hat{\mathbf{e}}_r\,, \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} \equiv -\hat{\mathbf{e}}_r\,,$$

con lo cual

$$\iint_{\tilde{s}} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}}\,\mathrm{d}\tilde{S} = \iint_{\tilde{s}} \frac{q}{\tilde{r}^2}\hat{\mathbf{e}}_r\cdot(-\hat{\mathbf{e}}_r)\,\mathrm{d}\tilde{S} = -\iint_{\tilde{s}} \frac{q}{\tilde{r}^2}\mathrm{d}s_{\to\theta}\,\mathrm{d}s_{\to\varphi}\,,$$

es decir,

$$\iint_s \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = \iint_{\tilde{s}} \frac{q}{\tilde{r}^2}\mathrm{d}s_{\to\theta}\,\mathrm{d}s_{\to\varphi} = \iint_{\tilde{s}} \frac{q}{\tilde{r}^2}\tilde{r}^2\operatorname{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = q\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 4\pi q\,,$$

ya que: $\mathrm{d}\tilde{S} = h_\theta\mathrm{d}\theta\; h_\varphi\mathrm{d}\varphi \equiv \tilde{r}\mathrm{d}\theta\;\tilde{r}\operatorname{sen}(\theta)\mathrm{d}\varphi$.

Tenemos entonces que el flujo de un campo singular en un punto (el origen de coordenadas), digamos: $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$, a través de una superficie que encierra ese punto singular, no es nulo y es igual a $4\pi q$.

El campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, se denominará campo de una partícula fuente si $q > 0$ y campo de un sumidero si $q < 0$.

Ejemplo 5.12 Dos ejemplos en teorías de campos

1. **La ecuación de continuidad** Consideremos una superficie cerrada S que encierra un volumen V. Esta superficie está inmersa en un fluido, de densidad $\rho(\mathbf{r},t)$ que fluye con un campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$. Supondremos además que el volumen V que encierra la superficie S no cambia de posición, con lo cual, la variación de masa del fluido contenido en este volumen es

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathrm{d}V\,.$$

Entonces, la variación de la cantidad de fluido encerrada por la superficie S será igual a la cantidad de fluido que escapa (o ingresa) a través de esa superficie. Esto es

$$\iiint_V \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathrm{d}V = -\iint_s \rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\;\mathrm{d}S = -\iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t))\,\mathrm{d}V\,,$$

con lo cual

$$\iiint_V \left[\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t))\right]\mathrm{d}V = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t)) = 0\,,$$

y esta última representa la ecuación de continuidad en dinámica de fluidos.

2. **Fuentes y sumideros** Consideremos un campo vectorial de la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = q\frac{\mathbf{r}}{r^3} \equiv \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r\,.$$

Borrador Preliminar

La divergencia, en coordenas esféricas ($h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\,\mathrm{sen}(\theta)$), es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\left[\frac{\partial\left(A_r(r,\theta,\varphi)h_\theta h_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(A_\theta(r,\theta,\varphi)h_\varphi h_r\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(A_\varphi(r,\theta,\varphi)h_r h_\theta\right)}{\partial\varphi}\right]\\ &= \frac{1}{r^2\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{q}{r^2}r^2\mathrm{sen}(\theta)\right] = 0\,.\end{aligned}$$

Nótese que el origen del sistema coordenado (el punto $r = 0$) no está definido porque no lo estaba en el campo vectorial original $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$. Con lo cual, se tiene que si la superficie S **no** encierra a $r = 0$, entonces el flujo a través de esa superficie será nulo

$$F = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = 0\,.$$

Es decir, todo lo que entra sale. Sin embargo, si el volumen **contiene** al origen de coordenadas no podemos decir nada por cuanto hay una indeterminación en la expresión de la divergencia.

◁

5.2.3 Rotacionales, líneas de torbellino y circulación

Del mismo modo como hemos venido procediendo, haremos otra operación vectorial con el operador nabla $\boldsymbol{\nabla}$. Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} &= \varepsilon^{ijk}\partial_j a_k\mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x^j}\mathbf{i}_i = \left(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2\right)\mathbf{i}_1 + \left(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3\right)\mathbf{i}_2 + \left(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1\right)\mathbf{i}_3\\ &= \left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right)\hat{\mathbf{k}} \equiv \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}\,.\end{aligned} \tag{5.12}$$

El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial. Por razones que serán evidentes enseguida, las curvas integrales de este *campo rotacional* se denominan *líneas de torbellino*.

5.2.3.1 Líneas de torbellino

Tal y como se detalló en la sección 5.1.7.2 de la página 347 las *líneas de flujo* se construyen a partir de un vector diferencial paralelo a campo vectorial en cada punto. Esto es, si

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} = \left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right)\mathbf{i} + \left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right)\mathbf{j} + \left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right)\hat{\mathbf{k}}\,,$$

tendremos que $\mathrm{d}\mathbf{r}\propto\mathbf{b} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}$ determina las líneas (de *torbellino*) perpendiculares al campo $\mathbf{a}(x,y,z)$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{b_x(x,y,z)} = \frac{\mathrm{d}y}{b_y\left(x,y.z\right)} = \frac{\mathrm{d}z}{b_z\left(x,y.z\right)} = \mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}x}{\left(\partial_y a_z - \partial_z a_y\right)} = \frac{\mathrm{d}y}{\left(\partial_z a_x - \partial_x a_z\right)} = \frac{\mathrm{d}z}{\left(\partial_x a_y - \partial_y a_x\right)}\,,$$

donde hemos parametrizado la curva con λ.

5.2.3.2 Superficies ortogonales a las líneas de torbellino

Uno también puede plantearse encontrar el conjunto de superficies ortogonales a las líneas de flujo del campo vectorial, $\mathbf{a}(x,y,z)$. Para ello procedemos como lo hicimos en la sección 5.1.7.3 y suponemos que

Borrador Preliminar

Figura 5.12: Rotacionales de un campo vectorial, líneas de torbellino

existen estas superficies y que se representan, matemáticamente, como una función $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi \propto \mathbf{a} \propto \mathrm{d}\mathbf{r} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times [\varphi\mathbf{a}] = \boldsymbol{\nabla}\varphi \times \mathbf{a} + \varphi\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = 0\,,$$

es decir, $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ es proporcional al campo $\mathbf{a}(x, y, z)$ y al aplicar el rotacional a ambos miembros y proyectar sobre el mismo vector $\mathbf{a}$ la ecuación de la derecha nos queda

$$\mathbf{a} \cdot [\boldsymbol{\nabla}\varphi \times \mathbf{a}] + \mathbf{a} \cdot [\varphi\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}] = 0\,,$$

ambos sumandos se anulan por definición de producto vectorial, pero el segundo sumando $\mathbf{a} \cdot [\varphi\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}] = 0$, impone una condición sobre el campo independiente de la función de proporcionalidad.

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{a}(x, y, z)$ sean perpendiculares a un conjunto de superficies $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es

$$\mathbf{a} \cdot [\boldsymbol{\nabla}\varphi \times \mathbf{a}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot [\varphi\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}] = 0\,.$$

Ambas pueden ser utilizadas para identificar las superficies ortogonales $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

Ejemplificamos su utilidad a través de un ejemplo físico. Si $\mathbf{a}(x, y, z)$ fuese un campo de fuerza, digamos para el caso de un fluido en equilibrio estático

$$\boldsymbol{\nabla}p = \rho\mathbf{F}\,,$$

entonces, esta ecuación nos permite determinar como estaría estratificada la presión en el fluido. Al tomar

$$\boldsymbol{\nabla} \times [\rho\mathbf{F}] \quad \Rightarrow \mathbf{F} \cdot [\rho\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}] = 0\,,$$

por lo tanto, $\mathbf{F}$ será siempre ortogonal al rotacional de la fuerza en todo punto del campo, es decir, el equilibrio sólo es posible si las lineas de fuerza $\mathbf{F}$ de siempre son ortogonales a las trayectorias de $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$.

5.2.3.3 Circulación de un campo vectorial

El concepto (y el nombre de *rotacional*) surge de la idea de rotación (¿circulación?) que este operador descubre al ser "aplicado" a un campo vectorial. Como se muestra en la figura 5.13, la idea intuitiva es colocar un "detector" de rotación inmerso en el campo. En este caso es un par de aspas e imaginamos que el campo vectorial representa un campo de velocidades de un fluido. Si el fluido hace girar las aspas en sentido horario (tirabuzón o sacacorchos derecho hacia arriba) diremos que el campo tiene una "circulación" positiva y el rotacional del campo siempre será positivo en esa región. Si es a la inversa, diremos que el campo tiene una "circulación" negativa y el rotacional también lo será en esa región. Finalmente, si el par de aspas no rota, el campo tendrá una circulación nula o no tendrá circulación y su rotacional será también nulo en esa región.

Borrador Preliminar

Figura 5.13: Idea sobre el significado físico del rotacional

En esta sección haremos una breve introducción al concepto de circulación y dejamos para la sección 5.3 un desarrollo más detallado.

La idea de circulación se puede generalizar si tomamos un campo vectorial genérico

$$\mathbf{a} = a_x(x,y,z)\mathbf{i}+a_y(x,y,z)\mathbf{j}+a_z(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}\,,$$

con lo cual, la integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r, en el plano xy, será

$$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[a_x(x,y,z)\mathbf{i}+a_y(x,y,z)\mathbf{j}+a_z(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\left[-r\mathrm{sen}(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + r\cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}}\right]\mathrm{d}\varphi\,,$$

y suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en al plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$. Esto es

$$a_x\left(x,y,0\right) = a_x|_{r=0} + x\,\frac{\partial a_x}{\partial x}\Big|_{r=0} + y\,\frac{\partial a_x}{\partial y}\Big|_{r=0} + \cdots = a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi)\,\frac{\partial a_x}{\partial x}\Big|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\,\frac{\partial a_x}{\partial y}\Big|_{r=0} + \cdots$$

$$a_y\left(x,y,0\right) = a_y|_{r=0} + x\,\frac{\partial a_y}{\partial x}\Big|_{r=0} + y\,\frac{\partial a_y}{\partial y}\Big|_{r=0} + \cdots = a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi)\,\frac{\partial a_y}{\partial x}\Big|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\,\frac{\partial a_y}{\partial y}\Big|_{r=0} + \cdots$$

Por lo tanto, la integral de línea nos queda como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -\left[a_x|_{r=0} + r\cos(\varphi)\,\frac{\partial a_x}{\partial x}\Big|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\,\frac{\partial a_x}{\partial y}\Big|_{r=0}\right] r\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi +$$
$$+ \int_0^{2\pi}\left[a_y|_{r=0} + r\cos(\varphi)\,\frac{\partial a_y}{\partial x}\Big|_{r=0} + r\mathrm{sen}(\varphi)\,\frac{\partial a_y}{\partial y}\Big|_{r=0}\right] r\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\,,$$

con los cual

$$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \pi r^2\left\{\frac{\partial a_y}{\partial x}\Big|_{r=0} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big|_{r=0}\right\} + O\left(r^3\right)\,.$$

Finalmente vemos que la componente del rotacional en el origen del plano xy es igual al límite de la circulación a lo largo de una curva cerrada, dividida entre el área de la superficie que encierra la curva cerrada.

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}\Big|_{r=0} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Big|_{r=0} = \lim_{r\to 0}\frac{\Gamma}{\pi r^2}\,.$$

Hasta aquí desarrollamos el caso particular para la circulación del campo $\mathbf{a}(x,y,z)$ en el plano xy, pero como demostraremos en la sección 5.3.4.2, en general podremos expresar la relación entre circulación y rotacional como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S\,.$$

Esta relación constituye el Teorema de Stokes y será considerada en detalle en la sección 5.3.4.2

Borrador Preliminar

5.2.3.4 Rotacionales y velocidades angulares

Considere un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Entonces la velocidad tangencial de un punto P, con una posición $\mathbf{r}$ medida a un origen O situado en ese eje, siempre es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}\,(\omega_y z - \omega_z y) + \hat{\mathbf{j}}\,(\omega_z x - \omega_x z) + \hat{\mathbf{k}}\,(\omega_x y - \omega_y x)\ ,$$

y su rotacional será

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (\partial_z v_x - \partial_x v_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (\partial_x v_y - \partial_y v_x)\,\hat{\mathbf{k}} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}\ ,$$

es decir, por ser un cuerpo rígido la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es independiente de $\mathbf{r}$; o lo que es lo mismo, todo el cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular. Con ello tendremos que

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})^i &= \varepsilon^{ijk}\partial_j(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_k = \varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\omega^l r^m = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmk}\partial_j(\omega^l r^m) = \left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l\right)\partial_j\left(\omega^l r^m\right) \\
&= \left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l\right)\omega^l\partial_j r^m = \left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l\right)\omega^l\delta^m_j = \delta^i_l\delta^j_m\omega^l\delta^m_j - \delta^i_m\delta^j_l\omega^l\delta^m_j \\
&= 3\omega^i - \omega^i = 2\omega^i\,.
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Si no hubiésemos utilizado la notación de índices tendríamos

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})_x &= (\partial_y v_z - \partial_z v_y) = \partial_y\,(\omega_x y - \omega_y x) - \partial_z\,(\omega_z x - \omega_x z) = 2\omega_x\,, \\
(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})_y &= (\partial_z v_x - \partial_x v_z) = \partial_z\,(\omega_y z - \omega_z y) - \partial_x\,(\omega_x y - \omega_y x) = 2\omega_y\,, \\
(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})_z &= (\partial_x v_y - \partial_y v_x) = \partial_x\,(\omega_z x - \omega_x z) - \partial_y\,(\omega_y z - \omega_z y) = 2\omega_z\,.
\end{aligned}$$

Otra vez, el rotacional de un campo de velocidades de un cuerpo (que rota) "detecta" su velocidad angular.

5.2.3.5 Rotacionales y coordenadas curvilíneas

Una vez más recurrimos a una definición para el rotacional independiente del sistemas de coordenadas

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint \hat{\mathbf{n}}_s \times \mathbf{a}\,\mathrm{d}S\,,$$

y del mismo modo que calculamos el flujo a través de las distintas capas de un volumen podremos (no lo haremos y se lo dejaremos al lector) demostrar que para un sistema de coordenadas ortogonales generalizado tendremos:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \frac{|\mathrm{e}_1\rangle}{h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(h_3a^3\right)}{\partial q^2} - \frac{\partial\left(h_2a^2\right)}{\partial q^3}\right] + \frac{|\mathrm{e}_2\rangle}{h_1h_3}\left[\frac{\partial\left(h_1a^1\right)}{\partial q^3} - \frac{\partial\left(h_3a^3\right)}{\partial q^1}\right] + \frac{|\mathrm{e}_3\rangle}{h_1h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2a^2\right)}{\partial q^1} - \frac{\partial\left(h_1a^1\right)}{\partial q^2}\right]\,.$$

de manera más compacta

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}]^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = \frac{1}{h_{\hat{\jmath}}h_{\tilde{k}}}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial\left(h_{\hat{k}}a^k\right)}{\partial q^j}\,|\mathrm{e}_i\rangle = \frac{1}{h}\begin{vmatrix} h_1\,|\mathrm{e}_1\rangle & h_2\,|\mathrm{e}_2\rangle & h_3\,|\mathrm{e}_3\rangle \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ h_1a^1 & h_2a^2 & h_3a^3 \end{vmatrix}\,,$$

donde los índices repetidos i, j, k indican suma; mientras que los índices $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ no indican suma sino que replican los valores de los índices j, k y $h = h_1h_2h_3$.

Borrador Preliminar

Ejemplo 5.13 Consideremos el siguiente campo vectorial en coordenadas cilíndricas para $z \geq 0$

$$\mathbf{A} = z\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi = z\left[-\mathrm{sen}(\varphi)\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\,\hat{\mathbf{j}}\right] = -\frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}}\,,$$

con lo cual el campo rotacional del campo vectorial $\mathbf{A}$ será

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\left[-\frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}}\right] = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Es claro que el campo vectorial y su campo rotacional son ortogonales

$$\left[-\frac{z\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}}\right]\cdot\left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{k}}\right] = 0\,.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{d}\lambda = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\mathrm{d}z\,.$$

Las dos primeras ecuaciones proveen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow y\,(x) = xC_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \tilde{C}_1 & \Rightarrow x(\lambda) = \lambda\tilde{C}_1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \tilde{C}_2 & \Rightarrow y(\lambda) = \lambda\tilde{C}_2 \end{cases}$$

con

$$C_1 = cte\,; \quad \tilde{C}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+(C_1)^2}} = cte\,; \quad \tilde{C}_2 = -\frac{C_1}{\sqrt{1+(C_1)^2}} = C_1\tilde{C}_1 = cte\,.$$

Finalmente,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\lambda \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z}{x\sqrt{1+(C_1)^2}} = \frac{z}{\lambda\tilde{C}_1\sqrt{1+(C_1)^2}} = -\frac{z}{\lambda}\,,$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{z}{\lambda} \quad \Rightarrow z(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\tilde{C}_3\,.$$

◁

Ejemplo 5.14 Supongamos una circunferencia con radio $r = 2$, la cual viene descrita paramétricamente por el radio vector

$$\mathbf{r}\,(\varphi) = 2\cos(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + 2\sin(\varphi)\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \mathrm{d}\mathbf{r} = 2\left[-\mathrm{sen}(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}}\right]\mathrm{d}\varphi\,,$$

y nos planteamos "hacer circular el campo" $\mathbf{A} = z\,(-\mathrm{sen}(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}})$ a lo largo de la esa trayectoria. Esto es, realizar la siguiente integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} z\,(-\mathrm{sen}(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\mathbf{j})\cdot 2\,(-\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{i} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi z\,,$$

primero el producto $\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ y luego se integra. El campo vectorial $\mathbf{A}$ está representado en la figura 5.12.

Hemos utilizado el símbolo $\oint$ para denotar la integral de línea en un circuito cerrado. Es la primera idea de integrales de campos vectoriales que veremos con más detalles en las sección 5.3.

Es interesante comparar este resultado con el flujo del campo de Rotacionales a través de la superficie que

Borrador Preliminar

delimita la circunferencia de radio $r = 2$. Vale decir

$$\iint (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \mathrm{d}S = \iint \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \mathbf{k}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= z \iint \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = z \iint \frac{\mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\theta}{r} = z \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 4\pi z\,.$$

Esta "coincidencia" no es tal, corresponde a otro teorema integral para campos vectoriales, el *Teorema de Stokes* (sección 5.3.4.2, página 404) mediante el cual se convierte una integral cerrada de línea de un campo vectorial en el flujo del campo de rotacionales. Este teorema lo estudiaremos con detalle en la sección 5.3.4.2. ◁

5.2.4 Formulario del operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$

El operador *nabla*, $\boldsymbol{\nabla}$, en las fórmulas anteriores actúa como un funcional lineal, esto es, dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario, el cual deberá ser demostrado por el lector

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\varphi + \chi\psi) &= \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla}(\chi\psi) = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \psi\boldsymbol{\nabla}\chi + \chi\boldsymbol{\nabla}\psi \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} + \varphi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\cdot\mathbf{b} \\
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\mathbf{b}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\times\mathbf{b} + \varphi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}\,,
\end{aligned}$$

pero si consideramos las cantidades $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ las cosas pueden cambiar mucho

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} \\
\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - (\nabla\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} \\
\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\,.
\end{aligned}$$

Abajo, en el ejemplo de la página 374, desarrollaremos el primero de estos casos

Por otro lado, es evidente que

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b}) \neq (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad a^j\left(\partial^i b_i\right) \neq b_i(\partial^i a^j)\,,$$

por cuanto en las partes izquierdas las derivadas actúan sobre las componentes de $\mathbf{b}$, mientras que en las partes derechas es sobre las componentes de $\mathbf{a}$.

Otros casos importantes se presentan cuando los campos escalares y/o vectoriales son a su vez funciones de un campo escalar. Es decir, funciones compuestas. Esto es

$$\psi = \psi(\chi(\mathbf{r})) \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r}))\,.$$

En este caso, tendremos

$$\boldsymbol{\nabla}\psi(\chi(\mathbf{r})) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\chi}\boldsymbol{\nabla}\chi; \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \boldsymbol{\nabla}\chi\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}; \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = (\boldsymbol{\nabla}\chi)\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\,.$$

Para demostrar, por ejemplo, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \boldsymbol{\nabla}\chi\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}$, utilizamos la estrategia de Taylor y expandimos el campo vectorial alrededor de un determinado punto, digamos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ arbitrario. Esto es

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}(\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^2}\right|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 + \cdots$$

aplicando la divergencia a ambos miembros queda como

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\cdot[\mathbf{a}(\mathbf{r}_0)] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}(\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))\right] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^2}\right|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2\right] + \cdots$$

Borrador Preliminar

con lo cual

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi\left(\mathbf{r}\right)+\left(\chi\left(\mathbf{r}\right)-\chi\left(\mathbf{r}_0\right)\right)\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^2}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi\left(\mathbf{r}\right)+\frac{1}{2}\left(\chi\left(\mathbf{r}\right)-\chi\left(\mathbf{r}_0\right)\right)^2\left.\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi^3}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi\left(\mathbf{r}\right)+\cdots$$

Esta relación vale para todo $\mathbf{r}$, en particular para $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$. Con lo cual

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}|_{\mathbf{r}_0}=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\right|_{\mathbf{r}_0}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi\left(\mathbf{r}_0\right)\quad\Longrightarrow\quad\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\chi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi\left(\mathbf{r}\right)\,,$$

ya que $\mathbf{r}_0$ es arbitrario, con lo cual queda demostrado.

Ejemplo 5.15 La fuerza de Lorentz $\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$ es la fuerza sobre una partícula con carga q que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ en un campo eléctrico $\mathbf{E}$, y una inducción magnética $\mathbf{B}$. Queremos mostrar que

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F}&=q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\\ \mathbf{E}&=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}&=\mathbf{B}\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\mathbf{F}=q\left[-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)\right].$$

Podemos ver

$$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)=q\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mathbf{v}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)&=\epsilon_{jkl}v^k\epsilon^{lmn}\partial_mA_n\mathbf{e}^j=\epsilon_{jkl}\epsilon^{mnl}v^k\partial_mA_n\mathbf{e}^j=\left(\delta^m_j\delta^n_k-\delta^m_k\delta^n_j\right)v^k\partial_mA_n\mathbf{e}^j\\&=\left(v^k\partial_jA_k-v^k\partial_kA_j\right)\mathbf{e}^j,\end{aligned}$$

con lo cual

$$F^j=q\left(-\partial^j\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+v^k\partial^jA_k-v^k\partial_kA^j\right)=q\left(-\partial^j\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-v^k\partial_kA^j+\partial^j\left(v^kA_k\right)-A_k\left(\partial^jv^k\right)\right)$$

$$F^j=q\left(-\partial^j\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-v^k\partial_kA^j+\partial^j\left(v^kA_k\right)\right)=q\left[-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)\right]$$

ya que

$$\frac{\mathrm{d}A^j}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial A^j}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial A^j}{\partial t}=v^i\partial_iA^j+\frac{\partial A^j}{\partial t}\,;\quad\partial^jv^k=\frac{\partial v^k}{\partial x^j}=0\quad\text{y}\quad v^k=v^k(t)\,.$$

◁

Ejemplo 5.16 En coordenadas cilíndricas un campo vectorial tiene por componentes $(0,\mathrm{sen}(\varphi),z)$. Calculemos:

1. La divergencia en coordenadas esféricas.

   Una vez más $\left(x^{1'},x^{2'},x^{3'}\right)\rightleftharpoons(r,\theta,\varphi)$ y $\left(x^1,x^2,x^3\right)\rightleftharpoons(\rho,\varphi,z)$

$$A^{1'}=\frac{\partial x^{1'}\left(x^m\right)}{\partial x^k}A^k;\qquad A^{2'}=\frac{\partial x^{2'}\left(x^m\right)}{\partial x^k}A^k;\qquad A'^3=\frac{\partial x^{3'}\left(x^m\right)}{\partial x^k}A^k$$

   con

$$r=\sqrt{z^2+\rho^2}\,;\quad\theta=\arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)\,;\quad\varphi=\varphi\quad\Longleftrightarrow\quad\rho=r\mathrm{sen}(\theta)\,;\quad\varphi=\varphi\,;\quad z=r\cos(\theta)$$

Borrador Preliminar

con lo cual

$$A^{1'} = \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^k} A^k = \frac{\partial \sqrt{z^2+\rho^2}}{\partial z} z = \frac{z^2}{\sqrt{(z^2+\rho^2)}} = \frac{(r\cos(\theta))^2}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\text{sen}(\theta))^2}} = r\cos^2\theta$$

$$A^{2'} = \frac{\partial x^{2'}(x^m)}{\partial x^k} A^k = \frac{\partial \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial z} z = \frac{-\rho z}{z^2+\rho^2} = \frac{-r^2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\text{sen}(\theta))^2} = -\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

$$A^{3'} = \text{sen}(\varphi)$$

de modo que el campo vectorial, en esféricas es

$$(0, \text{sen}(\varphi), z) \quad \rightleftharpoons \quad \left(r\cos^2\theta, -\text{sen}(\theta)\cos(\theta), \text{sen}(\varphi)\right)$$

y la divergencia

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\text{sen}(\theta)}\left[\frac{\partial\left(r^2\text{sen}(\theta)\, r\cos^2(\theta)\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\text{sen}(\theta)\left(-\text{sen}(\theta)\cos(\theta)\right)\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(r\left(\text{sen}(\varphi)\right)\right)}{\partial\varphi}\right]$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{3r\text{sen}(\theta)\cos^2(\theta) - 3\text{sen}(\theta)\cos^2(\theta) + \text{sen}(\theta) + \cos(\varphi)}{r\text{sen}(\theta)}.$$

2. El rotacional en coordenadas cartesianas.
Ahora $\left(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\right) \rightleftharpoons (x, y, z)$ y $\left(x^1, x^2, x^3\right) \rightleftharpoons (\rho, \varphi, z)$, con

$$x = \rho\cos(\varphi)\,; \quad y = \rho\text{sen}(\varphi)\,; \quad z = z \quad \Longleftrightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}\,; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,; \quad z = z$$

de allí se siguen para las componentes cilíndricas $\mathbf{A} \rightleftharpoons (0, \text{sen}(\varphi), z)$

$$\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial(\rho\cos(\varphi))}{\partial\varphi}\text{sen}(\varphi) = -\rho\left(1+\cos^2(\varphi)\right) = -\sqrt{x^2+y^2}\left[1+\cos^2\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right] \\
&= -\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
A_y &= \frac{\partial\rho\text{sen}(\varphi)}{\partial\varphi}\text{sen}(\varphi) = \rho\cos(\varphi)\text{sen}(\varphi) = \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\text{sen}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
A_z &= z\,.
\end{aligned}$$

Y el rotacional

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial\left(\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(-\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial y}\right) = \frac{2y^3\hat{\mathbf{k}}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,.$$

◁

Ejemplo 5.17 Demostremos que

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})\,.$$

Borrador Preliminar

El resultado es un gradiente porque $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ es una función escalar. El lado izquierdo de la expresión será

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)\right)^i = \partial^i\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right) = \partial^i\left(a_j b^j\right) = \left(\partial^i a_j\right) b^j + \left(\partial^i b_j\right) a^j\,,$$

mientras que el lado derecho

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)\right)^i &= \left(a_j\partial^j\right) b^i + \left(b_j\partial^j\right) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_k + \varepsilon^{ijk} b_j \left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}\right)_k \\
&= \left(a_j\partial^j\right) b^i + \left(b_j\partial^j\right) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn}\partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} b_j \varepsilon_{kmn}\partial^m a^n \\
&= \left(a_j\partial^j\right) b^i + \left(b_j\partial^j\right) a^i + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j\partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} b_j\partial^m a^n \\
&= \left(a_j\partial^j\right) b^i + \left(b_j\partial^j\right) a^i + \left(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n\right) a_j\partial^m b^n + \\
&\qquad + \left(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n\right) b_j\partial^m a^n \\
&= a_j\partial^j b^i + b_j\partial^j a^i + \delta^i_m\delta^j_n a_j\partial^m b^n - \delta^j_m\delta^i_n a_j\partial^m b^n + \\
&\qquad + \delta^i_m\delta^j_n b_j\partial^m a^n - \delta^j_m\delta^i_n b_j\partial^m a^n \\
&= a_j\partial^j b^i + b_j\partial^j a^i + a_n\partial^i b^n - a_m\partial^m b^i + b_n\partial^i a^n - b_m\partial^m a^i \\
&= \underbrace{a_j\partial^j b^i - a_m\partial^m b^i}_{=0} + \underbrace{b_j\partial^j a^i - b_m\partial^m a^i}_{=0} + a_n\partial^i b^n + b_n\partial^i a^n \\
&= a_n\partial^i b^n + b_n\partial^i a^n = \partial^i\left(a_j b^j\right) = \partial^i\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)\,.
\end{aligned}$$

◁

5.2.5 *Nabla* dos veces y el laplaciano

Considerando a *Nabla,* $\boldsymbol{\nabla}$, como un funcional surge la pregunta de su aplicación repetida sobre distintos objetos. Consideremos primero las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas. Esto es

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi = \left[\varepsilon^{ijk}\partial_j\partial_k\phi\right]\hat{\mathbf{i}}_i = 0 \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}\right) = \left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_i = \left[\partial^j\partial^i a_j\right]\hat{\mathbf{i}}_i \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}\right) = 0 \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}\right) &= \left[\varepsilon^{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial^l a^m\right]\hat{\mathbf{i}}_i = \left[\left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l\right)\partial_j\partial^l a^m\right]\hat{\mathbf{i}}_i \\
&= \left[\partial^i\partial_j a^j\right]\hat{\mathbf{i}}_i - \left[\partial_j\partial^j a^i\right]\hat{\mathbf{i}}_i = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}\right) - \Delta\mathbf{a}\,.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

5.2.5.1 Laplaciano y campos escalares

Más allá de la gimnasia de índices para determinar la expresión de la relación vectorial, quizá la más importante de las aplicaciones es el laplaciano, $\boldsymbol{\nabla}^2 \equiv \Delta$, el cual en $\mathbb{R}^3$ y en coordenadas cartesianas puede expresarse como:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}^2\phi = \Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi\,.$$

La importancia el laplaciano reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden y el laplaciano las genera en el espacio, como la solución a la ecuación armónica, o ecuación e Laplace:

$$\Delta\phi = \partial^i\partial_i\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi + \partial_{zz}\phi = 0\,,$$

que es de gran importancia en varias áreas de la Física: electrostática, electrodinámica, teoría de la gravitación, ondas, mecánica de fluídos, mecánica cuántica; por citar algunas.

