Transformaciones Canónicas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

7 de noviembre de 2024

Agenda

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i, \quad P_i = q_i$

Transformaciones Puntuales

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i, \quad P_i = q_i$
- Entonces $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i}\right) =$
$-\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$
$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{Q}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right) =$
$-\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}\delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}$ Claramente no se cumplen

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$
\left.\begin{array}{r}
\mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right) \\
\dot{q}_i=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}
\end{array}\right| \rightarrow
\begin{array}{c}
\text{Transformación canónica} \\
P_i=P_i\left(q_j, p_j, t\right) \\
Q_i\left(q_j, p_j, t\right)
\end{array}
\rightarrow \left|\begin{array}{l}
\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right) \\
\dot{Q}_i=\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\
\dot{P}_i=-\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}
\end{array}\right.
$$

Transformaciones Canónicas

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$
\left.\begin{array}{r}
\mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right) \\
\dot{q}_i=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}
\end{array}\right| \begin{array}{c}
\rightarrow \text{ Transformación canónica } \rightarrow \\
P_i=P_i\left(q_j, p_j, t\right) \\
Q_i\left(q_j, p_j, t\right)
\end{array} \left| \begin{array}{l}
\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right) \\
\dot{Q}_i=\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\
\dot{P}_i=-\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}
\end{array}\right.
$$

- Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$ no depende explícitamente de alguna coordenada Q_j o momento P_j

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$
  $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$
  $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H} \right)$

Principio de Mínima Acción

- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0$
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- La función $\mathcal{F}$ se llama función generadora de la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}\left(q_i, p_i, Q_i, P_i, t\right)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.

Función Generadora

- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de $\mathcal{F}$ con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal{F}$ es una propiedad característica de la función $\mathcal{F}$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora $\mathcal{F}$, es posible encontrar una transformación canónica asociada a $\mathcal{F}$.
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.
- La relación entre el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ y el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$ resultante de la transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{Q_i, P_i, t\}$ generada por una $\mathcal{F}$ siempre es $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$

Ejemplo de Función Generadora 1/2

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}, i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{2} P_i\dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right) \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - P_1\dot{Q}_1 - P_2\dot{Q}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$

Ejemplo de Función Generadora 1/2

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}, i = 1, 2,$ generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{2} P_i\dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right) \Rightarrow$ $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - P_1\dot{Q}_1 - P_2\dot{Q}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2\dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(p_2 q_2) - q_2\dot{p}_2$; $P_1\dot{Q}_1 = \frac{d}{dt}(P_1 Q_1) - Q_1\dot{P}_1$; $\quad P_2\dot{Q}_2 = \frac{d}{dt}(P_2 Q_2) - Q_2\dot{P}_2$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$, $i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1}\dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2}\dot{P}_2 \Rightarrow$
  $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{2} P_i\dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right) \Rightarrow$
  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - P_1\dot{Q}_1 - P_2\dot{Q}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2\dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(p_2 q_2) - q_2\dot{p}_2$;
  $P_1\dot{Q}_1 = \frac{d}{dt}(P_1 Q_1) - Q_1\dot{P}_1$; $\quad P_2\dot{Q}_2 = \frac{d}{dt}(P_2 Q_2) - Q_2\dot{P}_2$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} =$
  $p_1\dot{q}_1 - q_2\dot{p}_2 + Q_1\dot{P}_1 + Q_2\dot{P}_2 + \frac{d}{dt}(p_2 q_2 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2) + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$

Ejemplo de Función Generadora 2/2

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$

Ejemplo de Función Generadora 2/2

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) =$
  $p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $\left(q_i, p_i, Q_i, P_i\right), i = 1, 2,$

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , $i = 1, 2,$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\,\dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\,\dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$

Ejemplo de Función Generadora 2/2

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) =$
$p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , $i = 1, 2$,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\,\dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\,\dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2; \quad p_1 = P_1 + 2p_2;$
$Q_1 = q_1; \quad -q_2 = 2q_1 + P_2; \quad Q_2 = p_2$

Ejemplo de Función Generadora 2/2

- Es decir $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2\right) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \left(\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\right)$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables $\left(q_i, p_i, Q_i, P_i\right), i = 1, 2,$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \left(P_1 + 2p_2\right)\dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + \left(2q_1 + P_2\right)\dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2; \quad p_1 = P_1 + 2p_2;$ $Q_1 = q_1; \quad -q_2 = 2q_1 + P_2; \quad Q_2 = p_2$
- La transformación canónica $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ generada por G es $P_1 = p_1 - 2p_2 \quad Q_1 = q_1; \quad P_2 = -2q_1 - q_2 \quad Q_2 = p_2.$

