Sistemas integrables y caóticos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

29 de agosto de 2024

Agenda

1. Integrales del movimiento
2. Sección
3. Sección

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k\left(q_j, \dot{q}_j\right) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k\left(q_j, \dot{q}_j\right) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k\left(q_j, \dot{q}_j\right) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad $(n > s)$ se llama superintegrable.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad $(n > s)$ se llama superintegrable.
- El ejemplo más simple de sistema superintegrable es una partícula libre. Otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional.

Primeras integrales del movimiento

- Las cantidades conservadas, $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k =$ constante, y $k = 1, \ldots, n$, son primeras integrales del movimiento de un sistema.
- Un sistema con s grados de libertad es integrable si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.
- A partir de esa integración las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.
- Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad $(n > s)$ se llama superintegrable.
- El ejemplo más simple de sistema superintegrable es una partícula libre. Otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional.
- Si un sistema con s grados de libertad tiene menos de s cantidades conservadas $(n < s)$, se denomina no integrable.

- Ejemplos de sistemas integrables
  - Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E =$ cte, $n = 1$; es integrable.
  - Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \mathrm{cte}, n = 1$; es integrable.
  - Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = l_z =$ cte, $C_2 = E =$ cte, $n = 2$; es integrable.
  - Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E =$ cte, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo cuyo soporte gira en un círculo en plano vertical con velocidad angular constante: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E =$ cte, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo paramétrico cuya longitud varía en el tiempo: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Partícula libre es superintegrable: $s = 3; n = 4 : C_1 = E =$ cte, $C_2 = p_x =$ cte, $C_2 = p_y = \mathrm{cte}, C_2 = p_z = \mathrm{cte}$.

- Ejemplos de sistemas integrables
  - Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
  - Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \mathrm{cte}, n = 1$; es integrable.
  - Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = l_z = \text{cte}$, $C_2 = E = \text{cte}$, $n = 2$; es integrable.
  - Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo cuyo soporte gira en un círculo en plano vertical con velocidad angular constante: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
  - Péndulo paramétrico cuya longitud varía en el tiempo: $s = 1, n = 0$; no es integrable.
  - Partícula libre es superintegrable: $s = 3; n = 4 : C_1 = E = \text{cte}$, $C_2 = p_x = \text{cte}$, $C_2 = p_y = \mathrm{cte}, C_2 = p_z = \mathrm{cte}$.
- La integrabilidad es un tipo de simetría presente en varios sistemas dinámicos, y que conduce a una evolución regular (periódica o estacionaria) de las variables del sistema en el tiempo

Título transparencia

-