Nombre:

1. Considere $\mathbf{A}(x,y,z)$ un campo vectorial genérico y compruebe $(\mathbf{A}(x,y,z)\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A}(x,y,z)$ en coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas. ¿Se cumplirá en todos los sistemas de coordenadas? Justifique su respuesta. (4ptos)

R En cartesianas $(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} = A_x\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x} + A_y\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} + A_z\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}$, y $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y} = \hat{\mathbf{j}}, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{\mathbf{k}}$ por lo tanto se cumple porque $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$

En esféricas $\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ por lo tanto
$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A} = A_r\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} + A_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} + A_\varphi\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}$ y como los vectores unitarios son
$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}, \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}, \qquad \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}$ vemos que $\mathbf{A} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Se cumple también. Es una ecuación vectorial y, si se cumple en un sistema de coordenadas, se cumplirá en todos los sistemas.

2. Considere la siguiente curva paramétrica $\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\varphi(t)) = R_0(1+t)\cos(2\pi t) \\ y(t) = \rho(t)\,\mathrm{sen}(\varphi(t)) = R_0(1+t)\,\mathrm{sen}(2\pi t) \\ z(t) = t \end{cases}$

   Calcule la torsión y el radio de curvatura de la curva. (4ptos)

R Claramente, la curva $C(t) = [R_0(1+t)\cos(2\pi t), R_0(1+t)\,\mathrm{sen}(2\pi t), t]$, representa el vector posición de una partícula que sigue esa trayectoria. Analizaremos el caso con $t \in [0, 2\pi]$. El vector posición en cartesianas y polares será:

$$\mathbf{r} = R_0(1+t)\cos(2\pi t)\hat{\mathbf{i}} + R_0(1+t)\,\mathrm{sen}(2\pi t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}} = R_0(1+t)\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}.$$

Ya que $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi(t)\hat{\mathbf{i}} + \mathrm{sen}\,\varphi(t)\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathrm{sen}\,\varphi(t)\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi(t)\hat{\mathbf{j}}$, los vectores unitarios de las coordenadas polares. El vector tangente a la trayectoria será

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(R_0\hat{\boldsymbol{\rho}} + R_0(1+t)\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}) \equiv \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}((R_0\hat{\boldsymbol{\rho}} + 2\pi R_0(1+t)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \hat{\mathbf{k}}),$$

donde hemos utilizado que $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ y el punto representa la derivada respecto al tiempo

El arco sobre la curva viene descrito por

$$\mathrm{d}s = \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right]^{1/2}\mathrm{d}\bar{t} = \sqrt{R_0^2(1+4\pi^2(1+t)^2)+1}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{R_0^2(1+4\pi^2(1+t)^2)+1}.$$

El vector unitario tangente a la trayectoria será

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2(1+4\pi^2(1+t)^2)+1}}(R_0\hat{\boldsymbol{\rho}} + 2\pi R_0(1+t)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \hat{\mathbf{k}})$$

El vector perpendicular al tangente será

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{R_0(5-t)}}(-2\pi R_0(1+t)\hat{\boldsymbol{\rho}} + R_0\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

Donde el radio de curvatura será proporcional a $\frac{1}{\sqrt{R_0(5-t)}}$.

Con esos dos vectores unitarios calculamos el producto vectorial

$$\mathbf{b} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\mathbf{n}} = \frac{\left[R_0\hat{\boldsymbol{\rho}} - 2\pi R_0(1+t)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + R_0^2\left(1+4\pi^2(1+t)^2\right)\hat{\mathbf{k}}\right]}{\sqrt{(R_0^2(1+4\pi^2(1+t)^2)+1)R_0(5-t)}}$$

y la torsión vendrá dada por

$$-\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}s} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{8\pi^3 R_0^2(1+t)^2}{R_0(5-t)(R_0^2(1+4\pi^2(1+t)^2)+1)}$$

Ya que

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{1}{D(t)^2}\left[D(t)\cdot\left(4\pi^2 R_0(1+t)\hat{\boldsymbol{\rho}} + 8\pi^2 R_0^2(1+t)\hat{\mathbf{k}}\right) + \mathbf{N}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

con $\mathbf{N}(t) = R_0\hat{\boldsymbol{\rho}} - 2\pi R_0(1+t)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + R_0^2(1+4\pi^2(1+t)^2)\hat{\mathbf{k}}$ y $D(t) = \sqrt{(R_0^2(1+4\pi^2(1+t)^2)+1)R_0(5-t)}$

3. Considere el siguiente campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho+c}(\hat{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\boldsymbol{\varphi}})$ en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), donde c es una constante.

   a) Calcule el flujo de $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ a través de un cilindro de radio $R = 3$ y altura $b = 2$. ¿qué puede concluir de la fuente que genera el campo? ¿Cuál será el flujo si se aumenta el radio del cilindro a $R = 4$? (4ptos)

