Órbitas y fuerzas centrales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

1 de marzo de 2025

Agenda

Problema de dos cuerpos

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.

Problema de dos cuerpos

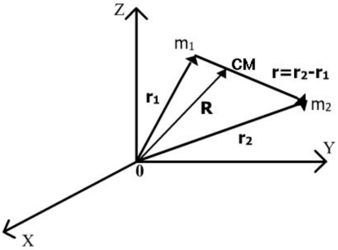
- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Se conoce como el problema de dos cuerpos.

Problema de dos cuerpos

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Se conoce como el problema de dos cuerpos.
- Posee seis grados de libertad: tres coordenadas para $\mathbf{r}_1$ y tres para $\mathbf{r}_2$.

Problema de dos cuerpos

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Se conoce como el problema de dos cuerpos.
- Posee seis grados de libertad: tres coordenadas para $\mathbf{r}_1$ y tres para $\mathbf{r}_2$.
- Definimos el vector de posición del centro de masa del sistema como $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$ y posición relativa como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$



Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$

Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$

Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$

Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$

Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$

Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$

Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$
- El Lagrangiano del sistema es $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) = T - V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$

Los grados de libertad

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1+m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1+m_2)} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rel}}$
- Entonces $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2}M_T\dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$
- El Lagrangiano del sistema es $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) = T - V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$
- Los seis grados de libertad del sistema se describen mediante las componentes de los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{R}$.

La equivalencia unidimensional

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**

La equivalencia unidimensional

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
  $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$. El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \text{cte}$.

La equivalencia unidimensional

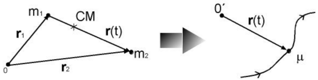
- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\rm T}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}.$
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
  $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\rm T} = M_{\rm T}\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}.$ El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\rm cm} = \text{cte}.$
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.

La equivalencia unidimensional

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
  $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$. El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \text{cte}$.
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
- El término T_{cm}, la energía cinética del centro de masa es constante y se omite en el Lagrangiano, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$

La equivalencia unidimensional

- Las componentes cartesianas de $\mathbf{R}$ son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$.
  Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema : $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathrm{T}} = M_{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{R}} = \text{cte}$. El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \text{cte}$.
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
- El término T_{cm}, la energía cinética del centro de masa es constante y se omite en el Lagrangiano, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$
- El problema de dos cuerpos se reduce al de una partícula de masa μ en la posición relativa $\mathbf{r}(t)$ con respecto a un origen O'.



Potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$

- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.

Potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$

- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.
- Entonces la fuerza central es $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$

Potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$

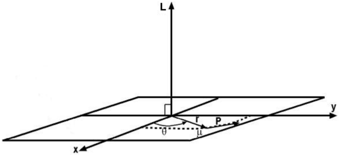
- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.
- Entonces la fuerza central es $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$
- Las fuerza centrales no ejercen torque neto sobre las partículas y el momento angular total $\mathbf{L}$ se conserva,
  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} =$ cte

Potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$

- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.
- Entonces la fuerza central es $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$
- Las fuerza centrales no ejercen torque neto sobre las partículas y el momento angular total $\mathbf{L}$ se conserva,
  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{ cte}$
- La conservación del vector momento angular total, $\mathbf{L}$, significa que tanto su dirección como magnitud son constantes.

Potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$

- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.
- Entonces la fuerza central es $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$
- Las fuerza centrales no ejercen torque neto sobre las partículas y el momento angular total $\mathbf{L}$ se conserva,
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} =$ cte
- La conservación del vector momento angular total, $\mathbf{L}$, significa que tanto su dirección como magnitud son constantes.
- El movimiento de la partícula de masa equivalente μ siempre ocurre sobre el plano $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ y se puede describir mediante dos coordenadas.



