Matemáticas Avanzadas:
Variable Compleja, Series y Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maxima

H. Hernández
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida-Venezuela

L. A. Núñez
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia

6 de septiembre de 2022

Borrador Preliminar

Índice general

1. Variable Compleja **11**
1.1. Funciones de Variable Compleja . . . 12
1.1.1. De la recta real al plano complejo . . . 12
1.1.2. Continuidad en el plano complejo . . . 12
1.1.3. Diferenciabilidad de funciones complejas . . . 13
1.1.4. Funciones analíticas y condiciones de Cauchy-Riemann . . . 13
1.1.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann . . . 15
1.1.6. Ejemplos . . . 16
1.1.7. Practicando con Maxima . . . 18
1.1.8. Ejercicios . . . 21
1.2. Puntos, líneas de corte y ceros de funciones complejas . . . 22
1.2.1. Puntos y líneas de corte . . . 22
1.2.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas . . . 24
1.2.3. Transformaciones conformes . . . 26
1.2.4. Algunas consecuencias y ejemplos . . . 27
1.2.5. Ejemplos . . . 29
1.2.6. Practicando con Maxima . . . 33
1.2.7. Ejercicios . . . 38
1.3. Integrales complejas . . . 40
1.3.1. Algunas propiedades . . . 40
1.3.2. Teorema integral de Cauchy . . . 40
1.3.3. El teorema y las regiones . . . 41
1.3.4. Algunas observaciones y el Teorema de Morera . . . 42
1.3.5. Fórmula integral de Cauchy . . . 43
1.3.6. Ejemplos . . . 44
1.3.7. Practicando con Maxima . . . 48
1.3.8. Ejercicios . . . 49

2. Series I **51**
2.1. Sucesiones y Series . . . 52
2.1.1. Introducción a las sucesiones . . . 53
2.1.2. Acercándonos al concepto de series . . . 57
2.1.3. Series elementales . . . 58

Borrador Preliminar

2.1.4. Derivación de series geométricas elementales . . . 61
2.1.5. El método de la diferencia . . . 64
2.1.6. Algebra elemental de series . . . 66
2.1.7. Series telescópicas . . . 67
2.1.8. Ejemplos . . . 69
2.1.9. Practicando con Maxima . . . 70
2.1.10. Ejercicios . . . 74
2.2. Criterios de convergencia . . . 75
2.2.1. Convergencia absoluta o condicional . . . 75
2.2.2. Criterio de Comparación . . . 76
2.2.3. Criterio de la Raíz . . . 77
2.2.4. Criterio de d'Alembert . . . 77
2.2.5. Criterio de la Integral de Maclaurin . . . 78
2.2.6. Series alternantes y convergencia condicional . . . 80
2.2.7. Ejemplos . . . 81
2.2.8. Practicando con Maxima . . . 82
2.2.9. Ejercicios . . . 83
2.3. Series de funciones . . . 84
2.3.1. Series de potencias . . . 84
2.3.2. Convergencia de una serie de potencias . . . 85
2.3.3. Convergencia uniforme . . . 86
2.3.4. Criterio Mayorante de Weierstrass . . . 87
2.3.5. Criterio de Abel . . . 88
2.3.6. Algebra elemental de series de potencias . . . 89
2.3.7. Ejemplos . . . 91
2.3.8. Practicando con Maxima . . . 93
2.3.9. Ejercicios . . . 93
2.4. Serie de Taylor . . . 94
2.4.1. Algunas series de Taylor . . . 96
2.4.2. La expansión binomial . . . 97
2.4.3. Sobre la función Gamma . . . 98
2.4.4. Taylor en varias variables . . . 100
2.4.5. Ejemplos . . . 100
2.4.6. Practicando con Maxima . . . 100
2.4.7. Ejercicios . . . 100
2.5. Series de Fourier . . . 102
2.5.1. Condiciones de Dirichlet . . . 104
2.5.2. Consideraciones de simetría en series de Fourier . . . 106
2.5.3. El Fenómeno de Gibbs . . . 107
2.5.4. Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor σ de Lanczos . . . 108
2.5.5. Ejemplos . . . 109
2.5.6. Practicando con Maxima . . . 111
2.5.7. Ejercicios . . . 111

Borrador Preliminar

3. Series II **115**
3.1. Series y espacios de Hilbert . . . 116
3.1.1. Completitud de E^∞ . . . 116
3.1.2. Conjunto completo de funciones . . . 117
3.1.3. Ejemplos . . . 119
3.1.4. Practicando con Maxima . . . 119
3.1.5. Ejercicios . . . 119
3.2. Series de Laurent . . . 119
3.2.1. Series de Taylor para funciones analíticas . . . 119
3.2.2. Las series de Laurent . . . 121
3.2.3. Integración por el método de los residuos: los residuos de Laurent . . . 123
3.2.4. Ejemplos . . . 124
3.2.5. Practicando con Maxima . . . 127
3.2.6. Ejercicios . . . 127
3.3. Teorema del Residuo . . . 128
3.3.1. Integrales impropias . . . 128
3.3.2. Evaluación de integrales reales e impropias . . . 128
3.3.3. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$ . . . 129
3.3.4. Integrales de funciones racionales de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ . . . 130
3.3.5. Integrales de Fourier . . . 131
3.3.6. Otras integrales impropias . . . 132
3.3.7. Ejemplos . . . 135
3.3.8. Practicando con Maxima . . . 136
3.3.9. Ejercicios . . . 136
3.4. Tranformadas de Fourier . . . 137
3.4.1. Propiedades . . . 138
3.4.2. Funciones pares e impares . . . 139
3.4.3. Tranformadas discretas de Fourier . . . 139
3.4.4. Aliasing o efecto Nyquist . . . 141
3.4.5. Señal y Ruido . . . 142
3.4.6. Ejemplos . . . 143
3.4.7. Practicando con Maxima . . . 143
3.4.8. Ejercicios . . . 143

4. PolinomiosOrtogonales **145**
4.1. Series de Polinomios Ortogonales . . . 146
4.2. Polinomios de Legendre, $P_n(x)$ . . . 146
4.2.1. Generalidades de los Polinomios de Legendre . . . 146
4.2.2. Relación de Recurrencia . . . 148
4.2.3. Función Generatriz de los Polinomios de Legendre . . . 150
4.2.4. Ortogonalidad y norma de los Polinomios de Legendre . . . 152
4.2.5. Otras propiedades de los polinomios de Legendre . . . 153
4.2.6. Resumen de Propiedades Polinomios Legendre . . . 154
4.2.7. Ejemplo: la función generatríz y la expansión multipolar . . . 154
4.2.8. Practicando con Maxima . . . 157
4.2.9. Ejercicios . . . 157
4.3. Polinomios asociados de Legendre $P_l^m(x)$ y Armónicos Esféricos, $Y_l^m(\theta,\varphi)$ . . . 157
4.3.1. Generalidades de los Polinomios Asociados de Legendre . . . 157

Borrador Preliminar

4.3.2. Relaciones de recurrencia . . . 158
4.3.3. Función generatriz y valores extremos . . . 159
4.3.4. Ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre . . . 160
4.3.5. Armónicos Esféricos, $Y_l^m(\theta, \varphi)$: generalidades . . . 160
4.3.6. Relaciones de recurrencia y valores extremos . . . 161
4.3.7. Teorema de suma de armónicos . . . 161
4.3.8. Ejemplos . . . 162
4.3.9. Practicando con Maxima . . . 164
4.3.10. Ejercicios . . . 164
4.4. Polinomios de Hermite, $H_n(x)$ . . . 164
4.4.1. Generalidades de los Polinomios de Hemite . . . 164
4.4.2. Relación de Recurrencia . . . 168
4.4.3. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite . . . 169
4.4.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite . . . 170
4.4.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite . . . 170
4.4.6. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite . . . 172
4.4.7. Ejemplo: El Oscilador armónico cuántico independiente del tiempo . . . 172
4.4.8. Practicando con Maxima . . . 173
4.4.9. Ejercicios . . . 173
4.5. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales . . . 174
4.5.1. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad . . . 175
4.5.2. Fórmula de Rodrigues genelarizada . . . 175
4.5.3. Ejemplos de Polinomios Ortogonales . . . 175
4.5.4. Relaciones de Recurrencia . . . 175
4.5.5. Función generatriz generalizada . . . 176
4.5.6. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales . . . 176
4.6. Aplicaciones para los polinomios ortogonales . . . 177
4.6.1. Interpolación polinomial de puntos experimentales . . . 177
4.6.2. Cuadratura e integración de funciones . . . 179
4.6.3. Ejemplos . . . 183
4.6.4. Practicando con Maxima . . . 184
4.6.5. Ejercicios . . . 184

5. Ecuaciones diferenciales ordinarias **186**
5.1. Motivación, origen y conceptos básicos . . . 187
5.1.1. Un ejemplo emblemático . . . 187
5.1.2. Ejemplos de algunas ecuaciones diferenciales . . . 192
5.1.3. De ecuaciones y ecuaciones diferenciales . . . 193
5.1.4. Sistema de ecuaciones diferenciales . . . 193
5.1.5. Orden y linealidad . . . 194
5.1.6. Ejemplos . . . 194
5.1.7. Practicando con Maxima . . . 194
5.1.8. Ejercicios . . . 194
5.2. Sobre las soluciones . . . 195
5.2.1. Soluciones explícitas e implícitas . . . 195
5.2.2. Soluciones generales y particulares . . . 196
5.2.3. Familia de soluciones $n-$paramétricas . . . 197
5.2.4. Solución particular, valores iniciales y valores de contorno . . . 197

Borrador Preliminar

5.2.5. Ejemplos . . . 198
5.2.6. Practicando con Maxima . . . 198
5.2.7. Ejercicios . . . 198

6. Ecuaciones diferenciales de orden 1 **199**
6.1. Soluciones analíticas . . . 200
6.1.1. Métodos elementales de integración . . . 200
6.1.2. Ecuaciones diferenciales separables . . . 202
6.1.3. Variaciones sobre separabilidad . . . 203
6.1.4. Ecuaciones diferenciales no separables . . . 204
6.1.5. Método de las isoclinas . . . 206
6.1.6. Ecuaciones diferenciales homogéneas . . . 207
6.1.7. Ecuaciones isóbaras . . . 210
6.1.8. Ecuaciones diferenciales exactas . . . 210
6.1.9. Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1 . . . 213
6.1.10. Ecuaciones diferenciales no lineales y el factor integrador . . . 214
6.1.11. Ecuación de Bernoulli . . . 216
6.1.12. Ecuación de Riccati . . . 217
6.1.13. Un tipo muy especial de ecuación diferencial no lineal . . . 219
6.1.14. Solución paramétrica: ecuaciones no resueltas respecto a la derivada . . . 220
6.1.15. El método de las envolventes . . . 223
6.1.16. Ejemplos . . . 225
6.1.17. Practicando con Maxima . . . 231
6.1.18. Ejercicios . . . 231
6.2. Soluciones numéricas . . . 233
6.2.1. Las ideas generales . . . 233
6.2.2. Métodos y su clasificación . . . 234
6.2.3. La idea de la integración y los métodos . . . 235
6.2.4. El método de Euler y el problema de valores iniciales . . . 236
6.2.5. Los métodos de Runge-Kutta . . . 236
6.2.6. Métodos multipaso . . . 239
6.2.7. Control del paso . . . 242
6.2.8. Ejemplos . . . 244
6.2.9. Practicando con Maxima . . . 244
6.2.10. Ejercicios . . . 244
6.3. Algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden . . . 244
6.3.1. Ley de Malthus y el decaimiento radioactivo . . . 244
6.3.2. La ecuación logística o ley de Verhulst . . . 245
6.3.3. La Ley de enfriamiento de Newton . . . 246
6.3.4. Interés compuesto. . . . 247
6.3.5. Mecánica elemental . . . 249
6.3.6. Movimientos con aceleración constante . . . 249
6.3.7. Modelado de concentraciones de soluciones . . . 253
6.3.8. Ejemplos . . . 255
6.3.9. Practicando con Maxima . . . 255
6.3.10. Ejercicios . . . 255

Borrador Preliminar

7. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor a 1 **256**
7.1. Lineales homogéneas con coeficientes constantes . . . 258
7.1.1. Las raíces de la ecuación característica son todas diferentes . . . 260
7.1.2. Las raíces de la ecuación característica se repiten . . . 260
7.1.3. Las raíces de la ecuación característica son números complejos . . . 261
7.1.4. Ejemplos . . . 261
7.1.5. Practicando con Maxima . . . 262
7.1.6. Ejercicios . . . 262
7.2. Lineales no homogéneas con coeficientes constantes . . . 262
7.2.1. El wronskiano . . . 263
7.2.2. El método de los coeficientes indeterminados . . . 264
7.2.3. Método de la variación de parámetros . . . 268
7.2.4. Ejemplos . . . 270
7.2.5. Practicando con Maxima . . . 274
7.2.6. Ejercicios . . . 274
7.3. Lineales no homogéneas con coeficientes no constantes . . . 274
7.3.1. Método de reducción del orden . . . 274
7.3.2. La ecuación de Euler . . . 276
7.3.3. Ejemplos . . . 279
7.3.4. Practicando con Maxima . . . 279
7.3.5. Ejercicios . . . 279
7.4. El operador diferencial y las ecuaciones diferenciales . . . 281
7.4.1. El operador diferencial . . . 281
7.4.2. Solución de ecuaciones diferenciales lineales con el operador polinomial . . . 283
7.4.3. El operador inverso . . . 284
7.4.4. El operador polinomial inverso y fracciones parciales . . . 285
7.4.5. Ejemplos . . . 286
7.4.6. Practicando con Maxima . . . 288
7.4.7. Ejercicios . . . 288
7.5. Ecuaciones diferenciales y las transformadas de Laplace . . . 288
7.5.1. Algunas definiciones previas . . . 288
7.5.2. Transformada de Laplace . . . 289
7.5.3. Transformadas de Laplace y las ecuaciones diferenciales lineales . . . 289
7.5.4. Integral de Convolución . . . 292
7.5.5. Ejemplos . . . 293
7.5.6. Practicando con Maxima . . . 296
7.5.7. Ejercicios . . . 296
7.6. Algunas aplicaciones de las ecuaciones de orden superior . . . 296
7.6.1. Mecánica y Electricidad . . . 296
7.6.2. Oscilaciones libres . . . 297
7.6.3. Oscilaciones libres amortiguadas . . . 298
7.6.4. Oscilaciones forzadas . . . 300
7.6.5. Oscilaciones forzadas amortiguadas . . . 302
7.6.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio . . . 305
7.6.7. Péndulo simple con desplazamiento finito . . . 306
7.6.8. Digresión elíptica . . . 312
7.6.9. ¿Cuán buena es la aproximación lineal? . . . 315
7.6.10. El péndulo físico: integración numérica . . . 316

Borrador Preliminar

7.6.11. Ejemplos . . . 318
7.6.12. Practicando con Maxima . . . 318
7.6.13. Ejercicios . . . 318

8. Sistemas de ecuaciones diferenciales **320**
8.1. Algunos comentarios iniciales . . . 321
8.1.1. Notación matricial . . . 323
8.1.2. Sistemas lineales homogéneos . . . 323
8.1.3. Sistemas lineales inhomogéneos . . . 327
8.1.4. Ejemplos . . . 329
8.1.5. Practicando con Maxima . . . 329
8.1.6. Ejercicios . . . 329
8.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales y el uso de operadores . . . 330
8.2.1. Ejemplos . . . 336
8.2.2. Practicando con Maxima . . . 336
8.2.3. Ejercicios . . . 336
8.3. Sistemas y la transformada de Laplace . . . 337
8.3.1. Ejemplos . . . 339
8.3.2. Practicando con Maxima . . . 339
8.3.3. Ejercicios . . . 339
8.4. Análisis cualitativo de ecuaciones deferenciales ordinarias . . . 339
8.4.1. Caso autovalores distintos y positivos: $r_1 > r_2 > 0$ . . . 340

9. Métodos de soluciones por series **342**
9.1. Otra vez las series . . . 343
9.1.1. Método de Diferenciaciones Sucesiva . . . 346
9.1.2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados . . . 347
9.1.3. Ejemplos . . . 348
9.1.4. Practicando con Maxima . . . 349
9.1.5. Ejercicios . . . 349
9.2. Los Puntos y las Estrategias . . . 349
9.2.1. Ecuaciones e intervalos en puntos ordinarios . . . 350
9.2.2. Ejemplos . . . 353
9.2.3. Practicando con Maxima . . . 353
9.2.4. Ejercicios . . . 353
9.3. El Método de Frobenius . . . 353
9.3.1. Descripción General . . . 353
9.3.2. Caso 1: $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero. . . . 356
9.3.3. Caso 2: $m_1 = m_2 = m$ . . . 358
9.3.4. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$, con N entero . . . 363
9.3.5. Ejemplos . . . 366
9.3.6. Practicando con Maxima . . . 366
9.3.7. Ejercicios . . . 366
9.4. Revisitando a Bessel . . . 367
9.4.1. Frobenius y la Ecuación de Bessel . . . 368
9.4.2. Otras formas de la ecuación de Bessel . . . 370
9.4.3. Relaciones de recurrencia: . . . 370
9.4.4. Funciones de Bessel y las funciones elementales . . . 372

Borrador Preliminar

9.4.5. Reflexión . . . 373
9.4.6. Función generatriz . . . 373
9.4.7. Representación integral para las funciones de Bessel . . . 373
9.4.8. Ortogonalidad de las funciones de Bessel . . . 374
9.4.9. Ejemplos . . . 375
9.4.10. Practicando con Maxima . . . 375
9.4.11. Ejercicios . . . 375

10. Funciones Especiales **376**
10.1. Función Gamma . . . 377
10.1.1. Ejemplos . . . 381
10.1.2. Practicando con Maxima . . . 381
10.1.3. Ejercicios . . . 381
10.2. La Funciones Digamma y Poligamma . . . 381
10.2.1. Ejemplos . . . 382
10.2.2. Practicando con Maxima . . . 382
10.2.3. Ejercicios . . . 382
10.3. La aproximación de Stirling . . . 382
10.4. La función Beta . . . 383
10.5. La función integral de probabilidad . . . 384
10.5.1. Ejemplos . . . 384
10.5.2. Practicando con Maxima . . . 384
10.5.3. Ejercicios . . . 384

11. El problema de Sturm-Liuoville **385**
11.1. Cálculo Operacional . . . 386
11.2. Operadores diferenciales de segundo orden . . . 387
11.3. Operadores diferenciales autoadjuntos . . . 388
11.4. El Sistema Sturm-Liouville . . . 390
11.5. Funciones de Bessel y el problema de Sturm-Liouville . . . 395
11.5.1. La serie de Fourier-Bessel . . . 395
11.5.2. La norma de las funciones de Fourier-Bessel . . . 396
11.6. Función de Green . . . 397
11.6.1. La estrategia de la función de Green . . . 397
11.6.2. Función de Green y el problema de frontera inhomogéneo . . . 398
11.6.3. Generalizando el problema inhomogéneo y la Función de Green . . . 399
11.6.4. Distribuciones y funciones de Green . . . 400
11.7. Ejemplos . . . 400
11.8. Ejercicios . . . 404

12. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales **406**
12.1. La clasificación y ecuaciones conocidas . . . 407
12.2. Coordenadas cartesianas: Un mundo cuadriculado . . . 409
12.2.1. La ecuación de Onda . . . 409
12.2.2. La ecuación de difusión . . . 418
12.2.3. La ecuación de Laplace . . . 422
12.3. Coordenadas curvilineas: Entre lo cilíndrico y esférico . . . 423
12.3.1. El Laplaciano en coordenadas curvilíneas . . . 423

Borrador Preliminar

12.3.2. La ecuación de Laplace en coordenadas polares 424
12.3.3. La ecuación de Helmholtz en coordenadas polares 427
12.3.4. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas 428
12.3.5. La ecuación de onda en coordenadas cilíndricas 428
12.3.6. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas 430

13. Apéndice **432**
13.1. Introducción a los CAS 433
13.2. Maxima: Sintaxis básica 435
13.2.1. Cálculos elementales 437
13.2.2. Bibliotecas 448
13.2.3. Maxima en modo texto 452
13.2.4. Invocando la ayuda 453
13.2.5. Ejercicios 454

Borrador Preliminar

Capítulo 1

Variable Compleja

Borrador Preliminar

1.1. Funciones de Variable Compleja

La teoría de funciones de variable compleja se dedica al estudio de funciones que están definidas en el plano de los números complejos. Estas funciones, denominadas *holomorfas*, se definen en una región abierta del plano complejo, toman valores complejos y además son diferenciables en cada punto de esta región abierta con derivadas continuas. Como veremos, el concepto de derivada de funciones en variable compleja implica un desarrollo teórico más complicado que su contraparte de funciones en variable real.

En los cursos previos de cálculo, seguramente vimos el concepto de *función analítica*: función que es equivalente a una serie de potencias (serie de Taylor) convergente, suave (existen todas las derivadas de todos los órdenes) y con infinitas derivadas. Esta noción se puede extender a cálculo en variable compleja pero con otras propiedades.

En variable compleja, las funciones infinitamente diferenciables, en una región abierta siempre son analíticas, y se denominan *funciones holomorfas*. Es decir, toda función holomorfa permite una representación en serie de potencias en algún disco abierto donde la serie converge a la función. Si la serie de potencias converge en todo el plano complejo se dice que la función es una *función entera*. Recordemos que no toda función de variable real infinitamente derivable es necesariamente analítica. En otras palabras, toda función holomorfa cumple con la definición de función analítica pero no toda función analítica es holomorfa.

El cálculo en variable compleja surge de manera natural en diferentes ramas de la matemática aplicada, la mecánica cuántica, geometría algebraica, combinatoria analítica, la teoría de números.

1.1.1. De la recta real al plano complejo

La idea de función de variable (o variables) reales puede ser extendida (continuada, le dicen también) al plano complejo. La idea es la de siempre: si en una determinada región del plano complejo a un número complejo z le corresponde un número (o varios números) complejos $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Obvio que $f(z)$ puede ser biyectiva, en cuyo caso tendremos que a z le estará asociado uno y solo un número complejo $w = f(z)$. Es claro también que siempre se podrá expresar

$$f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)\,, \tag{1.1}$$

con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria. Es decir, toda función en variable compleja

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

se puede descomponer en dos partes

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Esta representación tiene una interpretación adicional. Como representamos un número complejo en el plano $0xy$ como $z = x + iy$, pero $w = f(z)$ también podrá ser representada como un punto en el plano $0uv$. Entonces, desde el punto de vista geométrico una función de variable compleja podrá ser entendida como una ley de transformación entre pares de puntos (x, y) del plano $0xy$ del argumento z y los puntos (u, v) del plano $0uv$ de valor w.

1.1.2. Continuidad en el plano complejo

Podemos también extender el concepto de continuidad de una función de variable real a una función de variable compleja. Esto es: diremos que una función compleja[1] $w = f(z)$ será continua en z_0 si para un

[1] A partir de ahora y por razones de simplicidad llamaremos a $f(z)$ *función compleja* en vez de *función de variable compleja*.

Borrador Preliminar

$\epsilon > 0$ siempre existe un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ tan pequeño como uno quiera y siempre puede encontrar $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. La otra manera de verlo es la estándar: si existe el límite cuando $z \to z_0$, es decir,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)\,. \tag{1.2}$$

En este punto se pueden resaltar que los límites (y con ello la idea de continuidad) en el plano complejo hereda las sutilezas y dificultades de los límites y continuidades de las funciones en varias variables. En segundo lugar cabe señalar que la diferencia con las funciones de variable real radica en que los ϵ y δ son radios de un círculo centrado en $f(z_0)$ y z_0, respectivamente. Adicionalmente, para el caso de las funciones complejas no tiene sentido los límites por la derecha y por la izquierda que planteábamos para funciones de variable real. También es obvio que si

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\,, \quad \text{con } u(x,y) \text{ y } v(x,y) \text{ continuas en } (x_0, y_0) \tag{1.3}$$

entonces $f(z)$ será continua en $z_0 = x_0 + iy_0$.

1.1.3. Diferenciabilidad de funciones complejas

La dificultad que subyace en esta definición es equivalente a las dificultades que enfrentamos en las definiciones de derivadas para funciones de varias variables. Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región $\mathcal{S}$ será diferenciable en esa región si la derivada

$$\begin{aligned} f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}\,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

existe y es única.

Una vez más, al igual que en el caso de funciones de varias variables, el concepto de límite (y con éste el de derivada), debe existir sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, si $\Delta z \to 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \to 0$, entonces

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y = 0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x + \Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x}\,, \\ f'(z)_{\Delta x = 0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y + \Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y}\,. \end{aligned}$$

1.1.4. Funciones analíticas y condiciones de Cauchy-Riemann

Diremos que una función es analítica (holomorfa o regular) en una región $\mathcal{S}$, si es univaluada y derivable en todos los puntos dentro de esa misma región $\mathcal{S}$. Puede darse el caso de que sea analítica en la región excepto en un número finito de puntos (donde es singular). Entonces diremos que es es analítica (holomorfa o regular) en $\mathcal{S}$, excepto en esos puntos.

Una función se denomina una función entera si ésta es analítica en todos los puntos del plano finito, como por ejemplo, los polinomios.

A partir de dos estrategias (muy particulares) de aproximación a $\Delta z \to 0$ tales como $\Delta y = 0; \Delta x \to 0$ o $\Delta x = 0; \Delta y \to 0$, podremos encontrar un criterio para identificar dónde, una función compleja, $f(z)$, es analítica. Esto es

Borrador Preliminar

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)]+i\,[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta x=0} &= -i\lim_{\Delta y\to 0} \frac{[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)]+i\,[v(x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\left[-i\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y}+\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y}\right], \end{aligned}$$

y ambas tienen que coincidir. Con lo cual

$$f'(z)_{\Delta y=0}=f'(z)_{\Delta x=0} \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta y\to 0}\left[-i\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y}+\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y}\right],$$

y equivalentemente

$$f'(z)_{\Delta y=0}=f'(z)_{\Delta x=0} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}. \tag{1.5}$$

Con ello hemos encontrado las condiciones *necesarias* para que una función compleja sea analítica, vale decir: Las condiciones de Cauchy Riemann

$$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad\wedge\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.} \tag{1.6}$$

Ahora tendremos un criterio más expedito para determinar que una función, como: $f(z)=2x+iy$ no es analítica.