Borrador Preliminar

Se puede demostrar fácilmente que el laplaciano cumple con

$$\Delta\left(\phi+C\psi\right)=\Delta\phi+C\Delta\psi\,,\qquad \Delta\left(\phi\psi\right)=\phi\Delta\psi+\psi\Delta\phi+2\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\,.$$

5.2.5.2 Laplaciano y campos vectoriales

Inspirado en la forma que toma un campo vectorial en coordenadas cartesianas, definiremos el laplaciano de un campo vectorial como la relación

$$\Delta\,\mathbf{a}=\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}\right)-\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}\right)\,.$$

Desarrollando esta expresión en coordenadas cartesianas tendremos que

$$\Delta\,\mathbf{a}=\left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right)-\left(\partial^i\partial_j a^j-\partial_j\partial^j a^i\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_i\quad\Longrightarrow\quad\Delta\mathbf{a}=\left(\partial_j\partial^j a^i\right)\hat{\mathbf{i}}_i\equiv\left(\Delta a^i\right)\hat{\mathbf{i}}_i\,.$$

Es decir, que el laplaciano de un campo vectorial, **expresado en coordenadas cartesianas**, es igual al vector cuyas componentes son los laplacianos de las componentes del campo original. Es importante resaltar que la expresión $\Delta\mathbf{a}=\left(\Delta a^i\right)\hat{\mathbf{i}}_i$ se cumple únicamente en coordenadas cartesianas pero la definición que hemos propuesto al desarrollar $\Delta\,\mathbf{a}$, en una ecuación vectorial y es, por lo tanto, válida en cualquier sistema de coordenadas.

El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir un formulario de relaciones fácilmente demostrables

$$\Delta\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)=\boldsymbol{\nabla}\left(\Delta\phi\right);\qquad\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\Delta\mathbf{a}\right)=\Delta\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}\right);\qquad\boldsymbol{\nabla}\times\left(\Delta\,\mathbf{a}\right)=\Delta\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}\right)\,.$$

Un campo vectorial $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{r})$ de denomina un campo laplaciano si es

$$\text{irrotacional}:\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=0\quad\text{y}\quad\text{solenoidal}:\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=0\,.$$

en todo punto del campo. De esta manera, un campo laplaciano es un potencial, es decir:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=0\quad\Rightarrow\mathbf{a}=\boldsymbol{\nabla}\phi$$

Este campo queda completamente determinado por el potencial escalar que satisface la ecuación de Laplace

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi=\boldsymbol{\Delta}\phi=0\,.$$

A las soluciones de esta ecuación se les denomina soluciones armónicas. Este tipo de soluciones serán consideradas en detalle a lo largo de la sección 5.4.

5.2.5.3 Laplaciano y coordenadas curvilíneas

Considerando las expresiones para el gradiente y la divergencia en coordenadas curvilíneas

$$\text{grad}\,\phi=\boldsymbol{\nabla}\phi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q^1}\left\langle\mathrm{e}^1\right|+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q^2}\left\langle\mathrm{e}^2\right|+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q^3}\left\langle\mathrm{e}^3\right|\,,$$

y

$$\text{div}\,\mathbf{a}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(a^1(q^i)h_2h_3\right)}{\partial q^1}+\frac{\partial\left(a^2(q^i)h_3h_1\right)}{\partial q^2}+\frac{\partial\left(a^3(q^i)h_1h_2\right)}{\partial q^3}\right]\,,$$

respectivamente, es fácil llegar a la expresión para el laplaciano en coordenadas curvilíneas

$$\nabla^2\phi\equiv\Delta\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q^1}\right)+\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q^2}\right)+\frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{h_2h_1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q^3}\right)\right]\,.$$

Antes de continuar con la siguiente sección, consideremos estos dos puntos importantes:

- De la divergencia (5.2.2.2) y el rotacional (5.2.3.5) tenemos

Borrador Preliminar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a} &= \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{h}{h_{\tilde{i}}}\left[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}\right]^i\right]=\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\frac{h}{h_{\tilde{i}}}\frac{1}{h_{\tilde{j}}h_{\tilde{k}}}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial\left(h_{\tilde{k}}a^k\right)}{\partial q^j}\right]=\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\varepsilon^{ijk}\frac{\partial\left(h_{\tilde{k}}a^k\right)}{\partial q^j}\right]\\ &= \frac{1}{h}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial^2\left(h_{\tilde{k}}a^k\right)}{\partial q^i\partial q^j}=0\end{aligned}$$

debido a la simetría para i y j en la segunda derivada y la antisimetría del Levi-Civita cuando se intercambia i por j.

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}=0\,.$$

- Del gradiente (5.2.1.2) y el rotacional (5.2.3.5) tenemos

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi=\frac{1}{h_{\tilde{j}}h_{\tilde{k}}}\varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(h_{\tilde{k}}\left[\boldsymbol{\nabla}\phi\right]^k\right)|\mathrm{e}_i\rangle=\frac{1}{h_{\tilde{j}}h_{\tilde{k}}}\varepsilon^{ijk}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial q^j\partial q^k}\right]|\mathrm{e}_i\rangle=0\,.$$

Por la misma razón del caso anterior.

Entonces se tiene que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi=0\,.$$

A los campos vectoriales con rotacional nulo se les denominan campos *irrotacionales*. Por (5.2.5.3) se tiene entonces que el gradiente es irrotacional. Estos campos se pueden expresar siempre como el gradiente de una función escalar. Por ejemplo, para el campo electrostático, el hecho de que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0$ implica que $\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$.

Por otro lado, cuando un campo vectorial tiene divergencia nula, ecuación (5.2.5.3), este campo puede siempre expresarse como el rotacional de otro campo vectorial y se denominan campos *solenoidales*. Por ejemplo, el campo magnético por cumplir con $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$ entonces también cumple con $\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$.

Ejemplo 5.18 Demostremos la relación

$$\Delta\mathbf{A}\equiv\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A}=\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)-\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)$$

y a partir de ella encontraremos las componentes del Laplaciano $\Delta\mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas.

Veamos. En coordenadas cartesianas tendremos que

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A} &= \partial^i\left(\partial^jA_j\right)\mathbf{e}_i-\varepsilon^{ijk}\left[\partial_j\left(\varepsilon_{klm}\partial^lA^m\right)\right]\mathbf{e}_i=\left[\partial^i\left(\partial^jA_j\right)-\left(\delta^i_l\delta^j_m-\delta^j_l\delta^i_m\right)\partial_j\left(\partial^lA^m\right)\right]\mathbf{e}_i\\ &= \left[\partial^i\left(\partial^jA_j\right)-\partial_j\left(\partial^iA^j\right)+\partial_j\left(\partial^jA^i\right)\right]\mathbf{e}_i=\left[\partial_j\partial^jA^i\right]\mathbf{e}_i\,.\end{aligned}$$

Para encontrar la expresión del laplaciano de un vector en coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{A}&=\Delta A_x\hat{\mathbf{i}}+\Delta A_y\hat{\mathbf{j}}+\Delta A_z\hat{\mathbf{k}}=\Delta A_x\left(\cos(\varphi)\mathbf{e}_r-\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)+\Delta A_y\left(\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{e}_r+\cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\right)+\Delta A_z\mathbf{e}_z\\ &=\left(\Delta A_x\cos(\varphi)+\Delta A_y\mathrm{sen}(\varphi)\right)\mathbf{e}_r+\left(\Delta A_y\cos(\varphi)-\Delta A_x\mathrm{sen}(\varphi)\right)\mathbf{e}_\varphi+\Delta A_z\mathbf{e}_z\,,\end{aligned}$$

ya que

$$\mathbf{i}=\cos(\varphi)\mathbf{e}_r-\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\,,\ \mathbf{j}=\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{e}_r+\cos(\varphi)\mathbf{e}_\varphi\,,\ \mathbf{k}=\mathbf{e}_z\,;\quad x=r\cos(\varphi)\,,\quad y=r\mathrm{sen}(\varphi)\,,\quad z=z\,.$$

Notemos que

$$\Delta A_x=\partial_j\partial^jA_x=\frac{\partial^2A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_x}{\partial z^2}\,,\quad \Delta A_y=\partial_j\partial^jA_y=\frac{\partial^2A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_y}{\partial z^2}\,,$$

$$\Delta A_z=\partial_j\partial^jA_z=\frac{\partial^2A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}$$

son las componentes **cartesianas**.

Borrador Preliminar

◁

Ejemplo 5.19 Las fuerzas de mareas corresponden a la atracción de la luna sobre las partículas (el agua) en la superficie de la tierra ¿Cuál es el potencial que corresponde a las fuerzas de marea?

Recordemos que la fuerza gravitacional que produce las mareas es

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\mathbf{r}\,,$$

donde r_{Mm} es la distancia (fija) entre los centros Luna y Tierra, y $\mathbf{r}$ es el radio vector del centro de la Luna a la partícula que se ve afectada.

Si ubicamos la Tierra en el centro de coordenadas y la Luna en el eje z tendremos:

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\mathbf{r} = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\left(-x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\phi$$

donde:

$$-G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\,, \quad -G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}\,, \quad G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}2z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

integrando nos queda

$$\phi = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\frac{x^2}{2} + \mathcal{G}(y,z) \quad \Rightarrow -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\mathcal{G}(y,z)}{\partial y} = -G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}y \quad \Rightarrow \mathcal{G}(y,z) = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\frac{y^2}{2} + \mathcal{K}(z)$$

$$\phi = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\frac{x^2}{2} + G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\frac{y^2}{2} + \mathcal{K}(z) \quad \Rightarrow -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\mathcal{K}(z)}{\partial z} = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}2z \quad \Rightarrow \mathcal{K}(z) = -G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}z^2$$

Por lo tanto:

$$\phi = G\frac{Mm}{r_{Mm}^3}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2\right].$$

◁

5.2.6 Derivadas direccionales de campos vectoriales

En la sección 5.2.1 discutimos el concepto de derivada direccional de campos escalares. Ahora consideraremos este mismo concepto pero aplicado a campos vectoriales. Formalmente y como siempre, presentamos la idea de derivada como cociente incremental. Dados dos puntos M y M' y un vector $\mathbf{u}$ que los une (va de $M \to M'$), entonces por definición

$$\mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}|a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = \lim_{M'\to M}\frac{\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)}{M' - M} \quad \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}\right)^i = \left(\frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u}\right) = \lim_{M'\to M}\frac{a^i(M') - a^i(M)}{M' - M}\,,$$

por consiguiente, si $\mathbf{a}$ tiene por componentes cartesianas (en general cualquier sistema de coordenadas ortogonales) (a_x, a_y, a_z) las componentes del vector derivado serán $\left(\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}u}, \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}u}\right)$.

De modo que inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, i.e ecuación (5.11), podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}$, esto es

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{u} = u^i\partial_i\varphi \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u} = \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}a^i = u^j\partial_j a^i \quad \Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}|a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a}\,.$$

Otra vez, en coordenadas cartesianas se tiene que

$$\mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\mathbf{a} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} = \left(u^i\partial_i a^j\right)\mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}(\circ) \equiv \frac{\mathrm{d}(\circ)}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\circ) \equiv u^i\partial_i(\circ)\,.$$

Borrador Preliminar

Figura 5.14: Contribuciones a la variación de la velocidad en un fluido.

5.2.6.1 El campo de aceleraciones de un fluido

El ejemplo más estándar es la descripción del campo de aceleraciones de un fluido en movimiento. El campo de aceleraciones de un fluido, como de costumbre, es la variación del campo de velocidades respecto al tiempo. Esto es, $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$. Para escribir la expresión de este campo de aceleraciones, supongamos que un fluido se mueve y registra un campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ el cual, en general, será inhomogéneo y no estacionario. Identificamos una porción del fluido (partícula) cualquiera y observamos que en un intervalo de tiempo $\mathrm{d}t$ esa porción identificada se mueve de $M \to M'$ y registra un incremento en su velocidad de $\mathbf{v}$ en M a $\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}$ en M':

$$\mathbf{v}\left(M\right) \equiv \mathbf{v}\left(\mathbf{r}, t\right) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}\left(M'\right) \equiv \mathbf{v}\left(\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}, t + \mathrm{d}t\right) .$$

Tal y como ejemplificamos en la figura 5.14, este incremento proviene de dos contribuciones. Una, llamada local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad, $\mathbf{v}$, en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).

$$\mathrm{d}\mathbf{v}_t = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u\,,$$

Visto de otro modo un poco más informal, dado que el campo es función de dos variables y una de ellas vectorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}\left(\mathbf{r}, t\right) \quad \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} .$$

De la discusión anterior es claro que $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}u}$ es la derivada direccional del campo de velocidades a lo largo del vector unitario $\mathbf{u}$ que apunta de $M \to M'$. Ahora bien, para este caso tenemos que:

$$\mathrm{d}u = \|\mathrm{d}\mathbf{r}\|\,, \qquad \mathrm{d}u = \|\mathbf{v}\|\,\mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\,,$$

con lo cual la derivada direccional queda como

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v}\,,$$

y finalmente la aceleración como

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad \Rightarrow a^i = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}\,,$$

donde hemos representado las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración como v^i y a^i, respectivamente.

Es importante hacer una reflexión un poco más física de las contribuciones. La contribución local proviene de la variación del vector (por la dependencia temporal) alrededor del punto, sin importar la dirección que sigue

Borrador Preliminar

al partícula y la contribución convectiva proviene de la inhomogeneidad del campo de velocidades. Esto es de la variación del campo de velocidades según la dirección que siga la partícula.

5.2.7 La derivada covariante

En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases locales $\{\mathbf{e}_i\}$ son funciones de las coordenadas,

$$|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{e}^i| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)\,.$$

En esta sección vamos a adaptar nuestra notación de *bras* y *kets* a expresiones de vectores. Así, los vectores base serán los $\{\mathbf{e}_i\}$ y sus duales corresponderán a $\{\mathbf{e}^j\}$. De este modo los campos vectoriales y duales serán

$$|\mathbf{A}\rangle = A^i\,|\mathbf{e}_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = A^i\mathbf{e}_i \qquad \text{y} \qquad \langle\mathbf{A}| = A_j\,\langle\mathbf{e}^j| \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^\star = A_j\mathbf{e}^j\,,$$

respectivamente.

Si el campo vectorial es homogéneo, es decir, tiene magnitud y dirección constante, entonces construimos la variación de sus componentes y de los vectores base como

$$\mathbf{A} = A^i\mathbf{e}_i \Rightarrow (A^i + \mathrm{d}A^i)(\mathbf{e}_i + \mathrm{d}\mathbf{e}_i) \equiv A^i\mathbf{e}_i + \underbrace{\mathbf{e}_i\mathrm{d}A^i + A^i\mathrm{d}\mathbf{e}_i + \mathrm{d}A^i\mathrm{d}\mathbf{e}_i}_{\approx\Delta A^i=0}\,,$$

si nos quedamos sólo con los términos a primer orden: $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{e}_i\mathrm{d}A^i + A^i\mathrm{d}\mathbf{e}_i = 0$, esto significa que el diferencial de un campo vectorial homogéneo se anula,

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j = 0\,.$$

Desde un punto de vista geométrico, un campo vectorial homogéneo se puede interpretar como el resultado de desplazar al vector $\mathbf{A}$ paralelo a si mismo por todos los puntos del espacio, esto significa que la condición $\partial_j A^i = A^i_{,j} = 0$ podría ser considerada como la condición del desplazamiento paralelo.

En general el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene a ser:

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k\frac{\partial\mathbf{e}_k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k\frac{\partial\mathbf{e}_k}{\partial q^j}\,.$$

Claramente en el primer término tenemos la componente $\frac{\partial A^k}{\partial q^j}$ de un campo vector, mientras que el segundo término $A^k\frac{\partial\mathbf{e}_k}{\partial q^j}$ es una mezcla de términos que tenemos que expresar en la misma base $\mathbf{e}_i$. Es decir, la variación de los vectores base respecto a las coordenadas se puede expresar como una combinación lineal de los vectores base de la forma

$$\mathbf{D}_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_j \equiv \frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)^i\mathbf{e}_i \equiv \Gamma^i_{jk}\mathbf{e}_i \;\Rightarrow\; \Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^i\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right) \equiv \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{D}_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_j\,.$$

Nótese que la variación de la base respecto a las coordenadas es una derivada direccional de la base en la dirección de las coordenadas como lo expresamos en la sección 5.2.6. Igualmente hemos identificado, $\Gamma^i_{jk} = \mathbf{e}^i\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial q^k}\right)$, como la conexión (o *símbolos de Christoffel del segundo tipo*) y son las componentes de la variación de la base respecto a las coordenadas.

Del mismo modo podemos describir la variación de la base dual $\mathbf{e}^j$ respecto a la base coordenadas como

$$\mathbf{D}_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}^j \equiv \frac{\partial\mathbf{e}^j}{\partial q^k} = -\left(\frac{\partial\mathbf{e}^j}{\partial q^k}\right)_i\mathbf{e}^i \equiv -\Gamma^j_{ik}\mathbf{e}^i\,.$$

Es importante señalar que el signo menos en surge de la dualidad de las bases ortonormales $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^j = \delta^j_i$, entonces

$$\frac{\partial(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^j)}{\partial q^k} = \frac{\partial(\delta^j_i)}{\partial q^k} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{e}^j\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial q^k} + \mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{e}^j}{\partial q^k} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{e}^i\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial q^k} = -\mathbf{e}_j\cdot\frac{\partial\mathbf{e}^i}{\partial q^k}\,.$$

Por lo tanto, podemos escribir ahora la variación de un campo vectorial, $\mathbf{A}$, respecto a las coordenadas

Borrador Preliminar

generalizadas como

$$\mathbf{D}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = A^i{}_{;j}\mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial q^j} + \Gamma^i_{jk}A^k\right)\mathbf{e}_i = \left(\partial_j A^i + \Gamma^i_{jk}A^k\right)\mathbf{e}_i\,,$$

y equivalentemente para un campo vectorial dual $\mathbf{A}^\star$,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{A}^\star \equiv \frac{\partial \mathbf{A}^\star}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k\frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = A_{i\ ;j}\mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \Gamma^k_{ij}A_k\right)\mathbf{e}^i\,.$$

Hemos denotado como $A^i{}_{;j}$ a la (componente de la) derivada covariante del campo vectorial $\mathbf{A}$. La derivada covariante de un campo vectorial toma en cuenta no sólo el cambio en el campo mismo, a medida que nos movemos a lo largo de las curvas coordenadas, sino que también da cuenta de como cambian las bases. Por lo tanto, si las bases no varían al pasar de un punto a otro (bases rectangulares cartesianas) los símbolos de Christoffel se anulan y la derivada covariante no es más que la derivada normal. Es importante notar que la derivada covariante $A^i{}_{;j}$ transforma como un tensor, mientras que la derivada parcial $A^i{}_{,j} \equiv \partial_j A^i$ no lo hace.

Es fácil convencernos que la derivada covariante de un tensor mixto de rango 2, $\mathcal{T} = T^i_j\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ se puede escribir como

$$\mathbf{D}_{\mathbf{e}_k}\mathcal{T} \equiv T^i_{j\ ;k}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \left(\frac{\partial T^i_j}{\partial q^k} + \Gamma^i_{jm}T^m_k - \Gamma^m_{kj}T^i_m\right)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\,.$$

Los *símbolos de Christoffel del segundo tipo* representan objetos, simétricos bajo el cambio de los dos índices inferiores, con 27 componentes, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. También es posible definir *símbolos de Christoffel del primer tipo*, $\Gamma_{ijk} = g_{im}\Gamma^m_{kj}$, con la misma propiedad de simetría $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$.

Para encontrar la expresión de los *símbolos de Christoffel* en término de la métrica vamos proceder de una manera un tanto heurística. Es claro que para una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \Leftrightarrow \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ los *símbolos de Christoffel* se anulan porque los vectores bases son constante en módulo, dirección y sentido. En este caso particular, la derivada covariante coincide con la derivada parcial $A^i{}_{;j} = A^i{}_{,j} \equiv \partial_j A^i$. La asociación entre derivadas covariantes y derivadas parciales es válida no solo para un campo vectorial sino para cualquier campo tensorial. Entonces tenemos que para el tensor métrico se cumple que $g_{ij\ ;k} = g_{ij,k}$, pero en coordenadas cartesianas $g_{ij,k} = 0$, de forma que su derivada convariante también se anula y como $g_{ij;k} = 0$ es una ecuación tensorial, vale para cualquier sistema de coordenadas. En conclusión: la derivada covariante de la métrica se anula en todos los sistemas de coordenadas.

A partir de este resultado tenemos

$$g_{ij;k} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma^m_{kj}g_{im} - \Gamma^m_{ki}g_{jm} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{i\ kj} - \Gamma_{j\ ki} = 0\,, \\ g_{ki;j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \Gamma^m_{ji}g_{km} - \Gamma^m_{kj}g_{im} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \Gamma_{k\ ji} - \Gamma_{i\ kj} = 0 \quad \text{y} \\ g_{jk;i} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \Gamma^m_{ki}g_{jm} - \Gamma^m_{ij}g_{km} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \Gamma_{j\ ki} - \Gamma_{k\ ij} = 0\,. \end{cases}$$

Seguidamente, despejamos $\Gamma_{i\ kj}$ y llegamos a la siguiente e importante relación:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left[\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}\right] \equiv \frac{1}{2}g^{il}\Gamma_{l\ kj}\,. \tag{5.18}$$

De ahora en adelante, podremos calcular los símbolos de Christoffel a partir de las derivadas de la métrica respecto a las coordenadas.

Revisemos ahora como transforman los símbolos de Christoffel del primer tipo bajo un cambio de coordenadas. Recordemos que un tensor debe trasformar de la siguiente manera

$$T_{i'j'k'} = \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}}\,\frac{\partial q^m}{\partial q^{j'}}\,\frac{\partial q^n}{\partial q^{k'}}\,T_{lmn}\,.$$

Borrador Preliminar

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\Gamma_{i'j'k'} &= \mathbf{e}_{i'}\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_{j'}}{\partial q^{k'}} = \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}}\,\mathbf{e}_l\cdot\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}}\,\mathbf{e}_n\right)\frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}}\\ &= \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}}\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}}\,\mathbf{e}_l\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_n}{\partial q^m} + \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}}\,(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{e}_n)\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}}\right)\\ &= \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}}\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}}\,\Gamma_{lnm} + \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}}\frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}}\,g_{ln}\frac{\partial}{\partial q^m}\left(\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}}\right),\end{aligned}$$

es decir, no transforma como un tensor. Nótese que hemos abusado de la notación haciendo $\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{e}_n \to g_{ln}$.

Es importante tener en cuenta que la derivada covariante es un tensor, a pesar que la derivada parcial y los símbolos de Christoffel que conforman la suma no lo son, es decir, la combinación de estos dos objetos que no son tensores forman un tensor.

Para fijar conceptos, y a modo de repaso listamos lo siguiente:

- Si tenemos un campo escalar $\phi = \phi(q^1, q^2, q^3)$, por gradiente entendemos a un vector cuyas componentes covariantes son
$$\frac{\partial\phi}{\partial q^i} \;\Rightarrow\; \text{grad}\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q^i}\mathbf{e}_i\,. \tag{5.19}$$
En el caso particular de la la derivada direccional de ϕ en la dirección del vector $\mathbf{s}$ se tiene
$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} = \mathbf{s}\cdot\text{grad}\,\phi\,,\quad \text{con}\quad \mathbf{s} = s^i\mathbf{e}_i\,.$$
- Si tenemos un campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q^1, q^2, q^3)$, para la divergencia de $\mathbf{A}$ tendremos que es la contracción de la derivada covariante de $\mathbf{A}$, esto es:
$$\text{div}\,\mathbf{A} \equiv A^i{}_{;i} = \partial_i A^i + \Gamma^i_{ij}A^j\,. \tag{5.20}$$
Para el caso de las componentes covariantes de $\mathbf{A}$, tenemos
$$\text{div}\,\mathbf{A} \equiv A^i{}_{;i} = \left(g^{ij}A_j\right)_{;i} = g^{ij}A_{j;i} = \partial_i A^i + \frac{\partial_i\sqrt{G}}{\sqrt{G}}A^i = \frac{\partial_i\left(\sqrt{G}A^i\right)}{\sqrt{G}}\,.$$
Para esta última expresión hemos utilizado que $g^{ij}_{;k} = 0 \Rightarrow g^{ij}_{;i} = 0$ y denotado el determinante de la métrica por $G \equiv \det[g_{ij}]$. Se dice que el tensor métrico es transparente a la derivada covariante, lo que se conoce como el Teorema de Ricci, vale decir que el tensor métrico es constante para la derivada covariante,
- El Laplaciano de un campo escalar $\phi = \phi(\mathbf{r})$ es la divergencia del gradiente, entonces
$$\Delta\phi = \text{div}\cdot\text{grad}\,\phi = \frac{\partial_i\left[\sqrt{G}(\text{grad}\,\phi)^i\right]}{\sqrt{G}} = \frac{\partial_i\left[\sqrt{G}g^{ij}(\text{grad}\,\phi)_j\right]}{\sqrt{G}} = \frac{\partial_i\left[\sqrt{G}g^{ij}\partial_j\phi\right]}{\sqrt{G}}\,. \tag{5.21}$$
Notemos que si se trata de un sistema de coordenadas ortogonal, entonces: $h_1h_2h_3 = \sqrt{G}$, $g^{ij} = 1/h_i^2$ si $i = j$, en caso contrario $g^{ij} = 0$. Por lo tanto, de la ecuación (5.21) resulta
$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\partial_i\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_j^2}\partial_i\phi\right]$$
- A partir de un tensor de segundo rango podemos construir un tensor antisimétrico, $A_{[i;j]} = A_{i;j} - A_{j;i}$, entonces
$$A_{i;j} = \partial_j A_i - \Gamma^k_{ij}A_k \quad\text{y}\quad A_{j;i} = \partial_i A_j - \Gamma^k_{ji}A_k \;\Rightarrow\; A_{i;j} - A_{j;i} = \partial_j A_i - \partial_i A_j\,.$$
Otra vez, aunque las derivadas parciales de un vector no son tensores, su diferencia antisimétrica sí lo será. Adicionalmente, para el caso tridimensional esa diferencia antisimétrica corresponden con las componentes del rotacional, $(\text{rot}\;A)_{ij} \equiv \partial_j A_i - \partial_i A_j$. De forma y manera que, para el caso de tres

Borrador Preliminar

dimensiones, a este tensor de segundo orden antisimétrico le podemos asociar un vector con componentes contravariantes, de la siguiente forma

$$(\text{rot } \mathbf{A})^i = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\varepsilon^{ijk}(\text{rot } A)_{jk} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\varepsilon^{ijk}\left[\partial_k A_j - \partial_j A_k\right] = \frac{1}{\sqrt{G}}\varepsilon^{ijk}\partial_j A_k\,, \tag{5.22}$$

con i, j, k una permutación cíclica de $1, 2, 3$. Lo que concuerda perfectamente con nuestra definición de rotacional vista anteriormente en la sección 5.2.3.5.

- Finalmente, listamos las expresiones para las derivadas covariantes de un tensor de rango 2

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} = T^{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad &\Rightarrow T^{ij}_{\ ;k} \equiv \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kl}T^{lj} + \Gamma^j_{kl}T^{il} = T^{ij}_{\ ,k} + \Gamma^i_{kl}T^{lj} + \Gamma^j_{kl}T^{il}\,,\\
\mathcal{T} = T_{ij}\,\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \quad &\Rightarrow T_{ij;k} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma^l_{ik}T_{lj} - \Gamma^l_{jk}T_{il} = T_{ij,k} - \Gamma^l_{ik}T_{lj} - \Gamma^l_{jk}T_{il}\,,\\
\mathcal{T} = T^i_{\ j}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad &\Rightarrow T^i_{\ j;k} \equiv \frac{\partial T^i_{\ j}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kl}T^l_{\ j} - \Gamma^l_{jk}T^i_{\ l} = T^i_{\ j,k} + \Gamma^i_{kl}T^l_{\ j} - \Gamma^l_{jk}T^i_{\ l}\,.
\end{aligned}$$

5.2.8 Derivadas absolutas y geodésicas

En las secciones anteriores discutimos como es el proceso de derivar tensores con respecto a las coordenadas, esto nos llevo a al concepto de la derivada covariante. El problema puede tener un enfoque diferente si consideramos el cálculo de la derivada de tensores a lo largo de una curva parametrizada por alguna variable.

Consideremos entonces el problema de encontrar la derivada de un tensor a lo largo de una curva $\mathbf{r}(\lambda)$ que varía respecto al parámetro λ. Para un sistema de coordenadas arbitrario $\{q^i\}$ con vectores base $\{\mathbf{e}_i\}$ un vector genérico se puede escribir como $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$. De manera que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e}_i + a^i\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e}_i + a^i\frac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial q^j}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e}_i + \Gamma^k_{ij}a^i\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e}_k$$

intercambiando los índices mudos i y k, resulta:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda} = \left[\frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^i_{kj}a^k\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\right]\mathbf{e}_i\,. \tag{5.23}$$

La expresión que está dentro de los corchetes suele denominarse la derivada absoluta o intrínseca de las componentes del vector $\mathbf{a}$, a lo largo de la curva descrita por el radio vector $\mathbf{r}(\lambda)$. Usualmente se denota por

$$\frac{\delta a^i}{\delta\lambda} \equiv \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^i_{kj}a^k\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda} = A^i_{\ ;j}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\,.$$

De manera que

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\delta a^i}{\delta\lambda}\mathbf{e}_i = A^i_{\ ;j}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e}_i\,.$$

Por supuesto, se puede repetir los cálculos anteriores para obtener la derivada absoluta de las componentes covariantes:

$$\frac{\delta a_i}{\delta\lambda} \equiv a_{i;j}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\,.$$

También se deriva de manera absoluta tensores de segundo orden, o orden superior, por ejemplo

$$\frac{\delta T_{ij}}{\delta\lambda} \equiv T_{ij;k}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\lambda}\,, \qquad \frac{\delta T^{ij}}{\delta\lambda} \equiv T^{ij}_{\ ;k}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\lambda}\,, \qquad \frac{\delta T^i_{\ j}}{\delta\lambda} \equiv T^i_{\ j;k}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}\lambda}\,.$$

Si consideramos que el parámetro es la longitud de arco s, y si adicionalmente exigimos que el vector tangente $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ a la curva descrita por el vector $\mathbf{r}(s)$ siempre apunte en la misma dirección[5], entonces,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{0}\,.$$

[5]Lo que se conoce en la geometría diferencial como transporte paralelo de un vector

Borrador Preliminar

Al introducir un sistema de coordenadas $\{q^i\}$ junto con una base $\{\mathbf{e}_i\}$, entonces $\boldsymbol{\tau} = \tau^i \mathbf{e}_i$, con $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \tau^i_{;j} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}s} \mathbf{e}_i \,,$$

lo que significa que

$$\left[\frac{\mathrm{d}\tau^i}{\mathrm{d}s} + \Gamma^i_{kj} \tau^k \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}s} \right] \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \,,$$

como $\tau^i = \mathrm{d}q^j/\mathrm{d}s$, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}s} = 0 \,. \tag{5.24}$$

La ecuación (5.24) es la ecuación de la geodésica en el espacio tridimensional real, donde, como sabemos, la distancia mas corta entre dos puntos es una linea recta.

En resumen, una curva cuyo vector tangente es transportado paralelamente a lo lardo de la curva se denomina curva geodésica y viene a estar representada por un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden llamadas ecuaciones de la geodésica. La solución de este conjunto de ecuaciones da como resultado la ecuación paramétrica de la geodésica.

Ejemplo 5.20 El cálculo de los símbolos de Christoffel puede ser un trabajo tedioso, pero si el tensor métrico únicamente tiene elementos en la diagonal muchas de las combinaciones que aparecen en la ecuación (5.18) se anulan.

