Series de potencias y ecuaciones diferenciales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

20 de septiembre de 2021

Agenda Series y Ecuaciones Diferenciales

Método de diferenciaciones sucesiva

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea
$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)} = \mathcal{F}(x)\,,$
con las condiciones iniciales
$y(x_0) = C_1\,; \quad y'(x_0) = C_2\,; \quad y''(x_0) = C_3\,; \quad \ldots y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$
Los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.

Método de diferenciaciones sucesiva

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea
  $a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)} = \mathcal{F}(x)$,
  con las condiciones iniciales
  $y(x_0) = C_1\,; \quad y'(x_0) = C_2\,; \quad y''(x_0) = C_3\,; \quad \ldots y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$
  Los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.
- Tendrá como única solución de la ecuación homogénea $y = y(x)$, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:
  $y_{\mathrm{h}}(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots\,.$

Método de diferenciaciones sucesiva

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea
  $a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)} = \mathcal{F}(x)$,
  con las condiciones iniciales
  $y(x_0) = C_1\,; \quad y'(x_0) = C_2\,; \quad y''(x_0) = C_3\,; \quad \ldots y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$
  Los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.
- Tendrá como única solución de la ecuación homogénea $y = y(x)$, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:
  $y_h(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots\,.$
- La solución de la inhomogénea proviene de expandir en Taylor la función inhomogénea, esto es: $\mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}^{(i)}(x_0)\frac{(x - x_0)^i}{i!}$, y proponer una solución de la inhomogénea de la forma
  $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\,.$

Método de diferenciaciones sucesiva

- Dada una ecuación diferencial inhomogénea
  $a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)} = \mathcal{F}(x)\,,$
  con las condiciones iniciales
  $y(x_0) = C_1\,; \quad y'(x_0) = C_2\,; \quad y''(x_0) = C_3\,; \quad \ldots y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$
  Los coeficientes $a_0(x)\cdots a_n(x)$ son **funciones analíticas** en $x = x_0$.
- Tendrá como única solución de la ecuación homogénea $y = y(x)$, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:
  $y_h(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \cdots\,.$
- La solución de la inhomogénea proviene de expandir en Taylor la función inhomogénea, esto es: $\mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}^{(i)}(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}$, y proponer una solución de la inhomogénea de la forma
  $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\,.$
- Finalmente, la solución general será $y(x) = y_h(x) + y_{ih}(x)$

Ejemplo

- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = \sqrt{x+1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$

Ejemplo

- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = \sqrt{x+1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
  $y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \ldots$

Ejemplo

- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = \sqrt{x+1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
  $y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \ldots$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
  $y''(0) = (x+1)y' - x^2 y\Big|_{x=0} = y'(0) = 1$
  $y'''(0) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + (x+1)\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2\,xy(x) - x^2\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{x=0} = 1 + 1 = 2$

Ejemplo

- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = \sqrt{x+1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
  $y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \ldots$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
  $y''(0) = (x+1)y' - x^2 y\big|_{x=0} = y'(0) = 1$
  $y'''(0) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + (x+1)\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2\,xy(x) - x^2\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = 1 + 1 = 2$
- La expansión en Taylor de la parte inhomogénea será
  $\sqrt{(x+1)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \ldots$

Ejemplo

- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = \sqrt{x+1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
  $y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \ldots$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
  $y''(0) = (x+1)y' - x^2 y\big|_{x=0} = y'(0) = 1$
  $y'''(0) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + (x+1)\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2\,xy(x) - x^2\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = 1 + 1 = 2$
- La expansión en Taylor de la parte inhomogénea será
  $\sqrt{(x+1)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \ldots$
- La solución particular inhomogénea será $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, entonces
  $\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)'' - (x+1)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)' + x^2\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sqrt{x+1} =$
  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \ldots$ igualando se tienen b_j