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y)=2x \\ v(x,y)=y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2\neq 1=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad\wedge\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=0=0=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

Para el caso $f(z)=x^2-y^2+2ixy$ se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y)=x^2-y^2 \\ v(x,y)=2xy \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad\wedge\quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=2y=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

pero como esas condiciones son *necesarias* porque para encontrarlas hemos seleccionado un par de rutas muy específicas: $\Delta y=0;\Delta x\to 0$ y $\Delta x=0;\Delta y\to 0$, se requiere exigir algunas condiciones adicionales. Sin demostración (puede consultar para detalles y demostraciones las referencias indicadas) exigiremos como condición necesaria y suficiente para que una función sea analítica que las cuatro derivadas parciales para $u(x,y)$ y $v(x,y)$, existan, sean continuas en la región $\mathcal{S}$ y que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. El punto crucial (adicional) es que las derivadas sean continuas.

Borrador Preliminar

1.1.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann

Las funciones analíticas satisfacen algunas propiedades adicionales consecuencias de las condiciones de Cauchy-Riemann.

La primera es que dada una función compleja genérica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, si $f(z)$ es analítica, $u(x,y)$ y $v(x,y)$ serán funciones armónicas conjugadas:

$$\nabla^2 u(x,y) = \nabla^2 v(x,y) = 0\,,$$

es decir, satisfacen la ecuación de Laplace. Si derivamos apropiadamente las ecuaciones (1.6) respecto a una y otra variable encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0\,,$$

y equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0\,,$$

por lo tanto, hemos demostrado que las partes reales e imaginarias de una función analítica son necesariamente armónicas. La importancia de este resultado radica, en primer lugar, que no son arbitrarias las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ con las cuales construimos $f(z)$. Ambas deben satisfacer la ecuación de Laplace.

En segundo lugar $u(x,y)$ y $v(x,y)$ están ligadas por las condiciones de Cauchy-Riemann, y esto implica que al conocer una de las funciones armónicas conjugadas, siempre es posible encontrar (salvo una constante de integración) la otra.

Para ilustrar lo anterior, supongamos la siguiente función armónica conjugada $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ correspondiente a la parte real de $f(z)$. Es fácil comprobar que es una función armónica, ahora construyamos la parte imaginaria $v(x,y)$. Esto es

$$u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; v(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + \phi(x)\,,$$

entonces

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \phi(x) = C \;\Rightarrow\; v(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + C\,.$$

La segunda curiosidad, consecuencia de las ecuaciones (1.6), es que para una función compleja genérica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, en la cual además se cumple que $u(x,y) = \text{const}$ y $v(x,y) = \text{const}$, entonces se cumplirá que: $\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0$.

$$\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}\right] \cdot \left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}\right] = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\,,$$

y por obra de las condiciones de Cauchy-Riemann es inmediato comprobar que se anulan

$$\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0\,.$$

Es decir, $u(x,y)$ =const y $v(x,y)$ =const, corresponden a *trayectorias mutuamente ortogonales*. Esta "curiosidad" nos permite construir sistemas de coordenadas alternativos en el plano complejo y, sobre todo

Borrador Preliminar

saber como establecer su transformación a otros planos complejos. Esto se representa en la Figura 1.2 y será considerado en la sección 1.2.3 de la página 26.

La tercera curiosidad es un resultado el cual, siendo una formalidad, nos indica que las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^*. O dicho de otra manera: z y z^* son variables independientes. Para demostrar esto procedemos primero a convencernos que si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$. Sin detenernos a pensar en el significado de la derivada respecto a la variable conjugada, recordamos que operacionalmente

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{z+z^*}{2} \\ y &= \frac{z-z^*}{2i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] - \frac{1}{2i}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right],$$

arreglando términos tendremos que es inmediato comprobar que se anula si se cumplen las condiciones (1.6)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right] + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] = 0 \;\Rightarrow\; f(z) \not\Leftrightarrow f(x,y) = f\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right),$$

en otras palabras, la funciones analíticas son verdaderas funciones de variable complejas y no, como pudiera parecer, de dos variables reales interpuestas.

1.1.6. Ejemplos

1. Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$$

se puede probar que independientemente de la ruta en el plano complejo ($\Delta y = 0\,; \Delta x \to 0$ o viceversa) resulta:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 2x + i2y\,,$$

que es más o menos obvio si hubiéramos notado que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$, con lo cual

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z\,.$$

2. Ahora bien, las cosas no siempre son así. Si consideramos $f(z) = 2x + iy$ es rápido comprobar que no es diferenciable en el plano complejo, ya que

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{2x + 2\Delta x + i(y+\Delta y) - 2x - iy}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{2\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\,,$$

el cual, claramente no coincide si las direcciones de aproximación a $z_0 = x_0 + iy_0$ son distintas, vale decir, por ejemplo: $\Delta y = 0; \Delta x \to 0$ o $\Delta x = 0; \Delta y \to 0$.

Como heredamos todas las ideas y métodos del campo real se cumplen todas las reglas de la derivación para funciones reales. Vale decir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f(z)+g(z)) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f(z)g(z)) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}g(z) + f(z)\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f(g(z)) = \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}\,.$$

Borrador Preliminar

3. Las potencias de enteros positivos: $1, z, z^2, \ldots$ son analíticos en todo el plano complejo, al igual que los polinomios como:
$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \,,$$
donde: $c_0, c_1 ... c_n$ son constantes complejas.
Para la función racional
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \,,$$
tenemos que $f(z)$ será analítica si $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas, salvo en los puntos donde $h(z) = 0$.

4. Dada la función
$$f(z) = \mathrm{e}^x \left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$$
podemos ver que:
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y) \,, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y) \,, \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y) \,, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y) \,,$$
por lo que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo tanto $f(z)$ es analítica para todo z.

5. Si tenemos una función $f(z)$ analítica en un dominio D, y si además $|f(z)| = C$ constante en D, entonces $f(z)$ es constante.
Como asumimos que $|f(z)|^2 = |u + iv|^2 = u^2 + b^2 = C^2$, entonces, derivando
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \,.$$
Como $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, resulta:
$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad u\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \,.$$
que podemos convertir en:
$$\left(u^2 + v^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \left(u^2 + v^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \,.$$
Podemos ver que si $C^2 = u^2 + b^2 = 0$ entonces $u = v = f = 0$. Si por el contrario $C^2 = u^2 + b^2 \neq 0$, entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ y por las condiciones de Cauchy-Riemann también se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, es decir, u y v son constantes, por lo que f es constante.

6. Si utilizamos la forma polar para $z = r\left(cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)\right)$ entonces $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ y las condiciones de Cauchy-Riemann quedan de la forma
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \,.$$

Borrador Preliminar

1.1.7. Practicando con Maxima

El programa de manipulación simbólica **Maxima** está diseñado para realizar una gran cantidad de cálculos algebraicos y numéricos. Es indispensable ir al apéndice 13.1 para familiarizarnos con la sintaxis básica del programa.

Maxima es una potente calculadora y maneja números de diferentes tipos: enteros, racionales, irracionales, complejos y números con decimales (punto flotante). El número complejo $i = \sqrt{-1}$ se introduce como $\%i$.

(% i1) %i^2;

$$-1 \tag{\% o1}$$

(% i2) (x + %i*y)*(u - %i*v);

$$(u - iv)\ (iy + x) \tag{\% o2}$$

(% i3) expand(%);

$$vy + iuy - ivx + ux \tag{\% o3}$$

(% i4) gfactor(%);

$$(v + iu)\ (y - ix) \tag{\% o4}$$

(% i5) rectform(exp(1 + %i));

$$ei\sin(1) + e\cos(1) \tag{\% o5}$$

(% i6) gfactor(%);

$$ei\,(\sin(1) - i\cos(1)) \tag{\% o6}$$

En variable compleja la función logaritmo se define en el intervalo (π, -π] (El logaritmo principal)

(% i7) rectform(log(1 + %i));

$$\frac{\log(2)}{2} + \frac{i\pi}{4} \tag{\% o7}$$

El valor absoluto

(% i8) cabs(x + %i*y);

$$\sqrt{y^2 + x^2} \tag{\% o8}$$

La forma polar de

(% i9) polarform(x + %i*y);

$$\sqrt{y^2 + x^2}\, e^{i\,\mathrm{atan2}(y,x)} \tag{\% o9}$$

Borrador Preliminar

(% i10) exponentialize(cos(1 + %i));

$$\frac{e^{i(i+1)} + e^{-i(i+1)}}{2} \tag{\% o10}$$

(% i11) demoivre(exp(x + %i*y));

$$e^{x}\ (i\sin(y) + \cos(y)) \tag{\% o11}$$

(% i12) f(z):=z*exp(1/z);

$$\mathrm{f}(z) := z\exp\left(\frac{1}{z}\right) \tag{\% o12}$$

(% i14) realpart(f(z)); imagpart(f(z));

$$z\,e^{\frac{1}{z}} \tag{\% o13}$$

$$0 \tag{\% o14}$$

(% i16) u:realpart(f(x + %i*y)); v:imagpart(f(x + %i*y));

$$y\,e^{\frac{x}{y^2+x^2}}\sin\left(\frac{y}{y^2+x^2}\right) + x\,e^{\frac{x}{y^2+x^2}}\cos\left(\frac{y}{y^2+x^2}\right) \tag{u}$$

$$y\,e^{\frac{x}{y^2+x^2}}\cos\left(\frac{y}{y^2+x^2}\right) - x\,e^{\frac{x}{y^2+x^2}}\sin\left(\frac{y}{y^2+x^2}\right) \tag{v}$$

(% i17) 'diff(f(z),z)=diff(f(z),z) ;

$$\frac{d}{dz}\left(z\,e^{\frac{1}{z}}\right) = e^{\frac{1}{z}} - \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} \tag{\% o17}$$

Las condiciones Cauchy-Riemann

(% i18) diff(u,x) - diff(v,y)=0, ratsimp;

$$0 = 0 \tag{\% o18}$$

(% i19) diff(v,x) + diff(u,y)=0, ratsimp;

$$0 = 0 \tag{\% o19}$$

Dada la siguiente función

(% i20) u:(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2;

$$\frac{x^2 - y^2}{\left(y^2 + x^2\right)^2} \tag{u}$$

Borrador Preliminar

Revisemos para ver si es armónica

(% i21) u_xx: diff (u,x,2),factor;

$$\frac{6\left(y^2-2xy-x^2\right)\left(y^2+2xy-x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^4} \tag{u_ xx}$$

(% i22) u_yy: diff (u,y,2),factor;

$$-\frac{6\left(y^2-2xy-x^2\right)\left(y^2+2xy-x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^4} \tag{u_ yy}$$

(% i23) u_xx + u_yy;

$$0 \tag{\% o23}$$

Por lo tanto podemos proceder a encontrar la función $v(x,y)$

(% i24) u_x: diff(u,x),factor;

$$\frac{2x\left(3y^2-x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^3} \tag{u_ x}$$

(% i25) u_y:diff(u,y),factor;

$$\frac{2y\left(y^2-3x^2\right)}{\left(y^2+x^2\right)^3} \tag{u_ y}$$

(% i26) Int:integrate(u_x,y)$
(% i27) ϕ: -integrate(u_y,x) - integrate(diff(Int,x),x), factor;

$$0 \tag{ϕ}$$

(% i28) v: integrate(u_x,y) + ϕ, factor;

$$-\frac{2xy}{\left(y^2+x^2\right)^2} \tag{v}$$

Revisamos que satisface las condiciones de Cauchy-Riemann

(% i29) diff(u,x) - diff(v,y), factor;

$$0 \tag{\% o29}$$

(% i30) diff(v,x) + diff(u,y), factor;

$$0 \tag{\% o30}$$

(% i31) kill(all)$

Borrador Preliminar

1.1.8. Ejercicios

1. Investigar los dominios del plano complejo para los cuales las funciones $f(z) = |x| - i|y|$ y $f(z) = |z|^2 = zz^*$ son analíticas.

2. Determine la función $f(z)$ analítica cuya parte imaginaria es $[y\cos(y) + x\text{sen}(z)]e^x$

3. Muestre que si $f(z)$ es analítica entonces $f^*(z^*)$ también lo es.

4. Encuentre las derivadas

   a) $(z-i)/(z+i)$ en i
   b) $(z-4i)^8$ en $3+4i$
   c) $(1{,}5z+2i)/(3iz-4)$ para todo z.
   d) $i(1-z)^n$ en 0
   e) $(iz^3+3z^2)^3$ en $2i$
   f) $z^3/(z+i)^3$ en i

   Cuales de las siguientes funciones son analíticas

   a) $f(z) = izz^*$
   b) $f(z) = \mathrm{e}^{-2x}\left(cos(2y) - i\text{sen}(2y)\right)$
   c) $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(cos(y) - i\text{sen}(y)\right)$
   d) $f(z) = \text{Re}\left(z^2\right) - i\ \text{Im}\left(z^2\right)$
   e) $f(z) = 1/\left(z - z^5\right)$
   f) $f(z) = \ln|z| + i\ \text{Arg}(z)$
   g) $f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\ \text{sen}(x)\text{senh}(y)$

5. Cuales de las siguientes funciones son armónicas y encuentre la función analítica correspondiente si es el caso.

   a) $u = x^2 + y^2$
   b) $u = \text{sen}(x)\cosh(y)$
   c) $v = \mathrm{e}^x\text{sen}(2y)$
   d) $v = x/\left(x^2+y^2\right)$

6. Para que valores de a y b las siguientes funciones son armónicas. Encuentre la conjugada

   a) $u = \mathrm{e}^{\pi x}\cos(ay)$
   b) $u = \cos(ax)\cosh(2y)$
   c) $u = \cosh(ax)\cos(y)$
   d) $u = ax^3 + bxy$

7. Escriba un programa para graficar lineas equipotenciales $u =$ constante de una función armónica y de su conjugada v en los mismos ejes. Aplique el programa a las siguientes funciones:

   a) $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$
   b) $u = x^3 - 3xy^2$ y $v = 3x^2y - y^3$
   c) $u = \mathrm{e}^x\cos(y)$ y $v = \mathrm{e}^x\text{sen}(y)$

Borrador Preliminar

1.2. Puntos, líneas de corte y ceros de funciones complejas

Hemos mencionamos anteriormente, que los números complejos se representan por su forma polar en dos ejes coordenados. Ese diagrama bidimensional lo llamamos Diagrama de Argand. Como en el caso del análisis de funciones reales, existen funciones *multivaluadas*, a las cuales les debemos imponer ciertas condiciones para convertirlas en *univaluadas*; si una función es multivaluada, automáticamente deja de ser analítica. El objetivo de esta sección es identificar ese conjunto de condiciones para detectar en cuál región del plano complejo una determinada función es univaluada.

Recordemos que una función será univaluada si para cada punto z del plano complejo existe uno y solo un punto imagen w en el plano complejo de llegada. El mapeo de dirá que es uniforme o univaluado. Si por le contrario, para cada valor de la variable z existen más de un valor de la variable w se dirá que el mapeo es multivaluado. Tal vez el ejemplo más sobresaliente de funciones multivaluadas es la función logaritmo.

También debemos tener en cuenta la topología del plano complejo, aunque es similar a $\mathbb{R}^2$ existen diferencias. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces su módulo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ coincide con el modulo de un vector del plano complejo. Por lo tanto, si un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es dado y $r > 0$, se puede definir una *bola abierta* centrada en z_0 y radio r como el conjunto

$$B_a(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

y una bola cerrada al conjunto

$$B_c(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}.$$

Esto en equivalencia a los intervalos cerrados y abiertos en $\mathbb{R}$.

Para los números complejos también disponemos de una forma para indicar el infinito, es decir, números complejos con módulo arbitrariamente grande. Esto es el equivalente al $\pm\infty$ de la recta real, pero requiere un poco más de esfuerzo su visualización. Para hacer esta identificación se recurre a la definición de una proyección estereogáfica entre el plano complejo y la *Esfera de Riemann*.

La Esfera de Riemann se define

$$\mathbb{S}^2 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_1^2 + x_3^2 = 1,$$

Con $N = (0, 0, 1)$ su polo norte y $S = (0, 0, -1)$ su polo sur.

Denominaremos a $\mathbb{C}_\infty \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el plano complejo ampliado y definiremos la siguiente aplicación estereográfica:

$$\mathcal{P} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathcal{P}(x + iy) = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \quad \text{con} \quad x + iy \in \mathbb{C} \\ \mathcal{P}(\infty) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Tenemos entonces una recta de $\mathbb{R}^3$ que corta a la esfera $\mathbb{S}^2$ y pasa por los puntos $(0, 0, 1)$ y $(x, y, 0)$, identificando el infinito del plano complejo con el polo norte de la esfera de esfera de Riemann. Esto significa que una bola abierta centrada en ∞ es

$$B_a(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}.$$

1.2.1. Puntos y líneas de corte

Consideremos la función $f(z) = z^{1/2}$ y estudiemos los cambios que pueden ocurrir en w cuando la variable z cambia por diferentes trayectorias, por ejemplo, siguiendo distintos circuitos cerrados $0 \leq \theta < 2\pi$ a través del "vector" z.

$$f(z) = z^{1/2} \equiv r^{1/2} e^{i\theta/2} \;\to\; f(z) = r^{1/2} e^{i\theta/2} \;\to\; r^{1/2} e^{i(\theta+2\pi)/2} = -r^{1/2} e^{i\theta/2}.$$

Borrador Preliminar

Visto así nos tendremos que preguntar ahora cuál fue el circuito que recorrimos con z, y dependiendo de ese circuito identificaremos algunos puntos con características distintas. Si el circuito cerrado descrito por z **no** contiene el punto $z = 0$, la función $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor original (ver figura 1.1 cuadrante superior izquierdo contorno $\mathcal{C}_1$). Pero sí, como se aprecia en la misma figura 1.1, el circuito cerrado $\mathcal{C}_2$ **si** contiene el punto $z = 0$ entonces la función no retoma su valor original, $f(z) \to -f(z)$. También es claro que si el circuito cerrado lo recorremos dos veces $\theta \to 4\pi$ entonces $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor inicial.

Podemos ver la segunda situación con más detalle: la del camino $\mathcal{C}_2$, que podemos considerar como el círculo $re^{i\theta}$ centrado en $z = 0$

- Consideremos que originalmente un punto sobre el círculo es z_1. Es decir que

$$f(z_1) = w_1 = r^{1/2}e^{i\theta_1/2}\,.$$

- Si completamos un círculo completo, en sentido antihorario, para volver al mismo punto z_1 le que hemos hecho es un cambio en el argumento $\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$. Por lo tanto

$$f(z_1) = w_2 = r^{1/2}e^{i(\theta_1+2\pi)/2} = w_1 e^{i\pi} = -w_1\,.$$

- Si hacemos dos recorridos completos para volver a z_1, es decir, $\theta_1 \to \theta_1 + 4\pi$ resulta que

$$f(z_1) = w_3 = r^{1/2}e^{i(\theta_1+4\pi)/2} = w_1 e^{i2\pi} = w_1\,.$$

  y recuperamos el valor inicial.

Hemos notado el hecho de obtener diferentes valores para w. Cada uno de estos casos conforma una *rama* de la función, es decir, cada rama de una función multivaluada es una función univaluada. En nuestro ejemplo:

$$w = f(z) = z^{1/2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} w_1 = f_1(z) = r^{1/2}e^{i\theta/2} & 0 \leqslant \theta < 2\pi \\ \\ w_2 = f_2(z) = r^{1/2}e^{i\theta/2} & 2\pi \leqslant \theta < 4\pi \end{cases}$$

En términos generales, si existe un punto z_0 que admite un entorno reducido y éste se encuentra contenido en el dominio de la función, y si además existe una curva simple y cerrada $\mathcal{C}$ que pueda contener un entorno reducido (arbitrariamente pequeño) de z_0, entonces se dice que z_0 es un *punto de ramificación* de la función si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función. Si a medida que se dan n vueltas alrededor de z_0 llevan a cada rama sobre sí misma, se dice que z_0 es un punto de ramificación de orden $n - 1$. Esto significa que para la función $f(z) = z^{1/2}$, el punto $z_0 = 0$ es un punto de ramificación de orden 1.

Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado en el diagrama de Argand y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte* y las *líneas de corte*, *corte ramal* (o simplemente *cortes*) serán aquellas líneas que separan regiones en las cuales una determinada función es univaluada. Es claro que los puntos de corte son puntos singulares, en los cuales la función deja de ser analítica y existirán si θ toma, valores $0 \leq \theta \leq 2n\pi$. Es decir, puede dar n vueltas.

Estas lineas conectan dos y solo dos puntos de ramificación. En el caso de nuestra función $f(z) = z^{1/2}$, la línea de corte será cualquiera que comience en $z = 0$ y continúe para $|z| \to \infty$. Por simplicidad es costumbre tomar las líneas de corte a lo largo de los ejes reales o complejos. De este modo aparece ilustrado en la figura 1.1 cuadrante superior derecho la línea de corte que sigue el eje positivo de las x.

La situación se torna más interesante cuando estas definiciones se analizan a la luz de funciones con más de un punto de corte.

Borrador Preliminar

Figura 1.1: Los distintos contornos que identifican los puntos de corte

Consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{z^2+1} \;\Rightarrow\; f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})\,(r_2 e^{i\theta_2})} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\,.$$

Analicemos entonces, varios contornos en el plano de Argand. Otra vez, la figura 1.1 ilustra en el cuadrante inferior los distintos contornos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$.

Tal y como se aprecia en esa figura, se dan cuatro casos:

1. Contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de corte, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ retoma su valor inicial luego de recorrer el $\mathcal{C}_1$.

2. Contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de corte, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.

3. Contorno $\mathcal{C}_3$ incluye $z = -i$ como punto de corte, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.

4. Contorno $\mathcal{C}_4$ incluye ambos como punto de corte,$z = i$ y $z = -i$, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to f(z)$ retoma su valor.

De este modo para construir los cortes que impidan que nuestra función sea multivaluada podremos seleccionar:

$$z_{\text{corte}} > i \quad \text{y} \quad z_{\text{corte}} < -i\,, \quad \text{o} \quad -i < z_{\text{corte}} < i\,.$$

1.2.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas

Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica se denomina un punto singular. Estos puntos pueden ser:

Borrador Preliminar

- **Singularidades aisladas:** sí una función es analítica en todo el entorno de un punto z_0, excepto en el propio punto z_0, entonces se dice que el punto z_0 es una singularidad aislada o un punto singular de la función $f(z)$.

  Por ejemplo, para la función $f(z) = 1/z$, sabemos que es analítica en todo punto excepto en $z = 0$. La única singularidad de la función está en el punto $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aislada.

- **Singularidades no aisladas:** Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces se dice que z_0 es una singularidad no aislada. Es decir, una singularidad no aislada de una función es un punto límite del conjunto de sus singularidades.

Clasificación de las singularidades aisladas

1. Un punto singular aislado z_0 de una función f se denomina removible o evitable si:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \exists\,.$$

   Observemos que:

   a) la función f puede no estar definida en z_0 y por esta razón la función no es analítica en z_0.

   b) la función puede estar definida en z_0 pero de valor diferente al $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Con lo cual la función no es continua en z_0 y por lo tanto no es analítica en z_0.

   c) la función puede estar definida en z_0 y su valor igual al del $\lim_{z\to z_0} f(z)$. En este caso la función no es singular en z_0.

   Por lo tanto, si f tiene una singularidad removible en z_0 entonces una de las posibilidades (a) o (b) debe ser la causa de que la función no sea analítica o regular en z_0.

   Si una función g es igual a f en todos los puntos, excepto en z_0, y

$$g(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)\,,$$

   entonces g no es singular en z_0, esto significa que la singularidad de f puede ser removida mediante la redefinición de la función f en z_0.

2. Un punto singular aislado z_0 de una función f que no esta definida en z_0 se llama un polo de orden n de f si:

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0\,,$$

   donde n es un número entero positivo. Un polo de orden 1 se denomina un polo simple.

3. Un punto singular aislado de una función f recibe el nombre de *singularidad esencial* de f si

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \quad \nexists\,,$$

   para ningún entero positivo de n.

Las singularidades removibles se caracterizan porque el valor de $f(z) \to 0/0$ cuando $z \to z_0$. El caso más emblemático es la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \;\Rightarrow\; f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\cdots\right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\cdots\right) \;\Rightarrow\; \lim_{z\to 0} f(z) = 1$$

Borrador Preliminar

con lo cual, luego de desarrollar por Taylor la función $\operatorname{sen}(z)$, se ha removido la singularidad aparente.

El comportamiento de una función compleja en infinito (o cuando tiende a infinito), vale decir, cuando $z \to \infty$ no está tan bien definida como en los casos de funciones de variable real. Es claro como una cantidad real, digamos $|f(z)|$ o $|z|$ tiende a infinito, pero z es una cantidad "bidimensional" y, en principio, existirían varias formas de tender a infinito. Para precisar el comportamiento de una función compleja de variable compleja en infinito, hacemos un cambio de variable $z = 1/\xi$ y estudiamos $f(1/\xi)$ con $1/\xi \to \infty$.