Tipos de Funciones Generadoras

Funciones Generadoras	Funciones Generadadoras y derivadas	Un ejemplo sencillo
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}; \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_1 = q_i Q_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_2 = q_i P_i, \quad Q_i = q_i, \quad P_i = p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}; \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_3 = p_i Q_i, \quad Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_4 = p_i P_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f\left(q_i, p_i, t\right)$ en el espacio de fase $\left(q_i, p_i\right)$, $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right)$.
- La derivada total de f es $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f\left(q_i, p_i, t\right)$ en el espacio de fase $\left(q_i, p_i\right)$, $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right)$.
- La derivada total de f es $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano $\mathcal{H}$ es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano $\mathcal{H}$ es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano $\mathcal{H}$ es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Si f no depende explícitamente del tiempo (cantidad conservada), tenemos $\{f, \mathcal{H}\} = 0$

Paréntesis de Poisson: Definición

- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, s$, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano $\mathcal{H}$ es $\{f, \mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Si f no depende explícitamente del tiempo (cantidad conservada), tenemos $\{f, \mathcal{H}\} = 0$
- Para $f(q_i, p_i, t)$ y $g(q_i, p_i, t)$ podemos definir el paréntesis de Poisson de f y g como $\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$.

Paréntesis de Poisson: Propiedades 1/2

- El paréntesis de Poisson puede ser considerado como una operación entre dos funciones definidas en un espacio algebraico que asigna otra función en ese espacio.

Paréntesis de Poisson: Propiedades 1/2

- El paréntesis de Poisson puede ser considerado como una operación entre dos funciones definidas en un espacio algebraico que asigna otra función en ese espacio.
- El paréntesis de Poisson, como operación algebraica, posee las siguientes propiedades (características de lo que se denomina álgebra de Lie):
  - $\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f, f\} = 0$ (antisimetría).
  - $\{f, c\} = 0,$ si $c =$ cte.
  - $\{af_1 + bf_2, g\} = a\{f_1, g\} + b\{f_2, g\},$ $a, b =$ ctes, un operador lineal.
  - $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\},$ (no asociativo).
  - $\{f, \{g, \mathcal{H}\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ la identidad de Jacobi.

Paréntesis de Poisson: Propiedades 2/2

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial q_k}{\partial p_k}}\frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\cancelto{0}{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Paréntesis de Poisson: Propiedades 2/2

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial q_k}{\partial p_k}} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\cancelto{0}{\frac{\partial p'}{\partial q_k}} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

Paréntesis de Poisson: Propiedades 2/2

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial q_k}{\partial p_k}}\frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\cancelto{0}{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$

Paréntesis de Poisson: Propiedades 2/2

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial q_k}{\partial p_k}}\frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\cancelto{0}{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$
- En Mecánica Cuántica, la operación $[A, B] = AB - BA$ se denomina el conmutador de los operadores u observables A y B.

Paréntesis de Poisson: Propiedades 2/2

- Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \cancelto{0}{\frac{\partial q_k}{\partial p_k}} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\cancelto{0}{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$
- En Mecánica Cuántica, la operación $[A, B] = AB - BA$ se denomina el conmutador de los operadores u observables A y B.
- La estructura algebraica de la Mecánica Clásica, expresada en las propiedades de los paréntesis de Poisson, se preserva en la Mecánica Cuántica. En particular, $\{q_i, p_j\} = i\hbar\delta_{ij}$, donde $\hbar$ es la constante de Planck (dividida por 2π).

Dos Ejemplos

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$
  - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\}\,\hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\}\,\hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\}\,\hat{\mathbf{z}}$
  - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i}\frac{\partial p_x}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
  - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
  - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

Dos Ejemplos

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$
  - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\}\,\hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\}\,\hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\}\,\hat{\mathbf{z}}$
  - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i}\frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
  - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
  - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$
- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

  $L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$

  Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$:

  $\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$

  $\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$

  $\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i}\frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i}\frac{\partial L_y}{\partial q_i} \right)$

  $\{L_x, L_y\} =$

  $\left(\frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial L_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial L_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z} \right)$

  $\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$
  - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\}\,\hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\}\,\hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\}\,\hat{\mathbf{z}}$
  - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i}\frac{\partial p_x}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
  - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
  - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$
- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

  $L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$

  Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{L}$:

  $\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$

  $\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$

  $\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i}\frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i}\frac{\partial L_y}{\partial q_i}\right)$

  $\{L_x, L_y\} =$

  $\left(\frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x}\frac{\partial L_y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y}\frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y}\frac{\partial L_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z}\right)$

  $\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$
- En general, $\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k$ y en Mecánica Cuántica, $[l_i, l_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} l_k$.