Ejemplo

- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = \sqrt{x+1}$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- La solución de la homogénea será
  $y_h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 \ldots$
- Donde $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
  $y''(0) = (x+1)y' - x^2 y\big|_{x=0} = y'(0) = 1$
  $y'''(0) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + (x+1)\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2\,xy(x) - x^2 \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 1 + 1 = 2$
- La expansión en Taylor de la parte inhomogénea será
  $\sqrt{(x+1)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \ldots$
- La solución particular inhomogénea será $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, entonces
  $\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)'' - (x+1)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right)' + x^2\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sqrt{x+1} =$
  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + \ldots$ igualando se tienen b_j
- La solución general será
  $y(x) = y_h + y_{ih} = 1 + x + x^2 + \frac{7}{12}x^3 + \frac{7}{32}x^4 + \frac{27}{320}x^5 + \ldots$

Coeficientes indeterminados

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,

Coeficientes indeterminados

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)\,,$
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales

Coeficientes indeterminados

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.

Coeficientes indeterminados

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.
- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = x$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$

Coeficientes indeterminados

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.
- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = x$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- Proponemos una solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{array} \right.$$

- Dada una ecuación inhomogénea $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$,
- Se expande por Taylor $\mathcal{F}(x)$ alrededor de un punto $x = x_0$ donde estén definidas las condiciones iniciales
- Se propone como solución general de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (x - x_0)^n$, donde los coeficientes $a_i(x)$ **tienen que ser funciones analíticas** alrededor de los puntos $x = x_0$.
- Sea $y'' - (x+1)y' + x^2 y = x$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$
- Proponemos una solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{array} \right.$$

- Con lo cual $y(0) = 1 = c_0$ y $y'(0) = 1 = c_1$

Universidad Industrial de Santander CONSTRUIMOS FUTURO

- Entonces
$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x$
$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x$
$\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)c_{l+2}x^l - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}x^m = x$

Cont...

- Entonces
$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x$
$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x$
$\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)c_{l+2}x^l - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}x^m = x$
- Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:
$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - nc_n - (n+1)c_{n+1}\right] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = x$

Cont...

- Entonces
  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x$
  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x$
  $\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)c_{l+2}x^l - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}x^m = x$
- Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:
  $\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)\,c_{n+2} - nc_n - (n+1)\,c_{n+1}\right]x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = x$
- Por lo tanto $n=0 \Rightarrow 2c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$
  y $n=1 \Rightarrow 3\cdot 2\ c_3 - c_1 - 2\ c_2 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}$

Cont...

- Entonces
  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - (x+1)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x$
  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x$
  $\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)c_{l+2}x^l - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}x^m = x$
- Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:
  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - nc_n - (n+1)c_{n+1}\right] x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = x$
- Por lo tanto $n=0 \Rightarrow 2c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$
  y $n=1 \Rightarrow 3 \cdot 2\ c_3 - c_1 - 2\ c_2 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}$
- la relación de recurrencia para $n \geq 2$ es
  $(n+2)(n+1)c_{n+2} - nc_n - (n+1)c_{n+1} - c_{n-2} = 0$

Puntos y Estrategias

- Dada una ecuación diferencial del tipo
$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)\ y = 0 \quad \Rightarrow y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}\ y = 0$

Puntos y Estrategias

- Dada una ecuación diferencial del tipo
  $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)\ y = 0 \quad \Rightarrow y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}\ y = 0$
- Un **punto ordinario** $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son analíticas. Esto es:
  $\lim_{x \to x_0} p(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = L_1\,, \quad$ con L_1 finito
  $\lim_{x \to x_0} q(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = L_2\,, \quad$ con L_2 finito

- Dada una ecuación diferencial del tipo
$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)\ y = 0 \quad \Rightarrow y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}\ y = 0$
- Un **punto ordinario** $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son analíticas. Esto es:
$\lim_{x\to x_0} p(x) \equiv \lim_{x\to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = L_1\,, \quad \text{con } L_1 \text{ finito}$
$\lim_{x\to x_0} q(x) \equiv \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = L_2\,, \quad \text{con } L_2 \text{ finito}$
- Un punto $x = x_0$ se llamará un **punto singular regular** si
$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)\, p(x) \equiv \lim_{x\to x_0} (x - x_0)\, \frac{Q(x)}{P(x)} = L_3\,, \quad \text{con } L_3 \text{ finito}$
$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2\, q\,(x) \equiv \lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2\, \frac{R(x)}{P(x)} = L_4\,, \quad \text{con } L_4 \text{ finito}$