De esta manera:

1. $$\lim_{z\to\infty} z(1+z^2) \equiv \lim_{\xi\to 0} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^3}\,, \quad \text{con lo cual tendrá un polo de orden 3.}$$

2. $$\lim_{z\to\infty} e^z \equiv \lim_{\xi\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\ \xi^n} \quad \text{y presenta una singularidad esencial para } z \to \infty\,.$$

Los ceros de una función compleja ($f(z_0) = 0$, entonces llamaremos z_0 un cero de $f(z)$) se clasifican al igual que los polos. Esto es

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \text{ con } n \text{ entero positivo y } g(z) \neq 0 \quad \forall\ z\,.$$

1.2.3. Transformaciones conformes

Nos interesará ahora considerar transformaciones entre planos complejos, esto es:

$$z = x + iy \ \leftrightarrow\ w = r + is \ \Rightarrow\ w = g(z) = r(x,y) + is(x,y) \ \leftrightarrow\ z = h(w) = x(r,s) + iy(r,s)$$

Es decir, transformaciones entre puntos $(x,y) \leftrightarrow (r,s)$ correspondientes a dos diagramas de Argand, de tal modo que existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados. Entonces denominaremos a este tipo de transformaciones *transformaciones conformes* si además, en todo punto z y w (excepto en aquellos en los cuales $g'(z)$ y por lo tanto $h'(w)$ son cero o infinita) cumple con:

- Curvas continuas en el plano z transforman en curvas continuas en el w.
- Los ángulos entre dos curvas cualesquiera que se intercepten en el plano z serán los mismos que los que formen las curvas transformadas en el plano w. Esto es, los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.[2]
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Cualquier función analítica en $z = x + iy$ transforma en otra función $w = r + is$ también analítica.

La segunda de las afirmaciones es inmediata a partir de la primera. Es decir, si una transformación conforme de coordenadas tienen inversa y ambas son analíticas, es obvio que curvas contíunas $\mathcal{C}(z)$ serán transformadas a curvas continuas $\tilde{\mathcal{C}}(w)$.

El hecho que la transformación conforme preserva el ángulo y las escalas se muestra en la figura 1.3 y puede comprobarse de la siguiente manera. Considere dos curvas, $\mathcal{C}_1(z)$ y $\mathcal{C}_2(z)$, en el plano complejo

[2] De esta propiedad es donde la transformación hereda su nombre de conforme. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre las curvas que se interceptan.

Borrador Preliminar

Figura 1.2: Tranformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping**. *MathWorld–A Wolfram Web Resource.* http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html

$z = x + iy$. Supongamos además que estas curvas se interceptan en un punto $z = z_0$. Entonces, sobre las tangentes a cada curva, en z_0, definimos otros dos puntos z_1 y z_2 de tal forma que

$$\left.\begin{array}{l} z_1 - z_0 = \rho e^{i\theta_1} \\ \\ z_2 - z_0 = \rho e^{i\theta_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \\ \\ w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2} \end{array}\right.$$

Nótese que hemos construido los puntos z_1 y z_2 sobre las tangentes a z_0 a la misma distancia ρ de z_0 y, en principio, hemos supuesto que las distancias a los puntos transformados w_1 y w_2 (las cuales hemos identificado como ρ_1 y ρ_2, respectivamente), no son iguales. Ahora bien, dado que $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left.\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{z_1\to z_0}\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2\to z_0}\frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} \;\Rightarrow\; g'(z_0) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho_1}{\rho}e^{i(\phi_1-\theta_1)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho_2}{\rho}e^{i(\phi_2-\theta_2)}\,.$$

Es claro que al comparar las magnitudes y las fases demostramos que las transformaciones conformes preservan las distancias, $\rho_1 = \rho_2$, y los ángulos $(\phi_2-\phi_1) = (\theta_2-\theta_1)$. Adicionalmente, es muy fácil convencerse que si la transformación conforme conserva los ángulos entre curvas y las escalas en todas direcciones las figuras son transformadas en figuras equivalentes, quizá ampliadas y rotadas, pero no deformadas.

1.2.4. Algunas consecuencias y ejemplos

Las consecuencias de la última afirmación reviste alguna importancia. Si $f = f(z)$ es analítica en el plano $x - y$ y la transformación $z = h(w)$ también lo es, entonces la función $F(w) = f(h(w))$ necesariamente es analítica en el plano (r, s).

$$\frac{\Delta F}{\Delta w} = \frac{\Delta f}{\Delta h}\frac{\Delta h}{\Delta w} \equiv \frac{\Delta f}{\Delta z}\frac{\Delta h}{\Delta w}\,.$$

Borrador Preliminar

Figura 1.3: Tranformaciones conformes. Cuadrante superior representa las conservación de ángulos y escala bajo transformaciones y el inferior un ejemplo de transformaciones conforme para $w = z^2$.

Por hipótesis supusimos que f y h eran analíticas, por lo cual es inmediato concluir que debido a que los dos factores de la derecha son analíticos, la función $F(w)$ también lo será.

Tal y como mostramos en la sección 1.1.5 si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, es analítica, entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ serán funciones armónicas conjugadas, vale decir que satisfacen la ecuación de Laplace, con lo cual $\nabla^2 u(x,y) = \nabla^2 v(x,y) = 0$. Eso significa que si $F = \Phi(w) + i\Psi(w)$, entonces:

$$f = \phi + i\psi \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow\; F = \Phi + i\Psi \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\}$$

Esto impone que si $\Re[f(z)] = \phi$ es constante en el plano $x - y$, también lo será $\Re[F(w)] = \Phi$ en $r - s$ (¡Demuéstrelo!).

Esta propiedad deriva una serie de aplicaciones en la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Si bien es una técnica elegante y útil cuando es posible, no deja de ser limitada porque se restringe a 2D. Hoy los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales ha superado con creces este tipo de técnicas. Los ejemplos son variados.

- Las siguientes transformaciones representan:

  traslaciones: $w = z + b$; rotaciones de ángulo θ: $w = ze^{i\theta}$; expansiones de escala a : $w = az$,

  y pueden ser combinadas como: $w = az+b$ con a y b números complejos. Para la traslación es inmediato. Para la rotación también si recordamos que $z = |z|e^{i\phi}$ con lo cual $w = |z|e^{i\phi}e^{i\theta} = |z|e^{i(\phi+\theta)}$.

Borrador Preliminar

Figura 1.4: Transformaciones conformes para el ejemplo donde $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

- También la transformación de inversión $w = 1/z$ que transforma los puntos del interior de un círculo unidad a su exterior y viceversa. Una vez más, $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|e^{i\phi}} = \left|\dfrac{1}{z}\right| e^{-i\phi}$. Entonces es claro que

$$0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$$

- Un caso más interesante lo constituye la transformación $w = e^{i\theta}\left(\dfrac{z-z_0}{z-z_0^*}\right)$, la cual transforma los puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano (ver figura 1.4. Para convencernos de ello notamos que

$$|w| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z-z_0}{z-z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z-z_0}{z-z_0^*}\right|.$$

  En general si z_0 y z los consideramos en el semiplano complejo superior $y \geq 0$, entonces siempre se cumple que $|z-z_0| \leq |z-z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, y como se cumple para todo z en ese semiplano, entonces cada uno de esos puntos es transformado dentro de un círculo de radio $|w|$. Es inmediato convencerse que, la igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$.

  Finalmente, notamos que si conocemos como transforman dos puntos $z_1 \to w_1$ y $z_2 \to w_2$ entonces podremos determinar la transformación, esto es, conocer los valores de los parámetros z_0 y ϕ. Este caso lo podemos apreciar si consideramos un par de puntos en el semiplano complejo y conocemos como transforman, digamos $z = i$ sobre el eje imaginario, e imponemos que sea transformado a $w = 0$, entonces es inmediato determinar que $z_0 = i$. Por otro lado, si imponemos que $z = \infty \Rightarrow w = 1$, entonces: $1 = w = e^{i\theta} \Rightarrow \theta = 0$, con lo cual $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1.2.5. Ejemplos

1. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{3z^2+2z}{(z-4)(z-i)},$$

   la función es analítica en todos los puntos, excepto en $z = 4$ y $z = i$. Entonces, las únicas singularidades están en los puntos $z = 4$ y $z = i$, y como son un conjunto finito de singularidades cada una de estas son singularidades aisladas.

Borrador Preliminar

2. Sea f la función:

$$f(z) = \left(\operatorname{sen}\left[\frac{x}{|z|^2}\right] \cosh\left[\frac{y}{|z|^2}\right] - i\cos\left[\frac{x}{|z|^2}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{y}{|z|^2}\right] \right)^{-1},$$

Si denotamos al denominador como $g(z)$, entonces

$$\begin{aligned} g(z) &= \operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] - i\cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] \\ &= u(x,y) + iv(x,y) \neq 0\,, \end{aligned}$$

Es claro que $z \neq 0$. Por otra parte, de las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todas partes salvo en $z = 0$, donde ni g ni las derivadas parciales están definidas. Como las derivadas parciales son continuas, entonces g es analítica en todos los puntos excepto $z = 0$. Por lo tanto, f es analítica salvo en $z = 0$.

Por otra parte, $g = 0$ si su parte real como su parte imaginaria son nulas, así que las singularidades de f, además de $z = 0$, vienen dadas por el siguiente sistema ecuaciones:

$$\operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = 0 \quad \text{y} \quad \cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = 0$$

Como $\cosh(\alpha) > 0$, la primera ecuación se satisface si

$$\operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{x^2+y^2} = \pm\, n\pi\,,$$

puesto que $\cos(\alpha) \neq 0$ cuando $\operatorname{senh}(\alpha) = 0$, entonces la segunda ecuación se satisface si $y = 0$. Por lo tanto, el sistema se satisface simultáneamente si

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} = \pm\, n\pi \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \pm\, n\pi\,,\; n = 0, 1, 2, ...$$

Las singularidades ocurren en el eje real y en los puntos donde $x = \pm 1/n\pi$. El punto límite de este conjunto, cuando $n \to \infty$, es el punto $z = 0$. Por lo tanto, f tiene una singularidad no aislada en $z = 0$ y singularidades aisladas en los puntos $z = \pm 1/n\pi$, con $n = 1, 2, 3, ...$

3. Dada la función

$$f(z) = \frac{z^2+16}{z-4i}\,, \quad z \neq 4i\,,$$

esta función es el cociente de dos funciones enteras y por lo tanto es analítica, salvo donde el denominador se hace nulo, esto es en $z = 4i$. Por otra parte:

$$f(z) = \frac{(z+4i)(z-4i)}{z-4i} = z + 4i\,,$$

Borrador Preliminar

Figura 1.5: A la izquierda lineas $|z| =$ constante, $\mathrm{Arg}(z) =$ constante y las respectivas imágenes en el plano $u - v$. A la derecha, la gráfica para $x =$ constante, $y =$ constante.

y

$$\lim_{z\to 4i} f(z) = \lim_{z\to 4i} z + 4i = 8i.$$

la función f tiene una singularidad removible en $z = 4i$ pues el límite existe. Podemos definir una función g igual a f, para $z \neq 4i$

$$g(z) = \begin{cases} z + 4i & \text{si } z \neq 4i \\ 8i & \text{si } z = 4i \end{cases}$$

y queda claro que g es una función entera.

4. Para

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$$

y es inmediato darse cuenta que tendremos polos de orden 1 en $z = 1$ y $z = -1$

5. Para

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{\mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad \Rightarrow e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z} \quad \text{es un polo}$$

es decir donde $e^z = -e^{-z}$, con lo cual $z_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi$ y al utilizar la definición:

$$\lim_{z\to\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \frac{\left[z - \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi\right] \mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)} = \lim_{z\to\left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \frac{\left[z - \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi\right] \cosh(z) + \mathrm{senh}(z)}{\mathrm{senh}(z)} = 1$$

donde hemos utilizado el Teorema de L'Hopital y consecuentemente $z_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi$ es un polo simple.

6. Consideremos la aplicación $w = f(z) = z^2$.

En la forma polar tenemos: $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $w = \rho\mathrm{e}^{i\psi}$ y $w = z^2 = r^2\mathrm{e}^{i2\theta}$. Por lo tanto, si comparamos los términos podemos ver que: $\rho = r^2$ y $\psi = 2\theta$. Es decir, los círculos $r = r_0$ son mapeados a círculos $\rho = r_0^2$ y las líneas $\theta = \theta_0$ en líneas $\psi = 2\theta_0$. En la figura 1.5, a la izquierda, podemos ver el mapeo $w = z^2$ desde la región: $1 \leq |z| \leq 3/2\,, \pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$ a la región: $1 \leq |w| \leq 9/4\,, \pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$.

Borrador Preliminar

En coordenadas cartesianas donde $z = x + iy$ tenemos

$$u = \Re(z^2) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = \Im(z^2) = 2xy\,,$$

Ahora las lineas $x = C_1$ constante se mapean a $u = C_1^2 - y^2$ y $v = 2C_1 y$. Si eliminamos y resulta

$$v^2 = 4C_1^2(C_1^2 - u)\,,$$

Esto es, parábolas que se abren a la izquierda. De manera similar para líneas $y = C_2$ constantes.

$$v^2 = 4C_2^2(C_2^2 + u)\,,$$

parábolas que abren a la derecha. Ver la figura 1.5.

Borrador Preliminar

1.2.6. Practicando con Maxima

En en análisis complejo una de las dificultades que se presentan es a la hora de visualizar las funciones y las diferentes aplicaciones sobre éstas. Afortunadamente, una de las grandes ventajas de los sistemas de manipulación simbólica (CAS) es su capacidad para la visualización.

Veamos el siguiente ejemplo donde a través de un programa sencillo ubicamos en el plano complejo las raíces de una ecuación en variable compleja. Para las funciones que utilizaremos en bueno consular el manual del programa: http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/es/maxima.html.

Si necesitamos más información sobre Maxima podemos consultar también: http://maxima.sourceforge.net/es/documentation.html.

Construiremos un programa que llamaremos "drawrootC( )" al que luego le debemos introducir la ecuación a resolver.

```
(% i1) drawrootC(_f):=block( [Re,Im,s,raices,pl],
       s: solve(_f=0,z),
       raices: factor(map(rhs,s)),
       Re:map(realpart,raices),
       Im:map(imagpart,raices),
       pl:[ ],
       pl:cons([points(Re,Im)] , pl),
       pl:cons([xrange=[-2,2]],pl),
       pl:cons([yrange=[-2,2]],pl),
       pl:cons([point_size=4],pl),
       pl:cons([grid=on],pl),
       apply(wxdraw2d,pl), raices)$
```

Si queremos hallar las raíces de la ecuación $z^5+1=0$ ejecutamos nuestro programa de la manera siguiente

```
(% i2) drawrootC(z^5+1);
```

(% t2)

$$[-e^{\frac{2i\pi}{5}}, -e^{\frac{4i\pi}{5}}, -e^{-\frac{4i\pi}{5}}, -e^{-\frac{2i\pi}{5}}, -1] \qquad (\%\ o2)$$

Borrador Preliminar

Si queremos hacer un gráfico de una curva que está parametrizada, por ejemplo: $x(t) = \text{sen}(t)$ y $y(t) = 2\text{sen}(t)$, escribimos la siguiente instrucción

```
(% i3) wxplot2d([parametric,sin(t),sin(2*t), [t,-2*%pi,2*%pi]],[nticks,100])$
```

(% t3)

El siguiente programa está diseñado para graficar una función $f(z)$ utilizando círculos concéntricos, centrados en el origen, y en sentido antihorario[3].

```
(% i4) wxdrawcircleC(_f):=block([fx,fy,fxt,fyt,pl,j,ncirc,r,theta_shift,lm,l,dx,dy,dxy,v,nt],
ratprint:false,
fx:realpart(rectform(subst(z=x+%i*y,_f))),
fy:imagpart(rectform(subst(z=x+%i*y,_f))),
pl:[], nt:200, r:2, ncirc:5, theta_shift:%pi/20, lm:0,
for n:1 thru ncirc do (
l:cons(lm,makelist(cabs(subst(z=r*n/7*exp(%i*t),_f)),t,0,2*%pi,.5)),lm:lmax(l)),
for j:1 thru ncirc do(
fxt:subst([x=r*cos(t)*j/ncirc,y=r*sin(t)*j/ncirc],fx),
fyt:subst([x=r*cos(t)*j/ncirc,y=r*sin(t)*j/ncirc],fy),
pl:cons([parametric(fxt,fyt,t,0,2*%pi)] , pl),
pl:cons([color=j-1],pl), pl:cons([key=string(r*j/ncirc)],pl),
dx:subst(t=3/nt,fxt)-subst(t=0,fxt),dy:subst(t=3/nt,fyt)-subst(t=0,fyt),
dxy:sqrt(dx^2+dy^2),
v:vector([subst(t=0,fxt),subst(t=0,fyt)],[lm*dx/dxy/20,lm*dy/dxy/20]),pl:cons([v],pl),
pl:cons([head_length=lm,head_angle=1],pl),pl:cons([color=j-1],pl),
pl:cons([key=],pl)),pl:cons([xlabel=,ylabel=],pl),
pl:cons([nticks=200],pl),pl:cons([grid=on],pl),
apply(wxdraw2d,pl) )$
```

[3]Este ejemplo otras aplicaciones puede consultar https://themaximalist.org/category/complex-variables/

Borrador Preliminar

Aquí podemos ver simplemente círculos concéntricos que aumentan con el radio pues estamos visualizando la función $f = (z)$.

(% i5) wxdrawcircleC(z);

(% t5)

Para el siguiente ejemplo, $f(z) = (z - \pi/2)(z - 1)$, podemos ver la aparición de bucles cuando, a medida que crece el radio, se incluye el punto $z = 0$.

(% i6) wxdrawcircleC((z-%pi/2)*(z-1));

(% t6)

Borrador preliminar

Mientras que para la función $f(z) = 1/((z - 3\pi/2)(z - 1))$,

```
(% i7) wxdrawcircleC(1/((z-3*%pi/2)*(z-1)));
```

(% t7)

El siguiente programa, aunque limitado, permite obtener gráficas para transformaciones conformes.

```
(% i8) drawgridC(_f):=block( [fx,fy,fxt,fyt,pl,j,ngrid],
fx:realpart(rectform(subst(z=x+%i*y,_f))),
fy:imagpart(rectform(subst(z=x+%i*y,_f))),
pl:[], ngrid:20,
for j:0 thru ngrid do(
fxt:subst([x=-1+j*2/ngrid,y=t],fx),
fyt:subst([x=-1+j*2/ngrid,y=t],fy),
pl:cons([parametric(fxt,fyt,t,-1,1)], pl)),
pl:cons([color=blue],pl),
for j:0 thru ngrid do(
fxt:subst([y=-1+j*2/ngrid,x=t],fx),
fyt:subst([y=-1+j*2/ngrid,x=t],fy),
pl:cons([parametric(fxt,fyt,t,-1,1)] ,pl) ),
pl:cons([color=red],pl),pl:cons([xlabel=,ylabel="w=f(z)"],pl),
pl:cons([nticks=200],pl),apply(wxdraw2d,pl) )$
```

Borrador Preliminar

(% i9) drawgridC(z);

(% t9)

(% i10) drawgridC(z^2);

(% t10)

Borrador preliminar

```
(% i11) drawgridC(z^3-1);
```

(% t11)

```
(% i12) kill(all)$
```

1.2.7. Ejercicios

1. Determine el tipo de singularidades (en caso de poseerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$

   a)
   $$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

   b)
   $$f(z) = \frac{1+z^3}{z^2}$$

   c)
   $$f(z) = \operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right)$$

2. Identifique los ceros, polos y las singularidades esenciales de las siguientes funciones:

   a)
   $$f(z) = \frac{z-2}{z^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

   b)
   $$f(z) = e^{1/z}$$

   c)
   $$f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right)$$

3. Encuentre el comportamiento en el infinito de

Borrador Preliminar

a)
$$f(z) = a + \frac{b}{z^2}$$

b)
$$f(z) = z(1 + z^2)$$

c)
$$f(z) = e^z$$

4. Demostrar que la ecuación de la proyección estereográfica es
$$\mathcal{P}(x+iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \quad \text{con } z = x+iy \in \mathbb{C}.$$

5. Demostrar que las ecuación para la inversa de la proyección estereográfica es la siguiente
$$\mathcal{P}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 i}{x_3 - 1} \quad \text{si} \quad (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1).$$

6. Determine el ángulo de rotación en el punto $z_0 = 2 + i$ cuando $w = z^2$, e ilústrelo para alguna curva particular. Demuestre que el factor de escala en ese punto es $2\sqrt{5}$.

7. Demuestre que bajo la transformación $w = 1/z$, las imágenes de las líneas $y = x - 1$ e $y = 0$ son el círculo $u^2 + v^2 - u - v = 0$ y la línea $v = 0$, respectivamente. Dibuje las cuatro curvas, determine las direcciones correspondientes a lo largo de ellas y verifique la conformidad del mapeo en el punto $z_0 = 1$.

8. Demuestre que el ángulo de rotación en un punto distinto de cero $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ bajo la transformación $w = z^n$ para $(n = 1, 2, ...)$, es $(n-1)\theta_0$. Determine el factor de escala de la transformación en ese punto.

9. Demuestre que la transformación $w = \operatorname{sen}(z)$ es conforme en todos los puntos excepto en
$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

10. Encuentre la transformación inversa local de $w = z^2$ en los puntos
$$\text{(a) } z_0 = 2\,; \quad \text{(b) } z_0 = -2\,; \quad \text{(c) } z_0 = -i\,.$$

11. Dibuje o grafique la región dada y su imagen bajo las siguientes transformaciones

    a) $|z| \leq 1/2$, $-\pi/8 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/8$, $w = z^2$.
    b) $1 < |z| < 3$, $0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2$, $w = z^3$.
    c) $2 \leq \Im(z) \leq 5$, $w = z^3$.
    d) $|z - 1/2| \leq 1/2$, $w = 1/z$.

Borrador Preliminar

1.3. Integrales complejas

Como siempre, luego de definir la derivada, construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann. Esto es

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad \text{si } n \to \infty \;\Rightarrow\; |z_j - z_{j-1}| \to 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z)\,.$$

Es decir, que si el $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, entonces se corresponde con la definición de la integral.

1.3.1. Algunas propiedades

Es claro que esta integral es, necesariamente, una integral de línea, ya que z tiene "dos dimensiones"

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z) &= \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] \\ &= \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

con lo cual transformamos una integral compleja en una suma de integrales reales. Pero necesitamos definir el contorno a través del cual vamos del punto $z_1 = x_1 + iy_1$ al punto $z_2 = x_2 + iy_2$.

La integración compleja tendrá las propiedades ya conocidas

- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\;\; (f(z) + g(z)) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z) + \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z g(z)$.
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; Kf(z) = K\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z)$ con K una constante real o compleja.
- $\int_a^b \mathrm{d}z\; f(z) = -\int_b^a \mathrm{d}z\; f(z)$.
- $\int_a^b \mathrm{d}z\; f(z) = \int_a^m \mathrm{d}z\; f(z) + \int_m^b \mathrm{d}z\; f(z)$.
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; |f(z)| \leq ML$, donde $M = \text{máx}\,|f(z)|$ y L la longitud de $\mathcal{C}$.

Esta última propiedad es importante porque permite establecer cotas a las integrales complejas sin tener que evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demostración

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z) \;\Rightarrow\; \left|\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)|\;|\Delta z_j| \leq M\sum_{j=1}^{n} |\Delta z_j| \leq ML\,.$$

Donde hemos utilizado que $|f(\zeta_j)| \leq M$ y que la suma de los intervalos $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ es la longitud L del recorrido $\mathcal{C}$. Es claro que tomando límites a ambos miembros obtendremos $\left|\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z)\right| \leq \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; |f(z)| \leq ML$.

1.3.2. Teorema integral de Cauchy

El teorema integral de Cauchy (también conocido como el teorema de Cauchy-Goursat) es uno de los dos teoremas básicos en la teoría de funciones de variable compleja y tiene que ver con integrales de línea para las funciones holomorfas en el plano complejo. Básicamente dice que si dos caminos de integración diferentes conectan los mismos dos puntos, y la función que se está integrando es holomorfa en todas partes entre las dos trayectorias, entonces las dos integrales de la función serán iguales.

Borrador Preliminar

Figura 1.6: Regiones en el plano complejo

1.3.3. El teorema y las regiones

Este teorema considera que si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región[4], entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula. Esto es:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,.} \tag{1.8}$$

Antes que nada, y como parte de ese adiestramiento en lenguaje, precisaremos qué queremos decir (qué quieren decir los matemáticos) con regiones *simplemente conexas* y *múltiplemente conexas*.

Una región *simplemente conexa* es aquella que no tiene "huecos", o dicho de una manera más precisa y elegante, en la cual una curva Γ puede ser reducida (encogida) a un punto sin salir de la región $\mathcal{R}$. En la figura 1.6 cuadrante **I**a se muestra una región simplemente conexa y en los cuadrantes **I**b y **I**c regiones *múltiplemente conexas*. Estas dos últimas figuras clarifican este concepto. Es decir, una *región múltiplemente conexa* es aquella que no es *simplemente conexa* y con eso queremos decir que "tiene huecos", o lo que es lo mismo existen curvas que no se pueden reducir a puntos en la región.

Tal y como hemos comentado la demostración rigurosa del Teorema de Cauchy está fuera de los alcances de estas notas, pero algo se puede hacer si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) que vimos cuando estudiamos análisis vectorial. Con ello recordamos la ecuación (1.7), entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\ .$$

[4]Esta última condición no es necesaria, pero la demostración del teorema se torna mucho más sofisticada, y referimos al lector a los libros especializados, vale decir a las referencias [James Brown, Ruel Churchill 1999, Konrad Knopp 1996].

Borrador Preliminar

El Teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \oint_{\mathcal{C}} (p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x)\,,$$

con lo cual, si una vez más suponemos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, entonces tendremos que

$$\oint_{\mathcal{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_{\mathcal{C}} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y}\right) + i\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right) = 0\,,$$

y acto seguido, como $f(z)$ es analítica, invocamos las condiciones de Cauchy Riemann (ecuación (1.6)) y es inmediato ver que se anula la integral de circulación.