Consideremos nuevamente coordenadas cilíndricas $(q^1, q^2, q^3) = (\rho, \varphi, z)$, y donde las únicas componentes del tensor métrico diferentes de cero son:

$$g^{11} = g_{11} = 1 \,, \quad g_{22} = \rho^2 \,, \quad g^{22} = 1/\rho^2 \,, \quad g^{33} = g_{33} = 1 \,.$$

El cálculo de $\Gamma^\rho_{\rho\rho}$ se hace de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{1l} \left[\frac{\partial g_{l1}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^l} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ g^{11} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} \right] + g^{12} \left[\frac{\partial g_{21}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2} \right] + g^{13} \left[\frac{\partial g_{31}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^3} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial \rho} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \rho} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \rho} \right] = 0 \,.
\end{aligned}$$

Para $\Gamma^\rho_{\varphi\varphi}$, resulta

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{1l} \left[\frac{\partial g_{l2}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{l2}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^l} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ g^{11} \left[\frac{\partial g_{12}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right] + g^{12} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} \right] + g^{13} \left[\frac{\partial g_{32}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{32}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^3} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} \right] = \frac{1}{2} \left[-2\rho \right] = -\rho \,.
\end{aligned}$$

Y los últimos dos diferentes de cero son $\Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\rho}$

Borrador Preliminar

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{2l}\left[\frac{\partial g_{l2}}{\partial q^1}+\frac{\partial g_{l1}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial q^l}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{g^{21}\left[\frac{\partial g_{12}}{\partial q^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial q^1}\right]+g^{22}\left[\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial q^2}\right]+g^{23}\left[\frac{\partial g_{32}}{\partial q^1}+\frac{\partial g_{31}}{\partial q^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial q^3}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho}\right]=\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\left[2\rho\right]=\frac{1}{\rho}=\Gamma^2_{21}\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si tenemos el siguiente vector $\mathbf{A}=\dfrac{z}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho$, entonces, según las expresiones para la derivada covariante

$$
\begin{aligned}
A^\rho_{;\rho} &= A^1_{;1}=\frac{\partial A^1}{\partial q^1}+\Gamma^1_{1k}A^k=\frac{\partial A^1}{\partial q^1}+\Gamma^1_{11}A^1+\Gamma^1_{12}A^2+\Gamma^1_{13}A^3=\frac{\partial\left(\frac{z}{\rho^2}\right)}{\partial\rho}=-\frac{2z}{\rho^3} \\
A^\rho_{;\varphi} &= A^1_{;2}=\frac{\partial A^1}{\partial q^2}+\Gamma^1_{2k}A^k=\frac{\partial A^1}{\partial q^2}+\Gamma^1_{21}A^1+\Gamma^1_{22}A^2+\Gamma^1_{23}A^3=0 \\
A^\rho_{;z} &= A^1_{;3}=\frac{\partial A^1}{\partial q^3}+\Gamma^1_{3k}A^k=\frac{\partial A^1}{\partial q^3}+\Gamma^1_{31}A^1+\Gamma^1_{32}A^2+\Gamma^1_{33}A^3=\frac{\partial\left(\frac{z}{\rho^2}\right)}{\partial z}=\frac{1}{\rho^2}\,.
\end{aligned}
$$

Y las derivadas del vector $\mathbf{A}$, ecuación son

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q^1} &= A^i_{;1}\mathbf{e}_i=A^1_{;1}\mathbf{e}_1+A^2_{;1}\mathbf{e}_2+A^3_{;1}\mathbf{e}_3 \quad\Rightarrow \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\rho}=-\frac{2z}{\rho^3}\hat{\mathbf{e}}_\rho \\
\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q^2} &= A^i_{;2}\mathbf{e}_i=A^1_{;2}\mathbf{e}_1+A^2_{;2}\mathbf{e}_2+A^3_{;2}\mathbf{e}_3 \quad\Rightarrow \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\varphi}=\mathbf{0} \\
\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial q^3} &= A^i_{;3}\mathbf{e}_i=A^1_{;3}\mathbf{e}_1+A^2_{;3}\mathbf{e}_2+A^3_{;3}\mathbf{e}_3 \quad\Rightarrow \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}=\frac{1}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho\,.
\end{aligned}
$$

◁

Ejemplo 5.21 En coordenadas cilíndricas, $(q^1,q^2,q^3)=(\rho,\varphi,z)$, y para el campo vectorial $\mathbf{A}=\dfrac{z}{\rho^2}\hat{\mathbf{e}}_\rho$, se tiene que según (5.20) la derivada covariante es

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{A}\equiv A^i{}_{;i} &= \partial_i A^i+\Gamma^i_{ij}A^j=\partial_1A^1+\Gamma^1_{1j}A^j+\partial_2A^2+\Gamma^2_{2j}A^j+\partial_3A^3+\Gamma^3_{3j}A^j \\
&= \partial_1A^1+\Gamma^2_{21}A^1=\partial_\rho A^\rho+\Gamma^\varphi_{\varphi\rho}A^\rho=\partial_\rho\left(\frac{z}{\rho^2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{z}{\rho^2}=-\frac{2z}{\rho^3}+\frac{z}{\rho^3}=-\frac{z}{\rho^3}\,.
\end{aligned}
$$

Y para las componentes del rotacional de $\mathbf{A}$, con: $G=\rho^2$ y $A_i=g_{ij}A^j$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\mathbf{A})^1 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\varepsilon^{123}\partial_2A_3+\varepsilon^{132}\partial_3A_2\right]=0 \\
(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\varepsilon^{213}\partial_1A_3+\varepsilon^{231}\partial_3A_1\right]=\frac{1}{\rho}\left[\partial_zA_\rho\right]=\frac{1}{\rho^3} \\
(\operatorname{rot}\mathbf{A})^3 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\varepsilon^{312}\partial_1A_2+\varepsilon^{321}\partial_2A_1\right]=0\,.
\end{aligned}
$$

◁

Ejemplo 5.22 En el caso de coordenadas cilíndricas, se tiene que los únicos símbolos de Christoffel diferentes de cero son:

$$
\Gamma^1_{22}=-\rho\,,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{\rho}\,,
$$

En esas coordenadas las ecuaciones (5.24) resultan ser

$$
\frac{\mathrm{d}^2q^1}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^1_{22}\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}s}=0\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2q^2}{\mathrm{d}s^2}+2\Gamma^2_{12}\frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}s}=0\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2q^3}{\mathrm{d}s^2}=0\,,
$$

es decir:

$$
\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)^2=0\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}s^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}=0\,,\quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}=0\,.
$$

Borrador Preliminar

◁

Practicando con Maxima

1. Consideremos el siguiente campo escalar en coordenadas cartesianas:

$$f = 3x^2y + xz^3 - yz\,,$$

para calcular el gradiente primeros cargamos la librería **vect** y luego hacemos los siguientes pasos.

```
(%i1) load(vect)$
(%i2) f:3*x^ 2*y+x*z^ 3-y*z;
```
(%o2) $x\,z^3 - y\,z + 3\,x^2\,y$

```
(%i3) grad(f);
```
(%o3) $grad\left(x\,z^3 - y\,z + 3\,x^2\,y\right)$

```
(%i4) express(%);
```
(%o4) $\left[\frac{d}{d\,x}\left(x\,z^3 - y\,z + 3\,x^2\,y\right), \frac{d}{d\,y}\left(x\,z^3 - y\,z + 3\,x^2\,y\right), \frac{d}{d\,z}\left(x\,z^3 - y\,z + 3\,x^2\,y\right)\right]$

```
(%i5) gf:ev(%, diff);
```
(%o5) $\left[z^3 + 6\,x\,y, 3\,x^2 - z, 3\,x\,z^2 - y\right]$

Podemos ahora calcular el rotacional del gradiente:

```
(%i6) express(curl(gf));
```
(%o6) $\left[\frac{d}{d\,y}\left(3\,x\,z^2 - y\right) - \frac{d}{d\,z}\left(3\,x^2 - z\right), \frac{d}{d\,z}\left(z^3 + 6\,x\,y\right) - \frac{d}{d\,x}\left(3\,x\,z^2 - y\right), \frac{d}{d\,x}\left(3\,x^2 - z\right) - \frac{d}{d\,y}\left(z^3 + 6\right.\right.$

```
(%i7) rotgf:ev (%, diff);
```
(%o7) $[0, 0, 0]$

Esto significa que el gradiente de la función f es un campo irrotacional.
Para el laplaciano de f podemos hacer

```
(%i8) ev(express(laplacian(f)),diff);
```
(%o8) $6\,x\,z + 6\,y$

También podemos hacer cálculos en otros sistemas de coordenadas, por ejemplo, esféricas:

```
(%i9) spherical;
```
(%o9) $[[\cos\varphi\,r\,\sin\theta, \sin\varphi\,r\,\sin\theta, r\,\cos\theta]\,, r, \theta, \varphi]$

Si queremos calcular el laplaciano del siguiente campo escalar

$$f = r\cos^2(\varphi)\,\cos(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta)\,,$$

primero le decimos al programa que calcule las factores de escala:

```
(%i10) scalefactors(spherical)$
```

luego procedemos a calcular el laplaciano

```
(%i11) f:r*cos(phi)^ 2*cos(theta)*sin(theta)^ 2;
```

Borrador Preliminar

(%o11) $\cos^2\varphi\, r\, \cos\theta\, \sin^2\theta$

(%i12) express(laplacian(f))$

(%i13) trigsimp(ev(%,diff));

(%o13) $-\dfrac{10\,\cos^2\varphi\,\cos\theta\,\sin^2\theta - 2\,\cos\theta}{r}$

Si queremos demostrar la siguiente identidad:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla} f\times\boldsymbol{\nabla} g]=0$$

podemos proceder como se muestra a continuación. Pero primero limpiamos la memoria y cargamos nuevamente la librería

(%i14) kill(all)$ load(vect)$

(%i2) depends ([f, g], [x,y,z]);

(%o2) $[f(x,y,z), g(x,y,z)]$

(%i3) div(grad(f)~ grad(g));

(%o3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)\sim\mathrm{grad}(g))$

(%i4) express(%)$

(%i5) ev(%,diff);

(%o5) 0

2. Es posible manipular expresiones vectoriales. Aquí es importante declarar las cantidades que no serán consideradas como escalares. El programa entenderá que las otras cantidades son escalares. Recordemos también que el sistema de coordenadas cartesiano es el que se asume por omisión. Consideremos la ecuación

$$2\boldsymbol{\nabla}^2(f+g)=3\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}))$$

(%i6) declare([A,B],nonscalar)$ assume(r¿0)$

(%i8) ecu:laplacian(2*(f+g))=3*div(f*(A~ B));

(%o8) $2\,\mathrm{laplacian}\,(g+f)=3\,\mathrm{div}\,(f\;(A\sim B))$

(%i9) ev(vectorsimp(ecu),expandall);

(%o9) $2\,\mathrm{laplacian}\,(g)+2\,\mathrm{laplacian}\,(f)=3\,f\,\mathrm{div}\,((A\sim B))-3\,A\cdot(\mathrm{grad}\,(f)\sim B)$

(%i10) polarcylindrical;

(%o10) $[[r\,\cos(\theta), r\,\sin(\theta), z], r, \theta, z]$

(%i11) scalefactors(polarcylindrical)$

(%i12) express(ecu);

(%o12) $$\frac{2\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}\,(g+f)\,r\right)+\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}\,(g+f)\,r\right)+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\frac{d}{d\theta}\,(g+f)}{r}\right)\right)}{r}=$$
$$\frac{3\left(\frac{d}{dr}\,(f\,r\,(A_\theta\,B_z-B_\theta\,A_z))+\frac{d}{d\theta}\,(f\,(B_r\,A_z-A_r\,B_z))+\frac{d}{dz}\,(f\,r\,(A_r\,B_\theta-B_r\,A_\theta))\right)}{r}$$

3. En este ejercicio veremos como calcular los símbolos de Christoffel con ayuda de la librería **ctensor**

(%i13) kill(all)$

(%i1) load(ctensor)$

Borrador Preliminar

A partir del sistema de coordenadas, el tensor métrico puede obtenerse especificando el sistema de coordenadas que queremos utilizar

```
(%i2) ct_coordsys(spherical)$
```

El tensor métrico se almacena automáticamente como una matriz denominada **lg**.

```
(%i3) lg;
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Si queremos ver la matriz inversa, que se almacena como **ug**, escribimos los siguientes comandos

```
(%i4) cmetric()$
(%i5) ug;
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\,\sin^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

La función **christof ( )** es una función del paquete **ctensor** que calcula los símbolos de Christoffel de ambos tipos. Los símbolos de Christoffel de primer y segundo tipo se almacenan en los arreglos $\mathrm{lcs}[i,j,k]$ y $\mathrm{mcs}[i,j,k]$, respectivamente, y se definen simétricos en sus dos primeros índices. Si el argumento de la función es **lcs** o **mcs** entonces se muestran únicamente los valores no nulos. Si el argumento es **all** entonces se mostrarán los valores no nulos también. El arreglo $\mathrm{mcs}[i,j,k]$ está definido de tal modo que el último índice es el contravariante: $\mathrm{mcs}[i,j,k] = \Gamma^k_{ij}$.

```
(%i6) christof(mcs);
```

(%t6) $\mathrm{mcs}_{1,2,2} = \dfrac{1}{r}$

(%t7) $\mathrm{mcs}_{1,3,3} = \dfrac{1}{r}$

(%t8) $\mathrm{mcs}_{2,2,1} = -r$

(%t9) $\mathrm{mcs}_{2,3,3} = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

(%t10) $\mathrm{mcs}_{3,3,1} = -r\,\sin^2(\theta)$

(%t11) $\mathrm{mcs}_{3,3,2} = -\cos(\theta)\,\sin(\theta)$

Los índices $[1,2,3]$ se corresponden a las coordenadas $[r,\theta,\varphi]$, respectivamente.

5.2.9 Ejercicios

1. Dado el campo escalar $\varphi = x^2y + yz$. Encuentre la tasa de cambio con la distancia en la dirección del vector $\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ en el punto $(1,-2,1)$. ¿En este mismo punto? ¿cuál es la dirección de la máxima tasa de cambio?
2. Encuentre el plano tangente y la linea normal a la superficie $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el punto $(0,0,a)$.
3. Encuentre el laplaciano de la función

$$\varphi = \frac{zx^2}{x^2+y^2+z^2}\,,$$

Borrador Preliminar

en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas. Luego, a partir de la expresión para el laplaciano obtenida en coordenadas cartesianas, escriba el laplaciano en esféricas realizando un cambio de coordenadas. Demuestre que el resultado es el mismo.

4. Demuestre que:

$$a)\ \boldsymbol{\nabla} r = \frac{\mathbf{r}}{r}\,, \quad b)\ \boldsymbol{\nabla}\frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r}\,, \quad c)\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{r} = 3\,, \quad d)\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0\,, \quad d)\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r} = 0\,.$$

5. Una partícula se mueve siguiendo el radio vector

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos(\omega t) + \mathbf{b}\,\mathrm{sen}(\omega t)\,, \quad \text{donde} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad \text{y} \quad \omega \quad \text{sonconstantes}\,.$$

Demuestre que la fuerza que actúa sobre la partícula es una fuerza central.

6. Encuentre el rotacional del campo vectorial

$$\mathbf{F} = (2xz)\hat{\mathbf{i}} + (2yz^2)\hat{\mathbf{j}} + (x^2 + 2y^2z - 1)\hat{\mathbf{k}}\,,$$

Deducir la forma de ϕ para que $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\phi$.

7. Muestre que
   (a). $\boldsymbol{\nabla}\left[\boldsymbol{\nabla}\varphi\,(x,y,z) \times \boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z)\right] = 0\,.$
   (b). $\boldsymbol{\nabla}\times\left[\varphi(x,y,z)\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z)\right] = 0$
   (c). Si $x = r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\,, \quad y = r\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\,, \quad x = r\cos(\theta)$. Encuentre, en este nuevo sistema de coordenadas (r,θ,ϕ), las expresiones para: $\boldsymbol{\nabla} f$; $\Delta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} f$ y $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}$.

   Considerando: $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial(\circ)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial(\circ)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial(\circ)}{\partial z}$.

8. Muestre que se cumple la siguiente la relación

$$\Delta\mathbf{A} \equiv (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})$$

y a partir de ella encuentre las componentes del laplaciano $\Delta\mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

9. Encuentre el vector normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt[3]{x^2+y^2}$$

en un punto cualquiera $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, luego encuentre la expresión para el ángulo que forma este vector con el eje. Encuentre el límite al cual tiende este ángulo cuando $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

10. La ecuación de equilibrio hidrostático en simetria esférica es

$$\boldsymbol{\nabla} P(r) + \rho(r)\boldsymbol{\nabla}\varphi(r) = 0$$

donde $P(r)$ es la presión, $\rho(r)$ la densidad y $\varphi(r)$ el potencial gravitacional. Muestre que las normales a las superficies isóbaras y las normales a las superficies equipotenciales, son paralelas.

11. Dado $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ con $\|\mathbf{r}\| = r = cte$, $f(r)$ un campo escalar bien comportado y $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$ vectores constantes, muestre que
   (a). $\boldsymbol{\nabla} r = \hat{\mathbf{u}}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$; $\quad \boldsymbol{\nabla}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}f(r)) = \mathbf{a}f(r) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,f'(r)\hat{\mathbf{u}}_r$
   (b). $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{r}f(r)) = 3f(r) + rf'(r)$;
   $\boldsymbol{\nabla}\cdot((\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{c}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot((\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$;
   $\boldsymbol{\nabla}\cdot((\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{c}) = -2\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$
   (c). Encuentre los enteros n tales que $\boldsymbol{\nabla}\cdot(r^n\mathbf{r}) = 0$.
   (d). $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\nabla}\times(f(r)\mathbf{r}) = 0$;
   $\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{c}$;
   $\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})) = \mathbf{a}\times\mathbf{c}$
   $\boldsymbol{\nabla}\times((\mathbf{c}\times\mathbf{r})\mathbf{a}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c}$

Borrador Preliminar

(e). $(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\cdot(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\,f(r)=r^2\Delta f(r)-r^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}-2r\frac{\partial f(r)}{\partial r}$ con $\Delta f(r)\equiv(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,f(r)$.

12. Encuentre la expresión para la divergencia y el rotacional de la velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de un cuerpo rígido alrededor de un punto (x,y,z)

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\qquad \mathbf{a}=\boldsymbol{\epsilon}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular y $\boldsymbol{\epsilon}$ es un vector constante.

13. Encuentre el rotacional y el flujo para el campo vectorial

$$\mathbf{a}=\left(x^2+y-4\right)\hat{\mathbf{i}}+3xy\mathbf{j}+\left(2xz+z^2\right)\hat{\mathbf{k}}$$

a través del hemisferio $x^2+y^2+z^2=16$ con $z>0$.

14. Muestre que si el vector $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ es solución a la ecuación $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a})-k^2\mathbf{a}=0$. Entonces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ también será solución de la *Ecuación vectorial de Helmholtz* $(\nabla^2+k^2)\mathbf{a}=0$, para cualquier campo vectorial solenoidal, i.e $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}=0$. En particular puede elegir un par de casos: $\mathbf{a}_1(\mathbf{r})=\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}\psi$ y $\mathbf{a}_2(\mathbf{r})=\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}\psi)$ con ψ solución de la ecuación escalar de Helmholtz $(\nabla^2+k^2)\psi=0$.

15. Pruebe que el campo de velocidades $\mathbf{v}\,(\mathbf{r})$ de un disco que rota alrededor de su centro con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ cumple con la relación $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}=2\boldsymbol{\omega}$.

16. Considere dos sistemas de coordenadas, uno con y otro sin primas: $B^{i'}_{j'}\leftrightarrow B^{i}_{j}$

(a). Demuestre que

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\alpha^{i'}_{l}\,\alpha^{m}_{j'}\alpha^{n}_{k'}\Gamma^{l}_{mn}+\alpha^{i'}_{n}\alpha^{m}_{k'}\frac{\partial\alpha^{n}_{j'}}{\partial q^m}\,.$$

(b). Ahora muestre que

$$A^{i'}{}_{;j'}=\alpha^{i'}_{l}\,\alpha^{m}_{j'}A^{l}{}_{;m}\,.$$

(c). Finalmente, demuestre que

$$A_{i';j'}=\alpha^{l}_{i'}\alpha^{m}_{j'}A_{l;m}\,.$$

Donde las cantidades $\alpha^{i}_{j'}$ corresponden a las transformaciones de coordenadas $x^i=x^i(x^{j'})\leftrightarrow x^{n'}=x^{n'}(x^m)$. Esto es

$$\alpha^{i}_{j'}\equiv\frac{\partial x^i(x^{m'})}{\partial x^{j'}}$$

5.3 Integrales de campos vectoriales y teoremas integrales

Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración. La curva puede también estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender no sólo de los extremos sino del camino tomado para ir de un extremos al otro.

- Para las integrales del tipo

$$\int_C\phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$$

vimos que en coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C\phi(x,y,z)\,\mathrm{d}\mathbf{r}&=\int_C\phi(x,y,z)\left(\mathrm{d}x\hat{\mathbf{i}}+\mathrm{d}y\mathbf{j}+\mathrm{d}z\hat{\mathbf{k}}\right)\\&=\hat{\mathbf{i}}\int_C\phi\left(x,y\left(x\right),z\left(x\right)\right)\mathrm{d}x+\hat{\mathbf{j}}\int_C\phi\left(x\left(y\right),y,z\left(y\right)\right)\mathrm{d}y+\mathbf{k}\int_C\phi\left(x\left(z\right),y\left(z\right),z\right)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Tal y como indicamos anteriormente, las tres integrales se podrán realizar si conocemos, en cada caso, la expresión del integrando en término de la variable de integración. Esa es la razón por la cual hay que especificar la curva C que define la trayectoria de integración. Es importante señalar también que en

Borrador Preliminar

En la sección 1.5.6 vimos algunas de las integrales de campos escalares y vectoriales, en coordenadas cartesianas, que suelen aparecer en los problemas de Física-Matemática. Miremos este asunto de la integración con más detalle.

5.3.1 Integrales de línea

Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos los siguientes tipos de integrales:

$$\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}, \quad \int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} \, .$$

Estas integrales requieren que se especifique explícitamente la curva C, la trayectoria, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.

Figura 5.15: Trayectorias de integración y campos vectoriales.

coordenadas cartesianas los vectores base, por ser constantes, pueden salir del argumento de la integral. En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i \, , \qquad \text{con} \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \, , \quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\| \, .$$

Notemos que al vector: $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$ es lo que hemos denominado el elemento de línea a lo largo de la curva q^i. Esto significa que el elemento de línea siempre lo podremos descomponer en una suma vectorial. Por ejemplo, en coordenadas esféricas es:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_r = \hat{\mathbf{e}}_r \mathrm{d}r \, , \quad \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r \mathrm{d}\theta \, , \quad \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \operatorname{sen}(\theta) \mathrm{d}\varphi \, ,$$

y en cilíndricas

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho \mathrm{d}\rho \, , \quad \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi \, , \quad \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_z = \hat{\mathbf{e}}_z \mathrm{d}z \, ,$$

Con lo cual, en coordenadas generalizadas tendremos $\int_C \phi(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(\mathbf{r}(q^j)) \left(\sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i \right)$

$$\begin{aligned} \int_C \phi(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} &= \hat{\mathbf{e}}_1 \int_C \phi(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1)) h_1 \mathrm{d}q^1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \int_C \phi(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2)) h_2 \mathrm{d}q^2 \\ &+ \hat{\mathbf{e}}_3 \int_C \phi(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3) h_3 \mathrm{d}q^3 \, . \end{aligned}$$

- La segunda familia de integrales es

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

también se reduce a integrales escalares. Cuando el campo vectorial está en coordenadas cartesianas se tiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_C [A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}] \cdot [\mathrm{d}x \, \mathbf{i} + \mathrm{d}y \, \mathbf{j} + \mathrm{d}z \, \mathbf{k}] \\ &= \int_C A_x(x, y(x), z(x)) \mathrm{d}x + \int_C A_y(x(y), y, z(y)) \mathrm{d}y + \int_C A_z(x(z), y(z), z) \mathrm{d}z \, . \end{aligned}$$

Un caso de particular interés aparece cuando la integral se hace sobre un contorno cerrado, entonces, a la la integral

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \, ,$$

Borrador Preliminar

se le denomina la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C. Anteriormente, cuando discutimos el rotacional, analizamos en la sección 5.2.3.3 la circulación.

Con lo cual en coordenadas generalizadas $\int_C \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j))\cdot\left(\sum_{i=1}^3 h_i\hat{\mathbf{e}}_i\mathrm{d}q^i\right)$, resulta que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_C A_{q^1}(q^1,q^2(q^1),q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2),q^2,q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 \\ &+ \int_C A_{q^3}(q^1(q^3),q^2(q^3),q^3)h_3\mathrm{d}q^3\end{aligned}$$

- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial.

$$\int_C \mathbf{A}\times\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

que en coordenadas cartesianas sería

$$\int_C \mathbf{A}\times\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C [A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}]\times[\mathrm{d}x\,\mathbf{i} + \mathrm{d}y\,\mathbf{j} + \mathrm{d}z\,\mathbf{k}]\,.$$

Es decir, formalmente tendremos

$$\int_C \mathbf{A}\times\mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\int_C A_j\,\mathrm{d}x_k\,\epsilon^{ijk}\right)|\mathrm{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j\,h_i\,\mathrm{d}q^i\,\tilde{\epsilon}^{ijk}\right)|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle$$

La expresión detallada de la integral $\int_C \mathbf{A}\times\mathrm{d}\mathbf{r}$ en un sistema de coordenadas generalizadas se la dejamos al lector, quien puede inspirarse en la versión del producto vectorial en coordenadas curvilíneas que presentamos en la sección 5.1.6.2.

Siguiendo con el modelo que desarrollamos en la sección 5.1.5, podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva. Entonces, para calcular integrales de linea especificamos esa curva a través de un parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano

$$x = f(\lambda)\,,\quad y = g(\lambda)\,,\quad z = h(\lambda)\,,$$

entonces, las componentes de un campo vectorial $\mathbf{A}$ se convertirán en funciones de un único parámetro:

$$\mathbf{A}(x^i) \quad\Rightarrow \begin{cases} A^1(x,y,z) = & A_x(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & F(\lambda) \\ A^2(x,y,z) = & A_y(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & G(\lambda) \\ A^3(x,y,z) = & A_z(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & H(\lambda)\end{cases}$$

mientras que para el $\mathrm{d}\mathbf{r}$ se tiene

$$\mathrm{d}x = f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda\,,\quad \mathrm{d}y = g'(\lambda)\mathrm{d}\lambda\,,\quad \mathrm{d}z = h'(\lambda)\mathrm{d}\lambda\,,$$

por lo tanto:

$$\int_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda\,.$$

Debe quedar claro que éste método puede aplicarse para cualquier sistema de coordenadas.

La aplicación más común para las integrales de línea aparece en la expresión para el trabajo total realizado por una fuerza cuando mueve una partícula a través de un camino. Si una fuerza $\mathbf{F}$ mueve una partícula una pequeña distancia $\mathrm{d}\mathbf{r}$ a lo largo de una curva C, entonces el trabajo infinitesimal realizado por esta fuerza será $\mathrm{d}W = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$. De manera que el trabajo total realizado al completar la trayectoria es

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Integrales de camino aparecen también en la ley de Ampere, que asocia el campo magnético $\mathbf{B}$ con la corriente I que circula por una circuito cerrado C:

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 I\,.$$

Borrador Preliminar

Ejemplo 5.23 Un problema que suele aparecer en las integrales sobre curvas es que la función con la que se describe la curva C no es uni-valuada y por lo tanto es necesario dividir la curva en segmentos más pequeños para que la función sea uni-valuada.

Si queremos evaluar la integral

$$\oint_C x \, \mathrm{d}y \,,$$

donde C es el círculo: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, debemos dividir el camino en dos segmentos ya que la función $F = \sqrt{a^2 - y^2}$ no es uni-valuada. Podemos dividir entonces la curva en dos partes: $x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$ donde cada parte es un semi-círculo que permite realizar la integración por separado.

$$\oint_C x \, \mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} \, \mathrm{d}y + \int_{a}^{-a} \left(-\sqrt{a^2 - y^2}\right) \, \mathrm{d}y = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \, \mathrm{d}y = a^2 \pi \,.$$

También pudimos hacer uso de la parametrización: $x = a\cos(\theta)$ y $y = a\mathrm{sen}(\theta)$, donde el parámetro θ varía de 0 a 2π. En este caso la integral se puede evaluar sobre el círculo entero

$$\oint_C x \, \mathrm{d}y = a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta = a^2 \pi \,.$$

◁

Ejemplo 5.24 Calculemos

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{A} = (2x + y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ y C la parábola $y^2 = 2x$, desde el punto $(0, 0)$ a $(4, 2)$.

La curva se encuentra en el plano, es decir, $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j}$:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C [(2x + y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j}] = \int_C (2x + y)\mathrm{d}x + (y - 2x)\mathrm{d}y$$

Por otro lado, $y^2 = 2x \quad \Rightarrow y\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ y

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C (2x + y)\mathrm{d}x + (y - 2x)\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[(y^2 + y)y + (y - y^2)\right] \mathrm{d}y = 6$$

Notemos que pudimos haber escrito la integral en función de la variable x y el resultado sería el mismo.

Si el camino estuviese en términos de un parámetro, digamos $x = 2\lambda^2 + 2\lambda$, $y = \lambda + 1$, entonces, $\mathrm{d}x = (4\lambda + 2)\mathrm{d}\lambda$ y $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\lambda$. Por lo tanto, tomando los mismos puntos de partida y de llegada se tiene:

$$\int_C (2x + y)\mathrm{d}x + (y - 2x)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left[(4\lambda^2 + 5\lambda + 1)(4\lambda + 2) + (-4\lambda^2 - 3\lambda + 1)\right] \mathrm{d}\lambda = 22$$

◁

Ejemplo 5.25 Dado el siguiente campo vectorial en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\kappa_1 z\varphi)\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + (\kappa_2 z\rho)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\kappa_3 \rho\varphi)\,\hat{\mathbf{e}}_z \,,$$

donde κ_1, κ_2 y κ_3 son constantes.

Queremos calcular la integral del campo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, desde $z = 0$ hasta dar una vuelta, siguiendo la ruta de una hélice de radio a y cuyas espiras están separadas por una distancia constante b.

Lo que debemos tener entonces es la ecuación paramétrica de una hélice en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = f(\lambda) = a \,, \quad \varphi = g(\lambda) = \lambda \,, \quad z = h(\lambda) = \frac{b}{2\pi}\lambda \,,$$

Notemos que a medida que $\varphi = \lambda$ cambia en 2π, la altura cambia en b, es decir, damos una vuelta.