Puntos y Estrategias

- Dada una ecuación diferencial del tipo
  $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)\ y = 0 \quad \Rightarrow y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}\ y = 0$
- Un **punto ordinario** $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son analíticas. Esto es:
  $\lim_{x \to x_0} p(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = L_1\,, \quad$ con L_1 finito
  $\lim_{x \to x_0} q(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = L_2\,, \quad$ con L_2 finito
- Un punto $x = x_0$ se llamará un **punto singular regular** si
  $\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\, p(x) \equiv \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\, \frac{Q(x)}{P(x)} = L_3\,, \quad$ con L_3 finito
  $\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\, q\,(x) \equiv \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\, \frac{R(x)}{P(x)} = L_4\,, \quad$ con L_4 finito
- **Puntos singulares irregulares:** Ninguna de las anteriores.

La ecuación de Legendre

- La ecuación de Legendre $(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$

La ecuación de Legendre

- La ecuación de Legendre $(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

La ecuación de Legendre

- La ecuación de Legendre $(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ $+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

La ecuación de Legendre

- La ecuación de Legendre $(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ $+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n -$ $2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$

- La ecuación de Legendre $(1-x^2)\; y'' - 2x\; y' + \lambda(\lambda+1)\; y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ $+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n -$ $2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Expandiendo $2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0\,[(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3\cdot 2)a_3]\,x +$ $\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n]\,x^n = 0$

La ecuación de Legendre

- La ecuación de Legendre $(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ $+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n -$ $2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Expandiendo $2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0\left[(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3\cdot 2)a_3\right]x +$ $\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n\right]x^n = 0$
- Los coeficientes pares serán $a_2 = -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ a_0$, $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ a_0$, $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ a_0$, ... $a_{2n} = (-1)^n\frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}\ a_0$

La ecuación de Legendre

- La ecuación de Legendre $(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$
- Proponemos una solución por series $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Al sustituir resulta $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ $+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Acomodando $\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n -$ $2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$
- Expandiendo $2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0\left[(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3\cdot 2)a_3\right]x +$ $\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n\right]x^n = 0$
- Los coeficientes pares serán $a_2 = -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ a_0,$ $a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ a_0,\ a_4 = \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ a_0,\ \ldots$ $a_{2n} = (-1)^n\frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}\ a_0$
- Los coeficientes impares serán $a_3 = -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ a_1,$ $a_5 = \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ a_1,$ $a_{2n+1} = (-1)^n\frac{(\lambda+2n)(\lambda+2n-2)\cdots(\lambda+2)(\lambda-1)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!}\ a_1$

Ecuación de Legendre cont...

- La solución general será $y(x) = a_0\ y_0(x) + a_1 y_1(x)$
  $y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ x^4 + \cdots$
  $y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ x^5 + \cdots$

Ecuación de Legendre cont...

- La solución general será $y(x) = a_0\ y_0(x) + a_1 y_1(x)$
  $y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ x^4 + \cdots$
  $y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ x^5 + \cdots$
- si $\lambda = 2n$ la series se corta y es un polinomio de potencias pares,

Ecuación de Legendre cont...

- La solución general será $y(x) = a_0\ y_0(x) + a_1 y_1(x)$
  $y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ x^4 + \cdots$
  $y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ x^5 + \cdots$
- si $\lambda = 2n$ la series se corta y es un polinomio de potencias pares,
- si $\lambda = 2n+1$ la otra se corta en uno de potencias impares.

- La solución general será $y(x) = a_0\ y_0(x) + a_1 y_1(x)$
  $y_0(x) = 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ x^4 + \cdots$
  $y_1(x) = x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ x^5 + \cdots$
- si $\lambda = 2n$ la series se corta y es un polinomio de potencias pares,
- si $\lambda = 2n+1$ la otra se corta en uno de potencias impares.
- Entonces

λ	Ecuación de Legendre	Polinomio Asociado
0	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' = 0$	$y_0(x) = 1$
1	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 2\ y = 0$	$y_1(x) = x$
2	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 6\ y = 0$	$y_0(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 12\ y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 20\ y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

Recapitulando

En presentación consideramos

1.