1.3.4. Algunas observaciones y el Teorema de Morera

De la anterior "demostración" del Teorema de Cauchy Riemann emergen algunas observaciones

- La primera es la insistencia de que la condición que la derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región no es necesaria.
- La segunda es que el Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Consideremos una región como la descrita en la figura 1.6 cuadrante **II**, es claro que podemos circular la integral en los siguientes contornos

  $$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\; f(z) \equiv \int_{ABDEA} \mathrm{d}z\; f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\; f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\; f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\; f(z) = 0\,,$$

  y como $\int_{AF} \mathrm{d}z\; f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\; f(z)$ entonces

  $$\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\; f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\; f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\; f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\; f(z) = 0\,,$$

  con lo cual se nota que para regiones múltiplemente conexas, a pesar que las circulaciones son opuestas, el "observador" que circula por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ siempre tiene la región $\mathcal{R}$ a su izquierda.
- Siguiendo con la reflexión anterior, podemos invertir el sentido de la circulación en el contorno $\mathcal{C}_2$ con lo cual

  $$\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\; f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\; f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\; f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\; f(z)\,.$$

  Es decir, que si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.
- Más aún, este resultado puede extenderse a regiones con n huecos de tal forma que, tal y como ilustra en en la figura 1.6 cuadrante **III**

  $$\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\; f(z) = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\mathcal{C}_j} \mathrm{d}z\; f(z)\,.$$

  Con lo cual estamos afirmando que, dada una región que contiene un número finito (¿numerable?) n de singularidades, la integral a lo largo del contorno que encierra la región $\mathcal{R}$ es equivalente a la suma de las integrales que encierran cada una de las n singularidades.

Enunciaremos sin demostración el Teorema de Morera[5], también conocido como el teorema inverso de Cauchy.

[5] Pueden consultar la demostración en la referencia [Arfken, Weber y Weber 2000].

Borrador Preliminar

Teorema de Morera: Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

1.3.5. Fórmula integral de Cauchy

El ejemplo de la sección anterior nos lleva a una de las expresiones más útiles e importantes del análisis complejo: *La Fórmula Integral de Cauchy*, la cual dice que si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\boxed{\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = f(z_0)\,.} \tag{1.9}$$

Para probar esta afirmación supongamos una vez más un circuito en encierra al polo $z = z_0$ (ver figura 1.8 cuadrante **II**). Con lo cual, como $f(z)$ es analítica en una región, el Teorema de Cauchy nos garantiza

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0}\,,$$

si $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\,.$$

Si hacemos $r \to 0$ tendremos que

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0)\,.$$

Observaciones Surgen también observaciones al respecto

- Obvio que es válido para regiones múltiplemente conexas y es fácil demostrarlo. Se lo dejamos al lector como ejercicio.
- Si reacomodamos la expresión para la forma integral podemos hacer que esa fórmula sea válida para todo z
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\,.$$
- Más aún, veremos que es fácil generalizar esta fórmula para derivadas de funciones, vale decir

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}}\,.} \tag{1.10}$$

Veamos el caso más sencillo y demostremos que para $n = 1$ resulta:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z - z_0)^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{h}\left\{\frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0}\right\}\mathrm{d}z\right]\,, \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Figura 1.7: Integrales complejas y circuitos

tal y como se muestra en la figura 1.8, cuadrante **III** tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0-h)(z-z_0)}\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^2}\,.$$

Pero mucho más interesante hubiera sido "derivar respecto a una constante". Este truco implica que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \quad \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right]\mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \tag{1.11}$$

Esta fórmula es muy util para calcular integrales. Considere, por ejemplo la siguiente integral

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2\zeta}\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta+1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1) \quad \text{con } f(z) = e^{2z} \ \Rightarrow\ I = \frac{8i\pi}{3}e^{-2}\,,$$

donde hemos supuesto que el contorno $\mathcal{C}$ encerraba el punto $z = -1$, porque de otro modo la función $\dfrac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ sería analítica y la integral se anularía por el Teorema de Cauchy.

1.3.6. Ejemplos

1. Evaluemos la integral compleja $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos, tal y como se ilustran en la figura 1.7

   a) un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R

   $$\oint \mathrm{d}z\ z^{-1} \equiv \oint \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i\,,$$

   b) siguiendo una semicircunferencia desde $(R,0) \to (-R,0)$. Esto es

   $$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi i\,,$$

   c) siguiendo dos líneas rectas entre los puntos $(R,0) \to (0,R) \to (-R,0)$. En este caso, procedemos utilizando la expresión cartesiana para los números complejos. Para ello, vamos a parametrizar $z = z(t)$ para $(R,0) \to (0,R)$ y $z = z(s)$ cuando $(0,R) \to (-R,0)$. Veamos

   $$\int_{z_1=(R,0)}^{z_3=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} \mathrm{d}z\ z^{-1} + \int_{z_2=(0,R)}^{z_3=(0,-R)} \mathrm{d}z\ z^{-1}\,,$$

Borrador Preliminar

para cada una de las integrales se cumple, respectivamente, que

$$z = (1-t)R + itR \quad \text{con } 0 \le t \le 1 \qquad \wedge \qquad z = -sR + i(1-s)R \quad \text{con } 0 \le s \le 1\,,$$

con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}\,,$$

procedemos entonces con la primera de las integrales

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)\mathrm{d}t}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2} + i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}\,,$$

es decir

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \frac{1}{2}\ln(1-2t+2t^2)\Big|_0^1 + i\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = 0 + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\,,$$

y, la segunda integral también tendrá el mismo resultado, con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i \quad \text{¡el mismo resultado que a través del arco de circunferencia!.}$$

Es interesante notar que si regresamos al punto $(R,0)$ a través del contorno $(-R,0) \to (0,-R) \to (R,0)$ la integral cerrada se anula, no así cuando nos regresamos a través el arco complementario de circunferencia. En pocas palabras, como se esperaba, el valor de las integrales de camino, para algunas funciones, dependerán del camino seleccionado. En la próxima sección veremos a cuáles funciones corresponderá un mismo valor de la integral cerrada, independientemente del circuito que uno elija.

2. Otro ejemplo ilustrativo lo constituye

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \;\Rightarrow\; \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, e^{-in\theta} \;\Rightarrow\; \begin{cases} n=0: & \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2i\pi \\ n\neq 0: & \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta[\cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta)] = 0 \end{cases}$$

donde hemos utilizado la forma polar $z - z_0 \equiv Re^{i\theta}$ e integrado a lo largo de una circunferencia de radio R centrada en $z = z_0$.

3. Considere la función definida en una región $\mathcal{R}$

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0} \quad \text{con} \begin{cases} z_0 \text{ fuera de la región } \mathcal{R} \\ z_0 \text{ dentro de la región } \mathcal{R} \end{cases}$$

- Si z_0 está **fuera** de la región, entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$, con lo cual el Teorema de Cauchy implica que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z) = 0\,.$$

- Si z_0 está **dentro** de la región, entonces $f(z)$ no es analítica en $\mathcal{R}$ por cuanto existe una singularidad $z = z_0$. Si consideramos $\mathcal{C}$ el contorno que bordea a $\mathcal{R}$, como una circunferencia centrada en $z = z_0$ y Γ otra circunferencia que aísla a z_0 con un radio $|z - z_0| = \epsilon$ (esta situación se ilustra en la figura 1.8 cuadrante **I**). Entonces, si hacemos $z - z_0 = \tilde{z} = \epsilon e^{i\theta}$ el Teorema de Cauchy implica

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i\,.$$

Borrador Preliminar

Figura 1.8: Circulaciones y Polos

4. Evaluar

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-2}dz\,, \text{ para los entornos: } C\colon |z| = 3 \text{ y } C\colon |z| = 1\,.$$

El entorno $|z| = 3$ contiene en su interior al punto $z_0 = 2$, esto implica que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-2}dz = e^2\,.$$

Para el entorno $|z| = 1$, vemos que el punto $z_0 = 2$ no está contenido en ese entorno, esto significa que el integrando es una función analítica en toda la región. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-2}dz = 0\,.$$

5. Evaluar

$$I = \int_C \frac{1}{z^2+4}dz\,, \text{ para los entornos: } C_1\colon |z-i| = 2\,,\ C_2\colon |z| = 3 \text{ y } C_3\colon |z+i| = 2\,.$$

La integral puede ser escrita de la siguiente manera:

$$I = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)}dz\,.$$

Para el contorno $|z-i| = 2$, tenemos que éste contiene en su interior al punto $z_0 = 2i$. Si escribimos la integral como

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}dz\,,$$

la función $1/(z+2i)$ es analítica dentro de C_1 y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Borrador Preliminar

Consideremos ahora el contorno $|z| = 3$. Este contorno contiene en su interior a los puntos $2i$ y $-2i$. Podemos trazar dos contornos adicionales, de radio ϵ alrededor de cada punto, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{z^2+4}dz &= \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z^2+4}dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z^2+4}dz \\
&= \int_{C_{(2i)}} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i}dz \\
&= 2\pi i \left[\frac{1}{z+2i}\right]_{z=2i} + 2\pi i \left[\frac{1}{z-2i}\right]_{z=-2i} \\
&= 2\pi i \left[\frac{1}{4i}\right] + 2\pi i \left[-\frac{1}{4i}\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

Finalmente, para el contorno $|z+i| = 2$ se tiene que éste contiene al punto $z_0 = -2i$. Repitiendo lo que hicimos en el primer caso tenemos:

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i}dz\,,$$

la función $1/(z-2i)$ es analítica dentro de C_3 y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i}dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{4i}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Borrador Preliminar

1.3.7. Practicando con Maxima

Para integrar funciones en variable compleja podemos utilizar el comando **integrate**. Lo que necesitamos es definir de manera correcta el camino de integración, en el ejemplo siguiente $C(t) = \cos(t) + i\text{sen}(t)$. Recordemos que ":=" nos permite definir una función mientras que " : " es una asignación a una variable.

(% i2) C(t):= cos(t) + %i*sin(t); dC: diff(C(t),t);

$$\mathrm{C}(t) := \cos(t) + i\sin(t) \tag{\% o1}$$

$$i\cos(t) - \sin(t) \tag{dC}$$

(% i3) f(z):= 1/z;

$$\mathrm{f}(z) := \frac{1}{z} \tag{\% o3}$$

Escribimos la forma que tiene el integrando

(% i4) integrando: f(C(t))*dC$

Y procedemos a hacer la integración

(% i5) 'integrate(integrando,t,0,2* %pi)=integrate(integrando,t,0,2* %pi);

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\cos(t) - \sin(t)}{i\sin(t) + \cos(t)} dt = 2i\pi \tag{\% o5}$$

Podemos recurrir a un progrma que nos permita integrar una función dada $f(z) = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sobre un camino $z(\tau) = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, para un parámetro $a \leq \tau <\leq b$

(% i6) IntC(f,r,τ,a,b):=block([f1,dz,Iout],f1:subst(z=r,f),
dz:diff(r,τ),
Iout: 'integrate(f1*dz,τ,a,b)=integrate(f1*dz,τ,a,b), Iout)$

Para la función $f(z) = 1/z$ y el camino $C(\tau) = \cos(\tau) + i\text{sen}(\tau)$.

(% i7) IntC(1/z,cos(τ)+ %i*sin(τ),τ,0,2* %pi);

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\cos(\tau) - \sin(\tau)}{i\sin(\tau) + \cos(\tau)} d\tau = 2i\pi \tag{\% o7}$$

Consideremos ahora $f(z) = z^*$ con $C(\tau) = \cos(\tau) + i\text{sen}(\tau)$.

(% i8) IntC(conjugate(z),cos(τ)+ %i*sin(τ),τ,0,2* %pi);

$$\int_0^{2\pi} (i\cos(\tau) - \sin(\tau))\,(i\sin(\tau) + \cos(\tau))\, d\tau = 0 \tag{\% o8}$$

En este ejemplo $f(z) = 1/(z-a)$ y $C(\tau) = \cos(\tau) + i\text{sen}(\tau)$.

(% i9) IntC(1/(z-a),cos(τ)+ %i*sin(τ),τ,0,2* %pi);

Is $|a| - 1$ positive, negative or zero? n;

Borrador Preliminar

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\cos(\tau) - \sin(\tau)}{i\sin(\tau) + \cos(\tau) - a} d\tau = 2i\pi \qquad (\%\ o9)$$

Para $f(z) = (z^3 - 3)/(2z - i)$

(% i10) IntC((z^3-3)/(2*z-%i),cos(τ)+%i*sin(τ),τ,0,2*%pi);

$$\int_0^{2\pi} \frac{(i\cos(\tau) - \sin(\tau))\left((i\sin(\tau) + \cos(\tau))^3 - 3\right)}{2(i\sin(\tau) + \cos(\tau)) - i} d\tau = -\frac{(24i - 1)\pi}{8} \qquad (\%\ o10)$$

(% i11) kill(all)$

1.3.8. Ejercicios

1. Repetir los mismos pasos del primer ejemplo, 1.3.6, para el caso de

$$f(z) = (z^*)^{-1}.$$

2. Evaluar las siguientes integrales

   (a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \mathrm{d}t$, (b) $\int_0^{\pi/6} \mathrm{e}^{i2t}\mathrm{d}t$, (c) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-izt}\mathrm{d}t$, $\Re(z) > 0$.

3. Demuestre que si m y n son enteros, entonces

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{im\theta}\mathrm{e}^{-in\theta}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{cuando } m \neq n \\ 2\pi & \text{cuando } m = n \end{cases}$$

4. Utilizando una representación paramétrica para los diferentes caminos C evalúe la integral

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

   a) $f(z) = (z + 2)/z$ y C:
      1) El semicírculo $z = 2\mathrm{e}^{i\theta}$ con $(0 \leq \theta \leq \pi)$.
      2) El semicírculo $z = 2\mathrm{e}^{i\theta}$ con $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$.
      3) El círculo $z = 2\mathrm{e}^{i\theta}$ con $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

   b) $f(z) = z - 1$ y C el arco que va desde $z = 0$ a $z = 2$, conformado por
      1) El semicírculo $z = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}$ con $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$.
      2) El segmento $z = 2$ $(0 \leq x \leq 2)$ y el eje real.

   c) $f(z) = \pi\mathrm{e}^{\pi z^*}$ y C el contorno conformado por el cuadro con vértices en: $0, 1, 1 + i, i$ y en sentido antihorario.

   d)

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } y < 0 \\ 4y & \text{cuando } y > 0 \end{cases}$$

   cuando C es el arco que va desde $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$, conformado por la curva $y = x^3$.

Borrador Preliminar

5. Evalúe la integral
$$\oint_C \mathrm{Ln}(1-z)\mathrm{d}z\,,$$
donde C es el contorno del paralelogramo con vértices en $\pm i, \pm(1+i)$.

6. Evalúe la integral
$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-3i}\,,$$
donde C es el círculo $|z|=\pi$ y en sentido antihorario.

7. Evalúe la integral
$$\oint_C \Re(z)\mathrm{d}z\,,$$
donde C es el el arco del semicírculo superior $|z|=1$ y en sentido antihorario.

8. Evalúe la integral
$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z\,,$$
donde C es la elipse con focos en $z=0$ y $z=2$ y en sentido antihorario.

9. Utilizando la formula integral de Cauchy integre la siguiente función en sentido antihorario,
$$f(z)=\frac{z^2}{z^2-1}$$
alrededor de los círculos
$(a)\quad |z+1|=1\,,\quad (b)\quad |z-1-i|=\pi/2\,,\quad (c)\quad |z+i|=14/10\ ,\quad (d)\quad |z+5-5i|=7\ .$

10. Integre las siguientes funciones alrededor del círculo unitario y en sentido antihorario
$(a)\quad \cos(3z)/(6z)\,,\quad (b)\quad \mathrm{e}^{2z}/(\pi z-i)\,,\quad (c)\quad z^3/(2z-i)\ ,\quad (d)\quad (z^2\mathrm{sen}(z)/(4z-1)\ .$

11. Integre en sentido antihorario

a)
$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4},\quad C: 4x^2+(y-2)^2=4\,.$$

b)
$$\oint_C \frac{z\mathrm{d}z}{z^2+4z+3}\,,\quad C: \text{círculo con centro en } -1 \text{ y radio } 3\,.$$

c)
$$\oint_C \frac{z+2}{z-2}\mathrm{d}z\,,\quad C: |z-1|=2\,.$$

d)
$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}z}{z\mathrm{e}^z-2iz}\,,\quad C: |z|=0,6\,.$$

12. Demuestre que
$$\oint_C \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=0\,,$$
para un camino cerrado simple C que contiene los puntos z_1 y z_2 arbitrarios.

Borrador Preliminar

Capítulo 2

Series I

Borrador Preliminar

La ruta de este capítulo

2.1. Sucesiones y Series

Básicamente el tema central de este curso tiene que ver con el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y el desarrollo de métodos para resolverlas. Las ecuaciones diferenciales aparecen ya como tema de estudio, o curiosidad matemática, desde los tiempos de Isaac Newton[1] cuando se comenzó con el desarrollo del Cálculo Diferencial. El propio Newton las estudia en su tratado de cálculo diferencial donde discute sus soluciones a través de una expansión en series.

Newton estudia la siguiente ecuación diferencial, que por contener una primera derivada llamaremos una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x)\,. \tag{2.1}$$

Para buscar su solución, Newton propone el siguiente método que consiste en suponer una solución que tiene la forma de una serie infinita. El primer término de la serie es:

$$y = 0 + \cdots$$

el cual corresponde al valor inicial $x = 0$ en la ecuación (2.1).

Al insertar este valor en (2.1) resulta

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 + \cdots$$

que al integrarse se obtiene

$$y = x + \cdots$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.1), resulta

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + x + \cdots = 1 - 2x + 2x^2 + \cdots$$

Integrando esta última ecuación, se obtiene

$$y = x - x^2 + \frac{2}{3}x^2 + \cdots$$

Repitiendo el proceso:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 \cdots \quad \Rightarrow \quad y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Continuando con el método repetidamente se van calculando los diferentes términos de la serie

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{45} + \frac{x^7}{630} + \cdots$$

En la figura 2.1 se puede apreciar parte del manuscrito original donde aparece el esquema de solución por series propuesto por Newton.

[1] **Sir Isaac Newton** (1643-1727), fue un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, más conocidos como los Principia, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica y el desarrollo del cálculo matemático. Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra como la culminación de la revolución científica. (Tomado de Wikipedia).

Borrador Preliminar

EXEMPL. I.

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$; cujus Terminos $1 - 3x + xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate dispositos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in sinistrâ Columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c.
$+xy$	$* \quad x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$; &c.
$y =$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c.

Nunc

Figura 2.1: El esquema de Newton

Por otra parte, notemos que para cada valor de x y y, la ecuación (2.1) no es más que la derivada $y'(x)$, es decir la pendiente, de las soluciones de:

$$y'(x) = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x)\,.$$

De esta manera, con un poco de paciencia, o con algún programa de computación algebraico apropiado, se puede obtener el *campo vectorial* correspondiente a la ecuación diferencial, como se puede apreciar en la figura 2.2 (figura 2a). En realidad las soluciones se pueden ver como las curvas determinadas por las direcciones indicadas en el campo vectorial, figura 2b. Las aproximaciones que se van obteniendo con el método mostrado anteriormente se pueden observar, junto con la solución verdadera en la Figura 2c. Notemos que todas las aproximaciones son más cercanas entre si cuando x toma valores cada vez más próximos a cero.

Comencemos entonces nuestro estudio sobre ecuaciones diferenciales precisamente con las series matemáticas.

2.1.1. Introducción a las sucesiones

Para empezar, vayamos a la noción elemental de sucesiones. Básicamente, una sucesión es una colección numerable de elementos, dados en cierto orden, como:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, \quad 1, x, x^2, x^3, \ldots, \quad a, b, c, d\,.$$

En matemáticas se puede entender las sucesiones como una aplicación desde los números naturales a cualquier otro conjunto, no necesariamente de la misma naturaleza. Estos números se denominan los términos, elementos o miembros de la sucesión. Siendo más rigurosos, una sucesión se puede definir como una función sobre el conjunto de los números naturales, es decir, que estaríamos hablando en este caso de una función discreta.

Borrador Preliminar

Figura 2.2: (a) Representación de los campos vectoriales. (b) Diferentes soluciones para la ecuación diferencial (2.1). (c) La solución correcta correspondiente al valor inicial $y(0) = 0$ con las diferentes soluciones aproximadas.

Es bastante común que se confundan las sucesiones con series matemáticas, veremos que una serie entenderemos es en realidad una suma de términos.

Las sucesiones se diferencian de los conjuntos en el hecho de que es importante considerar el orden en que aparecen distribuidos. Además, un mismo término de una sucesión puede aparecer varias veces en posiciones diferentes. Esto significa que las siguientes sucesiones finitas son diferentes:

$$a, b, c, d \quad \neq \quad b, c, d, a\,.$$

Una sucesión puede contener infinitos elementos y en este caso se denomina una sucesión infinita, por lo tanto, si a cada número entero positivo se le asocia un elemento u_n, entonces el conjunto ordenado:

$$u_1, u_2, u_3, ...u_n, \ldots .$$

define una sucesión infinita. Cada término u_n tendrá un siguiente término u_{n+1} y por lo tanto no existe un último término.

Las sucesiones se pueden expresar de una manera más sencilla definiendo el n-ésimo término, como por ejemplo:

$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

cuyos primeros cuatro términos son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\,.$$

Otra manera de definir sucesiones es por medio de una relación de recurrencia, por ejemplo, para la bien conocida sucesión de Fibonacci la relación de recurrencia es:

$$u_1 = u_2 = 1\ , \qquad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}\ , \qquad n \geq 2\,,$$

y cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Como curiosidad matemática, podemos ver que existe una función que permite generar los números de Fibonacci, esta función cuando se expande en potencias de x tiene como coeficientes, ¡los números de Fibonacci!

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = x + x^2 + 2\,x^3 + 3\,x^4 + 5\,x^5 + 8\,x^6 + 13\,x^7 + 21\,x^8 + 34\,x^9 + \cdots$$

Borrador Preliminar

También es posible definir una sucesión a través del concepto de función. Se define una función para los enteros positivos, de manera que $f(n)$ es el término n-ésimo de la sucesión para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por lo tanto, los términos de las sucesión se escriben como:

$$f(1), f(2), f(3), ...f(n), \ldots$$

Las siguientes fórmulas son ejemplos de sucesiones:

$$\begin{aligned} f(n) &= (-1)^n \;\Rightarrow\; -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \\ f(n) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin(\pi), \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \sin(2\pi), \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \ldots \\ f(n) &= (-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right] \;\Rightarrow\; -2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5} \ldots \end{aligned}$$

Las sucesiones pueden tener la característica de ser crecientes o decrecientes. Una sucesión $\{f(n)\}$ se dice que es creciente si:

$$f(n) \leq f(n+1) \quad \forall \quad n \geq 1\,,$$

es decir, cada término es menor o igual al término siguiente. Y si de impone la condición $f(n) < f(n+1)$ se denomina *estrictamente creciente*. Por otro lado, una sucesión se llama decreciente si:

$$f(n) \geq f(n+1) \quad \forall \quad n \geq 1\,.$$

y *estrictamente decreciente* si $f(n) > f(n+1)$.

Las sucesiones pueden estar acotadas de diferente manera. Diremos que la sucesión $\{f(n)\}$ es acotada *superiormente* si existe un número positivo M tal que $f(n) \leq M$ para todo n. También puede ser acotada *inferiormente* si existe un número positivo N tal que $f(n) \geq N$ para todo n. En el caso de cumplirse ambas condiciones hablaremos de una sucesión acotada $N \leq f(n) \leq M$.
Podemos hablar de sucesiones monótonas cuando la diferencia entre un término y el que le sigue siempre es del mismo signo y además son del tipo creciente o decreciente.
Nos vemos ahora en la necesidad de hablar del significado de los términos convergencia o divergencia de una sucesión.

Figura 2.3: Sucesión convergente a cero.

La convergencia o divergencia se determina de manera sencilla, como lo indica el siguiente teorema:

Teorema: Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.

Revisemos el concepto de convergencia (divergencia). Cuando una sucesión converge, lo que significa es que tiende a un valor particular llamado su límite, diremos en éste caso la sucesión será una *sucesión convergente*. Las sucesiones que no son convergentes se denominan *divergentes*.

Borrador Preliminar

En otras palabras, una sucesión tiene límite si los elementos de la sucesión se hacen cada vez más y más cercanos a algún valor L (llamado límite de la sucesión). Esto significa que dado un número real ε mayor que cero, todos menos un número finito de elementos de la sucesión estarán siempre a una distancia a L menor que ε.

Matemáticamente es lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L\,. \tag{2.2}$$

Si una sucesión $f(n)$ converge, entonces el límite 2.2 existe, es único y la sucesión es acotada.

En la figura 2.3 podemos ver una representación gráfica para la sucesión:

$$f(n) = \frac{n+1}{2n^2}\,.$$

Esta serie converge, y es fácil ver que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2} = 0\,.$$

También existen las sucesiones oscilantes, las cuales suelen ser divergentes por no tener límite. Estas sucesiones presentan términos que se alternan de manera indefinida. Cuando cambian de signo se llaman sucesiones alternadas, como la que mencionamos anteriormente $f(n) = (-1)^n \;\Rightarrow\; -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

Un ejemplo particular de sucesiones oscilantes convergentes es la *sucesión de Cauchy*. Una sucesión de números reales: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se denomina una sucesión de Cauchy fundamental si para todo número positivo ε existe un entero positivo M tal que para todos los números naturales $n, m > M$ se cumple:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon\,.$$

Figura 2.4: Sucesión de Cauchy.

En este tipo de sucesiones los elementos se la sucesión se vuelven arbitrariamente cercanos entre sí a medida que la sucesión progresa, como se puede ver en la figura 2.4. Esta condición, necesaria para hablar de convergencia, se llama la condición de Cauchy.

Existe una serie de resultados interesantes que podemos mencionar:

- Toda sucesión convergente es de Cauchy.
- Toda sucesión de Cauchy está acotada.
- Para los números reales $\mathbb{R}$, toda sucesión de Cauchy es convergente.
- Toda sucesión convergente está acotada.

A medida que n se hace cada más grande, el valor de una sucesión $\{f(n)\}$ o $\{u_n\}$ se puede comportar de una manera bastante particular. Por ejemplo, si $u_n = 1/n$, es claro que u_n *converge* a cero a medida que $n \to \infty$. Pero si $u_n = e^{\alpha n}$, el límite dependerá del valor de α.

Por lo tanto, la pregunta a responder tiene que ver con el hecho de saber si los términos de u_n tienden, o no, a un límite finito cuando n crece indefinidamente.

Borrador Preliminar

2.1.2. Acercándonos al concepto de series

Con el concepto de sucesiones es posible definir una expresión analítica que formalmente tiene aspecto de suma, que contiene un número infinito de sumandos y que denominaremos *serie infinita*.