Por lo tanto

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\kappa_1 \frac{b}{2\pi}\lambda^2\right)\hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(\kappa_2 \frac{ab}{2\pi}\lambda\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\kappa_3 a\lambda)\,\hat{\mathbf{e}}_z \,,$$

Borrador Preliminar

igualmente para $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\rho\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{e}}_z$,

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \big(f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda\big)\,\hat{\mathbf{e}}_\rho + \big(f(\lambda)g'(\lambda)\mathrm{d}\lambda\big)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \big(h'(\lambda)\mathrm{d}\lambda\big)\,\hat{\mathbf{e}}_z = (a\mathrm{d}\lambda)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \left(\frac{b}{2\pi}\mathrm{d}\lambda\right)\hat{\mathbf{e}}_z\,,$$

Al sustituir resulta

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\big[F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)f(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)\big]\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\kappa_2\frac{a^2b}{2\pi}\lambda + \kappa_3\frac{ab}{2\pi}\lambda\right]\mathrm{d}\lambda = ab(\kappa_3 + a\kappa_2)\pi\,.\end{aligned}$$

◁

Ejemplo 5.26 Consideremos el siguiente campo de fuerza:

$$\mathbf{F} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,.$$

1. Calculemos en trabajo $\int\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ a lo largo de un arco de circunferencia unitaria, colocado en el plano xy: primero girando en sentido antihorario de $0\to\pi$ y luego en sentido horario $0\to-\pi$ ¿Qué puede concluir del campo de fuerzas?

   Lo podemos resolver de varias maneras.

   - La forma elegante es expresando el campo de fuerza $\mathbf{F}$ en coordenadas esféricas. Esto es
   $$\mathbf{F} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \equiv r^{2n}\mathbf{r} \equiv r^{2n+1}\hat{\mathbf{u}}_r$$
   luego recordamos que $\mathrm{d}\mathbf{r}$ es siempre tangente a la trayectoria, y en este caso la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano xy, entonces
   $$\mathrm{d}\mathbf{r}\propto\hat{\mathbf{u}}_\phi \quad\Rightarrow \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \quad \text{en todo punto}$$
   con lo cual esta fuerza es conservativa porque
   $$\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \quad\forall\quad (x,y) \quad\Rightarrow \oint\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$$
   - La otra forma es con el empleo de la fuerza bruta, cartesiana
   $$\int\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int\left(x^2+y^2+z^2\right)^n(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(\mathrm{d}x\mathbf{i}+\mathrm{d}y\mathbf{j}+\mathrm{d}z\mathbf{k})\,,$$
   como la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano xy, entonces $y=\sqrt{1-x^2}$, $z=0$, con x variando entre 1 y -1, tanto en el caso de circular en sentido antihorario de $0\to\pi$ o en sentido horario $0\to-\pi$.
   $$\begin{aligned}\int\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_1^{-1}\left(x^2+y^2\right)^n x\,\mathrm{d}x + \int_0^0\left(x^2+y^2\right)^n y\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^{-1}\left(x^2+\left(1-x^2\right)\right)^n x\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} x\,\mathrm{d}x = 0\,.\end{aligned}$$
   No es suficiente, pero podemos sospechar que la fuerza es conservativa, por cuanto dos circulaciones distintas nos dieron el mismo valor de la integral.

2. ¿Ese campo vectorial tendrá un potencial $\varphi(x,y,z)$ asociado, tal que $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(x,y,z)$?
   Otra vez, planteamos la ecuación $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(x,y,z)$ en esféricas. Esto es
   $$\mathbf{F} = r^{2n+1}\hat{\mathbf{u}}_r = -\left(\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\hat{\mathbf{u}}_\phi\right)\,,$$
   con lo cual tienen que cumplirse las siguientes ecuaciones
   $$r^{2n+1} = \frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial r};\quad 0 = \frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta};\quad 0 = \frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\,.$$

Borrador Preliminar

Las dos últimas ecuaciones, válidas para $r \neq 0$, implican que φ no depende ni de θ, ni de ϕ. La primera puede ser integrada y nos queda como

$$r^{2n+1} = \frac{\mathrm{d}\varphi(r)}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow \int r^{2n+1}\mathrm{d}\, r = \varphi(r) \quad \Rightarrow \varphi(r) = \frac{-r^{2n+2}}{2n+2} + C$$

resultado que claramente diverge para $n = -1$, tanto cuando $r \to 0$ como cuando $r \to \infty$.
Obviamente, valída también al hacerlo en cartesianas

$$\mathbf{F} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\left(\frac{\partial\varphi\,(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi\,(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi\,(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2+z^2\right)^n x &= -\frac{\partial\varphi\,(x,y,z)}{\partial x}, \quad \left(x^2+y^2+z^2\right)^n y = -\frac{\partial\varphi\,(x,y,z)}{\partial y}\\ \left(x^2+y^2+z^2\right)^n z &= -\frac{\partial\varphi\,(x,y,z)}{\partial z}.\end{aligned}$$

Integrando la primera de esas ecuaciones

$$\varphi(x,y,z) = -\int \left(x^2+y^2+z^2\right)^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}\,(y,z)\,.$$

Donde $\mathcal{C}\,(y,z)$ es una función que tendremos que ir descubriendo poco a poco.
Ahora bien, sustituyendo esa forma de $\varphi(x,y,z)$ en la segunda ecuación, tendremos que

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}\,(y,z)\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n y - \frac{\partial\mathcal{C}\,(y,z)}{\partial y},$$

con lo cual concluimos que $\mathcal{C}$ es independiente de y.

$$0 = \frac{\partial\left(\mathcal{C}\,(y,z)\right)}{\partial y} \quad \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}\,(z) \quad \Rightarrow \varphi(x,y,z) = -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}\,(z)\,,$$

y ahora se sustituye esta nueva forma de la función $\varphi(x,y,z)$ en la tercera ecuación

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}\,(z)\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n z - \frac{\partial\mathcal{C}\,(z)}{\partial z},$$

entonces $\mathcal{C}$ también es independiente de z. Finalmente se determina que

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1}\,.$$

Obviamente es el mismo resultado cuando recordamos que: $r^2 = x^2+y^2+z^2$ y tiene el mismo comportamiento para $n = -1$.

◁

5.3.2 Integrales de superficie

Otros objetos que ya nos hemos encontrado con anterioridad son las integrales de superficie, que pueden ser

$$\int_s \phi\,\mathrm{d}\mathbf{S}, \quad \int_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{y} \quad \int_s \mathbf{A}\times\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Por ejemplo, cuando evaluamos el flujo de un campo vectorial y lo relacionamos con la divergencia interpretamos

$$\iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}S\,,$$

como el flujo de las líneas de campo a través del diferencial de superficie $\mathrm{d}\mathbf{S}$. Es costumbre que se separen el módulo, $\mathrm{d}S$, de la dirección y el sentido, $\hat{\mathbf{n}}_s$ el cual es el vector normal (sentido positivo) a la superficie.

Borrador Preliminar

Otra vez, las superficies podrán ser abiertas (cuando disponen de una curva que limita sus fronteras) y cerradas cuando no. Un círculo será una superficie abierta y una esfera cerrada. Por convención supondremos que el vector normal a una superficie cerrada tendrá sentido positivo saliendo.

La utilización de integrales de superficie nos ha permitido definir, de manera invariante (independiente del sistema de coordenadas) las expresiones para los operadores diferenciales. Así hemos podido definir:

$$\text{grad}\,\phi \equiv \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \phi\left(q^i\right)\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \phi\left(q^i\right)\,\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S\,, \tag{5.25}$$

$$\text{div}\,\mathbf{A} \equiv \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}S\,, \tag{5.26}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{A} \equiv \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint \hat{\mathbf{n}}_s\times\mathbf{A}\,\mathrm{d}S\,. \tag{5.27}$$

5.3.2.1 Densidad de flujo

Existe una conexión entre el flujo y la intensidad de la fuente de un campo vectorial. La variación en la intensidad de la fuente de un campo vectorial se mide por la densidad de la fuente, por ejemplo, la variación en la intensidad (concentración de las lineas de campo) de la fuente de un campo gravitacional es medido como la densidad de masa.

Al ser las densidades cantidades físicas tratadas de manera local, los flujos locales requiere que se introduzca la noción de densidad de flujo. Podemos hablar entonces de la densidad de flujo, o divergencia, de un campo vectorial en un punto P cuando tomamos un volumen infinitesimal al rededor de P, evaluamos el flujo total del campo vectorial a través de las superficies que conforman el volumen y dividimos el resultado por el volumen. Matemáticamente es

$$\rho_F = \text{div}\,\mathbf{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta V} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Si la superficie se representa por una ecuación del tipo $f(x,y,z)=0$, entonces un vector unitario perpendicular, en todo punto, a la superficie es

$$\hat{\mathbf{n}}_s = \frac{\boldsymbol{\nabla} f}{|\boldsymbol{\nabla} f|}$$

La superficie S puede ser proyectada en una región R del plano xy de manera que un diferencial de superficie de área $\mathrm{d}S$ se proyecta como un diferencial de superficie $\mathrm{d}A$ en el plano.

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}A}{|\hat{\mathbf{n}}_s\cdot\mathbf{k}|} = \frac{|\boldsymbol{\nabla} f|\mathrm{d}A}{\boldsymbol{\nabla} f\cdot\mathbf{k}} = \frac{|\boldsymbol{\nabla} f|\mathrm{d}A}{\partial f/\partial z}$$

Figura 5.16: La semiesfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

5.3.2.2 Diferencial de área en coordenadas curvilíneas

Para evaluar este tipo de integrales es necesario poder escribir el diferencial de área $\mathrm{d}S$ en términos de los diferentes diferenciales coordenados una vez que hemos seleccionado el sistema de coordenadas, pero esto muchas veces puede resultar ser un trabajo arduo. En todo caso, en coordenadas generalizadas, los elementos

Borrador Preliminar

diferenciales de superficie son vectores perpendiculares al área diferencial y orientadas según la regla de la mano derecha, de manera que

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_3\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{S}_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_3 \times \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_1\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{S}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_2\,.$$

esto es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{S}_1 &= h_2\mathrm{d}q^2\hat{\mathbf{e}}_2 \times h_3\mathrm{d}q^3\hat{\mathbf{e}}_3 = h_2h_3\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3\hat{\mathbf{e}}_1 = \mathrm{d}S_1\hat{\mathbf{e}}_1\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{S}_2 &= h_3\mathrm{d}q^3\hat{\mathbf{e}}_3 \times h_1\mathrm{d}q^1\hat{\mathbf{e}}_1 = h_1h_3\mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^3\hat{\mathbf{e}}_2 = \mathrm{d}S_2\hat{\mathbf{e}}_2\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{S}_3 &= h_1\mathrm{d}q^1\hat{\mathbf{e}}_1 \times h_2\mathrm{d}q^2\hat{\mathbf{e}}_2 = h_1h_2\mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\hat{\mathbf{e}}_3 = \mathrm{d}S_3\hat{\mathbf{e}}_3\,.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, en coordenadas esféricas sería:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{S}_r &= h_\theta h_\varphi \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\;\hat{\mathbf{e}}_r = r^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\;\hat{\mathbf{e}}_r\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{S}_\theta &= h_r h_\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\;\hat{\mathbf{e}}_\theta = r\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\;\hat{\mathbf{e}}_\theta\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{S}_\varphi &= h_r h_\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\;\hat{\mathbf{e}}_\varphi = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\;\hat{\mathbf{e}}_\varphi\,.
\end{aligned}$$

Mientras que en cilíndricas:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{S}_\rho &= h_\varphi h_z \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\;\hat{\mathbf{e}}_\rho = \rho\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\;\hat{\mathbf{e}}_\rho\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{S}_\varphi &= h_\rho h_z \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z\;\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\;\hat{\mathbf{e}}_\varphi\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{S}_z &= h_\rho h_\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\;\hat{\mathbf{e}}_z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\;\hat{\mathbf{e}}_z\,.
\end{aligned}$$

Debido a que muchas veces no es posible representar de manera simple las superficies en determinados sistemas de coordenadas, lo que se hace es trabajar en coordenadas cartesianas y proyectar las superficies en los planos cartesianos.

Ejemplo 5.27 Dado el campo vectorial $\mathbf{A} = y\mathbf{j}$ y la semiesfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con $z \geq 0$, (figura 5.16) y queremos evaluar la integral, es decir, el flujo de $\mathbf{A}$

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Podemos evaluar esta integral de dos maneras. La primera valiéndonos del hecho de tener simetría esférica, lo que hace que el elemento escalar de superficie se pueda representar de manera sencilla $\mathrm{d}S = a^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ y con el vector unitario a la superficie $\hat{\mathbf{n}}_s = \hat{\mathbf{e}}_r = \mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{i} + \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{j} + \cos(\theta)\mathbf{k}$. De manera que sobre la superficie $y = a\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)$. Así:

$$\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = y\,[\mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r]\,\mathrm{d}S = [a\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)]\,[\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)]\,\left[a^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right]$$

Integrando

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = a^3\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\,.$$

La segunda posibilidad es proyectar la semiesfera sobre el plano xy, esta proyección es simplemente una región R compuesta de un círculo de radio a centrado en el origen de coordenadas[6]. La ecuación de este hemisferio superior es $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, por lo tanto

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S y\,[\mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r]\,\mathrm{d}S = \int_R y\,[\mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r]\,\frac{|\boldsymbol{\nabla}f|\mathrm{d}A}{\partial f/\partial z}\,.$$

Sobre la superficie se tiene

$$\boldsymbol{\nabla}f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 2\mathbf{r} \quad \Rightarrow |\boldsymbol{\nabla}f| = 2|\mathbf{r}| = 2a$$

[6]Es importante tener en cuenta que toda linea recta paralela al eje z debe interceptar la superficie S sólo una vez, de no ser así la superficie debe dividirse en superficies más pequeñas para que cumpla con esta condición.

Borrador Preliminar

y además

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z = 2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,, \quad \mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{y}{a}\,, \quad \text{y} \quad \mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Con estos ingredientes

$$\int_R y\,[\mathbf{j}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r]\,\frac{|\boldsymbol{\nabla} f|\mathrm{d}A}{\partial f/\partial z} = \iint_R \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\pi a^3}{3}\,.$$

Si lo deseamos, podemos calcular el vector de área $\mathbf{S}$ de la superficie, ya que

$$\mathbf{S} = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S a^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r\,,$$

por el hecho de que $\hat{\mathbf{e}}_r$ no es constante, resulta conveniente ir a las coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \iint_S \left[a^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right]\left[\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{i} + \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)\mathbf{j} + \cos(\theta)\mathbf{k}\right] \\
&= \mathbf{i}\iint_S a^2\mathrm{sen}^2(\theta)\cos(\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \mathbf{j}\iint_S a^2\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + \mathbf{k}\iint_S a^2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= a^2\left[\int_0^{2\pi}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathbf{i} + a^2\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathbf{j} \\
&+ a^2\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\mathbf{k} = a^2\pi\mathbf{k}\,.
\end{aligned}$$

Notemos que la magnitud de $\mathbf{S}$ es el valor del área proyectada en el plano xy y no el de la superficie de la semiesfera.

◁

Ejemplo 5.28 Queremos evaluar la integral

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \left[(y+2x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + (z+x^2)\mathbf{k}\right]\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

donde S es la superficie abierta del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, pero sin resolver la integral de superficie directamente, sino utilizando el teorema de Gauss.

Consideremos la superficie cerrada $\bar{S} = S + S_c$, donde S_c es el área cuando $z = 0$, es decir, el área del círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$. Por lo tanto $\bar{S}$ encierra el volumen V del hemisferio superior de la esfera centrada en el origen de coordenadas. Tenemos entonces que

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V = \oint_{\bar{S}} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_c}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Esto es:

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}V - \int_{S_c}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Ahora bien, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 2 + 0 + 1 = 3$, y para la superficie S_c es bueno recordar que el vector normal es un vector que apunta hacia el exterior, por lo tanto $\mathrm{d}\mathbf{S} = -\mathbf{k}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, además, sobre esa superfie el campo toma la forma $\mathbf{A}|_{S_c} = (y+2x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}$.

Entonces

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 3\int_V \mathrm{d}V - \int_{S_c}\left[(y+2x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}\right]\cdot\left[-\mathbf{k}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] = 3\frac{2\pi}{3} + \iint_R x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Utilizando coordenadas polares

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi + \iint_R \rho^2\cos^2(\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2\pi + \int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi\int_0^a \rho^3\mathrm{d}\rho = 2\pi + \frac{\pi a^4}{4}\,.$$

◁

Borrador Preliminar

5.3.3 Integrales de volumen

Esta familia de integrales

$$\int_V \phi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V\,, \qquad \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V$$

son las más simples de evaluar por el hecho de que el elemento de volumen $\mathrm{d}V$ es una cantidad escalar. Hemos manejado estas integrales en los cursos básicos cuando, por ejemplo, calculamos la masa total de un fluido contenido en un volumen

$$M = \int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V$$

Mientras que el segundo tipo de integral es simplemente:

$$\int_V \mathbf{A}(x^i)\,\mathrm{d}V = \mathbf{i}\int_V A_x(x^j) + \mathbf{j}\int_V A_y(x^j) + \mathbf{k}\int_V A_z(x^j)\,,$$

en coordenadas cartesianas.

Para coordenadas generalizadas, el diferencial de volumen de un paralelepípedo curvilíneo es:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_2 \times \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_3 = h_1 h_2 h_3\,\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3\,\mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3 = h_1 h_2 h_3 \mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3\,.$$

Por ejemplo, en coordenadas cilíndricas y esféricas sería:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= h_\rho h_\varphi h_z \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\,,\\ \mathrm{d}V &= h_r h_\theta h_\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = r^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,,\end{aligned}$$

respectivamente.

5.3.4 Campos vectoriales y teoremas integrales

En esta sección presentaremos un conjunto de teoremas que relacionan las variaciones de un campo vectorial con las fuentes que lo producen. En términos técnicos (matemáticos) resultan fundamentales cuando queremos convertir un tipo de integral (línea, superficie o volumen) en otra.

El primer teorema, el *Teorema de Gauss* permite expresar el valor de una integral de volumen V encerrado por una determinada superficie S (cerrada) en términos de una integral sobre esa misma superficie. El otro teorema importante es el *Teorema de Stokes*, el cual permite relacionar el valor de una integral de superficie con la integral de línea sobre la curva que delimita esa superficie.

5.3.4.1 Teorema de Gauss

5.3.4.1.1. Presentación y demostración. Cuando discutimos el significado físico de la divergencia, en la sección 5.2.2 de la página 363 presentamos la relación entre la integral de superficie de un campo vectorial, $\mathbf{A}$, y una de volumen de su derivada. Esta relación constituye el teorema de Gauss (o de la divergencia), el cual se expresa de forma vectorial como

$$\iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}V\,,$$

donde $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x^i)$ es el campo vectorial, $\mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \hat{\mathbf{n}}_s\mathrm{d}S$ es el diferencial de área y $\mathrm{d}V$ el diferencial de volumen. podemos convertir una integral de superficie cerrada de un campo vectorial, en una integral de volumen encerrada por esa misma superficie. Debe quedar claro que la superficie cerrada S contiene al volumen V.

Tal y como vimos en su oportunidad (sección 5.2.2) el término $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$ es interpretado como el flujo del campo $\mathbf{A}$ por unidad de volumen, por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es la tasa de flujo neto que sale del volumen sobre el cual estamos integrando.

Borrador Preliminar

Figura 5.17: Teoremas de Gauss

La demostración del teorema de Gauss ya la recorrimos en la sección 5.2.2.1. Aquí haremos un breve recordatorio un poco más general y común en Teorías de Campo. Luego procedemos a centrarnos en sus consecuencias y aplicaciones.

Supongamos un volumen encerrado por una superficie convexa S, como se muestra en la figura 5.17 en los cuadrantes I, II y III. Supongamos además que orientamos el sistema de coordenada de tal forma que una línea paralela a uno de los ejes toca la superficie en dos puntos (figura 5.17, cuadrante I). De este modo podemos trazar una superficie (perpendicular a esa línea) tal que divida la superficie S en dos superficies S_1 y S_2 cada una de las cuales está bordeada por la curva C, (figura 5.17, cuadrante II).

Al evaluar la integral

$$\int_S A_x\,\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_1} A_x\,\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_2} A_x\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{s'} \left[A_x\left(x_2,y,z\right) - A_x\left(x_1,y,z\right)\right]\mathrm{d}S'\,,$$

ya que las componentes x de los vectores normales a las dos superficies que contribuyen (figura 5.17, cuadrante III) tienen signos opuestos

$$\mathrm{d}S_{2x} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_2 = -\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_1 = -\mathrm{d}S_{1x} = \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}S'\,.$$

Ahora bien, dado que

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \lim_{x_2\to x_1}\frac{A_x\left(x_2,y,z\right) - A_x\left(x_1,y,z\right)}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow A_x\left(x_2,y,z\right) - A_x\left(x_1,y,z\right) = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,,$$

con lo cual

$$\int_S A_x\,\hat{\mathbf{i}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{s'}\left[\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_V \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}V\,.$$

Equivalentemente, al hacerlo en las direcciones $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, obtendremos

$$\int_S A_y\,\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}V \qquad \text{y} \qquad \int_S A_z\,\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}V\,.$$

Finalmente hemos demostrado el teorema de la divergencia o teorema de Gauss

$$\iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = \int_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \int_V\left(\partial_i A^i\right)\mathrm{d}V = \int_V\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)\mathrm{d}V\,.$$

Borrador Preliminar

5.3.4.1.2. Expresiones equivalentes para el teorema de Gauss. Si bien la expresión estándar es la que hemos presentado, existen algunas variantes que se derivan de ella. Por ejemplo si consideramos un campo escalar, $\phi(x,y,z)$, el teorema de Gauss nos conduce a

$$\iint_s \phi(x^i)\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\mathrm{d}V \quad \text{y} \quad \iint_s \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(x^i)\mathrm{d}V\,,$$

donde $\mathbf{B}(x,y,z)$ es un campo vectorial.

Para comprobar la primera de estas dos relaciones consideramos un vector $\mathbf{c}$ constante y construyamos un campo vectorial: $\mathbf{A}(x,y,z) = \mathbf{c}\,\phi(x,y,z)$, entonces

$$\begin{aligned}\iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}V \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{c}\cdot\iint_s \phi(x^i)\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{c}\cdot\iiint_V \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\mathrm{d}V\\ 0 \quad &= \quad \mathbf{c}\cdot\left[\iint_s \phi(x^i)\mathrm{d}\mathbf{S} - \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\mathrm{d}V\right],\end{aligned}$$

es decir, para todo vector $\mathbf{c}$ siempre se cumple que

$$\iint_s \phi(x^i)\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\mathrm{d}V\,.$$

Esa misma metodología se puede aplicar para demostrar la segunda relación si consideramos un campo vectorial $\mathbf{A}(x,y,z) = \mathbf{c}\times\mathbf{B}(x,y,z)$, con $\mathbf{c}$ vector constante y se procede de una manera similar.

5.3.4.1.3. Teorema de Gauss y campo eléctrico. La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico $\mathbf{E}$ y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado. Desde siempre sabemos que el campo eléctrico producido por una carga Q_i viene dado por

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_{r_i} \;\Rightarrow\; \iint_{S_i}\mathbf{E}_i\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\,.$$

En definitiva, la "deducción" de una de las ecuaciones de Maxwell.

Si calculamos el flujo del campo eléctrico en una región sin cargas todas las líneas del campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ atraviesan el volumen: todas entran y todas salen. Sin embargo si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S, (ver figura 5.17, cuadrante IVa) podemos englobar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i. Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{S} + \sum_i\iint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_i = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V = 0 \;\Rightarrow\; \iint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\sum_i\iint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_i\,.$$

Con lo cual hemos definido una superficie con "huecos" alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que entra sale. Por su parte, el campo eléctrico medido para cada superficie esférica interior S_i será

$$\mathbf{E}|_{S_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}'\,,$$

donde $\mathbf{E}'$ es el campo de todas las otras cargas presentes en el volumen encerrado por S. Es claro que este campo $\mathbf{E}'$ tiene flujo cero neto sobre cada esfera de superficie S_i. Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\sum_i\iint_{S_i}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}'\right)\cdot\mathbf{n}_{S_i}\,\mathrm{d}S_i = \sum_i\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^2}\iint_{S_i}\mathrm{d}S_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}\,,$$

donde hemos utilizado:

$$\int_{V_i}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}'\right)\mathrm{d}V_i = 0 = \sum_i\iint_{S_i}\mathbf{E}'\cdot\hat{\mathbf{n}}_{s_i}\,\mathrm{d}S_i\,, \quad \mathbf{u}_{r_i}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{s_i} = -1 \quad \text{y} \quad \iint_{S_i}\mathrm{d}S_i = S_i = 4\pi r_i^2\,.$$

Finalmente encontramos una de las leyes de Maxwell si reescribimos la integral de superficie utilizando la

Borrador Preliminar

ley de Gauss

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V \;\Rightarrow \iint_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V\,,$$

con lo cual

$$\int_V \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\right)\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho\,(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\,.$$

5.3.4.1.4. Discontinuidades y densidades superficiales de carga. Normalmente, siempre consideramos que los campos vectoriales $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$ son campos continuos (y, más aún, con todas sus derivadas continuas). Sin embargo, encontramos en la naturaleza situaciones en la cuales el campo varía mucho en una distancia muy corta (infinitesimal). En estas situaciones podemos simular esta rápida variación como una discontinuidad en el campo. Existe formas de aplicar el teorema de Gauss para algunas situaciones en las cuales tratamos con campos discontinuos. La manera apropiada de tratar (derivadas e integrales de) funciones discontinuas es considerándolas no funciones sino distribuciones. Este tipo de tratamiento está fuera del alcance de este formulario y será considerado en otros cursos.

Supongamos el caso que ilustra la figura 5.17, cuadrante IVb. Una región R delimitada por una superficie S, dentro de la cual, una superficie de discontinuidad, $\bar{S}$, separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$, es discontinuo. Ahora bien, el campo vectorial es continuo en las subregiones, por lo cual el flujo del campo atraviesa las superficies S_1 y $\bar{S}$ que delimitan el volumen V_1 de la región R_1. Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\,\mathrm{d}\bar{S} \quad \text{y} \quad \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_-\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\,\mathrm{d}\bar{S}\,,$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}$ es el vector normal a la superficie $\bar{S}$, de separación de las dos regiones. Adicionalmente hemos denotado, $\mathbf{A}_+$ y $\mathbf{A}_-$ el campo $\mathbf{A}$ evaluado del lado de R_1 y R_2, respectivamente.

Si ahora consideramos el teorema de Gauss en toda la región

$$\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V \equiv \int_{V_1} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V + \int_{V_2} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V\,.$$

Claramente si el campo es continuo dentro de la región R entonces nos queda la formulación estándar del teorema de Gauss

$$\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Por el contrario si el campo es discontinuo, entonces debe tomarse en cuenta la discontinuidad del campo y la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \iint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}\,\mathrm{d}\bar{S}$$

con $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}$ el vector unitario, normal a la superficie $\bar{S}$ y que apunta de $R_1 \to R_2$. Es claro que la discontinuidad que cuenta es la de la componente del campo perpendicular a la superficie (ver figura 5.18).

Este tipo de discontinuidad en campos irrotacionales es generado por la presencia de fuentes, las cuales, en este caso son densidades superficiales de carga.

Quizá el ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$, a través de una superficie $\bar{S}$, que separa dos medios. Este caso se ilustra en la figura 5.17, cuadrante IVc y en la figura 5.18, sólo que en este último caso el vector normal está definido a la inversa: la región 2 corresponde a la región 1 de la figura 5.17, cuadrante IVc. La

Borrador Preliminar

Figura 5.18: Discontinuidad del Vector Desplazamiento

ecuación de Maxwell correspondiente será

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\quad\Rightarrow\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=\rho(\mathbf{r})\;\Rightarrow\;(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}=\sigma\,,\quad\text{con }\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}\,,$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}$ es el vector normal a la superficie (ver figura 5.17, cuadrante IVc) y σ es la densidad superficial de carga en la superficie S. Para comprobar esta relación construimos un volumen cilíndrico infinitesimal que encierra la superficie de discontinuidad, de tal forma que ΔS_2 corresponde con la "tapa" del cilindro y ΔS_1 con su "base" (figura 5.17 cuadrante IVc).

Adicionalmente, como $\delta h\sim 0$, no sólo podremos trabajar sin las integrales, el flujo a través de las "paredes" del cilindro será despreciable y $\Delta S_2\approx\Delta S_1$, sino que además, al encerrar la discontinuidad no tomamos en cuenta la contribución de la superficie ΔS_3 (o $\bar{S}$, en el cuadrante IVb de la figura 5.17). Así

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D})\mathrm{d}V=\mathbf{D}_2\cdot\Delta\mathbf{S}_2-\mathbf{D}_1\cdot\Delta\mathbf{S}_1\;\Rightarrow\;\rho(\mathbf{r})(\Delta S_2\,\delta h)=(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{s_2}\Delta S_2\,,$$

con lo cual

$$\rho\,(\mathbf{r})\,\delta h\equiv\sigma=(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}}_{s_2}\,.$$

5.3.4.1.5. Identidades de Green. Cuando consideramos campos vectoriales muy particulares el teorema de Gauss nos lleva a un par de identidades vectoriales conocidas como las *identidades o teoremas de Green*

Supongamos que tenemos dos campos escalares: $\zeta(x,y,z)$ y $\xi(x,y,z)$ entonces y con ellos construimos un campo vectorial

$$\mathbf{A}(x^i)=\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\;\Rightarrow\;\iint_s\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V\,,$$

es decir

$$\iint_s\left(\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\right)\mathrm{d}V\,,$$

con lo cual arribamos a la *primera identidad de Green, primer teorema de Green* o *teorema escalar de Green*:

$$\iint_s\left(\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_V\left[\zeta(x^i)\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\right)+\boldsymbol{\nabla}\zeta\left(x^i\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\right]\mathrm{d}V\,.$$

Si ahora, consideramos los siguientes campos vectoriales

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\right)&=\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)+\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\xi(x^i)\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)\right)&=\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)+\xi(x^i)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Figura 5.19: Teorema de Stokes

Restando ambas expresiones tendremos que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left\{\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)-\xi(x^i)\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)\right\}=\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)-\xi(x^i)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)\,,$$

y al integrar sobre un volumen V obtendremos la formulación del *teorema simétrico de Green, la segunda identidad*

$$\iiint_V\left\{\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)-\xi(x^i)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)\right\}\mathrm{d}V=\iint_s\left\{\zeta(x^i)\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i)-\xi(x^i)\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i)\right\}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

La utilidad de estas relaciones las veremos en el desarrollo de la teoría del Potencial en la sección 5.4 en la página 415.

5.3.4.2 Teorema de Stokes

5.3.4.2.1. Presentación y demostración. El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,z)$, a lo largo de una curva cerrada C, con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C. Es decir

$$\oint\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_S(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\equiv\iint_S(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S\,.$$

Tal y como hemos mencionado antes la superficie la define su vector normal, y éste lo define el "sentido" de circulación de la curva que bordea la superficie (ver figura 5.19 cuadrantes I y III). No haremos una demostración formal del teorema de Stokes como lo hicimos para el Gauss. Nos convenceremos de que es correcta la relación a partir de algunas situaciones sencillas.

