Nombre:

1. Considere un espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 3, $\mathcal{P}_3(x)$, con un producto interno definido como $\langle g|f\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ g(x)f(x)$.

    a) Calcule la mínima distancia posible de un polinomio genérico en $\mathcal{P}_3(x)$ al subespacio de polinomios de grado ≤ 2, es decir $\mathcal{P}_2(x)$ (2ptos)

    b) Considere la base $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ para el espacio $\mathcal{P}_3(x)$, calcule la base recíproca (2ptos).

    c) Considere el vector $|f\rangle = 1 + 3x - 2x^2 + 5x^3$ y escriba su dual $\langle f|$ en la base recíproca (2ptos).

2. Considere dos espacios vectoriales de polinomios de grado ≤ 2, $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$. En ambos espacios tenemos productos internos definidos por $\langle g|f\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ g(x)f(x)$ y $\langle h|k\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y\ h(y)k(y)$, respectivamente. Se puede construir un espacio tesorial a partir de estos espacios vectoriales mediante el producto exterior $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$ de tal manera que cualquier polinomio en dos variables puede ser escrito como $\mathcal{T}_2(xy) = c^{ij}|\mathrm{w}_i^{\mathcal{P}}, \mathrm{w}_j^{\mathcal{G}}\rangle$. Donde $\left\{|\mathrm{w}_i^{\mathcal{P}}\rangle\right\}$ y $\left\{|\mathrm{w}_j^{\mathcal{G}}\rangle\right\}$ corresponden a bases (ortogonales o no) para los espacios vectoriales $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$, respectivamente.

    a) Seleccione ahora dos polinomios $p^{\mathcal{P}}(x) = x^2 + x + 3$ y $g^{\mathcal{G}}(y) = y + 1$. Construya el tensor, $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x, y) = p^{\mathcal{P}}(x) \otimes g^{\mathcal{G}}(y)$, mediante el producto tensorial de estos espacios vectoriales (2ptos).

    b) Elija las bases de monomios $\left\{1, x, x^2\right\}$ y $\left\{1, y, y^2\right\}$ e identifique las componentes c^{ij} del tensor $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x, y)$ al expandir ese tensor respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$ (2ptos).

    c) Ahora suponga bases ortogonales para ambos espacios. Esto es $\left\{|\mathrm{e}_i^{\mathcal{P}}\rangle\right\}$ y $\left\{|\mathrm{e}_j^{\mathcal{G}}\rangle\right\}$, para $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$, respectivamente. Calcule las componentes $\tilde{c}^{ij}$ del tensor $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x, y)$ respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$ (2ptos).

    d) Encuentre la ley de transformación $c^{ij} = c^{ij}(\tilde{c}^{ij})$(2ptos).

    e) Calcule las componentes mixtas c^i_j y $\tilde{c}^i_j$, respectivamente (2ptos).

3. En un espacio vectorial Minkowskiano, $\mathbb{M}$ construimos dos bases ortonormales que llamaremos tétrada. Consideraremos una base de vectores "cartesianos" $\{|\mathrm{e}_t\rangle, |\mathrm{e}_x\rangle, |\mathrm{e}_y\rangle, |\mathrm{e}_z\rangle\}$ y construimos una tétrada de vectores $\{\mathbf{v} = v^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle, \mathbf{k} = k^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle, \mathbf{l} = v^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle, \mathbf{s} = v^\alpha |\mathrm{e}_\alpha\rangle\}$ con componentes

$$v^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En general, las componentes de los vectores de la tétrada "cartesiana" unitaria satisfacen las condiciones de ortonormalidad $-v_\alpha v^\alpha = k_\alpha k^\alpha = l_\alpha l^\alpha = s_\alpha s^\alpha = 1$;
$v_\alpha k^\alpha = v_\alpha l^\alpha = v_\alpha s^\alpha = k_\alpha l^\alpha = k_\alpha s^\alpha = l_\alpha s^\alpha = 0$.