   R Vamos a calcular el flujo del campo vectorial de manera directa:

$$\phi = \iint_S \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{z=0}^{b}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{R+c}\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot (R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z)\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \int_0^b\int_0^{2\pi}\frac{R}{R+c}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\, b\, R}{R+c}$$

   La fuente que genera el campo podría ser una línea de cargas ubicada en el eje del cilindro que coincide con el eje z de nuestro sistema de coordenadas cilíndricas. Claramente, al variar el valor del radio del cilindro, cambia el flujo del campo.

   b) Calcule la integral de línea del campo, siguiendo la trayectoria de la segunda pregunta, cuando pasa de $\rho = R_0$ a $\rho = 2R_0$ (4ptos)

   R La integral de línea a lo largo de esa trayectoria

$$\int_C \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{a}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\frac{(\hat{\boldsymbol{\rho}}+\hat{\boldsymbol{\varphi}})}{\rho+c}\cdot(R_0\hat{\boldsymbol{\rho}} + R_0(1+t)2\pi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \hat{\mathbf{k}})\,\mathrm{d}t$$

   con lo cual

$$\int_C \mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{R_0\left(1+2\pi(1+t)\right)}{R_0(1+t)+c}\,\mathrm{d}t = 2\pi + \frac{(2\pi c - R_0)}{R_0}\cdot\ln\left(\frac{c+R_0}{c+2R_0}\right)$$

c) A partir de este campo vectorial identifique las "componentes" *longitudinal* $\mathbf{a}_l(\mathbf{r})$ y la *transversa* $\mathbf{a}_t(\mathbf{r})$ de tal forma que $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_l(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_t(\mathbf{r})$, con $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}_l(\mathbf{r}) = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}_t(\mathbf{r}) = 0\,. \end{array} \right.$ (4ptos)

R Queremos descomponer el campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_l(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_t(\mathbf{r})$ con irrotacional $\mathbf{a}_l$, es decir $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}_l = 0$ y $\mathbf{a}_t$ sin divergencia, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}_t = 0$. Con lo cual $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}_l = \frac{c}{\rho(\rho+c)^2}$, y también $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}_t = \frac{c}{\rho(\rho+c)^2}\,\hat{\mathbf{z}}$. Entonces para cada "componente" tendremos dos ecuaciones

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}_l = \frac{c}{\rho(\rho+c)^2}\,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}_l = 0\,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}_t = \frac{c}{\rho(\rho+c)^2}\,\hat{\mathbf{z}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}_t = 0$$

La componente longitudinal es irrotacional y por lo tanto deriva de un potencial $\mathbf{a}_l = -\nabla\phi$. Entonces

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a}_l = \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\boldsymbol{\nabla}\phi) = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi = -\frac{c}{\rho(\rho+c)^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right) = -\frac{c}{\rho(\rho+c)^2}$$

Integramos la ecuación de Poisson

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\phi}{d\rho}\right) = -\frac{c}{(\rho+c)^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{c}{\rho+c} + C_1\right) \Rightarrow \phi(\rho) = \int \left(\frac{c}{\rho(\rho+c)} + \frac{C_1}{\rho}\right) d\rho$$

con lo cual

$$\phi(\rho) = \ln\left(\frac{\rho}{\rho+c}\right) + C_1 \ln\rho + C_2 \Rightarrow \mathbf{a}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\rho) = \left(\frac{c}{\rho(\rho+c)} + \frac{C_1}{\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

La componente transversal la despejamos del campo

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a} - \mathbf{a}_l = \left(\frac{1}{\rho+c} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{c}{\rho+c} + C_1\right)\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho+c}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

d) Determine el potencial escalar $\phi(\rho,\varphi,z)$, y el potencial vectorial $\mathbf{A}(\rho,\varphi,z)$ asociados con este campo, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ (4ptos)

R En cilíndricas, para un potencial $\mathbf{B} = (B_\rho, B_\varphi, B_z)$ el rotacional será

$$(\nabla\times\mathbf{B})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad (\nabla\times\mathbf{B})_\varphi = \frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial\rho}, \quad (\nabla\times\mathbf{B})_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\rho}{\partial\varphi}.$$

Supondremos una propuesta simple

$$B_\rho = 0, \qquad B_\varphi(\rho,z) = -z\,a_\rho(\rho), \qquad B_z(\rho) = -\ln(\rho+c)$$

Con lo cual se cumple que

- $(\nabla\times\mathbf{B})_\rho = -\partial B_\varphi/\partial z = a_\rho(\rho) = \dfrac{1}{\rho+c} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{c}{\rho+c} + C_1\right).$
- $((\nabla\times\mathbf{B})_\varphi = -\partial B_z/\partial\rho = 1/(\rho+c) = a_\varphi(\rho).$
- $(\nabla\times\mathbf{B})_z = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}(\rho B_\varphi) = -\dfrac{z}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}(\rho a_\rho) = 0$ porque $(\rho a_\rho = 1 + C_1)$ es constante.