Cualquier superficie la podremos dividir en pequeñas cuadrículas diferenciales, las cuales sumadas constituyen la superficie (ver figura 5.19 cuadrante II). Es fácil convencerse que la circulación[7] por el borde de una cuadrícula diferencial (por ejemplo en el plano xy) nos lleva a

$$\Gamma_{1234}=\oint_{1234}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_1A_x(x,y)\mathrm{d}x+\int_2A_y(x,y)\mathrm{d}y+\int_3A_x(x,y)\,(-\mathrm{d}x)+\int_4A_y(x,y)\,(-\mathrm{d}y)\ ,$$

[7]Pueden consultar otro ejemplo de circulación en la sección 5.2.3.3.

Borrador Preliminar

Figura 5.20: Circulación en una cuadrícula del plano x, y

donde hemos denotado la trayectoria a lo largo del perímetro de la cuadrícula por 1234. De la figura 5.20 podemos intuir

$$\Gamma_{1234} = \int A_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \int A_y(x_0 + \mathrm{d}x, y_0)\,\mathrm{d}y + \int A_x(x_0, y_0 + \mathrm{d}y)(-\mathrm{d}x) + \int A_y(x_0, y_0)(-\mathrm{d}y)\ ,$$

y de allí el desarrollo por Taylor que nos conduce a

$$\begin{aligned}\Gamma_{1234} &= \int A_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \int \left[A_y(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial A_y}{\partial x}\right|_{x_0}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y - \int \left[A_x(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial A_x}{\partial y}\right|_{y_0}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &+ \int A_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y = \int \left[\left.\frac{\partial A_y}{\partial x}\right|_{x_0} - \left.\frac{\partial A_x}{\partial y}\right|_{y_0}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}|_z\,\mathrm{d}S_z \equiv \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.\end{aligned}$$

Esto vale para todos los puntos (x_0, y_0) y se puede aplicar para las otras superficies, con lo cual es fácil convencerse que esta técnica se puede utilizar para cada cuadrícula en las que hemos dividido la superficie (ver figura 5.19 cuadrante II). Más aún, las circulaciones a lo largo de los perímetros de las cuadrículas interiores se anulan (ver figura 5.19 cuadrante III) y sólo sobrevive la circulación a lo largo del perímetro exterior de la superficie. Con ello

$$\sum_{cuadricula} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \equiv \sum (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \ \Rightarrow\ \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

5.3.4.2.2. Version 2D del teorema de Stokes. En el plano xy, si consideramos una región R en el que está definido un campo vectorial $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$, entonces

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\mathbf{k}\,.$$

Por el teorema de Stokes

$$\int_R \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C [A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y]\ .$$

Si ponemos $A_x = P$ y $A_y = Q$ recobramos el teorema de Green en plano, ecuación (**??**).

5.3.4.2.3. Teorema de Stokes y Campo Magnético. De la ley de Ampere para una densidad de corriente $\mathbf{J}$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

Borrador Preliminar

donde el circuito C es el borde de la superficie S, resulta que al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \;\Rightarrow\; \int_S [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \mu_0\mathbf{J}]\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0\,,$$

para cualquier superficie S. La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \mu_0\mathbf{J} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}\,,$$

De manera similar, de la ley de inducción electromagnética de Faraday se puede obtener

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,.$$

5.3.4.2.4. Expresiones equivalentes para el teorema de Stokes. Del mismo modo que hicimos en la sección 5.3.4.1.2 con el teorema de Gauss, podemos hacerlo para el teorema de Stokes y tendremos

$$\oint \phi(x,y,z)\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z) \quad \text{y} \quad \oint \mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{B}(x,y,z) = \iint_S (\mathrm{d}\mathbf{S}\times\boldsymbol{\nabla})\times\mathbf{B}(x,y,z)\,,$$

donde $\phi(x,y,z)$ es un campo escalar y $\mathbf{B}(x,y,z)$ un campo vectorial.

Otra vez, la metodología para proceder a la demostración se fundamenta en considerar un par de campos vectoriales, uno de la forma $\mathbf{A}(x,y,z) = \phi(x,y,z)\mathbf{c}$ y el otro de la forma $\mathbf{b}(x,y,z) = \mathbf{c}\times\mathbf{B}(x,y,z)$, luego desarrollar un álgebra vectorial mínima.

5.3.4.2.5. Teorema de Stokes y fuerzas conservativas. El teorema de Stokes nos permite identificar que campos vectoriales irrotacionales generan integrales de línea las cuales son independientes de la trayectoria. Esto es

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x,y,z) = 0 \;\Rightarrow\; \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,,$$

con lo cual, lo que se está señalando es que toda trayectoria cerrada se puede fraccionar en dos trayectorias abiertas que se unen en los extremos, entonces

$$\oint \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 = \int_{C_1} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \int_{\substack{M\\ \text{curva } C_1}}^{M'} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \equiv \int_{\substack{M\\ \text{curva } C_2}}^{M'} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

y lo que nos dice es que vamos de un punto (de corte de la curva cerrada) M a otro punto M' por dos trayectorias distintas y la integral de línea es la misma. Más adelante veremos que a los campos vectoriales irrotacionales les está asociado un potencial tal que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x,y,z) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}(x,y,z) \propto \boldsymbol{\nabla}\phi(x,y,z)\,.$$

5.3.4.2.6. Teorema de Stokes y discontinuidades del campo vectorial. Al igual que el teorema de Gauss puede ser considerado para manejar funciones discontinuas, el teorema de Stokes también tiene una expresión cuando se consideran campos discontinuos (continuo a trozos o continuos por segmentos)

Consideremos el caso más simple, el de un campo vectorial $\mathbf{A}(x,y,z)$ que es discontinuo sobre una superficie $\bar{S}$, que divide R en dos subregiones R_1 y R_2 (ver otra vez 5.17, cuadrante IV). En este caso la superficie S, será abierta y estará delimitada por una curva C_2. La intersección de las superficies S y $\bar{S}$ será una curva $\bar{C}$, la cual dividirá a S en dos superficies S_1 y S_2 (ver figura 5.19 cuadrante IV). Entonces, aplicando el

Borrador Preliminar

teorema de Stokes se obtiene:

$$\oint_{C_1+\bar{C}} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\substack{P_1\\ \text{curva } C_1}}^{P_2} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\substack{P_2\\ \text{curva } \bar{C}}}^{P_1} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

$$\oint_{C_2+\bar{C}} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\substack{P_2\\ \text{curva } C_2}}^{P_1} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\substack{P_1\\ \text{curva } \bar{C}}}^{P_2} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{S_2} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Ahora bien, si las sumamos obtendremos

$$\iint_{S_1} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\substack{P_2\\ \text{curva } \bar{C} \text{ en } S_1}}^{P_1} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\substack{P_1\\ \text{curva}\bar{C} \text{ en } S_2}}^{P_2} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

la cual puede ser reescrito como

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{\substack{P_1\\ \text{curva } \bar{C}}}^{P_2} \left(\mathbf{A}|_{S_2} - \mathbf{A}|_{S_1}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

donde hemos denotado $\mathbf{A}|_{S_2}$ como el campo vectorial evaluado sobre la curva $\bar{C}$ "del lado" de las superficie S_2. Es importante señalar que el término que incorpora la contribución de la discontinuidad del campo sólo encierra componentes tangenciales a la superficie. Esto es claro del producto escalar con el vector $\mathrm{d}\mathbf{r}$ tangente a la curva $\bar{C}$ (y también a la superficie S).

Ejemplo 5.29 Dado el siguiente campo vectorial $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ y la superficie $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

Entonces, para evaluar

$$\int_S \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,,$$

sobre ese hemisferio, vemos que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = 2\mathbf{k}$. Mientras que el elemento de superficie en coordenadas esféricas es $\mathrm{d}\mathbf{S} = a^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_S \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\left[2a^2\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_r\cdot\mathbf{k}\right]\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{z}{a}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= 2a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = 2a^2\pi\,.\end{aligned}$$

Para comprobar la igualdad del teorema de Stokes, vamos a evaluar la integral sobre el círculo $x^2+y^2 = a^2$, que se encuentra en el plano $z = 0$.

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = [-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}]\cdot[\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] = \oint_C [-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y]\,,$$

en coordenadas polares: $x = a\cos(\varphi)$, $y = a\,\mathrm{sen}(\varphi)$

$$\begin{aligned}\oint_C [-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y] &= \oint_C (-a\,\mathrm{sen}(\varphi))(-a\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi) + (a\cos(\varphi))(a\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi)\\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left[\mathrm{sen}^2(\varphi) + \cos(\varphi)^2\right]\mathrm{d}\varphi = a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi) = 2a^2\pi\,.\end{aligned}$$

◁

Ejemplo 5.30 La Ley de Ampere se puede derivar de la ecuación de Maxwell $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{J}$ donde $\mathbf{H}$ es el campo magnético y $\mathbf{J}$ la densidad de corriente. Si el campo eléctrico es nulo ($\mathbf{E} = 0$), mostremos que

$$\oint \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = I$$

con I la corriente neta que atraviesa la circulación del campo magnético.

Borrador Preliminar

Podemos ver que

$$\oint \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = I$$

◁

Ejemplo 5.31 Dado el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{2A\cos(\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{A\mathrm{sen}(\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

con $A =$ constante y $\{\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta\}$ vectores unitarios base en coordenadas esféricas.

1. Calculemos $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$.

   El rotacional en coordenadas esféricas viene dado por

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \frac{1}{r^2\mathrm{sen}(\theta)}\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_r & r\,\hat{\mathbf{u}}_\theta & r\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \frac{2A\cos(\theta)}{r^3} & r\,\frac{A\mathrm{sen}(\theta)}{r^3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left[\frac{A\mathrm{sen}(\theta)}{r^2}\right]}{\partial r} - \frac{\partial\left[\frac{2A\cos(\theta)}{r^3}\right]}{\partial\theta}\right] = 0$$

2. Calculemos en trabajo $\oint \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$

   Por el teorema de Stokes el trabajo en un circuito cerrado se anula

$$\oint \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0\,.$$

   Se puede entonces concluir que la fuerza es conservativa.

3. ¿Ese campo vectorial tendrá un potencial asociado tal que $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$?

   Una vez más

$$\frac{2A\cos(\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{A\mathrm{sen}(\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{u}}_\theta = -\left(\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\hat{\mathbf{u}}_\phi\right),$$

   con lo cual, también una vez más

$$\frac{2A\cos(\theta)}{r^3} = -\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial r}, \quad \frac{A\mathrm{sen}(\theta)}{r^3} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}, \quad 0 = \frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}.$$

   La última ecuación indica que φ no depende de ϕ. Ahora bien, integrando la primera de estas ecuaciones, tendremos

$$\frac{2A\cos(\theta)}{r^3} = -\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial r} \quad \Rightarrow \varphi(r,\theta) = -\int\frac{2A\cos(\theta)}{r^3}\mathrm{d}r + \mathcal{C}(\theta) = A\frac{\cos(\theta)}{r^2} + \mathcal{C}(\theta)\,,$$

   al sustituir la forma del potencial en la segunda ecuación tendremos

$$\frac{A\mathrm{sen}(\theta)}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A\frac{\cos(\theta)}{r^2} + \mathcal{C}(\theta)\right) \quad \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{C}(\theta)}{\partial\theta} = 0\,.$$

   De esta forma

$$\varphi(r,\theta) = A\frac{\cos(\theta)}{r^2}\,.$$

◁

Ejemplo 5.32 Para

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

evaluemos las siguientes integrales:

1. $\oint \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria.

   Por el Teorema de Stokes

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Borrador Preliminar

con lo cual

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow \oint_c \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=0$$

2. $\oint\oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ a lo largo de una esfera unitaria.
   Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oint\oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_v (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F})\,\mathrm{d}V\,,$$

   por consiguiente

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F})\ \mathrm{d}V=\iiint_V \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x^2\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V (2x+2y+2z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

   Si ahora transformamos a coordenadas esféricas tendremos que

$$x=r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi);\quad y=r\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi);\quad z=r\cos(\theta);\quad \text{con } \mathrm{d}V=r^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$$

   con lo cual

$$\iiint_V (2x+2y+2z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V \left(2r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)+2r\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)+2r\cos(\theta)\right)r^2\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\iiint_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F})\,\mathrm{d}V=-\frac{1}{4}\pi\,.$$

◁

Practicando con Maxima

Los métodos de integración básicamente consisten en el cálculo de la primitiva: **integrate**(expr,x) y el cálculo de integrales definidas: **integrate**(expr,x,a,b) en el intervalo (a,b). Veamos algunos ejemplos.

1. Integrales directas

```
(%i1) f(x):=1/(1+x^2)^3;
```

(%o1) $f(x):=1/(1+x^2)^3$

```
(%i2) integrate(f(x),x);
```

(%o2) $\dfrac{3\arctan x}{8}+\dfrac{3x^3+5x}{8x^4+16x^2+8}$

```
(%i3) integrate(f(x),x,0,1);
```

(%o3) $\dfrac{3\pi+8}{32}$

Es posible realizar cambios de variable

```
(%i4) 'integrate(f(x),x);
```

(%o4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$

```
(%i5) changevar(%,x=tan(theta),theta,x);
```

(%o5) $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^6\theta+3\tan^4\theta+3\tan^2\theta+1}\,d\theta$

```
(%i6) ev(%,integrate);
```

Borrador Preliminar

(%o6) $\dfrac{3\,\tan^3\theta + 5\,\tan\theta}{8\,\tan^4\theta + 16\,\tan^2\theta + 8} + \dfrac{3\,\theta}{8}$

Otro ejemplo

(%i7) 'integrate(cos(x)^ 3,x)=integrate(cos(x)^ 3,x);

(%o7) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$

(%i8) changevar('integrate(cos(x)^ 3,x),t=sin(x),t,x);

(%o8) $\displaystyle\int 1 - t^2\,dt$

(%i9) ev(%,integrate);

(%o9) $t - \dfrac{t^3}{3}$

2. Puede suceder que al integrar una función, por ejemplo

(%i10) integrate(exp(x^ 3+2*x), x, 0, 1);

(%o10) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^3+2\,x}\,dx$

El programa nos devuelve la integral sin resolver, en este caso **Maxima** nos está indicando que fue incapaz de realizar el cálculo de manera algebraica. Ahora bien, podemos disponer de rutinas numéricas donde existen dos posibilidades: **quad_qags** que nos mostrará una lista con el valor numérico de la integral, el error absoluto estimado de la aproximación, el número de evaluaciones del integrando y el código de error (que puede ir desde 0 hasta 6, ver manual). Y **romberg** que nos muestra simplemente el resultado numérico.

(%i11) quad_ qags(exp(x^ 3+x), x, 0, 1);

(%o11) $\left[2.505246759202014, 2.781382634433632 \times 10^{-14}, 21, 0\right]$

(%i12) romberg(exp(x^ 3+x), x, 0, 1);

(%o12) 2.505246763921738

3. Ahora veamos la manera de calcular integrales del tipo

$$\int_C f(x,y,z)\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

donde la curva C viene dada por medio de algún parámetro τ, es decir que la integral se puede escribir como:

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(\tau))|\mathbf{r}'(\tau)|\mathrm{d}\tau\,.$$

Dada la función $f = x^2 + y^2$

(%i13) f(x, y):=x^ 2 + y^ 2;

(%o13) $f(x,y) := x^2 + y^2$

Vamos a integrar siguiendo el camino dado por la curva parametrizada con: $x = \cos(\tau), y = \mathrm{sen}(3\tau)$

(%i14) [x,y]:[cos(tau),sin(3*tau)];

(%o14) $[\cos(\tau), \sin(3\,\tau)]$

(%i15) dr: diff([x,y], tau);

(%o15) $[-\sin(\tau), 3\,\cos(3\,\tau)]$

Borrador Preliminar

(%i16) integrate(f(x, y)*sqrt(dr.dr),tau,0,2);

(%o16) $\int_0^2 \sqrt{9\,\cos^2(3\,\tau)+\sin^2(\tau)}\,\left(\sin^2(3\,\tau)+\cos^2(\tau)\right)\,d\tau$

(%i17) romberg(f(x, y)*sqrt(dr.dr),tau,0,2);

(%o17) 3.264369711231565

4. Queremos ahora evaluar la integral

$$\oint_C x\,\mathrm{d}y\,,$$

C es el círculo: $x^2+y^2=a^2$, $z=0$. Con: $x=a\cos(\theta)$, $y=a\mathrm{sen}(\theta)$, y el parámetro θ variando de 0 a 2π.

(%i18) f(x):=x;

(%o18) $f(x):=x$

(%i19) [x,y]:[a*cos(tau),a*sin(tau)];

(%o19) $[a\,\cos(\tau),a\,\sin(\tau)]$

(%i20) dr: diff([x,y], tau);

(%o20) $[-a\,\sin(\tau),a\,\cos(\tau)]$

(%i21) integrate(f(x)*dr[2],tau,0,2* %pi);

(%o21) πa^2

5. Calculemos la integral

$$\int_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{A}=(2x+y)\mathbf{i}+(y-2x)\mathbf{j}$ y C en términos de un parámetro es $x=2\lambda^2+2\lambda$, $y=\lambda+1$.

(%i22) A(x, y):=[2*x+y,y-2*x];

(%o22) $A(x,y):=[2x+y,y-2x]$

(%i23) [x,y]:[2*lambda^ 2+2*lambda,lambda+1];

(%o23) $\left[2\,\lambda^2+2\,\lambda,\lambda+1\right]$

(%i24) dr: diff([x,y], lambda);

(%o24) $[4\,\lambda+2,1]$

(%i25) integrate(A(x, y).dr,lambda,-1,1);

(%o25) 22

El programa no dispone de una función para el cálculo de integrales múltiples de manera directa, pero esto no significa que no podamos integrar aplicando varias veces la función **integrate**

(%i26) kill(all)$

(%i1) integrate(integrate(f(u,v),v,a(u),b(u)), u, c,d);

(%o1) $\int_c^d \int_{a(u)}^{b(u)} f\,(u,v)\;dv\;du$

6. Si quisiéramos calcular el área de una elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

Borrador Preliminar

podríamos hacer lo siguiente. Calculamos el área en el primer cuadrante determinado por $0 \leq x \leq X$, donde $X = (a/b)\sqrt{b^2 - y^2}$ y donde $0 \leq y \leq Y$, con $X = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$. Por lo tanto, el área es

$$A = 4 \int_0^b \left[\int_0^X \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

donde $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

```
(%i2) assume(a ¿ 0, b ¿ 0, x ¿ 0, x ¡ a, y ¿ 0,y ¡ b )$
(%i3) [X:(a/b)*sqrt(b^ 2-y^2),Y:(b/a)*sqrt(a^ 2-x^ 2)];
```

(%o3) $\left[\frac{a\sqrt{b^2 - y^2}}{b}, \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right]$

```
(%i4) 4*integrate(integrate(1,x,0,X),y,0,b);
```

(%o4) $\pi\, a\, b$

7. Consideremos ahora un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

y su volumen. Como en el caso anterior, podemos calcular el volumen en el primer octante: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ donde: $0 \leq z \leq Z = c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$, $0 \leq y \leq Y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ y x fijo.

$$V = 8 \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^Y \mathrm{d}y \int_0^Z \mathrm{d}z\,.$$

```
(%i5) assume(a¿0,b¿0,c¿0,a¿b,a¿c,b¿c)$
(%i6) assume(x¿0,x¡a,y¿0,y¡b,z¿0,z¡c)$
(%i7) [Z:c*sqrt(1-x^ 2/a^ 2-y^ 2/b^ 2),Y:b*sqrt(1-x^ 2/a^ 2)];
```

(%o7) $\left[c\sqrt{-\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + 1}, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]$

```
(%i8) 8*integrate(integrate(integrate(1,z,0,Z),y,0,Y),x,0,a);
```

(%o8) $\frac{4\,\pi\, a\, b\, c}{3}$

8. Consideremos ahora el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}\,.$$

```
(%i9) load(vect)$
(%i10) F(x, y, z):=[x^ 2,y^ 2,z^ 2];
```

(%o10) $F(x, y, z) := [x^2, y^2, z^2]$

El rotacional de **F** es

```
(%i11) ev(express(curl(F(x, y, z))),diff);
```

(%o11) $[0, 0, 0]$

Podemos calcular el potencial de la siguiente manera

```
(%i12) PF:potential(F(x, y, z));
```

(%o12) $\frac{z^3 + y^3 + x^3}{3}$

Borrador Preliminar

Por lo tanto existe una función $\phi(x, y, z)$

(%i13) define(phi(x, y, z), PF);
(%o13) $\phi(x, y, z) := \dfrac{z^3 + y^3 + x^3}{3}$

Tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$

(%i14) ev(express(grad(phi(x, y, z))),diff);
(%o14) $[x^2, y^2, z^2]$

9. Realicemos ahora un cálculo en coordenadas esféricas. Dado el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{2A\cos(\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{A\text{sen}(\theta)}{r^3}\hat{\mathbf{u}}_\theta\,,$$

(%i15) spherical;
(%o15) $[[\cos(\phi)\,r\,\sin(\theta), \sin(\phi)\,r\,\sin(\theta), r\,\cos(\theta)]\,, r, \theta, \phi]$

(%i16) scalefactors(spherical)$
(%i17) assume(r¿0)$
(%i18) F(r,theta,phi):=[2*A*cos(theta)/r^ 3,A*sin(theta)/r^ 3,0];
(%o18) $F(r, \theta, \phi) := [\dfrac{2A\cos(\theta)}{r^3}, \dfrac{A\sin(\theta)}{r^3}, 0]$

(%i19) ev(express(curl(F(r,theta,phi))),diff),factor;
(%o19) $[0, 0, 0]$

(%i20) f:-integrate(2*A*cos(theta)/r^ 3,r);
(%o20) $\dfrac{\cos(\theta)\,A}{r^2}$

(%i21) define(g(r,theta),f);
(%o21) $g(r, \theta) := \dfrac{cos(\theta)A}{r^2}$

(%i22) ev(express(grad(g(r,theta))),diff),factor;
(%o22) $\left[-\dfrac{2\,\cos(\theta)\,A}{r^3}, -\dfrac{\sin(\theta)\,A}{r^3}, 0\right]$

(%i23) kill(all);

5.3.5 Ejercicios

1. Evalúe la integral de línea de

$$\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}\,,$$

a lo largo de la curva C: $x = a\lambda^2$, $y = b\lambda$, $z = c\,\text{sen}\,(\pi\lambda/2)$, desde el origen al punto (a, b, c).

2. Evalúe la integral de línea de

$$\mathbf{A} = x\mathbf{i} + \frac{y^2}{b}\mathbf{j} - \frac{z^2}{c}\mathbf{k}\,,$$

a lo largo de la curva C: $x = a\cos(\pi\lambda/2)$, , $y = b\,\text{sen}\,(\pi\lambda/2)$, $z = c\lambda$, desde el punto $(a, 0, 0)$ al punto $(0, b, c)$.

3. Evalúe la siguiente integral $\oint_C y\left(4x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + x\left(2x^2 + 3y^2\right)\mathrm{d}y$ alrededor de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
4. Encuentre la circulación alrededor de una circunferencia de radio unidad centrada en el origen para los

Borrador Preliminar

siguientes campos.

(a). $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(-y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,\mathbf{j}\right)$.

(b). $\mathbf{A} = (xy+1)\,\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 2\right)\hat{\mathbf{j}}$.

5. Encuentre el flujo del campo $\mathbf{A} = \kappa x^2\mathbf{k}$ a través de la porción de una esfera de radio a centrada en el origen y el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesianos.

6. Encuentre el flujo del campo $\mathbf{A} = y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} - 2x\mathbf{k}$ a través de la porción del plano $x + 2y - 3z = 5$ y el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesianos.

7. Encuentre el vector de área $\mathbf{S}$ de la parte de la superficie curva del hiperbolóide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

que pertenece a la región: $z \geq\ 0$ y $a \leq x \leq \lambda a$.

8. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{A} = \left[3x^2(y+z) + y^3 + z^3\right]\mathbf{i} + \left[3y^2(x+z) + x^3 + z^3\right]\mathbf{j} + \left[3z^2(x+y) + x^3 + y^3\right]\mathbf{k}$$

(a). Calcule $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$.

(b). Evalúe la integral

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

a lo largo de cualquier linea que conecte el punto $(1,-1,1)$ con el punto (2,1,2).

9. A partir de la siguiente parametrización $x = a\cos^n(\theta)$ y $y = a\,\mathrm{sen}^n(\theta)$, encuentre el área acotada por las curvas

$$x^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5} \quad \text{y} \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\,.$$

10. Evalúe la siguiente integral

$$\oint_C \left[y(4x^2+y^2)\mathrm{d}x + x(2x^2+3y^2)\mathrm{d}y\right]\,,$$

alrededor de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2$.

11. Evalúe la integral $\int \mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector posición, sobre la superficie $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, como se indica a continuación

(a). Parametrice la superficie con: $x = a\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi)$, $y = a\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\varphi)$, $z = a^2\cos^2(\theta)$, demuestre que:

$$\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = a^4\left[2\,\mathrm{sen}^3(\theta)\cos(\varphi) + \cos^3(\varphi)\mathrm{sen}(\theta)\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,.$$

(b). Aplique el teorema de Gauss al volumen acotado por la superficie y el plano $z = 0$.

12. Demuestre la validez del teorema de Gauss

(a). Calculando el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha\mathbf{r}}{(r^2+a^2)^{(3/2)}}\,,$$

a través de la superficie $|\mathbf{r}| = \sqrt{3}a$.

(b). Demostrando que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \frac{3\alpha a^2}{(r^2+a^2)^{(5/2)}}\,,$$

y evaluando la integral de volumen de $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$ sobre el interior de la esfera $|\mathbf{r}| = \sqrt{3}a$.

13. Un campo vectorial, en coordenadas cilíndricas, viene representado por

$$\mathbf{F} = F_0\left[\frac{x\cos(\lambda z)}{a}\mathbf{i} + \frac{y\cos(\lambda z)}{a}\mathbf{j} + \mathrm{sen}(\lambda z)\mathbf{k}\right] \equiv \frac{F_0\rho}{a}\cos(\lambda z)\hat{\mathbf{e}}_\rho + F_0\mathrm{sen}(\lambda z)\mathbf{k}\,,$$

Borrador Preliminar

(a). Calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie acotada por los cilindros $\rho = a$, $\rho = 2a$ y los planos $z = \pm a\pi/2$.

(b). Evaluando la integral anterior pero utilizando el teorema de la divergencia.

5.4 Teoría de Potencial

Los campos vectoriales conservativos resultan ser de gran importancia en diferentes áreas de la Física. Estos campos vectoriales tienen la propiedad de que su integral de línea, alrededor de cualquier trayectoria que encierre una superficie, se anula. Es decir, la integral de línea de un campo vectorial conservativo, entre dos puntos arbitrarios del espacio, es independiente del camino tomado para realizar la integral.

Entre dos puntos del espacio P_1 y P_2 podemos trazar dos trayectorias por dos caminos diferentes C_1 y C_2 y también formar un lazo entre ellos. Si asumimos de entrada que $\mathbf{A}$ es un campo vectorial conservativo, podemos escribir

$$\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,,$$

como la segunda integral es el negativo de la integral a lo largo de C_2, entonces

$$\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$$

Figura 5.21: Trayectoria de integración para ir de P_1 a P_2 y el lazo formado por los caminos.

Lo que implica que

$$\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

como lo habíamos afirmado.

Si tomamos un punto arbitrario P_0 y lo conectamos por trayectorias arbitrarias con todos los puntos del espacio, entonces, para cada punto P con coordenadas (x, y, z) podemos definir el campo escalar

$$\phi(x^i) = -\int_{P_0}^{P} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{C} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

donde C es cualquier camino que va de P_0 a P. El signo menos es por razones históricas.

El campo escalar $\phi(x, y, z)$ es una función bien definida porque su valor no dependerá de la trayectoria C y se le suele denominar el potencial asociado al campo vectorial $\mathbf{A}$. Notemos que el potencial en P_0 es cero y se conoce como el punto de referencia potencial.

Consideremos ahora dos puntos arbitrarios $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ conectados por algún camino C. Es claro que también podemos conectar estos dos puntos por un camino diferente que pase por el punto P_0, es decir, escoger un camino que tome la ruta: $P_1 \to P_0 \to P_2$. Si $\mathbf{A}$ es un campo conservativo, entonces

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_2, y_2, z_2)\,,$$

de manera equivalente

$$\phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Borrador Preliminar

Lo que se conoce como la diferencia de potencial entre dos puntos.

Si P_1 y P_2 se conectan de manera infinitesimal por $\mathrm{d}\mathbf{r}$, entonces el potencial infinitesimal es

$$\mathrm{d}\phi(x^i) = -\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\phi(x^i) = \partial_i\phi(x^j)\mathrm{d}x^i = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

de manera que

$$\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = -\boldsymbol{\nabla}\phi\,.$$

En palabras: un campo vectorial conservativo siempre puede escribirse como el negativo del gradiente del campo escalar potencial definido por la ecuación (5.4).

5.4.1 Potenciales escalares

Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ en una determinada región R puede asociarse con un gradiente de un potencial $\phi(x,y,z)$ tendremos que

$$\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x^i) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \oint \mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$$

La ventaja que un campo derive de un potencial es, por un la lado, la simplicidad y la cantidad de información que sobre el campo podemos tener: describimos la interacción por una función y no con tres (las componentes del campo) y sabremos que el campo es irrotacional y conservativo. Pero además, la función que describe el campo es escalar, con lo cual es independiente del sistema de coordenadas.

Cualquiera de las afirmaciones siguientes implica las otras dos, con lo que podremos elegir cualquier de ellas para demostrar las otras dos. Veamos:

- Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional

$$\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow\; \begin{cases} -\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\right) = 0 \\ -\oint \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\oint \mathrm{d}\phi = \phi\left(x_0^i\right) - \phi\left(x_0^i\right) = 0 \end{cases}$$

  donde hemos utilizado la definición de diferencial total

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi(x^i)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi(x^i)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi\left(x^i\right)}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

- Un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial.

  Un campo conservativo implica que el trabajo ($\int_M^{M'}\mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$) es independiente de la trayectoria entre M y M'. Por eso llamamos a la fuerza conservativa por cuanto se conserva la energía y por lo tanto, ésta depende únicamente de la posición

$$\oint \mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \;\Rightarrow\; \int_M^{M'}\mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \phi\left(x_2^i\right) - \phi\left(x_1^i\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\phi = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\,,$$

  con lo cual hemos demostrado que el campo vectorial deriva de un potencial. El signo menos ($-$) es una convención tradicional del oficio del Físico y proviene de nuestra intuición de flujo de los acontecimientos: "El agua siempre fluye hacia abajo".

  Ahora bien, utilizando el teorema de Stokes tendremos:

$$\mathbf{F}\left(x^i\right) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow\; \oint \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{S_2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x^i) = 0\,.$$

  Es fácil demostrar que el campo también es irrotacional.

- Un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y que el campo es

Borrador Preliminar

conservativo.

Otra vez, por el teorema de Stokes si el campo es irrotacional es conservativo

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x^i)=0 \;\Rightarrow\; \iint_{S_2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{S}=\oint\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=0\,,$$

y si es conservativo deriva de un potencial

$$\mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathrm{d}\phi=-\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}(x^i)=-\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i)\,.$$

En definitiva, si cualquiera de las condiciones se cumple: conservativo, irrotacional o potencial, las otras también se cumplirán.