Resolviendo en coordenadas polares

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
  $x = r\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\,,$
  $y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

Resolviendo en coordenadas polares

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
  $x = r\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\,,$
  $y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
- Luego, $\dot{\mathbf{r}}^2 = v^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

Resolviendo en coordenadas polares

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
  $x = r\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$,
  $y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
- Luego, $\dot{\mathbf{r}}^2 = v^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$

Resolviendo en coordenadas polares

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
  $x = r\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$,
  $y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
- Luego, $\dot{\mathbf{r}}^2 = v^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$
- La coordenada θ es cíclica, entonces
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} = \text{cte.}$

Resolviendo en coordenadas polares

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
  $x = r\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\,,$
  $y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
- Luego, $\dot{\mathbf{r}}^2 = v^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$
- La coordenada θ es cíclica, entonces
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \;\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} = \text{cte.}$
- La cantidad conservada es el momento conjugado a la coordenada angular θ, i.e. $L = \mu r^2\dot{\theta} = \text{cte.}$

Resolviendo en coordenadas polares

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
  $x = r\cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$,
  $y = r\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
- Luego, $\dot{\mathbf{r}}^2 = v^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$
- La coordenada θ es cíclica, entonces
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} = \text{cte.}$
- La cantidad conservada es el momento conjugado a la coordenada angular θ, i.e. $L = \mu r^2\dot{\theta} = \text{cte.}$
- El Lagrangiano es independiente del tiempo y el potencial es independiente de las velocidades, por lo que la energía mecánica total se conserva, $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \text{cte.}$

El Sistema es integrable

- Entonces, en el problema de dos cuerpos existen seis grados de libertad y al menos seis cantidades conservadas. Por lo tanto, se trata de un sistema integrable.

El Sistema es integrable

- Entonces, en el problema de dos cuerpos existen seis grados de libertad y al menos seis cantidades conservadas. Por lo tanto, se trata de un sistema integrable.
- Las seis cantidades conservadas $I_k\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2\right) = C_k(k = 1, \ldots, 6)$ del problema de dos cuerpos sujetos a un potencial central $V\left(\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|\right) = V(r)$ son:
  1. Las tres componentes del vector velocidad del centro de masa $\dot{\mathbf{R}}$: $I_1 = \dot{x}_{cm} = \text{cte}$, $I_2 = \dot{y}_{cm} = \text{cte}$, $I_3 = \dot{y}_{cm} = \text{cte}$. Esto reduce el problema al movimiento del vector de posición relativa $\mathbf{r}$.
  2. La dirección del momento angular $\mathbf{L} = \text{cte}$, reduce el movimiento a un plano y se expresa como $I_4 = z = 0$.
  3. La magnitud del momento angular $I_5 = \mu r^2 \dot{\theta} = L$.
  4. La energía total $I_6 = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = E$.

El Sistema es integrable

- Entonces, en el problema de dos cuerpos existen seis grados de libertad y al menos seis cantidades conservadas. Por lo tanto, se trata de un sistema integrable.
- Las seis cantidades conservadas $I_k\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2\right) = C_k(k = 1, \ldots, 6)$ del problema de dos cuerpos sujetos a un potencial central $V\left(\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|\right) = V(r)$ son:
  1. Las tres componentes del vector velocidad del centro de masa $\dot{\mathbf{R}}$: $I_1 = \dot{x}_{cm} =$ cte, $I_2 = \dot{y}_{cm} =$ cte, $I_3 = \dot{y}_{cm} =$ cte. Esto reduce el problema al movimiento del vector de posición relativa $\mathbf{r}$.
  2. La dirección del momento angular $\mathbf{L} =$ cte, reduce el movimiento a un plano y se expresa como $I_4 = z = 0$.
  3. La magnitud del momento angular $I_5 = \mu r^2 \dot{\theta} = L$.
  4. La energía total $I_6 = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = E$.
- Las cantidades conservadas E y L, permiten reducir el problema de dos cuerpos a un problema unidimensional equivalente y la integración de las coordenadas r y θ, i.e. $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + V(r) =$cte.