Si $\{u_n\}$ (con $n = 1, 2, 3, \dots$) es una sucesión infinita de números reales o complejos, es posible formar una nueva sucesión $\{s_n\}$ a partir de tomar sumas parciales de $\{u_n\}$. Veamos el procedimiento:

$$s_1 = u_1\,, \quad s_2 = u_1 + u_2\,, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3\,, \quad \dots \quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\,.$$

Es decir, partimos con $s_1 = u_1$ y decimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $s_{n+1} = s_n + u_{n+1}$. La sucesión $\{s_n\}$ la llamaremos la serie de término general a_n definida a través de la sucesión $\{u_n\}$ y la representaremos por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,. \tag{2.3}$$

Al número

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

le denominaremos la suma parcial de orden n de la serie (2.3).

Es importante aclarar que una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen al sumar de manera consecutiva lo términos de una sucesión diferente.

Si la sucesión s_n tiende a un límite S, la serie infinita

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i\,,$$

se dice que es convergente y converge al valor S, el cual es único. Entonces se puede escribir:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \{s_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i\,. \tag{2.4}$$

El número S se denomina *la suma de la serie* infinita y debe ser entendido como el límite de la sucesión.

Lo anterior se puede formalizar diciendo que la condición para la existencia de un límite S es que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|S - s_i| < \varepsilon \quad \text{para } i > N \;\Rightarrow\; |s_j - s_i| < \varepsilon \quad \text{para, todo} \;\; i, j > N\,.$$

Esta afirmación se denomina **criterio de Cauchy**[2] sobre la convergencia de las series parciales, y viene a ser la condición necesaria y suficiente para que una suma parcial s_i converja a medida que avanzamos en los términos de la serie.

Se dirá que la serie *diverge* si el valor de la sumatoria aumenta indeteniblemente.

La serie también puede oscilar:

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^i + \cdots$$

[2] **Augustin Louis Cauchy** París, 1789 - 1857, matemático francés pionero en los estudios de análisis (real y complejo) y de la teoría de los grupos de permutación. Cauchy hizo aportes importantes en los criterios de convergencia y divergencia de series infinitas, así como también, en ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidades y física matemática

Borrador Preliminar

Aquí s_n será 0 o 1 y por lo tanto el límite no existe.

La serie cuyos términos son tomados a partir del $(n+1)$-ésimo término, y en el mismo orden, de la serie (2.4) se llama el *resto* n-ésimo de la serie (2.4) y se denota por:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \;\Rightarrow\; u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots . \tag{2.5}$$

Si el resto n-ésimo de la serie (2.4) converge, entonces su suma:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \,, \tag{2.6}$$

se denomina el *resto de la serie*.

De las series nos interesa conocer cuánto suman. Es decir, cuál es el valor de s_i para una serie finita donde $i = N$. Pero también estamos interesados en conocer cuánto suma una serie infinita.

2.1.3. Series elementales

Probablemente, de cursos anteriores hemos conocido algunas series emblemáticas, estudiemos aquí algunas de estas series:

- **Serie aritmética**

  Seguramente con anterioridad hemos oído hablar de progresiones aritméticas. Ellas son, sencillamente series de la forma:

  $$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a + nd) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) + \cdots + [a + (N-1)d] \,,$$

  donde a y d son números reales o complejos.

  Al desarrollar la serie anterior en orden inverso y sumarla con la serie original obtemos:

  $$\begin{array}{lcccccc} s_N = & a & +(a+d) & +(a+2d) & +(a+3d) & +\cdots & +[a+(N-1)d] \\ s_N = & [a+(N-1)d] & +[a+(N-2)d] & +[a+(N-3)d] & +[a+(N-4)d] & +\cdots & +a \end{array}$$

  resultando:

  $$2s_N = N\,[a + a + (N-1)d] \;\Rightarrow\; s_N = \frac{N}{2}\Big[\text{Primer Término} + \text{Último Término}\Big]$$

  obviamente, si $N \to \infty$ la serie diverge.

- **Serie Geométrica**

  De ésta serie también sabemos que:

  $$s_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N \,,$$

  y si realizamos la resta $s_N - xs_N$, tenemos

  $$\begin{array}{rcccccc} s_N = & 1 & +x & +x^2 & +x^3 & +\cdots & +x^N \\ xs_N = & x & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +\cdots & +x^{N+1} \end{array}$$

Borrador Preliminar

Es inmediato comprobar que:

$$(1-x)s_N = 1 - x^{N+1} \;\Rightarrow\; s_N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x}\,,$$

Notemos que si $x \neq 1$ podemos reescribir la serie anterior como:

$$\sum_{n=0}^{n} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{2.7}$$

Por lo tanto podemos ver que si $|x| < 1$ tendremos que la suma será:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,. \tag{2.8}$$

Por otro lado, la serie divergirá (u oscilará) si $|x| \geqslant 1$.

- **Series Aritmético-geométricas**

  Estas series, un poco más exóticas y como su nombre lo sugiere son una combinación de las anteriores.

$$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a+nd)x^n = a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + (a+3d)x^3 + (a+4d)x^4 + \cdots + [a+(N-1)d]\,x^{N-1}\,.$$

  Utilizando la misma estrategia que aplicamos a las series geométricas (se deja como ejercicio al lector) se llega a encontrar el valor, nada intuitiva, de la suma S:

$$s_N = \frac{a - [a+(N-1)d]\,x^N}{1-x} + \frac{xd(1-x^{N-1})}{(1-x)^2}\,.$$

  Otra vez, si $|x| < 1$, entonces cuando $N \to \infty$ la serie converge a:

$$S = \frac{a}{1-x} + \frac{xd}{(1-x)^2}\,.$$

- **Serie Armónica**

  Quizá no la conocíamos con este nombre (y menos por sus propiedades) pero seguro nos la hemos tropezado.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots$$

  Esta serie infinita resulta ser engañosa, en apariencia parece converger, pero no es así. Además notemos lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n} \approx 3,5977\,, \quad \sum_{n=1}^{220} \frac{1}{n} \approx 5,9731\,, \quad \sum_{n=1}^{20220} \frac{1}{n} \approx 10,492\,,$$

  la suma de los primeros 20 términos es más grande que la suma de los siguientes ¡200 términos! y da la impresión de que la serie crece muy lentamente hacia algún valor límite.

Borrador Preliminar

Si analizamos con más cuidado, veremos que hay sutilezas. Acomodemos los términos de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_0}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\sigma_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\sigma_2}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{\sigma_3}+\cdots$$

la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\underbrace{\frac{1}{1+1}}_{\sigma_0}+\underbrace{\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}}_{\sigma_1}+\underbrace{\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+2}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{4+4}}_{\sigma_2}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{8+1}+\frac{1}{8+2}+\cdots+\frac{1}{8+8}}_{\sigma_3}+\cdots+\sum_{j=1}^{2^n}\frac{1}{2^n+j}+\cdots$$

con lo cual:

$$\sigma_0=\frac{1}{2};\quad \sigma_1=\frac{7}{12}>\frac{1}{2};\quad \sigma_2=\frac{533}{840}>\frac{1}{2};\quad \sigma_3=\frac{95549}{144144}>\frac{1}{2};\cdots$$

y claramente diverge ya que:

$$1+\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

Esta prueba aparentemente se le debe a Nicole D'Oresme[3].

Ahora bien, notemos que para todo $n\in\mathbb{N}$ resulta:

$$\begin{aligned}\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(n)\ \Rightarrow\ \ln(n)\ &=\ \int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots+\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ &\le\ \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{k}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

Es decir

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]\ge\lim_{n\to\infty}\ln(n)=+\infty\,.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty\,.$$

Una de las generalizaciones de la serie armónica es la función Zeta de Riemann[4]

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots,\quad \Re(z)>1\,.$$

[3]**Nicole D'Oresme** (1323-1382) Matemático francés que inventó la geometría coordenada antes de Descartes. Sobre la serie armónica consulte: http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html

[4]**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826 Hanover, Alemania - 1866 Selasca, Italia) Matemático alemán cuyas ideas sobre las geometría del espacio han tenido un profundo impacto en el desarrollo de la física teórica. Igualmente clarificó la noción de integral al introducir el concepto de lo que hoy se conoce como *integral de Riemann*. Más detalles en http://mathworld.wolfram.com/RiemannIntegral.html.

Borrador Preliminar

Esta última expresión es también un ejemplo donde a partir de una serie se define una función, en este caso una función analítica. Aquí z puede ser un número complejo, $z = a + ib$, y la serie converge cuando su parte real es mayor o igual a 1.

La función Zeta de Riemann viene también definida por:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^z}{x\,(e^x - 1)} \mathrm{d}x\,, \quad \text{donde} \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x^z e^{-x}}{x} \mathrm{d}x\,,$$

$\Gamma(z)$ es la función gamma.

Las mayoría de las series que hemos mencionado con anterioridad tienen la particularidad de que todos sus términos son positivos, es decir, para la serie $\sum a_n$ se tiene que $a_n \geq 0$, y por lo tanto:

$$s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}\,,$$

de manera que las sumas parciales s_n son una sucesión monótona creciente.

2.1.4. Derivación de series geométricas elementales

Las series infinitas se encuentran entre las más poderosas herramientas que se introducen en un curso de cálculo elemental. Son un ejercicio bastante inteligente para la manipulación de limites y son una buena herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales, en el desarrollo de métodos numéricos y para estimar el comportamiento de funciones.

Consideremos la serie geométrica:

$$a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n + \cdots$$

con $|z| < 1$. Este es uno de los pocos ejemplos donde se puede encontrar el término de las sumas parciales a través de una expresión sencilla. Esta serie se puede tomar como punto de partida para encontrar la suma de un gran número de series interesantes. Consideremos el caso $a = 1$ y $z = x$, como en la ecuación (2.8).

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.9}$$

Si cambiamos x por x^2 en (2.9) resulta:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.10}$$

Si se multiplica (2.10) por x se obtiene:

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.11}$$

Si cambiamos x por $-x$ en (2.9) resulta:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.12}$$

Si cambiamos x por x^2 en (2.12) resulta:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.13}$$

Borrador Preliminar

Si se multiplica (2.13) por x se obtiene:

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.14}$$

Si cambiamos x por $2x$ en (2.10) resulta:

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-4x^2}\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,. \tag{2.15}$$

Si se deriva (2.9) entonces:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.16}$$

Si se integra (2.12):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \ln(1+x)\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.17}$$

Si se integra (2.13) ahora resulta:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \arctan(x)\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2.18}$$

Siguiendo a Laplace, quien dijo que había que leer a Euler: "*Read Euler, read Euler. He is the master of us all*", podemos hacer lo siguiente con la serie (2.17):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{2.19}$$

Es bueno acotar que Euler utilizó esta expresión para construir ¡tablas de logaritmos!
Ahora hagamos lo siguiente, cambiemos x por $-x$ en la ecuación anterior:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \tag{2.20}$$

restando (2.19) menos (2.20):

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right] - \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\right] \\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots \end{aligned}$$

Es decir:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots$$

Para valores pequeños de x, digamos $x = 1/3$ resulta:

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \ln(2) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \cdots \approx 0{,}6930041152$$

Borrador Preliminar

Euler notó la siguiente conexión entre logaritmos y las series armónicas. Cambiando x por $1/n$ en (2.19) se obtiene

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\cdots$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-\cdots$$

y para valores de n muy grandes, se cumple que:

$$\frac{1}{n}=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Ahora bien, para diferentes valores de n se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{array}{rcl}
n=1 \;\Rightarrow\; 1 & = & \ln(2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots \\
n=2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} & = & \ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{64}-\cdots \\
n=3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3} & = & \ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{18}-\frac{1}{81}+\frac{1}{324}-\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\frac{1}{n} & = & \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-\cdots
\end{array}$$

Si sumamos columna por columna resulta:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]-\frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right] \\
&+ \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{n^4}\right]-\cdots
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la suma de los logaritmos de la primera línea se puede escribir como el logaritmo de sus productos, es decir,

$$\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left[2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\cdots\frac{n+1}{n}\right]=\ln(n+1)\,.$$

De manera que, y siguiendo a Euler que llevó a cabo un estimado para los términos sobrantes, resulta lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx\ln(n+1)+0{,}577218\,.$$

Para valores de n muy grandes la suma de las serie armónica es igual a un logaritmo más una constante. Esta constante es actualmente llamada la Constante de Euler y denotada por la letra γ:

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]\,. \tag{2.21}$$

Borrador Preliminar

La constante de Euler juega un papel central en otras ramas de las matemáticas, por ejemplo, en el análisis real aparece como:

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

2.1.5. El método de la diferencia

A veces para una serie finita, $\{s_N\}$, uno encuentra que para el término n-ésimo se tiene que:

$$a_n = f(n) - f(n-1)\,.$$

para alguna función $f(n)$.

En ese caso es inmediato demostrar lo siguiente:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \sum_{n=1}^{N} f(n-1) = f(N) - f(0)\,. \tag{2.22}$$

Por ejemplo, si tenemos la serie:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}\,,$$

se puede ver que:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; f(n) = -\frac{1}{n+1}\,,$$

por lo tanto, la suma se podrá expresar como:

$$s_N = f(N) - f(0) = -\frac{1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}\,.$$

Se puede ir más allá si identificamos que el término n-ésimo tiene la forma:

$$a_n = f(n) - f(n-m)\,,$$

por lo tanto, la suma de la serie se puede escribir como:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \sum_{n=1}^{N} f(n-m)\,. \tag{2.23}$$

Hay que hacer notar que el argumento $n-m$ puede ser positivo o negativo. Con lo cual el método de la diferencia resulta versátil y muy útil cuando se requiere encontrar la suma de series de variada dificultad. Podemos ver que:

- Si $m = 1$

  $$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = f(N) - f(0)\,.$$

  como la ecuación (2.22).

- Si $m = 2$

  $$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1)\,.$$

Borrador Preliminar

- Si $m = 3$

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = f(N) + f(N-1) + f(N-2) - f(0) - f(-1) - f(-2)\,.$$

Consideremos la siguiente serie y su expansión en fracciones simples

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)}\,,$$

se tiene que el término n-ésimo es:

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = -\frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2n} \;\Rightarrow\; f(n) = -\frac{1}{2(n+2)}\,,$$

de manera que:

$$a_n = f(n) - f(n-2) = -\frac{1}{2(n+2)} - \left(-\frac{1}{2n}\right)\,,$$

de forma y manera que, como $m = 2$, resulta:

$$s_N = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1}\right) = \frac{N\,(3\,N+5)}{4\,(N+1)\,(N+2)}\,.$$

Ahora bien, con alguna frecuencia surgen las series de números naturales. La más simple es:

$$s_N = 1 + 2 + 3 + \cdots + N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}\,,$$

es decir, una serie aritmética de razón $d = 1$.

Más interesante puede ser la serie de cuadrados de números enteros:

$$s_N = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\,.$$

Este resultado, nada intuitivo, surge de la aplicación ingeniosa del método de la diferencia. Tal y como hemos dicho, se trata de encontrar que el elemento genérico de la serie sea: $a_n = f(n) - f(n-1) = n^2$ para alguna función.

Suponga una función del tipo

$$f(n) = n(n+1)(2n+1) \;\Rightarrow\; f(n-1) = (n-1)n(2n-1)\,,$$

entonces:

$$f(n) - f(n-1) = n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1) = 6n^2\,,$$

con lo cual:

$$a_n = 6n^2 \;\Rightarrow\; s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{f(N) - f(0)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\,.$$

Borrador Preliminar

Sumando por analogía

Como siempre, intentaremos proceder por analogía. La intención es expresar una serie complicada como sumas de series conocidas. Considere el siguiente ejemplo:

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}(n+1)(n+3) = \sum_{n=1}^{N}\left(n^2+4n+3\right) = \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} 4n + \sum_{n=1}^{N} 3\,,$$

con lo cual:

$$s_N = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} + 3N = \frac{N(2N^2+15N+31)}{6}\,.$$

2.1.6. Algebra elemental de series

Las series se suman, se igualan y se multiplican. Para ello es importante que tengamos cuidado con los índices y sus valores. Consideremos un par de series infinitas:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,,$$

con lo cual la suma de esas series será:

$$u + v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\,.$$

Los índices son mudos y se acomodan para ser sumados.

Para sumar series es imperioso que los índices de cada serie comiencen con el mismo valor, esto es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + b_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)\,.$$

Nótese que hemos hecho los siguientes cambios: $j \to n$ y $n \to n-1$.

Algo parecido ocurre cuando las series se igualan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \;\Longleftrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - b_n\right] = 0\,.$$

Para finalizar se puede comprobar que las series también se pueden multiplicar:

$$u\,v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,,$$

donde:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0\,.$$

Cuando las sucesiones comprenden sumas y productos de otras sucesiones, es decir, sí u_k y v_k son dos sucesiones con $u_k \to U$ y $v_k \to V$ cuando $k \to \infty$, entonces se cumple que:

1. si a y b son números independientes de k, entonces $a u_k + b v_k \to aU + bV$ cuando $k \to \infty$.
2. $u_k v_k \to UV$ para $k \to \infty$.
3. si $V \neq 0$ entonces $u_k / v_k \to U/V$ a medida que $k \to \infty$.
4. si $u_k < v_k \;\forall\; k > N$ entonces $U \leq V$ cuando $k \to \infty$.

Borrador Preliminar

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cualquier resto de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces la propia serie también converge, y si además:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \quad s_i = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \quad r_i = \sum_{n=i+1}^{\infty} u_n \,.$$

Entonces:

$$S = s_i + r_i \,.$$

Se tiene entonces que es posible agregar o quitar un número finito de términos a la serie dada y esta operación no influirá sobre su convergencia. También se desprende del teorema anterior que si la serie converge entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} (S - s_i) = 0 \,.$$

2.1.7. Series telescópicas

Una propiedad importante de las series finitas es la propiedad denominada telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \,, \tag{2.24}$$

para el caso de series infinitas, se consideran aquellas series $\sum u_n$ donde cada término se puede expresar como una diferencia de la forma:

$$u_n = a_n - a_{n+1} \,.$$

Las series telescópica son series cuyas sumas parciales se van cancelando de manera tal que al final resulta un número fijo de términos:

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \,.$$

Teorema: Sean $\{u_n\}$ y $\{a_n\}$ dos sucesiones de números reales o complejos tales que:

$$u_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \,.$$

Entonces la serie $\sum u_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{a_n\}$ converge, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 - L \quad \text{donde} \quad L = \lim_{n\to\infty} a_n \,.$$

Consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} \,.$$

Podemos demostrar que:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \,,$$

Borrador Preliminar

Es fácil verificar que:

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=\left[1-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right]=1-\frac{1}{N+1}\,.$$

Pero si aplicamos el teorema anterior, tenemos entonces que: $a_n = 1/n$, $a_1 = 1$ y además ya vimos que la sucesión $a_n = 1/n$ converge:

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\,.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=1\,.$$

Las series pueden llegar a tener comportamientos extraños, como se ve con la siguiente serie armónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\,,$$

Recordemos que anteriormente estudiamos la serie geométrica (2.7), la cual volveremos a escribir pero está vez intercambiando $x \to -x$, de manera que nos queda de la siguiente forma:

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}=\frac{1}{1+x}\,. \tag{2.25}$$

Ecuación que es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 1$.

Integrando (2.25) entre 0 y 1 se obtiene:

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x &= \ln(2)\\ \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{(k-1)}}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x &= \ln(2)\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{(k-1)}}{k}=(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x\,.$$

Se puede ver también que:

$$\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+2}\;\Rightarrow\;\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{(k-1)}}{k}=\frac{1}{n+2}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln(2)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{(k-1)}}{k}\right]=0\;\Rightarrow\;\ln(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}}{n}\,.$$

La suma tienen el valor de $S = \ln(2)$.

Se puede mostrar lo que sucede si se arreglan los términos de la manera siguiente:

$$S=1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}\right)+\cdots\,,$$

Borrador Preliminar

la cual contiene exactamente los mismos términos, aunque en orden diferente, pero ahora la serie converge a $S = \frac{3}{2}\ln(2)$. Esta aparente contradicción surge cuando pasamos por alto el hecho de que al sumar los términos de una serie no se hace la suma con los infinitos términos, lo que hacemos es calcular un límite de una sucesión de términos que se obtienen sumando de manera consecutiva los términos de otra sucesión dada, es decir, lo que se hacemos es aplicar un proceso de límite. Para que al sumar no importe el orden de los sumandos tendríamos que sumar los infinitos términos de la sucesión.

A pesar de que las series pueden presentar estos comportamientos extraños, las series resultan muy buenas representaciones aproximadas de funciones, por ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{2.26}$$

La suma directa de una serie infinita no es un método práctico para estudiar su convergencia, por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}\,,$$

converge al valor $0,937548...$, pero para obtener estos primeros cinco decimales se tendría que sumar unos 10^7 términos!

Es necesario entonces desarrollar algunos criterios que nos permitan saber si una serie puede llegar a converger o no.

2.1.8. Ejemplos

1. Dada la sucesión $\{u_n\}$ de números reales, se llama sucesión de Cauchy o sucesión fundamental, en el caso de que satisfaga el requisito siguiente: dado un número real r positivo se pueda conseguir dos enteros positivos p y q tal que de $p > n_0$ y $q > n_0$ se deduzca que $|c_p - c_q| < r$?.

   En los números reales toda sucesión de Cauchy converge a algún límite. Esta particularidad implica un resultado importante en el análisis real que es la caracterización de Cauchy para la convergencia de sucesiones:

   Una sucesión de números reales es convergente (en los reales) si y solo si es de Cauchy.

2. Demuestre que

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

   Se tiene que

   $$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\,,$$

   y que al multiplicar por $\frac{1}{2}$ se obtiene

   $$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\,,$$

   restando

   $$\left[1 - \frac{1}{2}\right] s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$

   por lo tanto

   $$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{2^n}\right] = 1\,,$$

   la serie converge.

Borrador Preliminar

2.1.9. Practicando con Maxima

Maxima puede calcular fácilmente sumas numéricas finitas, pero cuando le pedimos calcular sumas simbólicas infinitas podrá calcularlas solo en casos particulares. Es útil al trabajar con series utilizar la librería **simplify_sum**

Veamos algunos ejemplos sencillos de sumas

```
(%i1) load(simplify_sum)$
(%i2) sum(n^2, n, 1, N);
```

(%o2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2$

```
(%i3) sum(1/n^2, n, 1, inf);
```

(%o3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

La función **sum** nos deja indicada la suma porque no hemos especificado el rango para los valores de la suma.

```
(%i4) sum(n^2, n, 1, 20);
```

(%o4) 2870

También podemos utilizar **float** o **numer** para pedirle al programa que nos escriba el valor numérico

```
(%i5) sum(1/n^2, n, 1, 1000),float;
```

(%o5) 1,643934566681561

Con las funciones **simpsum** o **simplify_sum** es posible que el programa realice la suma simbólica.

```
(%i6) sum(n^2, n, 1, N),simpsum;
```

(%o6) $\dfrac{2\,N^3+3\,N^2+N}{6}$

```
(%i7) simplify_sum(sum(n^2, n, 1, N));
```

(%o7) $\dfrac{2\,N^3+3\,N^2+N}{6}$

Con este último comando podemos escribir la expresión de la sumatoria de manera más elegante.

```
(%i8) sum(n^2, n, 1, N)=simplify_sum(sum(n^2, n, 1, N));
```

(%o8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{2\,N^3+3\,N^2+N}{6}$

Consideremos las siguientes series infinitas:

```
(%i9) sum(x^n/n!, n, 0, inf)=simplify_sum(sum(x^n/n!, n, 0, inf));
```

Borrador Preliminar

(%o9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

```
(%i10)sum(1/n^2, n, 1, inf)=simplify_sum(sum(1/n^2, n, 1, inf));
```

(%o10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Podemos ahorrarnos el estar escribiendo el término enésimo varias veces si definimos la función $f=f(n)$ en primer lugar.

```
(%i11)f:(-1)^(n-1)/n$ sum(f, n, 1,inf)=simplify_sum(sum(f, n, 1,inf));
```

(%o11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log(2)$

En el siguiente ejemplo el programa no podrá encontrar la serie de manera simbólica, pero como comentamos anteriormente, podemos evaluar la serie para algunos valores de N. En este caso, para N >10.000 el consumo en tiempo de cálculo para la computadora comienza a notarse.

```
(%i12)f:log(n)/n^2;
```

(%o12) $\dfrac{\log(n)}{n^2}$

```
(%i13)sum(f, n, 1,inf)=simplify_sum(sum(f, n, 1,inf));
```

(%o13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2}$

```
(%i14)sum(f,n,2,10),numer;sum(f,n,2,100),numer;sum(f,n,2,1000),numer;sum(f,n,2,10000),numer;
```

(%o14) 0,6185026440390787
(%o15) 0,8817261267819703
(%o16) 0,9296439518465429
(%o17) 0,9365272663288963

Este último ejercicio puede ser resuelto de una manera más eficiente si expresamos la función de variable discreta como una sucesión utilizando la opción de crear una lista, **makelist**, para evaluarla.

Primero escribimos la función discreta, note que usamos :=

```
(%i18)g[n]:=log([n])/[n]^2;
```

(%o18) $g_n:=\dfrac{\log([n])}{[n]^2}$

```
(%i19)makelist(sum(g[n],n,2,N),N,[10,100,1000,10000]),numer;
```

(%o19) [[0,6185026440390787], [0,8817261267819703], [0,9296439518465429], [0,9365272663288963]]

Por lo tanto, hacer cálculos con sucesiones es sencillo, veamos algunos ejemplo de sucesiones.