Es bueno aclarar que el hecho de que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}\neq 0$ implica siempre que $\mathbf{F}$ es NO conservativo, pero que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}=0$ no necesariamente implica que $\mathbf{F}$ sea conservativo, al menos que la región involucrada en el proceso de integración sea una región simplemente conectada.

Ejemplo 5.33 Consideremos el siguiente campo vectorial en el plano

$$\mathbf{F}=\kappa\left[xy^2\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}\right]\,,$$

con κ constante.

Es fácil comprobar que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}=0$, de manera que $\mathbf{F}$ es conservativo.

Si queremos encontrar el campo potencial asociado al campo vectorial $\mathbf{F}$ podemos tomar un punto P genérico, en este caso del plano xy, y escoger un camino de integración desde el origen al punto $P(x_1,y_1)$. Vamos a tomar la recta parametrizada por: $x=x_1\tau$, $y=y_1\tau$ con $0\leq\tau\leq 1$. De manera que

$$\begin{aligned}\phi(x_1,y_1) &= -\kappa\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}\left[xy^2\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}\right]\cdot[\mathrm{d}x\mathbf{i}+\mathrm{d}y\mathbf{j}]=-\kappa\int_0^1\left[x_1\tau(y_1\tau)^2\mathbf{i}+(x_1\tau)^2y_1\tau\mathbf{j}\right]\cdot[x_1\mathrm{d}\tau\mathbf{i}+y_1\mathrm{d}\tau\mathbf{j}]\\ &= -2\kappa x_1^2y_1^2\int_0^1\tau^3\mathrm{d}\tau=-\frac{\kappa x_1^2y_1^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el potencial será

$$\phi(x,y)=-\frac{\kappa}{2}x_1^2y_1^2\,.$$

Se deja como ejercicio comprobar que $\mathbf{F}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$.

◁

Ejemplo 5.34 Consideremos el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F}=\frac{\kappa y}{x^2+y^2}\mathbf{i}-\frac{\kappa x}{x^2+y^2}\mathbf{j}\,,$$

con κ constante.

De nuevo, es fácil ver que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}=\left[\partial_xF_y-\partial_yF_x\right]\mathbf{k}=0\,.$$

La integral de línea de $\mathbf{F}(x,y)$ la llevaremos a cabo sobre un círculo C de radio a centrado en el origen, curva parametrizada por: $x=a\cos(\tau)$, $y=a\,\mathrm{sen}(\tau)$, con $0\leq\tau\leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y=\frac{\kappa y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{\kappa x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\\ &= \frac{\kappa(a\,\mathrm{sen}(\tau))(-a\,\mathrm{sen}(\tau)\mathrm{d}\tau)}{(a\cos(\tau))^2+(a\,\mathrm{sen}(\tau))}-\frac{\kappa(a\cos(\tau))(a\cos(\tau)\mathrm{d}\tau)}{(a\cos(\tau))^2+(a\,\mathrm{sen}(\tau))^2}\\ &= -\frac{\kappa a^2\,\mathrm{sen}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{a^2(\cos^2(\tau)+\mathrm{sen}^2(\tau))}-\frac{\kappa a^2\cos^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{a^2(\cos^2(\tau)+\mathrm{sen}^2(\tau))}=-\kappa\mathrm{d}\tau\,,\end{aligned}$$

para la integral

$$\oint_C\mathbf{F}(x^i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=-\kappa\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\tau=-2\pi\kappa\neq 0\,.$$

Borrador Preliminar

Como podemos ver, el rotacional del campo se anula pero la integral de línea cerrada, alrededor del círculo que contiene el origen de coordenadas, es diferente de cero. En el origen el campo vectorial $\mathbf{F}$ contiene una singularidad.

◁

Ejemplo 5.35 Demostremos que

- Si un campo de velocidades es potencial, el campo de aceleraciones también lo será.
  Esto es: Si
  $$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t),t) = \boldsymbol{\nabla}\varphi \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}(t),t) = \boldsymbol{\nabla}\Phi$$
  con
  $$\mathbf{a}(\mathbf{r}(t),t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(\mathbf{r}(t),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}(t),t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}(t),t)\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}(\mathbf{r}(t),t)$$
  Adaptando la relación vectorial del primer problema obtenemos
  $$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\left(v^2\right) = 2\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}$$
  con lo cual
  $$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\varphi + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left((\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2\right) \quad \Rightarrow \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}\Phi$$
- Encontremos la forma del potencial del campo de aceleraciones en términos del campo de velocidades y su potencial.
  Arriba notamos claramente que
  $$\Phi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2\,.$$

◁

5.4.2 Potenciales vectoriales y calibres

Al igual que derivamos un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ a partir de un potencial escalar $\phi(x,y,z)$ y asociamos su existencia a su condición de irrotacionalidad, $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x,y,z) = 0$, podemos pensar que un campo sin divergencia (*solenoidal* o *transverso*) conlleva a la existencia de un potencial *vectorial*. Esto es

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\left(x^i\right) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(x^i)\,.$$

Claramente

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x^i) = \partial_i F^i = \partial_i\left(\varepsilon^{ijk}\partial_j A_k\right) = 0\,.$$

El campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$ se conoce con el nombre de *potencial vectorial* del campo $\mathbf{F}$. Ahora bien, el campo solenoidal, $\mathbf{F}$, no queda unívocamente determinado a partir de su potencial vectorial. Existe una arbitrariedad de un campo escalar, llamado *de calibre* $\chi = \chi(x,y,z)$ (gauge en inglés) de forma tal que

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i) \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\,,$$

de manera que varios potenciales vectoriales $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}$ generan el mismo campo vectorial $\mathbf{F}$. Esta arbitrariedad nos permite particularizar el calibre según nos convenga. Existen varios calibres en el mercado, los cuales son utilizados según el problema físico al cual tratemos. Entre ellos podemos mencionar un par de ellos:

- **El calibre de *Lorentz*:** Esta selección proviene de requerir que el campo de calibre $\chi = \chi(x,y,z,t)$ satisfaga la ecuación de onda
  $$\boldsymbol{\nabla}^2\chi(x^i) - a\frac{\partial^2\chi(x^i)}{\partial t^2} = 0$$
  donde a es una constante. Nótese que hemos supuesto que el campo de calibre puede depender del tiempo.

Borrador Preliminar

El calibre del Lorentz se escoge porque (entre otras cosas) permite que la solución a la ecuación de onda para el potencial vectorial $\mathbf{A}\,(x,y,z,t)$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}(x^i) - a\frac{\partial^2\mathbf{A}(x^i)}{\partial t^2} = 0\,,$$

quede unívocamente determinada.

- **El calibre de *Coulomb, de radiación o transverso*:** La selección de este calibre $\chi\,(x,y,z,t)$ impone que el potencial vectorial $\mathbf{A}\,(x,y,z,t)$ satisfaga la ecuación

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}'(x^i) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\mathbf{A}(x^i) + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)\big) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}^2\chi(x^i) = 0\,.$$

El nombre de calibre de Coulomb, de radiación o transverso proviene de las consecuencias de su utilización en las ecuaciones de Maxwell. Nótese que si el campo (y el calibre) es independiente del tiempo, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$, ambos calibres coinciden.

5.4.3 Teorema de Green y potenciales

Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$, decente (continuo y continuamente diferenciable) están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s\cdot\mathbf{F}$, también se conocen, entonces el teorema de Green nos garantiza que ese campo $\mathbf{F}(x,y,z)$ que cumple con esas condiciones es único[8].

Esa demostración procede así. Supongamos que existe otro campo vectorial que cumple con las mismas condiciones que el campo $\mathbf{F}(x,y,z)$. Esto es

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{G}\\[2ex] \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{G}\\[2ex] \hat{\mathbf{n}}_s\cdot\mathbf{F} = \hat{\mathbf{n}}_s\cdot\mathbf{G}\end{array}\right\} \Rightarrow\; \mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{G} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = 0\\[2ex] \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = 0\\[2ex] \hat{\mathbf{n}}_s\cdot\mathbf{H} = 0\end{array}\right.$$

como $\mathbf{H}$ es irrotacional entonces

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) = 0\,,$$

y el teorema de Green nos garantiza que

$$\oint \phi\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\bar{S}} \phi\,(\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}})\;\mathrm{d}\bar{S} = \iiint_V \left[\phi\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi) + \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\right]\mathrm{d}V\,,$$

con lo cual

$$\iint_{\bar{S}} \phi\,(\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}})\;\mathrm{d}\bar{S} = \iint_{\bar{S}} \phi\,(\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}})\;\mathrm{d}\bar{S} = \iiint_V [\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}]\,\mathrm{d}V \;\Rightarrow\; \mathbf{H} = 0\,,$$

de donde se deduce que $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, es decir, que el campo $\mathbf{F}$ es único.

5.4.4 Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz[9] afirma que todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal*

[8] Esta afirmación también se conoce como *primer teorema de Helmholtz*.

[9] *Segundo teorema de Helmholtz*.

Borrador Preliminar

o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$. Esto es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t\,, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0\,. \end{cases}$$

En general dado que el campo $\mathbf{F}$ puede ser discontinuo, tendremos que suponer que

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{J}\,(\mathbf{r}) \end{array}\right\} \quad \text{y como} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = \rho\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}\,(\mathbf{r})\,, \end{array}\right.$$

dado que $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\circ)$ y $\boldsymbol{\nabla} \times (\circ)$ son lineales. Esta separación del campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t$ es completamente general y siempre puede hacerse para cualquier campo vectorial.

Supondremos además, que la solución a la ecuación de Poisson $\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x,y,z) = -\rho(x,y,z)$ existe y es única[10]. Tendremos que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho\,(\mathbf{r})\,,$$

y la solución existe y es única. Es decir, podemos expresar de manera unívoca al campo vectorial $\mathbf{F}$ (a través de su "componente" longitudinal $\mathbf{F}_l$) en términos de un campo escalar (función potencial) $\phi(x^i)$.

Por otra parte

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \mathbf{J}\,(\mathbf{r})\,.$$

Al seleccionar el calibre de Coulomb $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ se convierte en

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \partial^i\partial_i\,\mathbf{A} = -\mathbf{J}\,(\mathbf{r}) \;\Rightarrow\; \partial^i\partial_i\,A^k = -J^k\,(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla}^2 A_x = -J_x\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla}^2 A_y = -J_y\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla}^2 A_z = -J_z\,(\mathbf{r}) \end{array}\right.$$

Una vez más nos topamos con la solución a la ecuación de Poisson, esta vez para cada componente. Esto se cumple siempre, porque hemos supuesto que la solución para la ecuación de Poisson existe y es única. Resolver la ecuación de Poisson para cada una de las componentes del campo vectorial queda fuera de los alcances de estas notas. En su lugar, en los ejemplos 5.36 y 5.36 a continuación, haremos varias hipótesis simplificadoras para no integrar las tres ecuaciones de Poisson.

Un corolario del teorema de Helmholtz nos indica que un campo vectorial queda unívocamente determinado si conocemos su rotacional y su divergencia. Vale decir que cualquier campo vertorial puede expresarse como

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}\,.$$

◁

Ejemplo 5.36 Si $\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$. Encontremos algún posible campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$.

[10] Esta suposición es indispensable. Las condiciones sobre el potencial $\phi(x,y,z)$ que la implican serán consideradas en otros cursos de métodos matemáticos. En este curso, supondremos que existe y es única.

Borrador Preliminar

Tenemos

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\frac{1}{r^2\text{sen}(\theta)}\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{u}}_r & r\,\hat{\mathbf{u}}_\theta & r\text{sen}(\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r\left(r,\theta,\phi\right) & r\,A_\theta\left(r,\theta,\phi\right) & r\text{sen}(\theta)\,A_\phi\left(r,\theta,\phi\right)\end{vmatrix}=-\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$$

con lo cual

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r^2\text{sen}(\theta)}\left(\frac{\partial\left(r\text{sen}(\theta)\,A_\phi\left(r,\theta,\phi\right)\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial\left(r\,A_\theta\left(r,\theta,\phi\right)\right)}{\partial\phi}\right)$$

$$0=\left(\frac{\partial\left(r\text{sen}(\theta)\,A_\phi\left(r,\theta\right)\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\phi}\right),\quad 0=\left(\frac{\partial\left(r\,A_\theta\left(r,\theta,\phi\right)\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\theta}\right)$$

Ahora hay que hacer algún tipo de suposición para que podamos encontrar, fácilmente algún potencial vectorial. Supongamos pues que

$$\left.\begin{array}{c}A_r\left(r,\theta,\phi\right)=cte\\ \\ A_\phi\left(r,\theta,\phi\right)\\ \\ A_\theta\left(r,\theta,\phi\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{sen}(\theta)=\frac{\partial\left(r\text{sen}(\theta)\,A_\phi(r,\theta,\phi)\right)}{\partial\theta}\\ \\ 0=\frac{\partial A_r(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\\ \\ 0=A_\theta\left(r,\theta,\phi\right)+r\frac{\partial A_\theta(r,\theta,\phi)}{\partial r}-\frac{\partial A_r(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\end{array}\right.$$

Integrando la primera obtendremos

$$\text{sen}(\theta)=\frac{\partial\left(r\text{sen}(\theta)\,A_\phi\left(r,\theta,\phi\right)\right)}{\partial\theta}\quad\Rightarrow A_\phi\left(r,\theta,\phi\right)=-\frac{\cos(\theta)}{r\text{sen}(\theta)}+C_1\left(r,\theta\right)$$

de la segunda concluimos que $A_r=A_r\left(r,\theta\right)$, es decir, A_r es independiente de ϕ. Finalmente, de la tercera ecuación concluimos que podemos hacer adicionalmente $A_r=A_r\left(r\right)$ y $C_1\left(r,\theta\right)=0$. Resumiendo

$$\mathbf{F}=-\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r\quad\wedge\quad\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\mathbf{F}\quad\Rightarrow\mathbf{A}=A_r(r)\hat{\mathbf{u}}_r-\frac{\cos(\theta)}{r\text{sen}(\theta)}\,\hat{\mathbf{u}}_\phi\,.$$

◁

Ejemplo 5.37 Dado el siguiente campo vectorial $\mathbf{A}=4xy\,\hat{\mathbf{i}}-y^2\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}$.

1. Calculemos el flujo de $\mathbf{A}$ a través de un cubo unitario: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$. Tenemos que el flujo del campo vectorial es

$$\int_S\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)\mathrm{d}V=\int\left(2y+1\right)\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1\left(2y+1\right)\mathrm{d}y=2\,.$$

2. Calculemos el flujo del rotacional de ese campo a través de una semi esfera: $x^2+y^2+z^2=16$ con $z\geq 0$. El flujo del rotacional será

$$\int_S\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\oint\left(4xy\,\hat{\mathbf{i}}-y^2\,\hat{\mathbf{j}}+z\,\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{i}}+\mathrm{d}y\,\hat{\mathbf{j}}\right)=\int 4xy\,\mathrm{d}x-\int y^2\mathrm{d}y\,,$$

como el circuito será una circunferencia de radio $r=4$ en el plano $z=0$ entonces al pasar a polares nos queda

$$x=4\cos(\theta)\quad\Rightarrow\mathrm{d}x=-4\,\text{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,;\quad y=4\,\text{sen}(\theta)\quad\Rightarrow\mathrm{d}y=4\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,,$$

con lo cual

$$\oint\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=-5\int_0^{2\pi}4^2\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta)\mathrm{d}\theta=0\,.$$

3. Consideremos ahora un cilindro $x^2+y^2=16$ con $-1\leq z\leq 1$

Borrador Preliminar

(a). Calculemos el flujo del campo a través de esa superficie.

Como siempre, para encontrar el flujo del campo podemos hacerlo directamente $\int_S \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, o a través de su divergencia, $\int (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V$

El flujo de este campo a través de la superficie que encierra el cilindro sería

$$\int_S \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_+} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_c} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_-} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\,.$$

Con $\mathrm{d}\mathbf{S}_\pm$ las dos tapas del cilindro ($z=1$ y $x=-1$), mientras que $\mathrm{d}\mathbf{S}_c$ representa la superficie del cilindro. Una forma de resolverlo sería: se transforma el campo a cilíndricas, ya que $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S_c\,\hat{\mathbf{u}}_r + \mathrm{d}S_\pm\,\hat{\mathbf{u}}_z$.

Esto es:

$$\mathbf{A} = 4(4\cos(\theta))(4\,\mathrm{sen}(\theta))(\cos(\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_r - \mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta) + (4\,\mathrm{sen}(\theta))^2(\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_r + \cos(\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta) + z\,\hat{\hat{\mathbf{k}}}\,,$$

y acomodando

$$\mathbf{A} = 16\mathrm{sen}(\theta)\,(\cos(2\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_r - \mathrm{sen}(2\theta)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta) + z\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Entonces, el flujo en las "tapas" es

$$\int_{S_+} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_-} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 16\pi\,.$$

mientras que en las superficie cilíndrica será:

$$\int_{S_c} \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_d} 4\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\;(16\mathrm{sen}(\theta)\;\cos(2\theta)) = 64\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\;\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\;(\mathrm{sen}(\theta)\;\cos(2\theta)) = 0\,.$$

Finalmente

$$\int_S \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 32\pi\,.$$

Hubiera sido inmediato si hubiéramos utilizado el teorema de la divergencia y reutilizado los resultados del volumen anterior. Así

$$\int (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \int (2y+1)\,\mathrm{d}V = \int (2\,(\rho\,\mathrm{sen}(\theta))+1)\,\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

con $y=\rho\,\mathrm{sen}(\theta)$ y el diferencial de volumen $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$.

Entonces, finalmente,

$$\int (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\,\mathrm{d}V = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\;\int_0^4\mathrm{d}\rho\;2\rho^2\;\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\;\mathrm{sen}(\theta)\;+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\;\int_0^4\mathrm{d}\rho\;2\rho^2\;\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

para que, otra vez

$$\int_S \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 32\pi\,,$$

porque el primer término de la suma se anula.

(b). Encontremos el flujo del rotacional de ese campo para el caso $z\geq 0$.

El flujo del rotacional será exactamente el mismo que en caso de las semiesfera. Esto es

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

4. Calculemos alguna de las componentes longitudinales y transversales del campo.

Todo campo vectorial $\mathbf{A}$ se puede separar en una componente longitudinal $\mathbf{A}^l$, y otra transversal $\mathbf{A}^t$. Esto es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^l + \mathbf{A}^t \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}^l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}^t = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}^l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}^l = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 2y+1 \end{array}\right.$$

Borrador Preliminar

con lo cual tenemos

$$\partial_y A_z^l - \partial_z A_y^l = 0\,, \quad \partial_z A_x^l - \partial_x A_z^l = 0\,, \quad \partial_x A_y^l - \partial_y A_x^l = 0$$

y

$$\partial_x A_x^l + \partial_y A_y^l + \partial_z A_z^l = 2y + 1$$

Para empezar a acotar la solución, supongamos que $A_z^l = A_z^l(x, y, z) = 0$

$$\partial_z A_y^l = 0 \quad \text{y} \quad \partial_z A_x^l = 0 \quad \Rightarrow A_x^l = A_x^l(x, y) \quad \text{y} \quad A_y^l = A_y^l(x, y)$$
$$\partial_x A_y^l - \partial_y A_x^l = 0 \quad \text{y} \quad \partial_x A_x^l + \partial_y A_y^l = 2y + 1\,.$$

Otro par de suposiciones salvadoras son: $A_x^l = A_x^l(x, y) = f(x)$ y $A_y^l = A_y^l(x, y) = g(x)$. Estas nos garantizan que se cumple la ecuación $\partial_x A_y^l - \partial_y A_x^l = 0$. Es claro entonces que podemos encontrar una solución de la forma $A_x^l = f(x) = x$ y $A_y^l = g(y) = y^2$, que satisfaga $\partial_x A_x^l + \partial_y A_y^l = 2y + 1$. Con lo cual

$$\mathbf{A}^l = x\,\hat{\mathbf{i}} + y^2\,\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \mathbf{A}^t = \mathbf{A} - \mathbf{A}^l = x(4y - 1)\,\hat{\mathbf{i}} - 2y^2\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

Claramente, las suposiciones

$$A_z^l = A_z^l(x, y, z) = 0, \quad A_x^l = A_x^l(x, y) = f(x) \quad \text{y} \quad A_y^l = A_y^l(x, y) = g(x)\,,$$

son arbitrarias y otras suposiciones pueden ser hechas y, tendremos resultados distintos.

5. Encontremos los potenciales escalar y vectorial asociados a este campo vectorial $\mathbf{A}$, a través de las componentes longitudinal $\mathbf{A}^l$ y transversal $\mathbf{A}^t$.

El potencial escalar, $\phi = \phi(x, y, z)$, está asociado a la componente longitudinal, $\mathbf{A}^l$, del campo. Esto es

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}^l = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{A}^l = -\boldsymbol{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -\partial_x \phi(x, y, z) & \Rightarrow \phi(x, y, z) = -\frac{x}{2} + \chi(y, z) \\ y^2 = -\partial_y \phi(x, y, z) & \Rightarrow y^2 = -\partial_y \chi(y, z) \end{cases}$$

Con lo cual

$$\phi(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y^3}{3} + \varphi(z)$$

El potencial vectorial para un campo vectorial, $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}(x, y, z)$, está asociado a la componente transversa $\mathbf{A}^t$ del campo. Esto es

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}^t = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{A}^t = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi} \quad \Rightarrow \begin{cases} x(4y - 1) & = & \partial_y \Psi_z - \partial_z \Psi_y \\ -2y^2 & = & \partial_z \Psi_x - \partial_x \Psi_z \\ z & = & \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x \end{cases}$$

Una vez más, y de forma arbitraria, suponemos $\Psi_z = 0$. Entonces las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x(4y - 1) = -\partial_z \Psi_y; \quad -2y^2 = \partial_z \Psi_x; \quad \text{y} \quad z = \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x$$

con lo cual

$$x(4y - 1) = -\partial_z \Psi_y \quad \Rightarrow \Psi_y = -x(4y - 1)z + f(x, y)$$
$$-2y^2 = \partial_z \Psi_x \quad \Rightarrow \Psi_x = -2y^2 z + g(x, y)$$

y con estos resultados debemos satisfacer

$$z = \partial_x \Psi_y - \partial_y \Psi_x \quad \Rightarrow z = -(4y - 1)z + \partial_x f(x, y) + 4yz - \partial_y g(x, y)$$

con lo cual es inmediato que una posible solución surge de $f(x, y) = g(x, y) = 0$, para que finalmente el

Borrador Preliminar

potencial vectorial lo podamos expresar como

$$\mathbf{\Psi} = -x(4y-1)z\,\hat{\mathbf{i}} - 2y^2 z\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

◁

5.4.5 Teoremas integrales para campos tensoriales

A este nivel del curso, es perfectamente válido preguntarse si los teoremas integrales anteriormente aplicados a campos escalares y vectoriales pueden aplicarse a campos tensoriales en general. La respuesta a esta pregunta es si. Recordemos, nuevamente, que los escalares son cantidades que quedan completamente determinados por un sólo número en el espacio tridimensional, es decir, no contienen direcciones. Mientras que los vectores son formas lineales en sus vectores bases $\mathbf{A} = A^i\mathbf{e}_i$, es decir, se especifica por las tres cantidades A^i en $\mathbb{R}^3$.

En la sección 3.3 estudiamos los tensores de esfuerzos y de inercia como ejemplos de cantidades físicas que deben especificarse por más de tres números. En el caso del tensor de esfuerzos, vimos, por ejemplo, que si consideramos el plano xy, el vector de superficie es: $\mathrm{d}\mathbf{S}_3 = \mathrm{d}\mathbf{S}_z$, y si sobre la dirección z (dirección 3) ejercemos algún tipo de presión, aparecerán esfuerzos en las direcciones x (dirección 1) y y (dirección 2). Las cantidades que usamos para describir los esfuerzos lo denotamos por σ_{ij}, donde el primer índice indica la dirección de la fuerza y el segundo la dirección de la normal de la superficie donde está aplicada. Hablamos entonces de 9 cantidades involucradas para especificar al tensor.

Estas cantidades de dos índices, o formas bilineales en los vectores base $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\mathbf{D} = D^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,,$$

que nos permiten describir cantidades físicas en dos direcciones distintas suelen denominarse *díadas*.

Ya hemos operado con estas cantidades, por ejemplo, si multiplicamos una díada por un vector

$$\mathbf{D}\otimes\mathbf{A} = \left[D^{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\right]\otimes\left[A^k\mathbf{e}_k\right] = D^{ij}A^k\,\left[\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\right]\cdot\mathbf{e}_k = D^{ij}A^k\,\mathbf{e}_i\left[\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k\right] = D^{ij}A^k\,\mathbf{e}_i\delta_{jk} = D^{ij}A_j\,\mathbf{e}_i\,,$$

el resultado es un vector de componentes $B^i = D^{ij}A_j$.

Ya discutimos que el teorema de Gauss para un campo vectorial $\mathbf{A}$ es:

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}V = \oint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S\,.$$

Este teorema también funciona para díadas, ya que si hacemos la siguiente sustitución $\mathbf{A} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{c}$, con $\mathbf{c}$ un vector constante y en coordenadas cartesianas, se puede demostrar de la ecuación anterior que

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}\,\mathrm{d}V = \oint_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\mathrm{d}S\,.$$

Lo anterior también es cierto para el teorema de Stokes

$$\int_S \left[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{D}\right]\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \oint_C \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Si nos vamos directamente a la notación de índices, podemos ver que el teorema de Gauss para campos vectoriales se escribe como

$$\int_V \partial_i A^i\mathrm{d}V = \oint_S A^i\hat{n}_i\mathrm{d}S\,,$$

con lo que nos podemos tomar la libertad de extendernos, sin probarlo de manera rigurosa, a tensores de rango superior.

$$\int_V \partial_k T^{ij\ldots k\ldots s}\mathrm{d}V = \oint_S T^{ij\ldots k\ldots s}\hat{n}_k\mathrm{d}S\,.$$

Borrador Preliminar

En cuanto al teorema de Stokes para un campo vectorial

$$\int_S \varepsilon^{ijk}(\partial_j A_k)\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}S = \oint_C A_k \mathrm{d}x^k\,.$$

por lo tanto, para un campo tensorial sería:

$$\int_S \varepsilon^{ijk}(\partial_j T_{ij\ldots k\ldots s})\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}S = \oint_C T_{ij\ldots k\ldots s}\mathrm{d}x^k\,.$$

Practicando con Maxima

1. Como sabemos, una partícula que se mueve en un campo de fuerzas estará sujeta en cada punto a esta fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ de manera que el cambio de energía potencial es

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,.$$

Sea el siguiente campo de fuerzas

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = 3xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}\,.$$

En primer lugar, consideremos que la partícula se mueve desde el punto $(0,0)$ al punto (a,b) siguiendo las lineas rectas: $(0,0)\to(a,0)\to(a,b)$. Calculemos el trabajo realizado sobre la partícula

```
(%i1) load(vect)$ declare([a,b],constant)$
(%i3) F1(x, y, z):=[3*x*y^ 3,3*x^ 2*y^ 2,0];
```
(%o3) $F1(x,y,z) := [3xy^3, 3x^2y^2, 0]$

```
(%i4) dr:[1,1,1]$
(%i5) integrate(F1(x,0,z)[1],x,0,a)+integrate(F1(a,y,z)[2],y,0,b);
```
(%o5) $a^2\,b^3$

Supongamos ahora que la partícula se mueve siguiendo la trayectoria $y = bx^3/a^3$.

```
(%i6) y2:b*x^ 3/a^ 3$
(%i7) dr:diff([x,y2,0],x);
```
(%o7) $\left[1, \frac{3\,b\,x^2}{a^3}, 0\right]$

```
(%i8) F1:sublis([y=y2], F1(x, y, z));
```
(%o8) $\left[\frac{3\,b^3\,x^{10}}{a^9}, \frac{3\,b^2\,x^8}{a^6}, 0\right]$

```
(%i9) integrate(F1.dr,x,0,a);
```
(%o9) $\frac{12\,a^2\,b^3}{11}$

El resultado es diferente, el campo de fuerzas no es conservativo

```
(%i10) ev(express(curl(F1(x, y, z))),diff),factor;
```
(%o10) $[0, 0, -3\,x\,y^2]$

Consideremos ahora el siguiente campo $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$, ligeramente diferente al anterior y repitamos los cálculos.

```
(%i11) F2(x, y, z):=[2*x*y^ 3,3*x^ 2*y^ 2,0];
```
(%o11) $F2(x,y,z) := [2xy^3, 3x^2y^2, 0]$

Borrador Preliminar

Trayectoria $(0,0) \to (a,0) \to (a,b)$

```
(%i12) integrate(F2(x,0,z)[1],x,0,a)+integrate(F2(a,y,z)[2],y,0,b);
```
(%o12) $a^2\,b^3$

Trayectoria $y = bx^3/a^3$.

```
(%i13) F2:sublis([y=y2], F2(x, y, z));
```
(%o13) $\left[\frac{2\,b^3\,x^{10}}{a^9}, \frac{3\,b^2\,x^8}{a^6}, 0\right]$

```
(%i14) integrate(F2.dr,x,0,a);
```
(%o14) $a^2\,b^3$

El trabajo es el mismo ya que el campo es conservativo

```
(%i15) ev(express(curl(F2(x, y, z))),diff),factor;
```
(%o15) $[0,0,0]$

El potencial asociado a campo se puede calcular ahora

```
(%i16) PF2:-potential(F2(x, y, z))$ define(U(x, y),PF2);
```
(%o17) $U(x,y) := -x^2y^3$

Por lo tanto

```
(%i18) U(a,b)-U(0,0);
```
(%o18) $-a^2\,b^3$

2. Consideremos el siguiente campo vectorial en el plano

$$\mathbf{F} = \kappa\left[xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}\right] ,$$

con κ constante.

Es fácil comprobar que $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$, de manera que $\mathbf{F}$ es conservativo.

```
(%i19) kill(y2)$
(%i20) F(x, y, z):=[k*x*y^ 2,k*x^ 2*y,0];
```
(%o20) $F(x,y,z) := [kxy^2, kx^2y, 0]$

```
(%i21) ev(express(curl(F(x, y, z))),diff),factor;
```
(%o21) $[0,0,0]$

```
(%i22) [x,y,z]:[x1*tau,y2*tau,0];
```
(%o22) $[\tau\,x_1, \tau\,y_2, 0]$

```
(%i23) dr: diff([x,y,z], tau);
```
(%o23) $[x_1, y_2, 0]$

```
(%i24) 'integrate(F(x, y, z).dr,tau,0,1)=integrate(F(x, y, z).dr,tau,0,1);
```
(%o24) $2\,k\int_0^1 \tau^3\,d\tau {x_1}^2\,{y_2}^2 = \frac{k\,{x_1}^2\,{y_2}^2}{2}$

```
(%i25) kill(x, y, z)$
(%i26) -potential(F(x, y, z))$ define(U(x, y), %);
```

Borrador Preliminar

(%o27) $U(x,y) := -\dfrac{kx^2y^2}{2}$

(%i28) ev(express(-grad(U(x, y))),diff),factor;
(%o28) $\left[k\,x\,y^2, k\,x^2\,y, 0\right]$

3. Consideremos el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{\kappa y}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{\kappa x}{x^2+y^2}\mathbf{j}\,,$$

con κ constante.