Integrando el sistema

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$

Integrando el sistema

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$

Integrando el sistema

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{L}{\mu r^2}\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{l}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$

Integrando el sistema

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{L}{\mu r^2}\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{l}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$
- Finalmente, $\theta(r) = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}} + \theta_0$

Integrando el sistema

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{L}{\mu r^2}\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{l}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$
- Finalmente, $\theta(r) = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}} + \theta_0$
- En total hay cuatro constantes de integración, E, L, r_0, θ_0, para las coordenadas r y θ.

Integrando el sistema

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{L}{\mu r^2}\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{l}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$
- Finalmente, $\theta(r) = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}} + \theta_0$
- En total hay cuatro constantes de integración, E, L, r_0, θ_0, para las coordenadas r y θ.
- Las cuatro constantes aparecen porque tenemos una ecuación de Lagrange para r y otra para θ; ambas son ecuaciones diferenciales de segundo orden que requieren dos constantes de integración cada una.

Recapitulando

- El problema de dos cuerpos se reduce a un problema de una partícula ficticia, de masa reducida μ, en un potencial central $V(r)$.
  El problema se divide en dos partes:
  - Movimiento del centro de masa, que se mueve con velocidad constante.
  - Movimiento relativo, equivalente al de una partícula de masa reducida μ en un potencial efectivo $V(r)$.
  - La conservación del momento lineal del centro de masas implica que el centro de masa se mueve con velocidad constante, permitiendo ignorar esta parte en el análisis del movimiento relativo.

Recapitulando

- El problema de dos cuerpos se reduce a un problema de una partícula ficticia, de masa reducida μ, en un potencial central $V(r)$.
  El problema se divide en dos partes:
  - Movimiento del centro de masa, que se mueve con velocidad constante.
  - Movimiento relativo, equivalente al de una partícula de masa reducida μ en un potencial efectivo $V(r)$.
  - La conservación del momento lineal del centro de masas implica que el centro de masa se mueve con velocidad constante, permitiendo ignorar esta parte en el análisis del movimiento relativo.
- Existen seis cantidades conservadas, lo que demuestra que el sistema es integrable.
  - Las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
  - La dirección del momento angular $\mathbf{L}$.
  - La magnitud del momento angular $L = \mu r^2 \dot{\theta}$.
  - La energía total E.
  - La conservación de E y L permite reducir el problema a una ecuación diferencial unidimensional en términos de r.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- El problema de dos cuerpos se reduce a un problema de una partícula ficticia, de masa reducida μ, en un potencial central $V(r)$.
  El problema se divide en dos partes:
  - Movimiento del centro de masa, que se mueve con velocidad constante.
  - Movimiento relativo, equivalente al de una partícula de masa reducida μ en un potencial efectivo $V(r)$.
  - La conservación del momento lineal del centro de masas implica que el centro de masa se mueve con velocidad constante, permitiendo ignorar esta parte en el análisis del movimiento relativo.
- Existen seis cantidades conservadas, lo que demuestra que el sistema es integrable.
  - Las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
  - La dirección del momento angular $\mathbf{L}$.
  - La magnitud del momento angular $L = \mu r^2 \dot{\theta}$.
  - La energía total E.
  - La conservación de E y L permite reducir el problema a una ecuación diferencial unidimensional en términos de r.
- Este análisis, simplificado es clave en mecánica celeste, para describir órbitas planetarias y otros sistemas gravitacionales.

Para la discusión

- Se demostró que el movimiento de dos cuerpos que interactúan entre sí sólo a través de fuerzas centrales puede reducirse a un problema equivalente de un solo cuerpo. Demostrar explicitamente que esta reducción también es posible en caso de que los cuerpos se muevan en un campo externo gravitatorio y uniforme.

- Se demostró que el movimiento de dos cuerpos que interactúan entre sí sólo a través de fuerzas centrales puede reducirse a un problema equivalente de un solo cuerpo. Demostrar explicitamente que esta reducción también es posible en caso de que los cuerpos se muevan en un campo externo gravitatorio y uniforme.
- Considere el sistema que muestra la figura y aplique lo considerado en el punto anterior