Definimos la siguiente sucesión, la de Fibonacci :

```
(%i20)kill(all)$
```

```
(%i1) F[1]:1$ F[2]:1$ F[n]:=F[n-1]+F[n-2];
```

Borrador Preliminar

(%o3) $F_n := F[n-1] + F[n-2]$

```
(%i4) makelist(F[n],n,1,15);
```

(%o4) $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610]$

Maxima ya contiene la sucesión de Fibonacci `fib(n)` en sus librerías de funciones propias. En este caso aplicaremos la función **map** para evaluar la sucesión en los diferentes valores de su argumento n

```
(%i5) fib(8);
```

(%o5) 21

```
(%i6) map (fib, [ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]);
```

(%o6) $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]$

Definamos ahora otra sucesión

```
(%i7) G[n]:=(-1)^n*(1+1/n);
```

(%o7) $G_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

```
(%i8) makelist(G[n],n,1,15);
```

(%o8) $\left[-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}, \frac{9}{8}, -\frac{10}{9}, \frac{11}{10}, -\frac{12}{11}, \frac{13}{12}, -\frac{14}{13}, \frac{15}{14}, -\frac{16}{15}\right]$

Podemos hacer operaciones básicas con sucesiones, como sumarlas

```
(%i9) S[n]:=F[n]+G[n]; makelist(S[n],n,1,15);
```

(%o9) $S_n := F_n + G_n$

(%o10) $\left[-1, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}, \frac{17}{4}, \frac{19}{5}, \frac{55}{6}, \frac{83}{7}, \frac{177}{8}, \frac{296}{9}, \frac{561}{10}, \frac{967}{11}, \frac{1741}{12}, \frac{3015}{13}, \frac{5293}{14}, \frac{9134}{15}\right]$

Operaciones combinadas

```
(%i11)C[n]:=3*F[n]-n*G[n]; makelist(C[n],n,1,15);
```

(%o11) $C_n := 3F_n - n\ G_n$

(%o12) $[5, 0, 10, 4, 21, 17, 47, 54, 112, 154, 279, 419, 713, 1116, 1846]$

Multiplicación

```
(%i13)M[n]:=F[n]*G[n]; makelist(M[n],n,1,15);
```

(%o13) $M_n := F_n\ G_n$

(%o14) $\left[-2, \frac{3}{2}, -\frac{8}{3}, \frac{15}{4}, -6, \frac{28}{3}, -\frac{104}{7}, \frac{189}{8}, -\frac{340}{9}, \frac{121}{2}, -\frac{1068}{11}, 156, -\frac{3262}{13}, \frac{5655}{14}, -\frac{1952}{3}\right]$

División

```
(%i15)D[n]:=F[n]/G[n]; makelist(M[n],n,1,15);
```

Borrador Preliminar

(%o15) $D_n := \dfrac{F_n}{G_n}$

(%o16) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{12}{5}, -\frac{25}{6}, \frac{48}{7}, -\frac{91}{8}, \frac{56}{3}, -\frac{153}{5}, 50, -\frac{979}{12}, \frac{1728}{13}, -\frac{3029}{14}, \frac{5278}{15}, -\frac{4575}{8}\right]$

Consideremos la siguiente sucesión:

```
(%i17)f[n]:=(n+1)/(2*n^2);
```

(%o17) $f_n := \dfrac{n+1}{2n^2}$

Para algún valor de n en particular:

```
(%i18)f[2];
```

(%o18) $\dfrac{3}{8}$

Para un conjunto de valores:

```
(%i19)makelist(f[n],n,1,15);
```

(%o19) $\left[1, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{5}{32}, \frac{3}{25}, \frac{7}{72}, \frac{4}{49}, \frac{9}{128}, \frac{5}{81}, \frac{11}{200}, \frac{6}{121}, \frac{13}{288}, \frac{7}{169}, \frac{15}{392}, \frac{8}{225}\right]$

Si queremos graficar la sucesión hacemos lo siguiente

```
(%i20)N[n]:=n$ LisN:makelist(N[n],n,1,50)$ Listf:makelist(f[n],n,1,50)$
(%i21)wxplot2d([discrete,LisN,Listf],[style,[points,2,2,1]],[xlabel,"n"],[ylabel,"f(n)"]);
```

(%o21)

Otro ejemplo de una sucesión que converge es el siguiente

Borrador Preliminar

```
(%i22)g[n]:=1+(-1)^n/(n);
```

(%o22) $g_n := 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

```
(%i23)Listg:makelist(g[n],n,1,50)$
(%i24)wxplot2d([discrete,LisN,Listg],[style,[points,2,2,4]],[xlabel,"n"],[ylabel,"g(n)"]);
```

(%o24)

2.1.10. Ejercicios

1. Encuentre la suma de los 100 primeros enteros.
2. Encuentre la distancia total que recorre una pelota que rebota verticalmente y que en cada rebote pierde 2/3 de su energía cinética.
3. Encuentre la suma de la serie $S = 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \cdots$.
4. Demuestre que

   a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

   b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

5. Determine el limite de las siguientes sucesiones cuando $n \to \infty$.

   a) $u_n = \frac{n}{n+1}$

Borrador Preliminar

b) $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

c) $u_n = \frac{n^2}{1+n}$

d) $u_n = \frac{(an+b)^2}{cn^2+d}$

6. Muestre que $s_N = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 = \sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

7. Demuestre que para $|x| < 1$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$

8. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right].$$

2.2. Criterios de convergencia

La pregunta que nos planteamos es la siguiente: Si hacemos que $N \to \infty$ entonces ¿la suma $\sum_{k=1}^{N} a_k$, tiene un límite? A pesar de que sólo podremos calcular la suma de algunas series, existen algunas formas de averiguarlo. Es decir, en la mayoría de los casos nos será imposible y nos tendremos que conformar con saber si convergen o no, o peor aún, si una suma parcial converge sin poder calcular el valor de esa suma.

Los términos de una serie pueden ser positivos, negativos o números complejos y las series pueden converger (decrecer o crecer hacia un valor finito) no converger (incrementar o decrecer indefinidamente) u oscilar. Existe una serie de criterios y teoremas de aplicación general que expondremos a continuación.

2.2.1. Convergencia absoluta o condicional

Para estudiar la convergencia de una serie infinita dada, $\sum a_i$ veremos que siempre podremos asociarle otra de la forma $\sum |a_i|$, es decir, la serie de valores absolutos, con lo cual garantizamos la positividad (y que sean números reales) de los términos de la serie. Si la serie de los valores absolutos $\sum |a_i|$ converge, entonces también convergerá la serie original $\sum a_i$ y diremos que esa serie es *absolutamente convergente*. Sin embargo si la serie de valores absolutos diverge, no podremos decir que $\sum a_i$ converja. De hecho, si converge diremos que es *condicionalmente convergente* y, con un rearreglo de sus términos podrá converger, diverger u oscilar.

Teorema: Si $\sum |a_n|$ converge, entonces también converge $\sum a_n$ y se tiene que:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Para una serie de términos positivos el criterio de convergencia más intuitivo (necesario pero no suficiente) es que en límite cuando $n \to \infty$ el término n-ésimo tienda a cero. Con lo cual tenemos que si esta condición no se satisface, la serie diverge.

Borrador Preliminar

Teorema: Si la serie $\sum a_n$ converge, el término n-ésimo tiende a cero, esto significa que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Notemos que para la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

sin embargo, como ya vimos anteriormente, esta serie diverge. Esto significa que el teorema suministra una condición suficiente para que exista la divergencia de la serie, es decir, si para el término n-ésimo de la serie a_n no se cumple que tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

Una serie que es convergente pero que no es absolutamente convergente es la siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2)$$

porque ya vimos que la serie de los valores absolutos asociada a la serie anterior es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la cual diverge.

2.2.2. Criterio de Comparación

En segundo lugar de simplicidad está el criterio de comparación entre un par de series de términos positivos. Si conocemos el comportamiento de una de ellas comparamos el de la otra. Esto es, suponga que consideramos dos series: una de prueba $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y una serie conocida y convergente (o divergente) $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n$, entonces

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge y } \forall\, n \text{ se tiene que } \tilde{a}_n \geqslant a_n \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Por otro lado

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ diverge y } \forall\, n \text{ se tiene que } 0 \leqslant \tilde{a}_n \leqslant a_n \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Para ilustrar esta estrategia consideremos la siguiente serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+1}$$

En ese caso la comparamos con una serie conocida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}_{e} = 1 + e$$

y es claro que la serie indicada no es otra cosa que e, con lo cual la serie claramente converge y su suma es $1 + e$.

Borrador Preliminar

2.2.3. Criterio de la Raíz

Dada una serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, el criterio de la raíz (o también de la raíz de Cauchy) puede resumirse en el siguiente par de afirmaciones. Sí:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho < 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \quad \Rightarrow \quad \text{converge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \quad \Rightarrow \quad \text{diverge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \quad \Rightarrow \quad (?)$$

Otra forma, más compacta de expresarlo sería

$$\text{Sí } \rho = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \quad \text{entonces:} \quad \begin{cases} \rho < 1 & \Rightarrow \quad \text{converge} \\ \rho > 1 & \Rightarrow \quad \text{diverge} \\ \rho = 1 & \Rightarrow \quad (?) \end{cases}$$

Es fácil ver que si utilizamos el criterio de comparación, entonces

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho \qquad \Rightarrow a_n \leqslant \rho^n \qquad \Rightarrow \begin{cases} \text{cuando } \rho < 1 & \text{la serie converge} \\ \text{cuando } \rho \geqslant 1 & \text{la serie diverge} \end{cases}$$

Dada la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1}\right]^{n^2},$$

por lo tanto:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{n}{n+1}\right]^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \Rightarrow \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

La serie converge.

2.2.4. Criterio de d'Alembert

Dada una serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, el criterio de d'Alembert[5] o también llamado criterio del cociente, compara el valor relativo de un término de la serie con el que le precede. Este criterio se resume también fácilmente

$$\text{Si } \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{entonces:} \quad \begin{cases} \rho < 1 & \Rightarrow \quad \text{converge} \\ \rho > 1 & \Rightarrow \quad \text{diverge} \\ \rho = 1 & \Rightarrow \quad \text{indeterminado} \end{cases}$$

[5] **Jean Le Rond d'Alembert** París, Francia 1717 - 1783. Matemático francés pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y su utilización en la Física, en particular en el estudio de los fluídos. Más detalles en http://es.wikipedia.org/wiki/Jean_Le_Rond_d'Alembert

Borrador Preliminar

Nótese que si

$$\rho < 1 \;\Rightarrow\; \rho < x < 1 \;\Rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} < x \;\Rightarrow\; a_{n+1} = a_n x\,.$$

Entonces para un $N < n$, pero también suficientemente grande, tendremos que los términos de la serie a partir de ese N serán

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} \cdots = a_N + x a_N + x^2 a_N + x^3 a_N \cdots = a_N \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots\right)$$

y que no es otra cosa que una serie geométrica con razón $x < 1$ y por consiguiente converge. Es claro que un argumento similar se puede utilizar para probar la divergencia.

Un ejemplo inmediato lo constituye la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \;\Rightarrow\; \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2} < 1\,,$$

con lo cual tiene que converger.

2.2.5. Criterio de la Integral de Maclaurin

El criterio de la Integral de Maclaurin[6] es otro criterio de comparación, pero esta vez se compara la serie con una integral. Así supondremos que existe una función $f(x)$ continua y monótonamente decreciente para un valor de $x \geqslant x_0$ y que, adicionalmente, se cumple que para algún valor entero $x = n$ el valor de la función es igual a un término de la serie, esto es, $f(n) = a_n$. Entonces se tendrá que si el límite $\lim_{N\to\infty} \int^N \mathrm{d}x\; f(x)$ existe y es finito, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por el contrario si el límite no existe o es infinito, entonces diverge.

La idea de este criterio es comparar la integral de $f(x)$ (el área bajo la curva) con la suma de rectángulos que representa la serie. Entonces, la suma parcial

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} a_n \equiv \sum_{n=1}^{i} f(n)\,.$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{l} s_i > \int_1^{i+1} \mathrm{d}x\; f(x) \\ s_i - a_1 < \int_1^{i} \mathrm{d}x\; f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^{i+1} \mathrm{d}x\; f(x) \leq s_i \leq \int_1^{i} \mathrm{d}x\; f(x) + a_1$$

donde $a_1 = f(1)$, con lo cual, al hacer $i \to \infty$ tendremos que si el límite de la integral existe, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$$\int_1^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) + a_1$$

Un ejemplo inmediato podría ser determinar si la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{3}{2}\right)^2}\,.$$

[6] **Colin Maclaurin** 1698, Argyllshire, Escocia - 1746 Edinburgo, Escocia. Matemático escocés quien escribió el *Tratado de los Fluxiones* el primer tratado que expuso de una manera sistemática y rigurosa el cálculo diferencial ideado por Newton. Este tratado fue como respuesta a la crítica de Berkeley sobre la falta de rigurosidad de los métodos Newton.

Borrador Preliminar

Figura 2.5: El criterio de la integral

Hacemos

$$f(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \;\Rightarrow\; \int^N \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \mathrm{d}x = \frac{-1}{N - \frac{3}{2}},$$

debemos ahora calcular el límite

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{-1}{N - \frac{3}{2}} \right) = 0$$

con lo cual claramente converge.

Este criterio es muy útil para acotar (entre un ínfimo y un supremo) el residuo de una determinada serie. Vale decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n}_{\text{Residuo}} \;\Rightarrow\; \int_{N+1}^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_{N+1}^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) + a_{N+1}\,.$$

Podemos comprobar que la función Zeta de Riemann,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}\,,$$

efectivamente converge. En este caso $f(x) = x^{-z}$, entonces

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \;\Rightarrow\; \int_1^{\infty} \mathrm{d}x\; x^{-z} = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-z}}{1-z}\right|_1^{\infty} & \text{Para } z \neq 1 \\ \ln(x)|_1^{\infty} & \text{Para } z = 1 \end{cases}$$

y es claro que para $z > 1$ el límite existe y es finito, por lo tanto, la función Zeta de Riemann, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$, converge para $z > 1$.

Borrador Preliminar

2.2.6. Series alternantes y convergencia condicional

Hasta ahora todos los criterios que analizamos eran para una serie de términos positivos, por lo cual todos esos criterios nos llevaban al concepto de series absolutamente convergente. Esto es, si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también converge. Sin embargo, muchas veces nos tendremos que conformar con que una serie sea simplemente convergente y no requerir que sea absolutamente convergente. Este es el caso de las series alternantes. Series en las cuales se alternan términos positivos y negativos:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)_n^{n+1} \quad \text{con } a_n \geq 0\,.$$

Entonces, si la serie es monótona decreciente para un n suficientemente grande tenemos lo que se denomina el Criterio de Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ converge, si: } \quad \begin{cases} a_n > a_{n-1} & \forall \quad n > N \\ & \wedge \\ a_n \to 0 & \text{cuando } n \to \infty \end{cases}$$

De otro modo la serie oscilará.

Estas condiciones son fáciles de ver si reorganizamos la serie de los primeros $2m$ términos, a partir de un determinado N par y $N > n$, entonces

$$s_{2m} = (a_N - a_{N-1}) + (a_{N-2} - a_{N-3}) + \cdots + (a_{N+2m-2} - a_{N+2m-1})\,,$$

donde todos los paréntesis son positivos, con lo cual $s_{2m} > 0$ y se incrementa al incrementar m. Ahora bien, si rearreglamos la serie tendremos que

$$s_{2m} = a_N - (a_{N-1} - a_{N-2}) - (a_{N-3} - a_{N-4}) + \cdots - (a_{N+2m-1} - a_{N+2m-2}) - a_{N+2m-1}\,,$$

donde, otra vez los paréntesis son positivos y es inmediato comprobar que entonces $s_{2m} < a_n$ para todo m.

Como $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, la serie alternante necesariamente converge.

La series alternantes ya eran conocidas desde hace mucho tiempo, como por ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots\,.$$

Esta serie converge y su suma es $\ln(1+x)$ para $-1 < x \leq 1$. Para x positivo es una serie alternante y en el caso particular de $x = 1$ se tiene:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) + \cdots = \ln(2)\,.$$

Otra relación interesante es:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1}\right) + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Consideremos ahora el siguiente teorema:

Borrador Preliminar

Teorema: Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite igual a cero, la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,,$$

converge.

Si S es su suma y s_n su suma parcial n-ésima, se tiene que:

$$0 < (-1)^n\,(S - s_n) < a_{n+1} \quad \text{para} \quad n \geq 1\,.$$

Consideremos la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\,.$$

Sabemos que $1/n$ es una sucesión monótona decreciente y que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\,,$$

por lo tanto, de acuerdo al teorema anterior la serie converge; como ya hemos visto.

Consideremos ahora la serie

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{2n} = \int_n^{n+1}\frac{dx}{x} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Por otro lado, se tiene también que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,$$

y que a_n es monótona decreciente, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,,$$

converge.

2.2.7. Ejemplos

Borrador Preliminar

2.2.8. Practicando con Maxima

Demostremos que determinada sucesión converge a partir de la definición de límite. Consideremos la siguiente sucesión de número reales:

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}$$

convergente y de límite $L = 1$.

Aplicaremos la definición de límite, es decir, utilizaremos la condición para la existencia de un límite L, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|L - a_n| < \varepsilon \quad \text{para } n > N \;\Rightarrow\; |s_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{para, todo} \;\; n, m > N\,.$$

Consideremos la siguiente sucesión:

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}\,.$$

```
(%i1) a[n]:=(n-1)/(n+2);
```

(%o1) $a_n := \dfrac{n-1}{n+2}$

Calculemos $|L - a_n|$, con $L = 1$

```
(%i2) I1:(factor(1-a[n]));
```

(%o2) $\dfrac{3}{n+2}$

Entonces $\frac{3}{n+2} < \varepsilon$ para todo $n > N$. Lo que implica que

$$\varepsilon - \frac{3}{n+2} > 0$$

```
(%i3) I2:factor(epsilon-I1);
```

(%o3) $\dfrac{\varepsilon\, n + 2\,\varepsilon - 3}{n+2}$

Lo que tenemos entonces es:

$$\frac{\varepsilon\, n + 2\,\varepsilon - 3}{n+2} > 0\,,$$

para todo $n > N$. Despejemos n de la desigualdad.

```
(%i4) sol:solve(I2=0,n);
```

(%o4) $\left[n = -\dfrac{2\,\varepsilon - 3}{\varepsilon}\right]$

```
(%i5) I3:rhs(sol[1]);
```

(%o5) $-\dfrac{2\,\varepsilon - 3}{\varepsilon}$

Borrador Preliminar

Por lo tanto

$$n > -\frac{2\,\varepsilon - 3}{\varepsilon}\,.$$

Entonces, dado un ε, y por muy pequeño que éste sea, se tiene

```
(%i6) epsilon:0.01; N:I3,numer; assume(n>N)$ is(I1<epsilon);
```

(%o6) 0.01
(%o7) 298.0
(%o8) `true`

```
(%i9) epsilon:0.0001; N:I3,numer; assume(n>N)$ is(I1<epsilon);
```

(%o9) 1.0×10^{-4}
(%o10) 29998.0
(%o11) `true`

```
(%i12)epsilon:0.000001; N:I3,numer; assume(n>N)$ is(I1<epsilon);
```

(%o12) $9.999999999999999 \times 10^{-7}$
(%o13) 2999998.0
(%o14) `true`

Este procedimiento que podemos seguir haciendo para ε cada vez más pequeño, pero siempre con $\varepsilon > 0$. La condición se seguirá cumpliendo para un N que se incrementará a medida que ε se tiende a cero.

Es claro que también podemos escribir

```
(%i15)'limit(a[n],n,inf)=limit(a[n],n,inf);
```

(%o15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+2} = 1$

```
> restart:
> assume(p>1):
> Limit(Int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity)=
limit(int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity);
> assume(p<=1):
> Limit(Int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity)=
limit(int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity);
```

2.2.9. Ejercicios

1. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series

   a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

   b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

Borrador Preliminar

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n$$

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{5^n} x^n$$

e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[3+(-1)^n]^n}$$

f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+(-1)^n}}$$

2.3. Series de funciones

La idea de series se puede ampliar al permitir que sus términos sean función de alguna variable (una o varias), esto es $a_n = a_n(x)$. Esta extensión del concepto se serie, trae como consecuencia que ahora las sumas parciales dependen de x

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots ,$$

con lo cual, si

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) ,$$

entonces, el comportamiento de las serie también dependerá de la variable.

La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros. El punto central con las series de funciones $f(x)$ complicadas es la de tratar de construir funciones como una serie de términos, $a_k(x)$, más simples. Así, esas sumas parciales $f_n(x)$ constituirán la función deseada

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) .$$

Estaremos interesados en aquellas funciones a las cuales converjan las sumas parciales de una serie. Para fijar conceptos, comenzaremos por las series de funciones más comunes: Las Series de Potencias.

2.3.1. Series de potencias

Asociaremos una serie de potencias $a_n = c_n x^n$ a un polinomio de grado infinito.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ , o también } P(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x-x_0\right)^n .$$

Esta asociación tiene la ventaja de permitirnos intuir algunos comportamientos de la serie para algunos valores de x. Los coeficientes c_n son números independientes de x. Pero, más aún, estas series pueden ser series de potencias de número complejos. Vale decir, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ con $z = x + iy$.

Borrador Preliminar

2.3.2. Convergencia de una serie de potencias

Se pueden utilizar todos los criterios que hemos desarrollado anteriormente. Así una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge en un punto x_0 si el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

existe, para $x = x_0$, para todo x o para algunos x.

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ convergerá absolutamente sí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left| c_j (x-x_0)^j \right| = \rho\,, \qquad \text{existe.}$$

También se cumplirá el criterio de convergencia absoluta. Esto es, si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-x_0)^n|$ converge, entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ converge, pero el inverso no es siempre verdad.

Los criterios más populares para evaluar la convergencia, se seguirán cumpliendo. Así el criterio de d'Alembert y el de la raíz de Cauchy se podrán reescribir como:

$$\rho(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n (x-x_0)^n} \right| \\[2ex] \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n (x-x_0)^n} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \rho(x) < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{converge} \\[2ex] \rho(x) > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{diverge} \end{array}$$

Sólo que ahora es bueno enfatizar que $\rho = \rho(x)$ dependerá de la variable. Llamaremos, de ahora en adelante a este límite el *radio o entorno de convergencia*, el cual delimitará los valores de x para que la serie de potencias converja.

Consideremos el siguiente ejemplo, dada la serie

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0\,,$$

es decir,

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0\,,$$

con lo cual la serie converge para todo valor de x.

Para puntualizar:

- Si una serie converge en $x = x_1$, convergerá absolutamente para $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ y divergerá para $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.
- Se llama radio de convergencia, $\rho = \rho(x)$ a aquella cantidad tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ converge para $|x - x_0| < \rho$ y diverge para $|x - x_0| > \rho$.

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ que converge únicamente para $x = x_0$ tendrá un radio de convergencia $\rho = 0$, mientras que una que converja para todo x tendrá un radio de convergencia $\rho = \infty$.

Borrador Preliminar

2.3.3. Convergencia uniforme

Se puede refrasear el criterio de convergencia de Cauchy que vimos anteriormente. Para cualquier valor de $\epsilon > 0$, tan pequeño como uno quiera, siempre existirá un número N **independiente de** x, con $a \leq x \leq b$, tal que:

$$\text{si } S(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \;\Rightarrow\; |S(x) - s_n(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in [a,b] \;\wedge\; n \geq N.$$

Con ello es inmediato identificar el error que se comete cuando se corta la serie en un N suficientemente grande

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n(x)}_{s_n(x)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x)}_{\approx\epsilon}$$

Hay que resaltar el hecho de que las suma de funciones continuas $a_n(x)$ no necesariamente habrá de ser continua, el concepto de convergencia uniforme busca garantizar que esa suma de funciones continuas también sea continua.

Recordemos la idea de continuidad de una función. Una función será continua si sus límites por la derecha y por izquierda coinciden

$$\lim_{t\to x^{\pm}} f(t) = f(x)$$

Por otro lado, a partir del hecho de que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

es valido preguntarse si el límite de la sucesión de sumas parciales es continua, esto es:

$$\lim_{t\to x^{\pm}} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{t\to x^{\pm}} f_n(x)\right].$$

Es decir, al suponer que la suma de términos continuos tiende a una función continua estamos suponiendo que podemos intercambiar los límites, pero eso no es siempre cierto. Consideremos el caso (extremo)

$$f_n = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n \text{ con: } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = 0$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, f_n(x) = \frac{n^2}{2(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x\, f_n \to \infty$$

Claramente no se pueden intercambiar los límites.

Por ejemplo, sea la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^k} + \cdots,$$

de manera que

$$a_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

Borrador Preliminar

Como

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \forall \quad x \neq 0\,,$$

la serie es absolutamente convergente $\forall\, x$ $(x \neq 0)$.

Sin embargo, tenemos que $f(0) = 0$. El término n-ésimo para la suma parcial es

$$f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+x^2)^k} = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = 1 + x^2 - \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n}\,,$$

como $1 + x^2 > 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 + x^2\,, \qquad x \neq 0\,.$$

pero hemos establecido que $f(0) = 0$ de manera que $f(x)$ no es continua.

Para el caso de series de funciones, existen un par de criterios que identifican la convergencia uniforme. El criterio Mayorante de Weierstrass[7] y el criterio de Abel[8]. Estos criterios desarrollan la noción de convergencia uniforme la cual es necesaria para asegurar el intercambio en los límites.

2.3.4. Criterio Mayorante de Weierstrass

La idea de convergencia uniforme se introduce para garantizar que la sumas infinitas de un conjunto de funciones sea continua.

Una condición suficiente, pero no necesaria, para que la serie

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

sea uniformemente convergente es dada por la condición de Weierstrass:

Si encontramos una serie convergente de números positivos

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \quad \text{con } M_i \geq |a_i(x)| \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es **uniformemente** convergente.

La demostración se obtiene a partir de la definición misma de convergencia. Si $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ converge, entonces para $n + 1 \geq N$ se tiene

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon \text{ y como } |a_i(x)| \leq M_i \;\Rightarrow\; \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_i(x)| < \epsilon \;\Rightarrow\; |S(x) - s_n(x)| \equiv \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_i(x)| < \epsilon$$

con la cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ será uniformemente convergente para todo $x \in [a,b]$.

Ahora bien, como consideramos los $M_i \geq 0$. La serie en cuestión también será absolutamente convergente. Otra vez, los criterios de convergencia absoluta y, en este caso, de convergencia uniforme, no son consecuencia uno del otro, ni están relacionados.