De nuevo, es fácil ver que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \left[\partial_x F_y - \partial_y F_x\right]\mathbf{k} = 0\,.$$

(%i29) F(x, y, z):=[k*y/(x^ 2+y^ 2),-k*x/(x^ 2+y^ 2),0];
(%o29) $F(x,y,z) := [\dfrac{ky}{x^2+y^2}, -\dfrac{kx}{x^2+y^2}, 0]$

(%i30) ev(express(curl(F(x, y, z))),diff),factor;
(%o30) $[0,0,0]$

(%i31) [x,y,z]:[a*cos(tau),a*sin(tau),0];
(%o31) $[a\,\cos(\tau), a\,\sin(\tau), 0]$

(%i32) dr: diff([x,y,z], tau);
(%o32) $[-a\,\sin(\tau), a\,\cos(\tau), 0]$

(%i33) 'integrate(F(x, y, z).dr,tau,0,2* %pi)=integrate(F(x, y, z).dr,tau,0,2* %pi);
(%o33) $\displaystyle\int_0^{2\,\pi} -\frac{a^2\,k\,\sin^2(\tau)}{a^2\,\sin^2(\tau)+a^2\,\cos^2(\tau)} - \frac{a^2\,k\,\cos^2(\tau)}{a^2\,\sin^2(\tau)+a^2\,\cos^2(\tau)}\,d\tau = -2\,\pi\,k$

5.4.6 Ejercicios

1. Evalúe la integral $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$, a lo largo del camino: $x = a\tau^2$, $y = b\tau$, $z = c\,\mathrm{sen}(\pi\tau/2)$.
2. Calcule la integral de línea $\mathbf{A} = \left(x^2+3y\right)\mathbf{i} + \left(y^2+2x\right)\mathbf{j}$, desde el origen al punto $P = (1,2)$:
   (a). a lo largo de la linea recta que une los dos puntos.
   (b). a lo largo de la parábola que pasa por los dos puntos y por el punto $Q = (-1,2)$.
   (c). Diga si $\mathbf{A}$ es conservativo o no.
3. Muestre si el campo vectorial $\mathbf{A} = x\mathrm{e}^{x^2}\cos(y)\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{sen}(y)\mathbf{j}$, es un campo vectorial conservativo y, de serlo encuentre el campo potencial asociado.
4. Un campo vectorial es dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\phi_0}{b^2}\left[y\left(1+\frac{x}{b}\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \frac{xy}{b}\mathbf{k}\right]\mathrm{e}^{(x+z)/b}$$

, donde ϕ_0 y b son constantes. Muestre si $\mathbf{A}$ es o no conservativo y, de serlo encuentre el campo potencial.
5. El siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F} = -GMm\frac{x}{a^3}\mathbf{i} - GMm\frac{y}{a^3}\mathbf{j} + 2GMm\frac{z}{a^3}\mathbf{k}$$

, es la fuerza de marea ejercida por la Luna sobre una partícula que se encuentra el la superficie de la Tierra. Consideremos para este problema el origen de coordenadas cartesianas en el centro de la Tierra, la Luna sobre el eje z y la distancia a es la distancia entre los centros de la Tierra y la luna. M y m las masas de la Tierra y Luna respectivamente, G la constante de gravitación universal. Encuentre el potencial para esta fuerza de marea.
6. Dado el campo de fuerzas $\mathbf{F} = r^n\,\mathbf{r}$. Verifique si existe una función escalar $\varphi(x,y,z)$ tal que

Borrador Preliminar

$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(x,y,z)$. En el caso de que sea posible, encuentre esa función $\varphi(x,y,z)$.

7. El campo magnético generado por una corriente I es
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}}\right)$$
. Encuentre un vector potencial magnético, $\mathbf{A}$, tal que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
8. Si un campo vectorial tiene la forma $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\phi\times\boldsymbol{\nabla}\varphi$, entonces $\mathbf{B}$ es solenoidal y su potencial vectorial es: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\phi\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\phi\right)$.
9. Dados el potencial vectorial del momento magnético dipolar $\mathbf{m}$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\right)\mathbf{m}\times\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{1\to 2} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{B}_1)$$
y la fuerza que registra un momento magnético dipolar $\mathbf{m}_2$, sometido a un campo magnético externo, $\mathbf{B}_1$ producido por el otro momento $\mathbf{m}_2$. Ambos dipolos están separados por una distancia $\mathbf{r}$. Muestre que esa fuerza ejercida por un dipolo magnético sobre otro también se puede escribir como :
$$\mathbf{F}\left(\mathbf{r},\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2\right) = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5}\left[\left(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{m}_2 + \left(\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{r}\right)\mathbf{m}_1 + \left(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2\right)\mathbf{r} - \frac{5\left(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{m}_2\cdot\mathbf{r}\right)}{r^2}\mathbf{r}\right]$$
con $\mathbf{m} = m_r\hat{\mathbf{u}}_r + m_\varphi\hat{\mathbf{u}}_\varphi + m_z\hat{\mathbf{u}}_z$[11].
10. Desarrolle el teorema de Gauss para el caso bidimensional. Esto es, suponga una línea de carga orientada en la dirección del eje z genera un potencial
$$\varphi\left(\rho\right) = -q\frac{\ln(\rho)}{2\pi\epsilon_0}; \quad \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi \quad \text{con } \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
11. Pruebe la generalización de la segunda indentidad de Green
$$\iiint_V \left\{\zeta(\mathbf{r})\mathbb{L}\xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r})\mathbb{L}\zeta(\mathbf{r})\right\}\mathrm{d}V = \iint_s p(\mathbf{r})\,\left\{\zeta(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\zeta(\mathbf{r})\right\}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{S}\,,$$
donde $\mathbb{L}$ es el operador autoadjunto definido por $\mathbb{L} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(p\left(\mathbf{r}\right)\boldsymbol{\nabla}\right) + q(\mathbf{r})$. Para la demostración pueden seguir los pasos de la sección 5.3.4.1.5, pero en este caso puede suponer que el campo vectorial es
$$\mathbf{A}(x^i) = \zeta(x^i)p(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\xi(x^i) - \xi(x^i)p(\mathbf{r})\boldsymbol{\nabla}\zeta(x^i) + \xi(x^i)q(\mathbf{r})\zeta(x^i)$$
y aplicar el teorema de la divergencia.
12. Considere una esfera de radio $r = a$ y carga Q. Grafíque su potencial electrostático para $0 < r < \infty$.
13. Considere una esfera de densidad uniforme ρ_0, radio $r = a$ y masa M.
    (a). Muestre que la fuerza gravitacional por unidad de masa es $\mathbf{F} = -\left(\frac{4\pi G\rho_0}{3r}\right)\hat{\mathbf{u}}_r$ para $0 < r \leq a$.
    (b). Encuentre el potencial gravitacional asociado a esta fuerza
    (c). Imagine un túnel que atraviesa la esfera pasando por su centro. Encuentre la ecuación de movimiento y la expresión del período para una partícula de masa m, que se deja caer por ese túnel.
14. Dado un vector potencial magnético $\mathbf{A}$ tal que $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Muestre que
$$\iint_s \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \quad \text{es invariante de calibre: } \mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) \to \mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) + \boldsymbol{\nabla}\chi\left(\mathbf{r}\right)$$
15. La fuerza de Lorentz para una partícula con carga q que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ en un campo

[11] Yung, K. W., Landecker, P. B., y Villani, D. D. (1970). An analytic solution for the force between two magnetic dipoles. Magnetic and electrical Separation, **9**, p.39-59

Borrador Preliminar

eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ es: $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$. Muestre que

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \\ \mathbf{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} &= \mathbf{B} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \mathbf{F} = \left[-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\right)\right].$$

Borrador Preliminar

Bibliografía

[1] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[2] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analisys** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[4] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J:*)

[5] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*

[6] Hauser, W (1971) **Introduction to Principles of Electromagnetism** (*Addison-Wesley Pub Co Reading*)

[7] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press*)

[8] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)

[9] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)

[10] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaums Outline Series, McGraw Hill New York*)

Borrador Preliminar

Apéndice A

Apéndice

A.1 Introducción a los CAS

Los sistemas algebraicos computacionales o sistemas de álgebra computacional (CAS: *Computer Algebra System*) son sistemas o calculadoras avanzadas, que permiten realizar operaciones de manera simbólica. Esto significa que el computador puede efectuar operaciones con ecuaciones y fórmulas simbólicamente, es decir, $a + b = c$ se interpreta como la suma de variables y no como la suma de números previamente asignados.

Estos sistemas permiten operar de manera exacta con símbolos que representan objetos matemáticos tales como:

- Números (Enteros, racionales, reales, complejos...)
- Polinómios, Funciones Racionales, Sistemas de Ecuaciones.
- Grupos, Anillos, Algebras . . .

A diferencia de los sistemas tradicionales de computación numérica:

- FORTRAN, Basic, C, C++, Java $=>$ Precisión fija (Punto Flotante)

Otra característica principal radica en el hecho de que son interactivos (interpretados o ejecutados al momento de proveer una instrucción).

Los CAS se pueden clasificar en dos grandes grupos:[1]

- Sistemas de Propósito Especial (Creados para hacer cálculos en un área específica): FORM, GAP, CAMAL, SHEEP, STENSOR, LiE, KANT.
- Sistemas de Propósito General (¡Especies de navajas suizas!): Axiom, Derive, Reduce, Maple, MatLab, Mathematica, Maxima, MuPAD. Recientemente, lenguajes como Python comienzan a incorporar bibliotecas que permiten generar formas de cálculo simbólico[2] que ofrecen una perspectiva interesante para integrar ambientes algebráicos-numéricos-visuales.

Los CAS modernos de propósito general son ambientes completamente integrados de computación para la investigación y la educación conformados por:

- Interfaz gráfica (worksheet) o ambiente interactivo:
- Procesador de texto, de fórmulas y de gráficas.
- Con salidas en Latex, RTF, HTML, FORTRAN y C; o hyperlinks a otros documentos.
- Manuales en línea.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems

[2] http://docs.sympy.org/

Borrador Preliminar

Figura A.1: Ventana gráfica de vxMaxima

- Enlaces a otros programas y bibliotecas
- Capacidades para cálculo numérico
- Capacidades para visualización, con salidas gráficas en diferentes formatos: PostScript, GIF,JPG, . . .
- Pensado para usuarios no especializados en computación

La principal ventaja de estos programas radica en la enorme capacidad para realizar cálculos algebraicos largos y tediosos. Por ejemplo, se puede demostrar que la función:

$$f = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 x^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^2 x^2} + n^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = 0$$

y la realización de éste cálculo le puede tomar a un PC estándar un tiempo de CPU relativamente corto:

```
tiempo de cpu = 1,065 seg
```

Un ejemplo de un CAS es **Maxima** que básicamente consta de una hoja de trabajo (worksheet) que es una interfaz tipo procesador de textos. Las hojas de trabajo constan de dos modos básicos de funcionamiento: el modo texto y el modo cálculo. **Maxima** opera en la celda de cálculos de la manera siguiente:

```
Input (Instrucción de entrada) ;
Output (respuesta del programa)
```

Existe la posibilidad de introducir textos de la misma manera que en un procesador de textos estándar y de generar gráficas en 2D y 3D a través de los respectivos comandos.

La interacción con la hoja de trabajo se hace a través de lo que denominamos la celda del Input, que aparece señalado por un aviso de espera o PROMPT

```
[ -->
```

Borrador Preliminar

El código fuente de **Maxima**, código de software libre, puede ser compilado sobre diferentes sistemas operativos: Windows, Linux, MacOS X y Android, y puede obtenerse en: `http://sourceforge.net/projects/wxmaxima` o en `http://andrejv.github.io/wxmaxima`, con la respectiva documentación.

Utilizaremos la versión gráfica **wxMaxima** para los fines pedagógicos del desarrollo de estas notas. También existe una versión que funciona sólo en modo texto para ser ejecutada en una consola o terminal.

En la Figura A.1 se puede apreciar el despliegue de una hoja de cálculo con algunos instrucciones sencillas, notemos que cada instrucción (en azul) termina con un punto y coma, de esta manera se le dice al programa la finalización del comando a ejecutar. Luego de escribir la instrucción y presionar la tecla Enter ↰ el Output aparecerá a continuación en color negro.

A.2 Maxima: Sintaxis básica

Es necesario familiarizarse con los comandos básicos del programa, para ello iremos desarrollando algunos cálculos sencillos a manera de conocer la filosofía de cómo funciona **Maxima**, y durante el transcurso de este curso iremos haciendo un despliegue de las aplicaciones del programa para cálculos más específicos.

```
(%i1) 3!+3^5;
(%o1) 249
```

Veamos la diferencia entre el igual = y los dos puntos :

```
(%i2) a=b+c;
(%o2) c+b

(%i3) a;
(%o3) a

(%i4) a:b+c;
(%o4) c+b

(%i5) a;
(%o5) c+b
```

Al usar "=" no asignamos a la variable lo que está del lado derecho mientras que con ":" si le asignamos el objeto a la nueva variable.

Los cálculos se pueden hacer tanto con números enteros como en Punto Flotante:

```
(%i6) 15+5^(50);
(%o6) 888178419700125232338905334472656 40
(%i7) 15.0+5^(50);
```

(%o7) $8.881784197001253 \times 10^{34}$

Pero el énfasis radica en los cálculos exactos:

```
(%i8) cos(%pi/12)^2+log(2/3+5)/7;
```

(%o8) $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\log\left(\frac{17}{3}\right)}{7}$

y si queremos el valor numérico podemos escribir

```
(%i9) float(%);
(%o9) 1.180812852661949
```

Borrador Preliminar

Aquí hemos hecho uso de varios símbolos nuevos. Las constantes matemáticas en **Maxima** se escriben de la siguiente manera:

- La unidad imaginaria i: $\%i$
- El número π: $\%pi$.
- El símbolo ∞: inf.
- El número e: $\%e$.

En cuanto a los logaritmos:

- $e^x =$ exp(x).
- log(x): la función logaritmo en base e
- log(x)/log(b) el logaritmo de x en base b.

Para las funciones trigonométricas es lo estándar: sin(x), asin(x), cos(x), acos(x), tan(x), atan(x), csc(x), sec(x), cot(x).

También hemos utilizado $\%$ para introducir la última salida en la siguiente instrucción, veamos nuevamente como funciona, pero ahora pondremos al final del comando el símbolo $ en lugar de ; para decirle al programa que ejecute la instrucción sin escribir la salida.

```
(%i10) 3^ 12$
(%i11) %;
(%o11) 531441
```

Veamos otro ejemplo:

```
(%i12) alpha;
(%o12) α

(%i13) % + sqrt(beta);
(%o13) √β + α

(%i14) %o12 + 2*gamma^ 2;
(%o14) 2 γ^2 + α
```

Es importante tener cuidado a la hora de poner los paréntesis en las expresiones:

```
(%i15) 1+2*3^ 2;
(%o15) 19

(%i16) (1+2)*3^ 2;
(%o16) 27
```

El volumen de un cilindro $V = \pi(\text{radio})^2 \times \text{altura}$

```
(%i17) radio: 5$
(%i18) altura: 50$
(%i19) area: %pi*radio^ 2;
(%o19) 25 π

(%i20) volumen: area*altura;
(%o20) 1250 π
```

Para limpiar la memoria del programa de todas las variables utilizadas se puede usar el comando **kill**(all) (Existen otras opciones que veremos más adelante). Esta es una manera de reiniciar la hoja de trabajo.

```
(%i21) volumen;
(%o21) 1250 π
```

Borrador Preliminar

(%i22) kill(all);
(%o22) $done$

(%i23) volumen;
(%o23) $volumen$

A.3 Cálculos elementales

Se puede definir, evaluar y derivar funciones abstractas utilizando := como se muestra a continuación

(%i1) f(x,y):=exp(x^ 2+y^ 2)/(x-y);
(%o1) $f(x,y) := \frac{exp(y^2+x^2)}{x-y}$

(%i2) f(2,3);
(%o2) $-e^{13}$

(%i3) %,numer;
(%o3) -442413.3920089205

(%i4) f(alpha^ (1/2),beta^ (1/2));
(%o4) $\frac{e^{\beta+\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$

Derivando respecto a x y y;

(%i5) diff(f(x,y),x) + diff(f(x,y),y);
(%o5) $\frac{2\,y\,e^{y^2+x^2}}{x-y}+\frac{2\,x\,e^{y^2+x^2}}{x-y}$

Aquí es bueno acotar que una expresión NO es una función:

(%i6) f(x):=3*sin(x+1)+2*sqrt(x);
(%o6) $f(x) := 3\,\sin(x+1)+2\,\sqrt{x}$

(%i7) F:3*sin(x+1)+2*sqrt(x);
(%o7) $3\,\sin(x+1)+2\,\sqrt{x}$

(%i8) f(8); F(8);
(%o8) $3\,\sin 9+2^{\frac{5}{2}}$
(%o9) $\left(3\,\sin(x+1)+2\,\sqrt{x}\right)(8)$

Por lo tanto, F es únicamente una expresión que no puede ser evaluada como la función f. Pero se le puede dar la vuelta para evaluarla con **ev**()

(%i10) ev(F,x=8);
(%o10) $3\,\sin 9+2^{\frac{5}{2}}$

Consideremos los siguientes cálculos básicos:

(%i11) kill(all)$
(%i1) sigma(x):=2*x/sqrt(x^ 2+1);
(%o1) $\sigma(x) := \frac{2\,x}{\sqrt{x^2+1}}$

Borrador Preliminar

La primera derivada:

(%i2) diff(sigma(x),x);

(%o2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{2\,x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

La cuarta derivada:

(%i3) diff(sigma(x),x,4);

(%o3) $\dfrac{90\,x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} - \dfrac{300\,x^3}{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}} + \dfrac{210\,x^5}{(x^2+1)^{\frac{9}{2}}}$

Si queremos reutilizar la derivada para definir una nueva función, en este caso la función derivada, lo podemos hacer utilizando dos apóstrofos ” (No es la doble comilla)

(%i4) dsigma(x):=” %o2;

(%o4) $dsigma\,(x) := \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{2\,x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

(%i5) dsigma(2);

(%o5) $\dfrac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$

(%i6) integrate(sigma(x),x);

(%o6) $2\,\sqrt{x^2+1}$

La misma integral, pero definida para x entre 0 y 1.

(%i7) integrate(sigma(x),x,0,1);

(%o7) $2\,\left(\sqrt{2}-1\right)$

Límites:

(%i8) limit(sigma(x),x,1/2);

(%o8) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(%i9) limit(sigma(x),x,inf);

(%o9) 2

Sumatorias:

(%i10) sum(sigma(i),i,0,6);

(%o10) $\dfrac{12}{\sqrt{37}} + \dfrac{10}{\sqrt{26}} + \dfrac{8}{\sqrt{17}} + \dfrac{6}{\sqrt{10}} + \dfrac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{2}$

Podemos calcular series de Taylor, digamos, alrededor de $x = 1$ y hasta orden 4.

(%i11) taylor(sigma(x),x,1,4);

(%o11) $\dfrac{-1}{128}\,\left(5\,2^{\frac{1}{2}}\right)\,(x-1)^4 + \dfrac{1}{16}\,\left(3\,2^{\frac{1}{2}}\right)\,(x-1)^3 + \dfrac{-1}{8}\,\left(3\,2^{\frac{1}{2}}\right)\,(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}\,2^{\frac{1}{2}}\,(x-1) + 2^{\frac{1}{2}} + \cdots$

Al rededor de $x = 0$ es más simple todo:

(%i12) taylor(sigma(x),x,0,6);

Borrador Preliminar

(%o12) $\frac{3}{4}x^5 + (-1)\ x^3 + 2\,x + \cdots$

Y por supuesto, también podemos hacer una gráfica de la función. Para ello utilizaremos el comando **wxplot2d** que nos generará un gráfico incrustado dentro de la misma hoja de trabajo.

(%i13) wxplot2d(sigma(x),[x,-10,10]);
(%o13)

Los cálculos anteriores se pueden repetir para que queden de una manera más elegante usando una camilla, esto hará que no se efectúe la evaluación de las operaciones.

(%i14) 'diff(sigma(x),x)=diff(sigma(x),x);
(%o14) $\frac{d}{d\,x}\left(\frac{2\,x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2\,x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
(%i15) 'integrate(sigma(x),x,0,1)=integrate(sigma(x),x,0,1);
(%o15) $2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$
(%i16) 'limit(sigma(x),x,inf)=limit(sigma(x),x,inf);
(%o16) $2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 2$
(%i17) 'sum(sigma(i),i,0,6)=sum(sigma(i),i,0,6);
(%o17) $2\sum_{i=0}^{6}\frac{i}{\sqrt{i^2+1}} = \frac{12}{\sqrt{37}} + \frac{10}{\sqrt{26}} + \frac{8}{\sqrt{17}} + \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{2}$

Anteriormente mencionamos que uno de las ventajas de los programas de manipulación simbólica es la gran capacidad de llevar a cabo cálculos largos y tediosos, veamos entonces como se hace para demostrar que la función antes mencionada:

(%i18) f(x,y,z):=sin(n*z*sqrt(x^ 2+y^ 2+z^ 2)/sqrt(y^ 2+z^ 2))/sqrt(x^ 2+y^ 2+z^ 2);
(%o18) $f\,(x,y,z) := \frac{\sin\left(\frac{n\,z\,\sqrt{z^2+y^2+x^2}}{\sqrt{z^2+y^2}}\right)}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$

Borrador Preliminar

es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 x^2}+\frac{\partial^4 f}{\partial z^2 x^2}+n^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]=0$$

```
(%i19) diff(f(x,y,z),x,4)+diff(diff(f(x,y,z),x,2),y,2)+diff(diff(f(x,y,z),x,2),z,
       2)+n^ 2*(diff(f(x,y,z),x,2)+diff(f(x,y,z),y,2));
(%o19) ¡¡ Expression too long to display! ¿¿
```

Aquí **Maxima** no hace un despliegue en la pantalla de los cálculos porque la expresión matemática es muy larga. Existen opciones para que muestre en pantalla los que nos interese que iremos viendo más adelante.

Necesitamos entonces decirle al programa que la expresión anterior sea simplificada, es decir, que minimice la expresión a su valor más simple. Para simplificar expresiones que contienen radicales, exponenciales o logaritmos es conveniente utilizar el comando **ratsimp**. También existe la opción **fullratsimp**

```
(%i20) ratsimp(%);
(%o20) 0
```

En la mayoría de los casos **Maxima** no factoriza ni desarrolla automáticamente las expresiones, por lo tanto, debemos indicarle al programa que haga las respectivas simplificaciones. Veamos un ejemplo con polinomios:

```
(%i21) kill(all)$
(%i1) p:(x+2)*(x-1);
```

(%o1) $(x-1)\,(x+2)$

```
(%i2) q:(x-3)^ 2;
```

(%o2) $(x-3)^2$

```
(%i3) p-q;
```

(%o3) $(x-1)\,(x+2)-(x-3)^2$

```
(%i4) expand(p-q);
```

(%o4) $7\,x-11$

```
(%i5) expand(p/q);
```

(%o5) $\dfrac{x^2}{x^2-6\,x+9}+\dfrac{x}{x^2-6\,x+9}-\dfrac{2}{x^2-6\,x+9}$

Si queremos dividir usando fracciones simples podemos hacer lo siguiente:

```
(%i6) partfrac(p/q,x);
```

(%o6) $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{10}{(x-3)^2}+1$

Las funciones **logexpand** y **radexpand** permiten controlar si queremos simplificar logaritmos y radicales cuando contienen productos. Veamos:

```
(%i7) log(x*y);
```

(%o7) $\log(x\,y)$

```
(%i8) sqrt(x*y);
```

(%o8) $\sqrt{x\,y}$

```
(%i9) sqrt(x^ 2);
```

Borrador Preliminar

(%o9) $|x|$

(%i10) radexpand:all$ logexpand:all$

(%i11) log(x*y); sqrt(x*y); sqrt(x^ 2);
(%o11) $\log y + \log x$

(%o12) $\sqrt{x}\,\sqrt{y}$

(%o13) x

Lo inverso a la expansión de expresiones es la factorización:

(%i14) factor(200);
(%o14) $2^3\,5^2$

(%i15) factor(x^ 2+x-2);
(%o15) $(x-1)\,(x+2)$

(%i16) p:x^ 3-1;
(%o16) x^3-1

(%i17) factor(%);
(%o17) $(x-1)\,\left(x^2+x+1\right)$

La evaluación de expresiones se realiza de la manera siguiente

(%i18) ev(p,x=8);
(%o18) 511

O también

(%i19) p,x= %pi;
(%o19) π^3-1

(%i20) ev(x+(x+y)^ 2-3*(x+y)^ 3,x+y=t);
(%o20) $x-3\,t^3+t^2$

En esta guía rápida de **Maxima**, veamos el uso de uno de los comandos más comunes de estos programas, y que tiene que ver con la solución de ecuaciones.

(%i21) ecu: 3*x^ 2+2*x+x^ 3-x^ 2=2*x^ 2;
(%o21) $x^3+2\,x^2+2\,x=2\,x^2$

(%i22) sol: solve(ecu,x);
(%o22) $\left[x=-\sqrt{2}\,i, x=\sqrt{2}\,i, x=0\right]$

Recordemos que $\%i$ es la notación para el imaginario i.
Si necesitamos aislar una de las soluciones usamos el comando **rhs** (de right-hand side):

(%i23) rhs(part(sol,1)); rhs(part(sol,2));
(%o23) $-\sqrt{2}\,i$

(%o24) $\sqrt{2}\,i$

Borrador Preliminar

Para un sistema de ecuaciones, digamos, dos ecuaciones con dos incógnitas:

(%i25) ecu1: x^ 2+y^ 2=1;
(%o25) $y^2 + x^2 = 1$

(%i26) ecu2:(x-2)^ 2+(y-1)^ 2=4;
(%o26) $(y-1)^2 + (x-2)^2 = 4$

(%i27) solve([ecu1,ecu2],[x,y]);
(%o27) $\left[\left[x = \frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}\right], [x = 0, y = 1]\right]$

Cuando el sistema no tiene solución **Maxima** responde de la siguiente manera

(%i28) solve([x+y=0,x+y=1],[x,y]);
(%o28) [ ]

En el caso de un sistema que tiene más incógnitas que ecuaciones el programa utiliza los símbolos $\%r_1$, $\%r_2$... para indicar los parámetros arbitrarios

(%i29) solve([x+y+z=9,x-y=2*z],[x,y,z]);
(%o29) $\left[\left[x = \frac{\%r_1 + 9}{2}, y = -\frac{3\,\%r_1 - 9}{2}, z = \%r_1\right]\right]$

Cuando el sistema esta conformado por ecuaciones lineales podemos usar el comando **linsolve**, en lugar de **solve**. En este caso el algoritmo es más eficiente en cuanto al uso de los recursos del computador.

(%i30) ecus:[x+y+z+w=1,x-y+z-w=-2,x+y-w=0];
(%o30) $[z + y + x + w = 1, z - y + x - w = -2, y + x - w = 0]$

(%i31) linsolve(ecus,[x,y,z]);
(%o31) $\left[x = \frac{4\,w - 3}{2}, y = -\frac{2\,w - 3}{2}, z = 1 - 2\,w\right]$

En el caso de polinómios de orden superior el resultado estará dado de forma aproximada:

(%i32) ec: x^ 7+x^ 5-x^ 3+x-2;
(%o32) $x^7 + x^5 - x^3 + x - 2$

(%i33) allroots(ec);
(%o33) $[x = 0.766414088337633\,\%i + 0.5507199727230275\,,$
$x = 0.5507199727230275 - 0.766414088337633\,\%i\,,$
$x = 0.4922671445862202\,\%i - 0.9637112977011089\,,$
$x = -0.4922671445862202\,\%i - 0.9637112977011089\,,$
$x = 1.381985877916414\,\%i - 0.08700867502191806\,,$
$x = -1.381985877916414\,\%i - 0.08700867502191806\,,$
$x = 0.9999999999999988\,]$

(%i34) realroots(ec);
(%o34) $[x = 1]$

Borrador Preliminar

Otro tipo de ecuaciones a resolver son las ecuaciones diferenciales. Veamos como funciona **ode2** con la ecuaciones diferenciales ordinarias

(%i35) ecd: (2*x+1)*'diff(y,x)+y*(x-1)=0;

(%o35) $(2\,x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+(x-1)\,y=0$

(%i36) ode2(ecd,y,x);

(%o36) $y=\%c\,e^{\frac{3\,\log(2\,x+1)}{4}-\frac{x}{2}}$

Por ser una ecuación diferencial de primer orden debe aparecer una constante en la solución. La constante aquí es denotada por "$\%c$".

(%i37) ecd2:'diff(y,x,2)-3*'diff(y,x)+2*y=x;

(%o37) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-3\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+2\,y=x$

(%i38) ode2(ecd2,y,x);

(%o38) $y=\%k_1\,e^{2\,x}+\%k_2\,e^{x}+\frac{2\,x+3}{4}$

Para el caso de que se tengan condiciones iniciales utilizamos **ic2** para indicar las condiciones

(%i39) ic2(%o38,x=0,y=0,diff(y,x)=1);

(%o39) $y=\frac{5\,e^{2\,x}}{4}-2\,e^{x}+\frac{2\,x+3}{4}$

Y para valores de contorno **bc2**

(%i40) bc2(%o38,x=0,y=0,x=1,y=0);

(%o40) $y=\frac{(3\,e-5)\,e^{2\,x}}{4\,e^2-4\,e}-\frac{(3\,e^2-5)\,e^{x}}{4\,e^2-4\,e}+\frac{2\,x+3}{4}$

Existe el comando **desolve** para resolver también ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales utilizando transformadas de Laplace. Trabaja de manera parecida a **ode2** pero se necesita especificar la dependencia de las funciones con las variables independientes.

(%i41) ecd3:'diff(y(x),x,2)-y(x)=2*x;

(%o41) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x)-y(x)=2\,x$

(%i42) desolve(ecd3,[y(x)]);

(%o42) $y(x)=\frac{e^{x}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\big|_{x=0}+y(0)+2\right)}{2}-\frac{e^{-x}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\big|_{x=0}-y(0)+2\right)}{2}-2\,x$

Si tenemos condiciones iniciales en $x=0$ entonces podemos escribir:

(%i43) atvalue(y(x),x=0,1); atvalue(diff(y(x),x),x=0,2);

(%o43) 1

(%o44) 2

(%i45) desolve(ecd3,[y(x)]);

(%o45) $y(x)=\frac{5\,e^{x}}{2}-\frac{3\,e^{-x}}{2}-2\,x$

Borrador Preliminar

Si **desolve** no encuentra una solución, entonces devuelve “false”.