Las componentes del tensor métrico puede ser escritas en términos de la tétrada como

$$\eta_{\alpha\beta} = -v_\alpha v_\beta + k_\alpha k_\beta + l_\alpha l_\beta + s_\alpha s_\beta\,.$$

Igualmente podemos construir una tétrada dual $\left\{\tilde{\mathbf{v}}^\star = \tilde{v}_\alpha \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\alpha \right| , \tilde{\mathbf{k}}^\star = \tilde{k}_\alpha \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\alpha \right| , \tilde{\mathbf{l}}^\star = \tilde{l}_\alpha \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\alpha \right| , \tilde{\mathbf{s}}^\star = \tilde{s}_\alpha \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\alpha \right| \right\}$ para las coordenadas esféricas, , $(t, r, \theta, \phi) \equiv (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, a partir de una base $\left\{ \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \right| , \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{r}} \right| , \left\langle \mathrm{e}^{\theta} \right| , \left\langle \mathrm{e}^{\phi} \right| \right\}$, con componentes $\tilde{v}_\alpha = (-1, 0, 0, 0)$, $\tilde{k}_\alpha = (0, 1, 0, 0)$, $\tilde{l}_\alpha = (0, 0, r, 0)$ y $\tilde{s}_\alpha = (0, 0, 0, r\,\mathrm{sen}\theta)$. Esta tétrada también cumple con las relaciones de ortogonalidad antes mencionadas.

Obviamente

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = -\tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta + \tilde{k}_\alpha \tilde{k}_\beta + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\beta + \tilde{s}_\alpha \tilde{s}_\beta.$$

Las componentes de cualquier vector puede ser escritas en término de combinaciones lineales del la tétrada de la forma

$$a^\alpha = a_v v^\alpha + a_k k^\alpha + a_l l^\alpha + a_s s^\alpha = \tilde{a}_v \tilde{v}^\alpha + \tilde{a}_k \tilde{k}^\alpha + \tilde{a}_l \tilde{s}^\alpha + \tilde{a}_s \tilde{s}^\alpha\,.$$

Con todo lo anterior, considere el tensor de Maxwell en coordenadas cartesianas definido como:

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{otra vez con: } \eta_{\alpha\beta} = -v_\alpha v_\beta + k_\alpha k_\beta + l_\alpha l_\beta + s_\alpha s_\beta$$

donde $\boldsymbol{E} = (E^x, E^y, E^z)$ y $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos respectivamente, medidos en coordenadas cartesianas por un observador O.

a) A partir de las condiciones de ortogonalidad para la tétrada $\left\{\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{l}}, \tilde{\mathbf{s}}\right\}$ en coordenadas esféricas, $(t, r, \theta, \phi) \equiv (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ encontrar sus componentes contravariantes (2ptos).

b) Suponga las siguientes componentes cartesiana para un cuadrivector $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

y encuentre las componentes $\begin{pmatrix} \tilde{a}^0 \\ \tilde{a}^1 \\ \tilde{a}^2 \\ \tilde{a}^3 \end{pmatrix}$ en coordenadas esféricas (2ptos).

c) Compruebe que, en coordenadas cartesianas, se cumplen las siguientes proyecciones

$$F_{\mu\alpha} v^\mu v^\alpha = F_{\mu\alpha} k^\mu k^\alpha = F_{\mu\alpha} l^\mu l^\alpha = F_{\mu\alpha} s^\mu s^\alpha = 0;$$

$$F_{\mu\alpha} v^\mu k^\alpha = E^x; \quad F_{\mu\alpha} v^\mu l^\alpha = E^y; \quad F_{\mu\alpha} v^\mu k^\alpha = E^z\,.$$

Además complete las proyecciones faltantes (2ptos).

d) Encuentre la expresión del tensor **mixto** de Maxwell, $\tilde{F}^\mu_\alpha$, en coordenadas esféricas (2ptos).

e) Calcule las proyecciones $\tilde{F}^{\mu\alpha}$ en coordenadas esféricas (2ptos).