[7] **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815 - 1897). Matemático Alemán con importantes contribuciones al análisis complejo mediante la utilización de series.

[8] **Niels Henrik Abel** (1802-1829). Matemático Noruego. Su primera mayor aportación fue la prueba de la imposibilidad de resolución algebraica de la ecuación quíntica mediante radicales.

Borrador Preliminar

Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \qquad \wedge \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

convergen uniformemente pero NO absolutamente.

Sin embargo, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ la serie $\sum_{j=0}^{\infty}(1-x)x^j$ converge absolutamente pero no uniformemente, por cuanto tiene una discontinuidad. Se puede demostrar que

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1-x)x^j = \begin{cases} 1\,, & 0 \leq x < 1 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$$

con lo cual se puede concluir que una serie arbitraria $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i(x)$ no podrá converger uniformemente en intervalos en los cuales la función $f(x)$ sea discontinua.

Por ejemplo, la serie

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2^2}\cos^2(x) + \frac{1}{3^2}\cos^3(x) + \cdots$$

es uniformemente convergente, porque al tomar $M_k = 1/k^2$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,,$$

converge a $\pi^2/6$.

2.3.5. Criterio de Abel

El criterio de Abel se puede resumir de la siguiente manera. Sí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \;\; \wedge \;\; a_i(x) = c_i(x) f_i(x)\,,$$

donde $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x)$ converge, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} c_i(x) = S\,,$$

entonces la serie *converge uniformemente* en $[a, b]$.

Para que se cumpla el criterio de Abel, $f_n(x)$ tiene que estar acotada ($0 \leq f_n \leq M \;\forall\, n$) y tiene que ser monótonamente decreciente en el intervalo en el cual esté definida, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ con $x \in [a, b]$.

En resumen, si la serie

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es uniformemente convergente para $a \leq x \leq b$, entonces es posible integrar y diferenciar término por término.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}x} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_k(x)\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

donde $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

La convergencia uniforme no implica convergencia absoluta y convergencia absoluta no implica convergencia uniforme, como se vio anteriormente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} ,$$

es absolutamente convergente pero no uniformemente convergente cerca de $x = 0$.

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad de comportarse como las series finitas, los términos pueden ser multiplicados e intercambiado el orden de la suma. Las series uniformemente convergentes se comportan como las series finitas donde la serie es continua si cada término de la serie también lo es.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{3+x^2} + \cdots$$

es únicamente condicionalmente convergente, pero, es también uniformemente convergente.

2.3.6. Algebra elemental de series de potencias

El álgebra elemental de series se puede reconsiderar a la luz de las series de potencias. De esta forma recordamos que los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ n \ (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \ j \ (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \ (k+1) \ (x-x_0)^k$$

en la última sumatoria hemos hecho $k = j - 1$, por lo cual $j = k + 1$.

Las series se igualan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ n \ (x-x_0)^{n-1}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \ (k+1) \ (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \ (n+1) \ (x-x_0)^n$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1} \ (n+1) \ .$$

Si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ n \ (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \ (n+1) \ (x-x_0)^n \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1 (x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x-x_0)^n$$

Borrador Preliminar

o también

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (x-x_0)^{k+2} &= a_0 + a_1 (x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + c_{n-2})(x-x_0)^n \ ,\end{aligned}$$

y en este último caso $c_{-2} = c_{-1} = 0$ y $c_i = b_{i+2}$.

Nótese como en los dos ejemplos anteriores hemos hecho coincidir los dos índices de la sumatoria desde el comienzo.

La series también se multiplican, esto es

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Si alguna de las series de potencias es absolutamente convergente, entonces su multiplicación con otra, será absolutamente convergente.

Pero también las series de potencias se ¡invierten! y para ello utilizamos todo lo visto anteriormente veamos. Supongamos que se tiene una serie del tipo

$$y - y_0 = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Es decir tenemos $y - y_0$ expresado en términos de una serie de potencias de $(x-x_0)^n$ entonces, igual podremos plantearnos invertir el proceso, vale decir, expresar $(x-x_0)$ en términos de potencias $(y-y_0)^n$ Esto es

$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y-y_0)^n \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-x_0)^j\right]^k$$

y al igualar términos con la misma potencia, despejamos los coeficientes b_n en términos de los a_n, de forma que

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1} \\ b_2 &= -\frac{a_2}{(a_1)^3} \\ b_3 &= \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \\ b_4 &= \frac{5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3}{(a_1)^7} \\ \vdots &= \qquad \vdots \end{aligned}$$

Igualmente, si una serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ converge para un entorno $-R \leq x \leq R$ entonces por el criterio de Mayorante de Weierstrass, convergerá absoluta y uniformemente para $-S \leq x \leq S$ con $0 \leq S \leq R$.

Más aún, el criterio de Abel nos garantiza las siguientes propiedades:

Borrador Preliminar

- Dado que todos los términos $a_n(x) = c_n\,(x-x_0)^n$ son funciones continuas de x y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ converge uniformemente para un entorno $-S \leq x \leq S$, entonces la función $f(x)$ es continua en el intervalo de convergencia.

- Si los términos $a_n(x) = c_n\,(x-x_0)^n$ son funciones continuas de x, entonces la serie puede ser derivada término a término
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\;n\;\;(x-x_0)^{n-1}$$
(nótese como cambia el comienzo de la serie) y convergerá a
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\;n\;\;(x-x_0)^{n-1} \to \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad a_n(x)\;\wedge\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_n(x) \quad \text{continuas}\;\wedge\;\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\,,$$
converge uniformemente en $[a,b]$.

- De igual manera las series pueden ser integradas término a término
$$\int_a^b \mathrm{d}x\;f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\;\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \mathrm{d}x\;c_n\,(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}\,(x-x_0)^{n+1}\;.$$

2.3.7. Ejemplos

1. Otro caso ocurre cuando consideramos la siguiente serie de potencias:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\;\;n\;\;(x-2)^n = x-2-2\,(x-2)^2+3\,(x-2)^3-4\,(x-2)^4+\cdots\,,$$
por lo tanto:
$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\;\;(n+1)\;\;(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}\;\;n\;\;(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = |x-2|$$
lo que implica que la serie:
$$\text{converge si: } |x-2|<1 \Rightarrow\;1<x<3 \quad \text{y} \quad \text{diverge si: } |x-2|>1\,.$$
Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\;\;n\;\;(x-2)^n$ convergerá únicamente para $1<x<3$. Para otros valores de x, diverge.

2. Dada la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1]\,[nx+1]}\,,$$
cuya suma n-ésima parcial es
$$s_n(x) = \frac{nx}{nx+1}\,.$$
La función $s_n(x)$ es una función continua de $x\;\forall\;0\leq x\leq 1$, y para todo n. Por otro lado,
$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0\,,\;\text{si}\;\;x=0 \\ S(x) &= \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1\,,\;\text{si}\;\;x\neq 0\,. \end{aligned}$$
Existe una discontinuidad en $x=0$ para $S(x)$ y por lo tanto la condición (2.3.3) no se cumplirá.

Borrador Preliminar

3. Para ejemplificar el álgebra de las series de potencias utilizaremos una ecuación diferencial muy conocida. La ecuación del oscilador armónico
$$y'' + y = 0\,,$$
se propone encontrar una solución entorno a $x = 0$, por lo tanto, consideramos la siguiente función de prueba
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$
entonces, al derivar:
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2}\,,$$
y sustituir en la ecuación diferencial
$$\begin{aligned} y'' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} + a_k\right] x^k = 0\,. \end{aligned}$$
Por lo tanto
$$(k+2)\,(k+1)\,a_{k+2} + a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)\,(k+1)} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
se puede ver que:
$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1}; \quad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3} = \frac{-1}{4\cdot 3}\cdot\frac{(-a_0)}{2} = \frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{a_0}{4!}; \quad a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{a_0}{6!}\,.$$
Y en general
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0\,.$$
Similarmente, para los coeficientes impares se obtiene
$$a_3 = -\frac{a_1}{3\cdot 2}; \quad a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = \frac{-1}{5\cdot 4}\cdot\frac{(-a_1)}{3\cdot 2} = \frac{a_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{a_1}{5!}; \quad a_7 = -\frac{a_5}{7\cdot 6} = -\frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{a_1}{7!}\,,$$
de donde
$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1\,.$$
De este modo, la solución deseada queda como
$$\begin{aligned} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \frac{(-a_0)}{2!}x^2 + \frac{(-a_1)}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \frac{(-a_0)}{6!}x^6 + \frac{(-a_1)}{7!}x^7 + \cdots \\ &= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right] \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = a_0 \cos(x) + a_1 \mathrm{sen}(x)\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

2.3.8. Practicando con Maxima

2.3.9. Ejercicios

1. Demuestre que la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}\,,$$
es uniformemente y condicionalmente convergente.

2. Demuestre que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2}\,,$$
converge uniformemente, pero no absolutamente.

3. Determine el radio de convergencia de la serie
$$\frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{a+\sqrt{2}} + \frac{x^3}{a+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{x^n}{a+\sqrt{n}} + \cdots$$
donde a es un número real y positivo. Determine si la serie es o no uniformemente convergente.

4. Considere la siguiente sucesión
$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$
demuestre que:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \neq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\,,$$

5. Discuta la convergencia de las siguientes series

   a)
$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$$

   b)
$$\left(a - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n}\right) + \cdots$$
   donde a y b son constantes positivas.

6. Utilizando fracciones parciales, demuestre que

   a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)(k+5)} = \frac{23}{480}$$

   b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-2}{k(k+1)(k+2)} = 1\,.$$

Borrador Preliminar

7. Consideremos la ecuación de Airy[9], pero inhomogéna. A pesar de su simplicidad, esta ecuación admite sólo soluciones en forma de serie.

   a) Una vez mas proponga una solución $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, y siguiendo el procedimiento expuesto en el ejemplo resuelva la ecuación homogénea de Airy: $y'' - xy = 0$. Muestre que la solución es de la forma

$$y\,(x) = y(0)\left[1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right] + y'(0)\left[x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots\right].$$

   b) Acto seguido, resuelva del mismo modo la ecuación inhomogénea de Airy $y''-xy = x^2$. Compruebe que esta ecuación tiene como solución

$$y\,(x) = y(0)\left[1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right] + y'(0)\left[x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots\right] - x\,.$$

   Nótese que los dos primeros términos corresponden a la solución de la ecuación homogénea y el último representa la serie que anula el término inhomogéneo. Hemos hecho patente la dependencia de las constantes de integración de las condiciones iniciales y que además la solución de una ecuación diferencial inhomogénea es la suma de la solución de la homogénea, mas la solución particular que anula el término inhomogéneo.

2.4. Serie de Taylor

Para los físicos el uso apropiado (y frecuente) de la serie Taylor facilita muchos cálculos. La idea detrás de este tipo de series es la de la aproximación de una determinada función por una serie de potencias en donde existe una forma sistemática de construir los coeficientes y, dependiendo de el número de términos que utilicemos en la serie, tendremos una idea de cuan aproximada es la serie y cuanto es el error que cometemos al desarrollar la serie hasta un determinado término. Así supondremos que $f = f(x)$ es una función continua y continuamente diferenciable. Con lo cual, si denotamos $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, entonces supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.

De cursos anteriores se sabe que:

$$\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\; f'(x) = f(a+h) - f(a) \;\Rightarrow\; f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\; f'(x) \;\Rightarrow\; f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)\,,$$

donde hemos supuesto que en intervalo $[a, a+h]$ la función $f'(x)$ es constante y tiene como valor $f'(a)$. Ahora bien, esto vale para todo x y para cualquier función, por lo tanto se cumple que:

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx \quad f(a) + (x-a)f'(a)\,,\\
f'(x) &\approx \quad f'(a) + (x-a)f''(a)\,,\\
f''(x) &\approx \quad f''(a) + (x-a)f'''(a)\,,\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
f^{(n-1)}(x) &\approx \quad f^{(n-1)}(a) + (x-a)f^{(n)}(a)\,.
\end{aligned}$$

[9] **George Biddell Airy** (1801-1892) Matemático y Astrónomo Inglés con contribuciones importantes en la solución de ecuaciones diferenciales y su utilización en Astronomía. Mejoró significativamente las estimaciones teóricas de la órbita de Venus y la Luna. Realizó estudios matemáticos de la formación del arcoiris y la densidad de la tierra.

Borrador Preliminar

Con lo cual podemos construir

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) \approx f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\,[f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a)\,,$$

que no es otra cosa que una aproximación de segundo orden a $f(a+h)$. En general podemos construir

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ \left[f'(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f''(x)\right] \\
&= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}v\ \left[\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f''(x)\right] \\
&= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}u\ \left(\int_a^{a+h} \mathrm{d}v\ \left[f''(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'''(x)\right]\right) \\
&= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}u\ \left(\int_a^{a+h} \mathrm{d}v\ \left[\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'''(x)\right]\right)
\end{aligned}$$

y si repetimos ese procedimiento n veces, suponiendo que las derivadas de $f(x)$ existan, tendremos la aproximación $n-1$ a la función. Esto es

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$$

y también es fácil convencerse por inspección que el residuo o el error que cometemos en la aproximación $n-1$ viene dado por la integración enésima de la derivada enésima, vale decir

$$\mathcal{R}_n = \int_a^{a+h} \mathrm{d}u \int_a^{a+h} \mathrm{d}v \underbrace{\cdots\ \cdots}_{n \text{ veces}} \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'''(x)$$

y por el Teorema del Valor medio

$$\int_a^{a+h} \mathrm{d}\tau g(\tau) = hg(\xi) \quad \Rightarrow \mathcal{R}_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \le \xi \le a+h$$

Ahora bien, una elección astuta del parámetro $h = x - a$ nos lleva a la conocida expresión de la serie de Taylor para una función de una variable

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$$

y el error vendrá dado por

$$\mathcal{R}_n = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \le \xi \le a+h$$

así la expansión de Taylor especifica el valor de una función en un punto x en términos de el valor de la función y sus derivadas en un punto de referencia a. La expansión se hace en términos de potencias de la diferencia, $(x-a)$, entre el punto que se evalúa y el punto de referencia.

Borrador Preliminar

Algunas otras formas de expresar la serie de Taylor, serían

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}}{n!}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n\mathbb{D}^n}{n!}f(x)=e^{h\mathbb{D}}f(x)\quad\text{donde, }\mathbb{D}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

Si el punto de referencia es $a=0$ tendremos la serie de Maclaurin

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\mathcal{R}_n$$

2.4.1. Algunas series de Taylor

Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad \text{para } -\infty<x<\infty\\
\operatorname{sen}(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \quad \text{para } -\infty<x<\infty\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots \quad \text{para } -\infty<x<\infty\\
\arctan(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\cdots \quad \text{para } -1<x<1\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad \text{para } -1<x<1\\
(1+x)^m &= 1+mx+m(m-1)\frac{x^2}{2}+m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{m!}{n!(m-n)!}x^n+\cdots \quad \forall\, x
\end{aligned}$$

Si tenemos una función y queremos determinar su serie de potencias, es posible que los cálculos se simplifiquen notablemente si utilizamos apropiadamente las series elementales anteriores, por ejemplo:

$$e^{\alpha x^2+\beta x}=1+\left(\alpha x^2+\beta x\right)+\frac{\left(\alpha x^2+\beta x\right)^2}{2}+\frac{\left(\alpha x^2+\beta x\right)^3}{3!}+\frac{\left(\alpha x^2+\beta x\right)^4}{4!}+\cdots$$

desarrollando los términos binomiales

$$e^{\alpha x^2+\beta x}=1+\beta\,x+\left(\alpha+\frac{1}{2}\,\beta^2\right)x^2+\left(\beta\,\alpha+\frac{1}{6}\,\beta^3\right)x^3+\left(\frac{1}{2}\,\alpha^2+\frac{1}{2}\,\alpha\,\beta^2+\frac{1}{24}\,\beta^4\right)x^4+\cdots$$

Si se quiere hacer el desarrollo alrededor de un punto diferente de $x_0=0$, podemos completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
e^{\alpha x^2+\beta x} &= e^{\alpha\left(x^2+\beta x/\alpha\right)}=e^{\alpha\left(x^2+\beta x/\alpha+\beta^2/4\alpha^2-\beta^2/4\alpha^2\right)}=e^{\alpha\left(x^2+\beta x/\alpha+\beta^2/4\alpha^2\right)-\beta^2/4\alpha}\\
&= e^{\alpha(x+\beta/2\alpha)^2-\beta^2/4\alpha}=e^{\alpha(x+\beta/2\alpha)^2}e^{-\beta^2/4\alpha}\\
&= e^{-\beta^2/4\alpha}\left[1+\alpha(x+\beta/2\alpha)^2+\alpha^2(x+\beta/2\alpha)^4/2+\cdots\right]
\end{aligned}$$

y esta es la expansión en series de potencias alrededor del punto $x_0=-\beta/2\alpha$.

Borrador Preliminar

Figura 2.6: La función Gamma para $n = 5$

2.4.2. La expansión binomial

Por su uso frecuente, consideremos el caso de la expansión binomial

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \,, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} x^n \,,\end{aligned}$$

donde el término $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ se denomina el coeficiente binomial y la serie termina cuando $m = n$.

Ahora bien, escrito de la forma compacta se sugiere que el exponente m tendría que ser entero y positivo. Pero no es así. La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m. Por ello, la forma compacta pero exacta de la expansión binomial es

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{a}\right)^m &= 1 + m\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n \,.\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la función $\Gamma(x)$ como la generalización del factorial para valores que no se restringen a enteros positivos. Nótese también que si el exponente es negativo, $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ tiene una singularidad o un polo en $x = -a$.

Cuando n es un entero positivo tendremos

$$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t+n\ln(t)} \,\mathrm{d}t$$

Esta integral, como se puede ver en la figura, nos recuerda la forma de una Gaussiana con un máximo

Borrador Preliminar

en $t = n$. Al hacer una expansión alrededor de este punto

$$\begin{aligned} f(t) = -t + n\ln(t) &= f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \cdots \\ &= -n + n\ln(n) + 0 + (t-n)^2(-n/n^2)/2 + \cdots \end{aligned}$$

Si conservamos los términos hasta segundo orden, la integral puede ser aproximadamente igual a:

$$n! \sim \int_0^\infty e^{-n+n\ln(n)-(t-n)^2/2n}\,\mathrm{d}t = n^n e^{-n}\int_0^\infty e^{-(t-n)^2/2n}\,\mathrm{d}t$$

Para valores de n grandes, y esto es lo que se conoce como la aproximación de Stirling, se tiene:

$$n! \sim n^n e^{-n}\int_{-\infty}^\infty e^{-(t-n)^2/2n}\,\mathrm{d}t = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Aquí, el símbolo $\sim$ se refiere a un comportamiento asintótico de la función Gamma.

En la siguiente tabla se muestran, para algunos valores de n, el valor exacto del factorial, el valor por la fórmula de Stirling y el cociente entre estos dos valores. Se puede apreciar entonces lo buena que resulta tal aproximación.

n	$n!$	$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$	$n!/(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})$
1	1	0,922	0,922
2	2	1,919	0,960
5	120	118,019	0,983
10	3628800	3598695,619	0,992

2.4.3. Sobre la función Gamma

Con ya vimos, con la función Gamma es posible generalizar la idea del factorial cuando n es cualquier número real positivo. La función Gamma se define de la siguiente manera

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}\mathrm{d}x\,, \quad k > 0\,. \tag{2.27}$$

Por ejemplo, si $k = 1$, tenemos

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = 1\,.$$

Podemos integrar (2.27) por partes:

$$\Gamma(k) = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-x}x^k}{k}\right]_0^b + \frac{1}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x\,, \quad k > 0\,, \tag{2.28}$$

se puede demostrar que el primer término de (2.28) se hace cero, por lo tanto:

$$\Gamma(k) = \frac{1}{k}\Gamma(k+1)\,, \quad k > 0 \tag{2.29}$$

es decir:

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)\,, \quad k > 0\,. \tag{2.30}$$

Veamos:

Borrador Preliminar

$$\begin{array}{lcl} k=1 & \to & \Gamma(2)=1\Gamma(1)=1=1! \\ k=2 & \to & \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\cdot 1=2! \\ k=3 & \to & \Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot 2\cdot 1=3! \\ k=4 & \to & \Gamma(5)=4\Gamma(4)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4! \end{array}$$

entonces, si $k=n$ es un entero positivo, se tiene que

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{2.31}$$

Ahora bien, podemos hacer lo siguiente. Partimos de (2.29):

$$\Gamma(k)=\frac{1}{k}\Gamma(k+1)\,, \quad k\neq 0\,, \tag{2.32}$$

reemplazamos $k\to k+1$ en (2.32) y obtenemos:

$$\Gamma(k+1)=\frac{1}{k+1}\Gamma(k+2)\,, \quad k\neq -1\,, \tag{2.33}$$

si sustituimos (2.33) en (2.32) resulta:

$$\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+2)}{k(k+1)}\,, \quad k\neq 0,-1\,, \tag{2.34}$$

si reemplazamos $k\to k+1$ en (2.33) obtenemos

$$\Gamma(k+2)=\frac{\Gamma(k+3)}{(k+2)}\,, \quad k\neq -2\,, \tag{2.35}$$

al sustituir (2.35) en (2.34) resulta lo siguiente

$$\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)}\,, \quad k\neq 0,-1,-2\,. \tag{2.36}$$

Estas operaciones se pueden repetir hasta n:

$$\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}\,, \quad k\neq 0,-1,-2,\ldots,-(n-1)\,. \tag{2.37}$$

Todo esto sirve para lo siguiente. Si $k=-1/2$, entonces por (2.32)

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,,$$

el valor de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ lo podemos buscar en alguna tabla matemática.

En este caso, lo que se obtiene es $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Esto significa que si conocemos $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ se puede determinar $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$, por lo tanto

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}\,.$$

Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} 0! &= \Gamma(0+1)=\Gamma(1)=1 \\ \left(-\tfrac{1}{2}\right)! &= \Gamma(-\tfrac{1}{2}+1)=\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \\ \left(-\tfrac{3}{2}\right)! &= \Gamma(-\tfrac{3}{2}+1)=\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi} \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)! &= \Gamma(\tfrac{1}{2}+1)=\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

2.4.4. Taylor en varias variables

Sólo por razones de completitud, y para reforzar los conceptos de que es un desarrollo en series para una función alrededor de un determinado punto, escribiremos el desarrollo en series de Taylor para una función de dos variables $f = f(x, y)$. Esta es

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + (x-a)\, f_x|_{ab} + (y-b)\, f_y|_{ab} \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 f_{xx}\big|_{ab} + 2(x-a)(y-a)\, f_{xy}|_{ab} + (y-a)^2\, f_{yy}|_{ab}\right] \\ &+ \frac{1}{3!}\left[(x-a)^3\, f_{xxx}|_{ab} + 3(x-a)^2(y-a)\, f_{xxy}|_{ab} + 3(x-a)(y-a)^2\, f_{xyy}|_{ab} + (y-a)^3\, f_{yyy}|_{ab}\right] \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

De una manera más compacta

$$f\left(x^j + x_0^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(x^k \partial_k\right)^n f\left(x^m\right)\Big|_{x^m = x_0^m} \Rightarrow f\left(\mathbf{r}+\mathbf{a}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\right)^n f\left(x^m\right)|_{\mathbf{r}=\mathbf{a}}.$$

Dónde hemos utilizado la siguiente convención

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x; \quad f_y = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y; \quad f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_{xx}; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \partial_{xy}; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \partial_{yy}; \quad \cdots$$

2.4.5. Ejemplos

2.4.6. Practicando con Maxima

La gráfica mostrada en la Figura 1 pueden obtenerse de la siguiente manera:

```
> restart:
> n := 5:
> f := exp(-t)*t^n;
> Int(f,t=0..infinity)=int(f,t=0..infinity);
> GAMMA(5+1);
> plot(f,t=0..20);
> ‘f(5)‘=evalf(subs(t=5,f));
```

2.4.7. Ejercicios

1. Utilice la siguiente definición

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,,$$

expanda el integrando y luego integre término por término para derivar la siguiente expansión conocida como expansión de Gregory

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\,.$$

Evalúe la serie para $x = \frac{\pi}{4}$.

Borrador Preliminar

2. Utilizando la definición
$$\operatorname{sen}^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,$$
derive las expresiones siguientes
$$\operatorname{sen}^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,$$
$$\operatorname{sen}^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{4^n(2n+1)n!} x^n\right).$$

3. Utilizando MAXIMA o cualquier manipulador simbólico, encuentre los primeros cinco términos, diferentes de cero, de la serie de Taylor, de la función
$$f(x) = \frac{1+x}{x^2}\left[\frac{2+2x}{1+2x} - \frac{\ln(1+2x)}{x}\right].$$

4. Suponga conocida la fórmula de reflexión de Euler[10]
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$
y a partir de ella muestre que
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$
para ayudarse (y convencerse) grafique ambos lados de la relación

5. Suponga una de las propiedades de la función $\Gamma(x)$
$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\int_0^1 \mathrm{d}t\; t^{a-1}(1-t)^{b-1}$$
y calcule las potencias de Γ. Esto es cuanto vale $\Gamma(x)^2$ y $\Gamma(x)^3$. Corrobore sus resultados con alguno de los sistemas de manipulación simbólica

6. Una forma de calcular numéricamente los valores de la función $\Gamma(x)$ es aproximarla como un polinomio. Una de esas propuestas se le debe a Hastings[11] y puede expresarse de la siguiente manera
$$\Gamma(z+1) = z! = 1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + z(a_5 + z(a_6 + z(a_7 + za_8)))))))\,.$$
Encuentre esos coeficientes y luego compare esta aproximación con una más estándar
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, z^k \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(z)} \approx \sum_{k=1}^{8} C_k\, z^k\,.$$
El valor de esos coeficientes los pueden encontrar la literatura de aproximaciones de funciones matemáticas [12]

[10] La demostración de esta relación está fuera del alcance de estas notas, pero puede consultarla en la red

[11] Hastings, C., Wayward, J. & Wong, J. (2015). Approximations for Digital Computers. Princeton: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400875597

[12] Abramowitz, M., Stegun, I. A., & Romer, R. H. (1988). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. American Association of Physics Teachers https://www.math.ubc.ca/~cbm/aands/toc.htm

Borrador Preliminar

2.5. Series de Fourier

Otro de los casos de expansión en una base completa de funciones lo constituyen la base de Fourier. En este caso la serie de Fourier la constituyen funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, en término de funciones trigonométricas.