Veamos un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales

(%i46) ecd1: ’diff(f(x),x)=’diff(g(x),x)+sin(x);

(%o46) $\frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}\,g\left(x\right)+\sin x$

(%i47) ecd2: ’diff(g(x),x,2)=’diff(f(x),x)-cos(x);

(%o47) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,g\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right)-\cos x$

(%i48) atvalue(’diff(g(x),x),x=0,a)$ atvalue(f(x),x=0,b)$ atvalue(g(x),x=0,c)$

(%i51) desolve([ecd1, ecd2], [f(x),g(x)]);

(%o51) $\left[f\left(x\right)=a\,e^{x}+b-a,g\left(x\right)=\cos x+a\,e^{x}+c-a-1\right]$

(%i52) kill(all)$

Operaciones básicas con matrices:

(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]); B:matrix([9,8,7],[6,5,4],[3,2,1]);

(%o1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

(%o2) $\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$

(%i3) A+B;

(%o3) $\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}$

El producto ordinario de matrices:

(%i4) A.B;

(%o4) $\begin{pmatrix}30&24&18\\84&69&54\\138&114&90\end{pmatrix}$

El producto elemento a elemento

(%i5) A*B;

(%o5) $\begin{pmatrix}9&16&21\\24&25&24\\21&16&9\end{pmatrix}$

El cociente elemento a elemento

(%i6) A/B;

(%o6) $\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&\frac{1}{4}&\frac{3}{7}\\\frac{2}{3}&1&\frac{3}{2}\\\frac{7}{3}&4&9\end{pmatrix}$

El producto por un escalar:

Borrador Preliminar

(%i7) n*A;

(%o7) $$\begin{pmatrix} n & 2\,n & 3\,n \\ 4\,n & 5\,n & 6\,n \\ 7\,n & 8\,n & 9\,n \end{pmatrix}$$

Podemos generar matrices de muchas maneras

(%i8) a[i,j]:=i^ 2 + j^ 2 $

(%i9) A:genmatrix(a,4,4);

(%o9) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 \\ 5 & 8 & 13 & 20 \\ 10 & 13 & 18 & 25 \\ 17 & 20 & 25 & 32 \end{pmatrix}$$

También de manera interactiva:

(%i10) n:3$

(%i11) M:entermatrix(n,n)$

```
Is the matrix  1. Diagonal  2. Symmetric  3. Antisymmetric  4. General
Answer 1, 2, 3 or 4 : 1;
Row 1 Column 1: (x+y)^n$
Row 2 Column 2: (x-y)^(n+1)$
Row 3 Column 3: (x.y)^(n-1)$
Matrix entered.
```

(%i12) M;

(%o12) $$\begin{pmatrix} (y+x)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (x-y)^4 & 0 \\ 0 & 0 & (x\cdot y)^2 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad de tamaño n x n usamos el comando **ident(n)**, como mostramos a continuación

(%i13) ident(4);

(%o13) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.4 Bibliotecas

No todos los comandos están disponibles en la memoria cuando el programa es iniciado. Sólo los comandos estándar son cargados automáticamente. Pero podemos contar con funciones adicionales cargando al programa los diferentes paquetes, módulos o librerías que dispone **Maxima**. Por ejemplo, **vect** nos permite introducir vectores y operar con ellos.

El paquete **vect** debe entonces ser previamente cargado y se hace de la manera siguiente:

Borrador Preliminar

```
(%i1) load(vect)$
```

Las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y multiplicación por escalares de vectores las podemos ver a continuación, pero primero debemos saber como introducir los vectores al programa.

Por ejemplo, para los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, tenemos:

```
(%i2) a:[2,4,6];
```
(%o2) $[2, 4, 6]$

```
(%i3) b:[5,7,9];
```
(%o3) $[5, 7, 9]$

```
(%i4) c:[1,3,0];
```
(%o4) $[1, 3, 0]$

```
(%i5) a+b+c;
```
(%o5) $[8, 14, 15]$

```
(%i6) 3*a+5*b-c;
```
(%o6) $[30, 44, 63]$

Si queremos calcular el módulo de los vectores podemos hacerlo definiendo una función: la función módulo, como mostramos a continuación:

```
(%i7) modulo(a):=sqrt(a.a);
```
(%o7) $\text{modulo}(a) := \sqrt{a.a}$

```
(%i8) modulo(a); modulo(b); modulo(c);
```
(%o8) $2\sqrt{14}$

(%o9) $\sqrt{155}$

(%10) $\sqrt{10}$

Para el producto escalar usamos un punto

```
(%i11) a.b;
```
(%11) 92

Mientras que para el producto vectorial debemos usar la tilde $\sim$ y escribir lo siguiente

```
(%i12) express(a~ b);
```
(%o12) $[-6, 12, -6]$

```
(%i13) express(b~ a);
```
(%o13) $[6, -12, 6]$

De manera que el producto triple lo podemos calcular asi:

```
(%i14) c.(express(a~ b));
```
(%o14) 30

Otra librería que podemos explorar es **plotdf** que nos permite realizar gráficos del tipo $y' = f(x, y)$ y hacernos una idea de cómo es la solución de ésta ecuación diferencial.

Borrador Preliminar

Figura A.2: Curvas integrales para $y' = -x + e^{-y}$

```
(%i1) load(plotdf)$
```

La librería **plotdf** nos permite estudiar los campos de direcciones y las curvas integrales a través del estudio de las pendientes. Veamos la siguiente ecuación diferencial

$$y' = -x + e^{-y}$$

su solución, de manera gráfica, es decir los campos de direcciones lo podemos obtener escribiendo el siguiente comando.

```
(%i2) plotdf(-x+exp(-y));
```

La gráfica que resulta puede verse en la Figura A.2 y cada curva integral (curvas en rojo) se obtiene haciendo un "click" sobre un punto de la gráfica, esto generará la curva integral que pasa por ese punto.

Por otra parte, existen varias opciones para el comando **plotdf**. Supongamos que queremos la trayectoria que pase por el punto específico $(2, 3)$. Para tal fin escribimos

```
(%i3) plotdf(-x+exp(-y),[trajectory_at,2,3]);
```

Y la gráfica obtenida puede verse en la Figura A.3.

También nos podemos encontrar con que la ecuación diferencial depende de algún parámetro, digamos κ. Por ejemplo

$$y' = -x + \kappa e^{-y}$$

y nos gustaría obtener una gráfica para algún valor del parámetro en partícular, digamos $\kappa = -0.5$. Entonces podemos escribir

```
(%i4) plotdf(-x+exp(-kappa*y),[parameters,"kappa=-0.5"]);
```

O, si queremos recorrer, en una misma figura, los diferentes valores del parámetro usamos la opción **sliders**, como se muestra a continuación

```
(%i1) plotdf(-x+exp(-kappa*y),[parameters,"kappa=-0.5"],[sliders,"kappa=-3:3"]);
```

Borrador Preliminar

Figura A.3: A la izquierda la curva integral para $y' = -x + e^{-y}$ y que pasa por el punto $(2, 3)$ y la derecha para diferentes valores de κ.

La gráfica que se obtiene se muestra en la Figura A.3 (derecha), y como se puede ver, en la parte inferior aparece un botón deslizante y el valor del parámetro κ. Al deslizar el botón, estaremos cambiando el valor del parámetro que en este caso variará entre -3 y 3, podremos apreciar entonces como los campos de direcciones y las curvas integrales seleccionadas cambian.

A.5 Maxima en modo texto

Es posible utilizar **Maxima** en un computador que funcione bajo alguno de los diferentes versiones de sistemas operativos tipo UNIX, como por ejemplo Linux, esto lo podemos hacer cuando no queremos utilizar el ambiente gráfico. Podemos recurrir al ambiente de texto escribiendo el comando **maxima** en un terminal de nuestro computador, esto hará que entremos en un ambiente de cálculo que funcionará exclusivamente en modo texto y aparecerá, luego de una bienvenida, el aviso de espera o prompt. Para finalizar una sesión en **Maxima** se utiliza el comando **quit()**. Esta posibilidad que ofrece el programa es muy conveniente a la hora de realizar grandes cálculos ya que podemos dejar el proceso en modo "background" y utilizar el computador en otra actividad.

Al entrar en este modo al programa tendremos un mensaje como el que se muestra a continuación y donde aprovecharemos de hacer un par de cálculos a modo de ejemplo.

```
Obatala\% maxima
Maxima 5.36.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 1.2.10
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(\%i1) integrate( tan(x), x );
(\%o1)                              log(sec(x))
```

Borrador Preliminar

```
(\%i2) float(sqrt(\%pi));
(\%o2)                          1.772453850905516
(\%i3) quit();
```

Sobre UNIX podemos utilizar los archivos de entradas y salidas estándar para leer e imprimir información en el terminal: $<$, $>$, $|$.

```
Obatala\% maxima < archimax.txt
```

Con esta instrucción **Maxima** ejecutará todos los comandos que se encuentran en el archivo de texto archimax.txt e irá mostrando los resultados en pantalla

En la siguiente instrucción **Maxima** ejecutará todos los comandos que se encuentran en el archivo de texto archimax.txt pero escribirá los resultados en el archivo de salida llamado archimax.out

```
Obatala\% maxima < archimax.txt > archimax.out
```

También se puede hacer que todos los comandos del archivo sean ejecutados para luego ser enviados al terminal pero paginados.

```
Obatala\% maxima < archimax.txt | more
```

Maxima puede ser detenido temporalmente con el comando "Control Z" de manera que para poner procesos en "background" se procede de la manera usual:

```
Obatala\% maxima  < archimax.txt > archimax.out
^Z
Suspended
Obatala\%> bg
[2] maxima  < archimax.txt > archimax.out &

Obatala\%
```

O si lo preferimos, y de manera equivalente, podemos escribir la instrucción pero ponemos al final &

```
Obatala\% maxima  < archimax.txt > archimax.out &
[1] 5114
```

A.6 Invocando la ayuda

El ambiente **wxMaxima** permite acceder al manual de ayuda fácilmente visible en la barra de herramientas, parte superior de la ventana. Pero también si conocemos el comando podemos escribir, por ejemplo:

(%i1) describe(diff);

```
 0: diff  (Functions and Variables for Differentiation)
 1: diff <1>  (Functions and Variables for Differentiation)
 2: diff <2>  (Functions and Variables for itensor)
Enter space-separated numbers, 'all' or 'none':
```

Borrador Preliminar

Al seleccionar una de las opciones, por ejemplo si escribimos 1 después de los dos puntos, aparecerá la descripción completa del comando:

```
 -- Function: diff
          diff (<expr>, <x_1>, <n_1>, ..., <x_m>, <n_m>)
          diff (<expr>, <x>, <n>)
          diff (<expr>, <x>)
          diff (<expr>)
     Returns the derivative or differential of <expr> with respect to
     some or all variables in <expr>.
     'diff (<expr>, <x>, <n>)' returns the <n>'th derivative of <expr>
     with respect to <x>.
     'diff (<expr>, <x_1>, <n_1>, ..., <x_m>, <n_m>)' returns the mixed
     partial derivative of <expr> with respect to <x_1>, ..., <x_m>.  It
     is equivalent to 'diff (... (diff (<expr>, <x_m>, <n_m>) ...),
     <x_1>, <n_1>)'.
     'diff (<expr>, <x>)' returns the first derivative of <expr> with
     respect to the variable <x>.
     'diff (<expr>)' returns the total differential of <expr>, that is,
     the sum of the derivatives of <expr> with respect to each its
     variables times the differential 'del' of each variable.  No
     further simplification of 'del' is offered.
     The noun form of 'diff' is required in some contexts, such as
     stating a differential equation.  In these cases, 'diff' may be
     quoted (as ''diff') to yield the noun form instead of carrying out
     the differentiation.....

     There are also some inexact matches for `diff'.
     Try `?? diff' to see them.
```

También podemos utilizar:

```
(%i2) apropos("diff");
[covdiff,diff,maxtaydiff,pdiff_diff_var_names,pdiff_prime_limit...]
```

O pedirle al programa algunos ejemplos

```
(%i3) example(diff);
(%i4) kill(f,g,h,x,y)
(%o4) done
(%i5) diff(sin(x)+x^3+2*x^2,x)
(%o5) cos(x)+3*x^2+4*x
(%i6) diff(sin(x)*cos(x),x)
(%o6) cos(x)^2-sin(x)^2
```

Borrador Preliminar

```
(%i7) diff(sin(x)*cos(x),x,2)
(%o7) -4*cos(x)*sin(x)
```

.
.
.

Las ayudas completas de **Maxima** se pueden consultar en: http://maxima.sourceforge.net/es/

A.7 Ejercicios

1. Calcule:
   (a). los 70 primeros decimales del número e
   (b). el arco coseno hiperbólico de 1
   (c). la expansión de $\sin(2\arctan(x))$
2. Para la siguiente función
$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2-1}}$$
   Calcule
   (a). $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x^2}$
   (b).
$$\int f(x)dx\,, \qquad \int_2^4 f(x)dx$$
   (c).
$$\lim_{x\to\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$
   (d). Haga un gráfico de $f(x)$ para valores de $x \in [-5, 5]$.
3. Encuentre las raíces de
$$p = x^7 + x^5 + 2x + x$$
4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial
$$x\frac{dy(x)}{dx} = y(x)\ln(xy(x)) - y(x);$$
   y haga una gráfica del campo de direcciones que muestre algunas curvas integrales.
5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial
$$\frac{d^2y(t)}{d^2t} - \left(1 - y(t)^2\right)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0\,, \quad \text{con: } y(0) = 0\,,\ \frac{dy(t)}{dt} = -0.1$$
6. Realice los ejercicios de la sección 1.2.4 con la ayuda de la librería **vect** de **Maxima**.
7. En un archivo de texto escriba las siguientes instrucciones que tienen que ver con operaciones de números complejos:

```
z_1=1+2%i;
z_2=3+4%i;
z_1+z_2;
z_1*z_2;
expand(%);
z_1/z_2;
```

Borrador Preliminar

```
rectform(%);
polarform(%);
```

guarde el archivo con el nombre pruebamax.txt y en un terminal de su computador, y en el mismo directorio donde está el archivo escriba:

```
localhost%  maxima < pruebamax.txt > pruebamax.out &
```

y verifique que en el archivo pruebamax.out se haya realizado los cálculos.

Borrador Preliminar

Índice alfabético

Álgebra de números complejos, 64
Álgebra de vectores 3D, 3
Álgebra vectorial
    Aplicaciones, 25
Índices
    Álgebra de vectores, 34
    Convención de Einstein, 33
    Ejemplos cálculos vectoriales, 35
`draw`, 31, 32
`gr3d`, 32
`vect`, 22
`wxdraw3d`, 32

Abelianos
    Grupos , 82
Aceleración de fluidos, 379
Algebra de Matrices, 257
Algebra vectorial con índices, 33
Algebra vectorial y coordenadas, 17
Angulo de fase de un autovector, 291
Aplicaciones
    Álgebra vectorial, 25
Aproximación de funciones, 130
Auguste de Bravais, 28
Autoespacios, 309
Autovalores
    Matrices reales, 294
    Multiplicidad algebraica, 293
Autovalores de matrices hermíticas, 308
Autovalores de matrices unitarias, 308
Autovalores degenerados, 296, 297
    Matrices Hermíticas, 309
Autovalores y Autovectores
    Matrices unitarias, 310
    Polinomio caraterístico, 292
Autovalores y autovectores, 291
    Independencia lineal, 292
Autovalores y autovectores de operadores similares, 310
Autovector
    Angulo de fase, 291
Autovectores
    Matrices reales, 294
    Multiplicidad geométrica, 293

Banach
    Espacios Vectoriales Normados, 98
    Stefan Banach, 98
Base
    Contínua, 221
    Discretas, 221
    Ondas Planas, 222
Base discreta de Fourier, 219
Bases
    Ejemplos bases ortogonales, 119
    Ejemplos de Bases de espacios vectoriales, 117
Bases Continuas, 218
Bases ortogonales, 118
Bases para Espacios vectoriales lineales, 114
Bases recíprocas, 157
Bases recíprocas de vectores, 151

Borrador Preliminar

Biyectivo
Operador, 247
Bravais
Auguste , 28
Redes de, 28

Cambios de Base
Representación matricial de operadores, 258
Campo, 87
de fuerza, 348
Escalar, derivada direccional, 360
Lineas de, 348
Campo Eléctrico
Teorema de Gauss, 401
Campo eléctrico discontínuo
Teorema de Gauss, 402
Campo Magnético
Teorema de Stokes, 405
Campo vectorial
circulación, 368, 392
Campo Vertorial
Discontinuidades y Teorema de Stokes, 406
Campos
Escalares, 347
Vectoriales, 347
Campos escalares
Derivada direccional, 359, 360
Laplaciano, 375
Campos Tensoriales, 345
Campos vecotriales
Laplaciano, 376
Campos vectoriales
Comienzos de derivación/integración, 42
Derivadas direccionales, 378
Integrales, 390
Teoremas Integrales, 399
Cartesianas
Coordenadas, 185, 331
Cauchy-Schwarz
Desigualdad, 100
Circulación de un campo vectorial, 368, 392
Completitud
Condición, 219
Componentes
Tensores, 166
Componentes de Vectores, 15
Componentes vectores 3D, 15
Composición de Operadores Lineales, 236
Condición de completitud, 219
Conjunto Completo de Observables que conmutan, 312
Conjuntos con Maxima, 93
Continuas
Bases, 218
Continuidad
Ecuación de, 366
Contracción de Tensores, 168
Convención de Einstein, 33
Coordenadas
Rotación de, 36
cartesianas, 185, 331
cilíndricas, 332
elipsoidales, 335
esfericas, 333
polares, 185
toroidales, 335
Transformaciones, 177
Coordenadas
Sistemas de, 15
Coordenadas curvilíneas
Diferencial de área, 396
divergencia, 365
Laplaciano, 376
Producto escalar, 344
Producto vectorial, 345
Rotacionales, 370
Tensores, 344
Coordenadas Generalizadas
Gradiente, 363
Coordenadas generalizadas, 329, 341
Coseno
Teorema del, 101
Cosenos Directores, 15
Cosenos directores, 16
Covariante
Derivada, 380

Borrador Preliminar

Covector, 149
Coordenadas curvilíneas, 344
Covectores, 152
Cristales Cuasi-Periódicos, 29
Cuasi-Periódicos
Cristales, 29
Cuaterniones, 105
Curvas
integrales, 348
Curvas parametrizadas, 340
Curvatura, 342

De Moivre
Fórmula de, 67
Delta de Dirac, 211
Delta de Kronecker, 33, 211
Densidad de Flujo, 396
Densidades superficiales de carga
Campo eléctrico discontínuo, 402
Teorema de Gauss, 402
Dependencia lineal, 114
Ejemplos de, 116
Vectores 3D, 17
Derivación
Campos vectoriales, 42
Derivación vectores 3D, 42
Derivada
Direccional, Campo escalar, 360
Derivada covariante, 380
Derivada direccional
Campos escalares, 359, 360
Derivadas direccionales
Campos vectoriales, 378
Descomposición ortogonal, 130
Desigualdad
Cauchy-Schwarz, 100, 167
Desigualdad de Cauchy-Schwarz
Vectores 3D, 8
Determinante, 263
Diferenciación
Operadores, 266
Diferenciación de Operadores, 240
Diferencial de área, 396
Dirac
Notación, 90
Dirac, Delta de, 211
Dirichlet
Kernel de , 212
Discontinuidades del Campo Vectorial
Teorema de Stokes, 406
Distancia
Espacios vectoriales lineales, 97
Norma, 98
Producto interno, 99
Distribuciones, 210
Distribuciones y función de prueba, 211
Distribuciones y Sucesiones, 212
Distribuciones, definición, 211
Distribuciones, Propiedades de, 213
Divergencia, 363, 364
coordenadas curvilíneas , 365
Teorema de la, 365
Dual
Espacios Vectoriales, 149

Ecuación de continuidad, 366
Ecuaciones Lineales
Sistema de, 281
Einstein
Convención de, 33
Ejemplos cálculos vectoriales con índices, 35
Ejemplos de Bases de espacios vectoriales, 117
Ejemplos de bases ortogonales, 119
Ejemplos de dependencia/independencia lineal, 116
Ejemplos de espacios vectoriales lineales, 88
Ejemplos de grupos, 82
Ejemplos Tensores, 170
Elasticidad
Tensor de energía libre, 193
Elemento de línea, 174
Elipsoidales
coordenadas, 335
Embaldosados de Penrose, 29
Equipotenciales
Líneas, 348

Borrador Preliminar

Escalar
Producto, 8, 18
Escalares
Campos, 347
Potenciales, 416
Escher
Maurits Cornelis, 29
Esfuerzo
Tensor de, 189
Espacio
Imagen, 245
Nulo, 245
Espacio tensorial, 164
Espacio vectorial
Operadores lineales, 235
Espacios
Minkowskianos, 200
Espacios vectoriales con Maxima, 111
Espacios vectoriales duales, 149
Espacios vectoriales lineales, 87
Bases de, 114
Distancia, 97
Ejemplos de , 88
Ejemplos de Bases de espacios vectoriales, 117
Hilbert, 99
Métricos, 97
Norma, 98
Normados, 98
Producto interno, 99
Espacios vectoriales pseudo-euclidianos, 199
Espectro de un operador, 291
Euler
Fórmula de , 67
Expresiones del Teorema de Gauss, 401
Expresiones Equivalentes
Teorema de Stokes, 406
Exterior
Producto, 164

Fórmula
de Glauber, 242
Fórmula de De Moivre, 67
Identidades trigonométricas, 70
Logaritmos y potencias de números complejos, 73
Raíces de polinomios, 71
Fórmula de Euler, 67
Factores de escala, 330
coordenadas esféricas, 333
Fluidos
aceleración, 379
Flujo
Campos vectoriales, 361, 363, 364
Densidad de, 396
Formulario del operador *nabla*, 372
Fourier
Base compleja de, 219
Base discreta de, 219
Transformada de, 221, 234
Frenet-Serret
Fórmulas de, 343
Fuentes y Sumideros, 366
Fuerzas Conservativas
Teorema de Stokes, 406
Función de prueba y distribuciones, 211
Funcional lineal, 148
Funciones de Operadores, 239

Gauss
Kernel de , 212
Teorema de, 399
Glauber
Fórmula de, 242
Gradiente
Coordenadas generalizadas, 363
flujo de campos vectoriales, 361
Gram
Determinante, 116
Jorgen Pedersen Gram, 116
Gram-Schmidt
Método Ortogonalización, 121
Green
Identidades de, 403
Grupo de Permutaciones, 84
Grupo de simetría de triángulo, 91

Borrador Preliminar

Grupos, 82
Grupos isomorfos, 85

Hamilton
William Rowan, 105
Hankel
Transformada de, 234
Helmholtz
Teorema de, 419
Hermíticos
Operadores, 250
Hilbert
David Hilbert, 99
Espacios vectoriales lineales, 99

Identidades de Green, 403
Independencia Lineal, 114
Autovalores y autovectores, 292
Ejemplos de, 116
Vectores 3D, 5, 17
Independencia lineal
Maxima, 125
Index
Operador, 247
Inercia
Tensor de, 193
Integración
Campos vectoriales, 42
Integración vectores 3D, 51
Integral
Transformada, 234
Integrales de línea, 391
Integrales de superficie, 395
Integrales de Volumen, 399
Integrales y campos vectoriales, 390
Interno
Producto, 99
Interpolación polinomial puntos experimentales, 134
Isomorfos
Grupos, 85

Jacobiano, 177, 340, 345

Kernel
de Dirichlet, 212
de Gauss, 212
de Poisson, 212
de una transformación lineal, 234
Kronecker
Delta de, 33
Leopold Kronecker, 33
Kronecker, Delta de, 211

Líneas
de campo, 348
de corriente, 348
de flujo, 348
Equipotenciales, 348
Líneas de Torbellino, 367
Laplace
Transformada de, 234
Laplaciano, 375
Campos escalares, 375
Campos vectoriales, 376
Coordenadas curvilíneas, 376
Levi-Civita
Tensor, 33, 238, 263, 264, 345
Tensor de, 306
Tensor generalizado, 251
Tullio, 306
Tullio Levi-Civita, 33, 238, 263, 264
Leyes de Transformación para vectores, 152
Lineal
Funcional, 148
Operador, 232

Método de mínimos cuadrados, 132
Métrica, 97
Tensor, 172
Métricos
Espacios vectoriales lineales, 97
Mínimos Cuadrados, 135
Mínimos cuadrados
Método de, 132
Matrices
Algebra de, 257
Matrices hermíticas
Autovalores de, 308

Borrador Preliminar

Matrices similares, 258
Matrices Unitarias
    Autovalores y Autovectores, 310
Matrices unitarias
    Autovalores de, 308
Matriz
    Jacobiana, 177, 345
Maxima
    `draw`, 31, 32
    `gr3d`, 32
    `linsolve`, 23
    `vect`, 22
    `wxdraw3d`, 32
    Bases para espacios vectoriales, 126
    Bases recíprocas, 157
    Conjuntos, 93
    Independencia lineal, 125
    Mínimos Cuadrados, 135
    Ortogonalización, 127
    Polinomios ortogonales, 144
    Series de Fourier, 140
    Vectores con, 22
MaximaEspaciosVectoriales, 111
Mellin
    Transformada de, 234
Minkowski
    Espacios vectoriales, 200
Modelos en Física, 2

Núcleo
    de una transformación lineal, 234
Números complejos
    Álgebra, 64
    Aplicaciones fórmulas de Euler y De Moivre, 70
    Fórmulas de Euler y De Moivre, 67
    Vectores 2D, 64
Norma
    Distancia, 98
    Espacios vectoriales lineales, 98
    Producto interno, 99
Normados
    Espacios vectoriales lineales, 98

Notación
    Dirac, 90
Nulo
    Espacio, 245

Observables
    Conjunto Completo de, 312
Ondas Planas
    Base de, 222
Operador
    Biyectivo, 247
    Determinante de un, 263
    Diferenciación de, 266
    Funciones de, 239
    Inverso, 247
    Vectorial, 359
Operador *nabla*
    Formulario del, 372
Operador Lineal, 232
    Composición, 236
    Tensores, 236
Operador lineal
    Espacio vectorial, 235
Operadores
    Representación matricial, 254
Operadores adjuntos
    Representación matricial, 258
Operadores Hermíticos, 250
    Autovalores degenerados, 309
Operadores hermíticos
    Representación matricial, 258
Operadores Lineales en espacios tesoriales, 236
Operadores Unitarios, 250
Ortogonal
    Complemento, 130
    Descomposición, 130
Ortogonales
    Ejemplos de bases, 119
Ortogonalidad, 118
Ortogonalización, 122, 127
    Método Gram-Schmidt, 121

Pauli
    Matrices de, 107, 306

Borrador Preliminar

Operadores de, 272
Penrose
Embaldosados de, 29
Roger, 29
Permutaciones
Grupos de, 84
Pitágoras
Teorema de, 101
Planos y vectores, 26
Poisson
Kernel de , 212
Polares
Coordenadas, 185
Polinomial
Interpolación de puntos experimentales, 134
Polinomio característico, 292
Polinomios ortogonales, 144
Potencial
Teoría de , 415
Potenciales escalares, 416
Producto
escalar, 8
Exterior, 164
Tensorial, 164
Tensorial de tensores, 168
Vectores 3D, 8
Producto escalar, 8, 18
Coordenadas curvilíneas, 344
Producto interno, 99
Distancia, 99
Espacios vectoriales lineales, 99
Norma, 99
Producto Mixto, 10
Producto Triple, 10
Producto vectorial, 9, 19
Coordenadas curvilíneas, 345
Producto vectorial mixto, 19
Productos de Vectores 3D, 8
Proyectores
Autovalores y autovectores, 294
Pseudo-escalares, 37
Pseudo-euclidianos
Espacios Vectoriales, 199
Pseudo-vectores, 37
Puntos Experimentales
Interpolación polinomial, 134

Recíprocas
Bases de vectores, 151
Rectas y vectores, 25
Redes de Bravais, 28
Representación matricial de operadores, 254
Cambios de Base, 258
Representación matricial de operadores adjuntos y hermíticos, 258
Rodrigues
Benjamin Olinde, 120
Fórmula de, 120
Rotación de coordenadas, 36
Rotacionales, 367
Coordenadas curvilíneas, 370
Líneas de torbellino, 367
Superficies ortogonales al torbellino, 367
Velocidades angulares, 370

Schmidt
Erhard Schmidt, 121
Series de Fourier, 140
Simetrización de tensores, 169
Similares
Matrices, 258
Sistemas de coordenadas, 15
Sistemas de ecuaciones lineales, 281
Stokes
Teorema de, 369, 404
Subgrupos, 83
Sucesiones y Distribuciones, 212
Sumideros
Fuentes y , 366
Superficie
Integrales de, 395
Superficies ortogonales al torbellino, 367

Taylor
Brook Taylor, 67
Tensor, 162
Bases, 166

Borrador Preliminar

Combinaciones Lineales, 167
Componentes, 167
Componentes de, 166
Contracción, 168
Coordenadas curvilíneas, 344
de energía libre elástica, 193
de esfuerzos, 189
de Inercia, 193
definicion, 162
Esfuerzo 2D, 189
Esfuerzo 3D, 191
Espacio tensorial, 164
Levi-Civita, 33, 238, 251, 263, 264, 306, 345
Métrico, 172
Producto, 164
Producto tensorial de, 168
Simetrización, 169
Stress, 189
Stress 3D, 191
Transformación, 177
Tensores
Ejemplos, 170
Tensoriales
Campos, 345
Teoría de Potencial, 415
Teorema
Helmholtz, 419
Teorema de
Pitágoras, 101
Teorema de Gauss, 399
Campo eléctrico, 401
Campo eléctrico discontínuo, 402
Expresiones, 401
Teorema de la Divergencia, 365
Teorema de Stokes, 404
Campo Magnético, 405
Discontinuidades del campo vectorial, 406
Teorema del
Coseno, 101
Teorema Stokes
2D, 405
Expresiones Equivalentes, 406
Fuerzas Conservativas, 406
Teoremal de Stokes, 369
Teoremas Integrales, 399
Toroidales
coordenadas, 335
Torsión, 343
Transformación
Coordenadas, 177
Tensor, 177
Vector, 177
Transformaciones Unitarias, 259
Transformada
de Fourier, 221
Fourier, 234
Hankel, 234
Integral, 234
Laplace, 234
Mellin, 234
Trayectorias
ortogonales, 349
Triangulo
Grupo de Simetrías, 91
Triple producto vectorial, 19

Unitarias
Transformaciones, 259
Unitarios
Operadores, 250

Variedades lineales, 114
Vector
Transformación, 177
Vectores
Espacios vectoriales lineales, 87
Leyes de Transformación, 152
Vectores 2D
Números complejos, 64
Vectores 3D, 3
Álgebra, 3
Álgebra con índices, 34
Componentes, 15
Dependencia lineal, 17
Derivación, 42
Derivación/integración, 42
Independencia lineal, 17

Borrador Preliminar

Integración, 51
Planos, 26
Producto escalar, 18
Producto vectorial, 19
Producto vectorial mixto, 19
Productos, 8
Rectas, 25
Suma/resta, 17
Velocidades/Aceleraciones, 44
Vectores con Maxima, 22
Vectores variables, 42
Vectorial
Operador, 359
Producto, 19
Vectoriales
Campos, 347
Velocidades angulares
Rotacionales, 370
Volumen
Integrales de, 399

Borrador Preliminar