Esto es el conjunto de funciones $\{|u_1\rangle\,,\ |u_2\rangle\,,\ |u_3\rangle\,, \cdots, |u_n\rangle \cdots\}$ representadas por

$$|u_0\rangle = 1, \qquad |u_{2n}\rangle = \cos(nx) \qquad \text{y} \qquad |u_{2n-1}\rangle = \text{sen}(nx), \qquad \text{con } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Es claro que $\{|u_1\rangle\,,\ |u_2\rangle\,,\ |u_3\rangle \cdots, |u_n\rangle\,, \cdots\}$ es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle u_n\ |u_m\rangle = \delta_{nm}|\,|u_n\rangle\,|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n \neq m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ \ \text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ \ \cos(nx)\,\text{sen}(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ \ \cos(nx)\cos(mx) = 0 \end{cases} \\ |\,|u_n\rangle|^2 \quad \text{si} \quad n = m & \begin{cases} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ \ \cos^2(nx) = \pi \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ \ \text{sen}^2(nx) = \pi \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones $\{|e_1\rangle\,,\ |e_2\rangle\,,\ |e_3\rangle\,, \cdots, |e_n\rangle\,, \cdots\}$ de la forma

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad |e_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx) \qquad \text{y} \qquad |e_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\text{sen}(nx)$$

Tal y como se muestra en la figura 2.7 distintas funciones pueden ser expandidas con sumas parciales de Fourier. A diferencia de las series de potencias, que imponen que las funciones a ser expandidas deben ser continuas y continuamente diferenciables en el intervalo, la series de Fourier pueden representar funciones continuas a trozos, siempre y cuando cumplan con algunas condiciones.

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\ \ |e_i\rangle \quad \Rightarrow c_i = \langle e_i\ |f\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si} \quad i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ \text{sen}(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si} \quad i = 2n-1 \end{cases}$$

donde los c_i son los coeficientes de Fourier, con lo cual podemos escribir

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)\right]\ ,$$

el término a_0 es colocado fuera de la sumatoria, y multiplicado por $1/2$, solo por conveniencia.

Borrador Preliminar

Figura 2.7: Expansiones de Varias funciones en sumas parciales de Series de Fourier. Tomado de Eric W. Weisstein. **Fourier Series**. http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html

De manera equivalente, si el período es T y para un t_0 genérico

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0 = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t) \\ a_n = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x\ f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n = & \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\ f(t)\ \text{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{cases}$$

La figura 2.7 muestra la aproximación de las distintas sumas parciales para distintas funciones, a medida que aumentamos el número de términos la aproximación mejora.

Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta, ésta expresión se conoce en algunos ámbitos como la expresión integral para la series de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\cos(nt)\right]\cos(nx) + \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\,\text{sen}(nt)\right]\text{sen}(nx)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\cos(n[t-x])\,. \end{aligned}$$

También es muy común expresar una serie de Fourier en término de una base compleja. Vale decir

Borrador Preliminar

$\{\cdots|\tilde{\phi}_k\rangle\cdots\} \leftrightarrow \{\cdots e^{-ikx}\cdots\}$ con $k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. Con lo cual

$$|f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k|\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \qquad \text{con} \quad \tilde{C}_k = \frac{\langle\tilde{\phi}_k|f\rangle}{\langle\tilde{\phi}_k|\tilde{\phi}_k\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} f(x)\,.$$

Podremos reescribir (una vez más) la expresión de una suma parcial de la serie de Fourier, dado que

$$a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\cos(n[t-x])\,,$$

tendremos que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t\ f(t)\cos(n(t-x))\right] \\ &= \Re\left[\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t\ f(t)\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-i(t-x)k}\right)\Big\}\right]. \end{aligned}$$

y al sumar la progresión geométrica que representa una serie de exponenciales llegamos a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t\ f(t)\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)}\right] \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t\ f(t)\,\mathcal{K}(x,n,t)\,,$$

la cual siempre es convergente y el término

$$\mathcal{K}(x,n,t) = \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)}\right],$$

se conoce como el núcleo de la transformación de F, el *Kernel* de Dirichlet.

La pregunta básica que sigue es, en todos estos casos: ¿cómo se relaciona la expansión de Fourier $|f\rangle \Leftrightarrow F(x)$ con la función $f(t)$ que genera los coeficientes de la expansión? Nótese que es una forma de mirar una relación entre $F(x) \leftrightarrow f(t)$. Pasamos de $f(t)$ a $F(x)$ mediante una "transformación"

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t\ f(t)\ \mathcal{K}(x,n,t)\,.$$

Este tipo de relaciones se denomina transformación integral y en particular ésta es una de las expresiones de las llamadas *Transformadas de Fourier*.

2.5.1. Condiciones de Dirichlet

Las condiciones que una determinada función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier, se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet[13] las cuales pueden ser esquematizadas en los siguientes puntos:

- la función $f(x)$ debe ser periódica

[13] **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** 1805 - 1859. Matemático Alemán con importantes contribuciones en Teorías de números Algebraica, Series y aproximaciones de funciones y ecuaciones diferenciales parciales.

Borrador Preliminar

- la función $f(x)$ debe se univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos
- la integral $\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}x|f(x)|$ debe ser convergente. Donde $[-T/2, T/2]$ quiere indicar el intervalo de definición de una función con período T.

Podemos formalizar un poco más las condiciones de Dirichlet en el llamado teorema de Fourier.

Teorema de Fourier: Sea $f(x)$ una función en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ y definida para el resto de la recta real tal que cumpla con $f(x+2\pi) = f(x)$. Es decir $f(x)$ es $2\pi-$periódica. Supongamos además que existe la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\,, \quad \text{y que} \quad C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} f(x) \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

y si $|f(x)|$ está acotada para un intervalo $[a, b]$ con $-\pi < a \leq x \leq b < \pi$, entonces

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-ikx} \quad \text{es convergente al valor } F(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\epsilon\to 0_+} f(x+\epsilon) + \lim_{\epsilon\to 0_-} f(x-\epsilon)\right)$$

y si $f(x)$ es continua en $x = x_0$ entonces $F(x_0) \to f(x_0)$.

En este punto se pueden puntualizar varias cosas:

1. El valor $F(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\epsilon\to 0_+} f(x+\epsilon) + \lim_{\epsilon\to 0_+} f(x-\epsilon)\right)$ al cual converge la expansión de Fourier, cobra particular importancia cuando el punto $x = x_0$ es una discontinuidad. Tal y como veremos más adelante (sección 2.5.3) y expresa este teorema, las series de Fourier son particularmente apropiadas para expandir funciones discontinuas (en un número finito de puntos en el intervalo), sin embargo, por ser una base de funciones continuas no puede reproducir la discontinuidad como tal. La expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad $x \to x_{\pm 0}$ tenderá al valor $F(x) \to F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$ donde $F_m = \frac{F(x_{+0})+F(x_{-0})}{2}$. Es decir, tenderá al valor medio de los valores de la discontinuidad por la izquierda $F(x_{-0})$ y por la derecha $F(x_{+0})$.

2. Si los coeficientes de Fourier tienen variaciones acotadas en el intervalo y $|C_k| \to 0$ con $k \to \infty$. Entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ |f(x)|^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2 + b_n^2| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ |f(x)|^2\,,$$

   que no es otra cosa que la expresión de la completitud de esta base de funciones.

Para ilustrar esta relación entre la función $f(x)$ y su expansión en serie de Fourier $F(x)$ analicemos el siguiente ejemplo

La siguiente función, muy conocida en el ámbito de los circuitos eléctrico, se denomina la función onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\frac{1}{2}T \leq t < 0 \\ +1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T\,, \end{cases}$$

Borrador Preliminar

En este caso se puede integrar entre $[0, T/2]$ y luego multiplicar todo por 2.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t = 1\,, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi} = 0\,, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\,, \end{aligned}$$

Entonces solo sobreviven los b_{2n+1} ya que coeficientes pares se anulan: $b_{2n} = 0$.

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\operatorname{sen}(3\omega t)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5\omega t)}{5} + \frac{\operatorname{sen}(7\omega t)}{7} + \cdots\right)$$

donde hemos denotado $\omega = 2\pi/T$.

Al definir la función ω podemos interpretar los coeficientes de Fourier a_n, b_n como las contribuciones de cada uno de los armónicos $a_n, b_n \to \omega_n = \frac{2n\pi}{T}$. A partir de estas contribuciones se construye el espectro de potencia, el cual está relacionado con la energía que aporta cada uno de estos armónicos. Por ello construimos un cantidad $E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y graficamos E_n vs n tal y como se puede comprobar en la figura 2.9, cuadrantes IV y VII. Se encuentra que se puede asociar un espectro de potencia a cada señal y con lo cual realizar una especie de identificación.

En este punto podemos hacernos algunas preguntas:

- ¿qué hubiera pasado si en vez de considerar el intervalo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ hubiéramos considerado $(0, T)$?
- ¿tendríamos el mismo desarrollo en serie de Fourier?
- ¿el mismo espectro?

Justifique sus respuestas.

2.5.2. Consideraciones de simetría en series de Fourier

Es de hacer notar que estas propiedades de simetría respecto al período de la función ($f(x) = f(-x)$ simetría y $f(x) = -f(-x)$ antisimetría) para un período $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$ pueden y deben ser explotadas para simplificar los cálculos. Esto se puede resumir en

$$f(x) = f(-x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \quad \text{y alternativamente} \quad f(x) = -f(-x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

Pero más interesante aún es cuando estas propiedades de simetría se presentan en un cuarto del período. Vale decir, que $f(x)$ será par o impar respecto a $T/4$ i.e. $f\left(\frac{T}{4} + x\right) = \pm f\left(\frac{T}{4} - x\right) \Rightarrow f(-s) = \pm f(s)$ donde $s = \frac{T}{4} - x$. Entonces

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \mathrm{d}s\; f(s)\, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n s}{T} + \frac{\pi n}{2}\right)\,.$$

Donde los límites de integración no se han visto alterados porque la función es periódica. Es inmediato comprobar que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n s}{T} + \frac{\pi n}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n s}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n s}{T}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\,,$$

Borrador Preliminar

es decir

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\int_{x_0}^{x_0+T} \mathrm{d}s\ f(s)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n s}{T}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\int_{x_0}^{x_0+T} \mathrm{d}s\ f(s)\ \cos\left(\frac{2\pi n s}{T}\right)\right],$$

por lo que si $n = 2k \Rightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \mathrm{sen}(\pi k) = 0$ y si $n = 2k-1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$.

La misma consideración se puede hacer para los coeficientes a_n (queda como ejercicio para el lector) y se puede concluir que

- Si $f(x)$ par en $T/4$ entonces $a_{2n-1} = b_{2n} = 0$.
- Si $f(x)$ impar en $T/4$ entonces $a_{2n} = b_{2n-1} = 0$.

2.5.3. El Fenómeno de Gibbs

Tal y como hemos mencionado, a diferencia de las series de potencias, las series de Fourier manejan razonablemente bien las discontinuidades, pero por ser una base de funciones continuas, no puede reproducirlas. Tal y como comentamos en el Teorema de Fourier y muestra la figura 2.8 el valor de las sumas parciales de Fourier en un punto de discontinuidad $x = x_{\pm 0}$ será el promedio de los valores $F(x_{-0})$ (por la izquierda) y $F(x_{+0})$ (por la derecha) en la discontinuidad. Esto es la expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad $x \to x_{\pm 0}$ tenderá al valor $F(x) \to F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$ donde $F_m = \frac{F(x_{+0})+F(x_{-0})}{2}$.

Podemos ver en la figura 2.8 que, tanto por la izquierda como por la derecha de la discontinuidad de la función escalón, las sumas parciales de Fourier oscilan y no convergen a los valores $x_{\pm 0}$. El comportamiento oscilante de las sumas parciales de Fourier alrdedor de las discontinuidades, que no desaparecen ni en el límite se denominan *fenómeno de Gibbs* en honor a su descubridor Josiah Willard Gibbs.[14]

Para entender qué pasa en la discontinuidad consideremos una variación de la onda cuadrada considerada anteriormente (**??**). Entonces sus sumas parciales serán

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \le t < 2\pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F^c_{2n}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\mathrm{sen}\left((2k-1)x\right),$$

porque los coeficientes pares (a_n) se anulan.

Para estudiar el fenómeno de Gibbs reescribimos la suma parcial anterior de una manera ingeniosa

$$F^c_{2n}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^t \mathrm{d}s\ \cos(2k-1)s\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\int_0^t \mathrm{d}s\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)s\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^t \mathrm{d}s\left(\frac{\mathrm{sen}(2ns)}{\mathrm{sen}(s)}\right)$$

donde, utilizando la fórmula de Moivre y convirtiendo esa serie de cosenos en una de exponenciales la cual, a su vez es una progresión geométrica (y le queda la comprobación al lector), hemos sustituido

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)s = \frac{\mathrm{sen}(2ns)}{\mathrm{sen}(s)}.$$

Es inmediato convencerse que las sumas parciales $F^c_{2n}(x)$ siempre tendrán máximos y mínimos

$$\frac{\mathrm{d}F^c_{2n}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{sen}(2nx)}{\mathrm{sen}(x)} = 0, \Rightarrow \text{ para } x = \frac{m\pi}{2n} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \cdots$$

[14] **Josiah Willard Gibbs** 1839 - 1903. Algunos lo consideran el primer Físico Norteamericano, de hecho fue el primero en recibir un título de doctorado por una universidad norteamericana (Yale University). Hizo importantes aportes en electromagnetismo y sobre todo en termodinámica y física estadística, sentando las bases matemáticas para estas disciplinas. En matemáticas es conocido su estudio de las oscilaciones de las expansiones de las series de Fourier en los puntos de discontinuidad.

Borrador Preliminar

Las Series de Fourier tienden a sobre-estimar el valor de los puntos de discontinuidad en $\pm 18\,\%$ esto es un valor de $\approx 1{,}1789797$. La inclusión de más términos en las sumas parciales no mejoran la situación. El fenómeno de Gibbs no se restringe a Series de Fourier sino que también se presenta en las demás series de funciones (ver detalles en la referencia: `Arfken-Weber-2000`) .

El fenómeno de Gibbs fue observado ¡experimentalmente! por primera vez por Albert Michelson.[15]. Para finales de 1800 Michelson había creado un dispositivo mecánico para medir las componentes de Fourier de señales eléctricas. Al incorporarle una onda cuadrada observó que una oscilación inesperada en los puntos de discontinuidad. Creyó que esa oscilación se debía a defectos del dispositivo. Luego de probar múltiples tipos de señales periódicas y observar un comportamiento similar, decidió comentárselo a su amigo Willard Gibbs, de la Universidad Yale. Al poco tiempo Gibbs volvió con una explicación que dejó intacta la fama de Michelson como instrumentista. El fenómeno es una consecuencia de la teoría de series de Fourier y no del equipo diseñado por Michelson[16].

2.5.4. Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor σ de Lanczos

Una de las estrategia para corregir las oscilaciones del fenómeno de Gibbs se le debe a Lanczos[17]. Considerando el mismo caso de la función onda cuadrada, se puede intentar sustituir la función oscilante $F_n^c(x)$ por su promedio $\bar{F}_n^c(x)$ alrededor del punto x. Vale decir

$$F_{2n}^c(x) \to \bar{F}_{2n}^c(x) = \frac{n}{\pi}\int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \mathrm{d}s\; F_{2n}^c(s) = \frac{n}{\pi}\int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \mathrm{d}s\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\mathrm{sen}((2k-1)s)\right],$$

desarmando tendremos que

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{n}{\pi}\int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \mathrm{d}s\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\mathrm{sen}((2k-1)s)\right] \\
&= \frac{n}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)s)\Big|_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}}\right] \\
\bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right)}{\frac{\pi}{2n}(2k-1)}\right]}_{\sigma}\mathrm{sen}((2k-1)x)\,.
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos identificado el factor σ de Lanczos. Siguiendo este mismo proceso se puede generalizar para cualquier función de tal modo que una serie de Fourier genérica podrá ser corregida con un factor σ para lograr

$$\bar{F}_n(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right](a_k\cos(kx)+b_k\mathrm{sen}(kx)) \equiv \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k\left(a_k\cos(kx)+b_k\mathrm{sen}(kx)\right)\,.$$

[15] **Albert Abraham Michelson** Strelno, Prussia, 1852 - Pasadena EEUU. 1931. Premio Nobel en Física (1907) uno de los físicos experimentales más habilidosos de todos los tiempos. La precisión y lo ingenioso de los instrumentos creados por él son famosos. Con importantes contribuciones en medidas de fenómenos en óptica. Una de sus contribuciones más conocidas son los experimentos para mostrar la inexistencia del Ether como medio de transmisión para el fenómeno electromagnético. Más detalles http://nobelprize.org/physics/laureates/1907/michelson-bio.html

[16] Más detalles http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon

[17] **Cornelius Lanczos** 1893 - 1974 Hungría. Matemático húngaro con contribuciones importante en Relatividad y Física Teórica. En matemáticas es conocido inventar la transformada rápida de Fourier. Más detalles en http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lanczos.html

Borrador Preliminar

2.5.5. Ejemplos

1. **Variedades de dientes de sierra**

Otra función muy común es la denominada dientes de sierra

$$f(t) = at \quad \text{si } 0 \leq t \leq T\,, \quad \text{con } a \text{ constante}$$

los coeficientes son los siguientes:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T at\mathrm{d}t = aT\,,\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T at\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{a\,T}{\pi^2 n^2}\left[n\pi\mathrm{sen}\,(2n\,\pi) - \mathrm{sen}^2\,(n\pi)\right] = 0\,,\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T at\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = -\frac{aT}{n\,\pi}\,.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$f(t) = at = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{aT}{2} - \frac{aT}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(\omega nt)}{n}\,, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T\,.$$

En el caso particular de hacer $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$, entonces:

$$f(t) = 3t = 3 - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(n\pi t)}{n} = 3 - \frac{6\mathrm{sen}\,(\pi\,t)}{\pi} - \frac{3\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,t)}{\pi} - \frac{2\mathrm{sen}\,(3\,\pi\,t)}{\pi} - \frac{3\mathrm{sen}\,(4\,\pi\,t)}{2\pi} - \frac{6\mathrm{sen}\,(5\,\pi\,t)}{5\pi} + \cdots$$

La figura 2.9 (cuadrantes V y VI) muestra la construcción de esta función y su representación en Series de Fourier.

A partir de esta función podemos hacer unas variaciones. Por ejemplo considérese la función

$$f(t) = at \quad \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\,, \quad \text{con } a \text{ constante} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_0 = & \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} at\mathrm{d}t & = 0\\ a_n = & \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} at\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t & = 0\\ b_n = & \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} at\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t & = -\frac{aT(-1)^n}{n\,\pi}\,. \end{cases}$$

Claramente es una función impar $f(-x) = -f(x)$ y así lo refleja su expansión en series de Fourier. Si hacemos $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$ tendremos que la expresión para de la serie es

$$f(t) = 3t = \frac{6\mathrm{sen}\,(\pi\,t)}{\pi} - \frac{3\mathrm{sen}\,(2\,\pi\,t)}{\pi} + \frac{2\mathrm{sen}\,(3\,\pi\,t)}{\pi} - \frac{3\mathrm{sen}\,(4\,\pi\,t)}{2\pi} + \frac{6\mathrm{sen}\,(5\,\pi\,t)}{5\pi} + \cdots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\,,$$

la cual, si bien es parecida no es igual a la anterior, debido que estamos expandiendo otra función.

Otra variación posible de la función "diente de sierra" puede ser la versión completamente par del "diente", $f(-x) = f(x)$. Esta es

$$f(t) = \begin{cases} -at & \text{si } \frac{-T}{2} \leq t \leq 0\\ at & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Borrador Preliminar

El cálculo de los coeficientes resulta en:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-at)\mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} at\mathrm{d}t = \frac{aT}{2}\,,\\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-at)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} at\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{a\,T}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\,,\\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}(-at)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} at\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t = 0\,.
\end{aligned}$$

En este caso son los coeficiente b_n los que se anulan.

Adicionalmente, nótese que para n par, los coeficientes a_n también se anulan, Otra vez, si hacemos $a = 3$ y $T = 2 \to \omega_n = n\pi$ tendremos la serie:

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{12\cos(\pi\,t)}{\pi^2} - \frac{4\cos(3\,\pi\,t)}{3\pi^2} - \frac{12}{25}\,\frac{\cos(5\,\pi\,t)}{\pi^2} + \cdots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

2. **Función cuadrática**

Otro caso, complementario al anterior por sus propiedades de simetría, es la expansión en series de Fourier de la función $f(x) = x^2$ para $-\pi < x < \pi$. Entonces los coeficientes se la expansión serán

$$f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\; x^2\mathrm{d}x & = \frac{2\pi^2}{3} \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\; x^2\cos(nx)\mathrm{d}x & = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{cases}$$

ya que los coeficientes correspondientes a los términos impares b_n se anulan. Con lo cual

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}\,.$$

Nótese que como un resultado particular, al evaluar en $x = \pi$, se tiene la función zeta de Riemann $\zeta(2)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;\Rightarrow\; \zeta(2) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Pero este caso se presta también para considerar funciones no periódicas. Supongamos que queremos desarrollar la expansión de Fourier para $f(t) = t^2$ pero en este caso con $0 < t < 2$. Si este fuera el caso, empezamos por suponer que la función tienen un período, digamos $T = 4$. Esto es $-2 \le t \le 2$. Con lo cual

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} t^2\mathrm{d}t = \frac{4}{4}\int_{0}^{2} t^2\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\\
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} t^2\cos\left(\frac{2\pi nt}{4}\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{4}\int_{0}^{2} t^2\cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{16}{\pi^2 n^2}\cos(n\pi) = \frac{16}{\pi^2 n^2}(-1)^n\,.
\end{aligned}$$

Con lo cual tendremos que

$$t^2 = \frac{4}{3} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \quad \text{para } 0 < t \le 2\,.$$

Borrador Preliminar

2.5.6. Practicando con Maxima

2.5.7. Ejercicios

Borrador Preliminar

Programa para generar cuadraturas de Gauss − Legendre para n puntos

```
> restart: Digits:=20:
> n := 3:
> L := LegendreP(n,z): p:=expand(%);
```

$$p := \frac{5}{2} z^3 - \frac{3}{2} z \quad (1)$$

Lar raíces de los polinomios de Legendre representan las abscisas del problema

```
> x := [fsolve(p)];
```

$$x := [-0.77459666924148337704, 0., 0.77459666924148337704] \quad (2)$$

Se puede construir una procedimiento que tome como entrada una función $f(x)$ y genere los valores aproximados

```
> proced := f -> sum(c['i']*f(x['i']),'i'=1..n):
```

Se calculan los pesos a partir de resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

```
> ecs := []:
> for i from 1 to n do
>    ecs := [op(ecs),proced(z->z^(i-1)) = int(z^(i-1),z=-1..1)]:
> end do:
> ecs;
```

$$\left[c_1 + c_2 + c_3 = 2,\ -0.77459666924148337704\, c_1 + 0.77459666924148337704\, c_3 = 0,\ 0.60000000000000000001\, c_1 + 0.60000000000000000001\, c_3 = \frac{2}{3}\right]$$

```
> sys := {op(ecs)}:var := {seq(c[k],k=1..n)}:
> pesos := solve(sys,var); assign(pesos):
```

$$pesos := \{c_1 = 0.55555555555555555555,\ c_2 = 0.88888888888888888891,\ c_3 = 0.55555555555555555555\}$$

Para probar el método, generemos aleatoriamente un polinomio de grado $2n - 1$

```
> q := randpoly(z,degree=2*n-1);
```

$$q := -56 - 7 z^5 + 22 z^4 - 55 z^3 - 94 z^2 + 87 z \quad (3)$$

con el polinomio anterior construyamos una función $g(x)$

```
> g := unapply(q,z);
```

$$g := z \rightarrow -56 - 7 z^5 + 22 z^4 - 55 z^3 - 94 z^2 + 87 z \quad (4)$$

apliquemos la regla definida anteriormente

```
> calculado := proced(g);
```

$$calculado := -165.86666666666666667 \quad (5)$$

Calculemos el resultado exacto

```
> exacto := int(q,z=-1..1);
```

$$exacto := -\frac{2488}{15} \quad (6)$$

Ahora podemos comparar el resultado exacto con el aproximado

```
> evalf(exacto - calculado);
```

$$0. \quad (7)$$

FIN

Borrador Preliminar

Figura 2.8: Aproximaciones por series de Fourier para la función escalón, linea roja. Las curvas corresponden a sumas parciales de Fourier: $F_{40}(x), F_{100}(x), F_{200}(x)$,

Figura 2.9: Un par de funciones, definidas con un período T, a ser expresadas en como expansiones en Series de Fourier. En los cuadrantes I y II, encontramos una onda cuadrada. La primera (cuadrante I) definida en un intervalo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ y en el cuadrante II la misma función definida en un intervalo $(0, T)$. El cuadrante III ilustra las aproximaciones de la serie de Fourier para $n = 3, 7, 20$, mientras que el espectro de potencia se presenta en el cuadrante IV. La onda "diente de sierra", definida en un intervalo $(0, T)$, se presenta en el cuadrante V. Sus aproximaciones en series de Fourier para $n = 3, 7, 10$ se pueden observar en el cuadrante VI, mientras que el espectro de potencia en el cuadrante VII.

Borrador preliminar

Bibliografía

[Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning.** (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.

[Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)

[1] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)

[Cushing 1975] Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences** (*John Wiley & Sons, New York*)

[Hamming 1973] Hamming R.W. (1973) **Numerical Methods For Scientist and Engineers, 2nd ed.** (Dover, New York.)

[Hassani 1991] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*)

[Lebedev 1972] Lebedev, N.N. (1972) **Special Functions & Their Applications** (*Dover Publications, New York*)

[math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** http://www.math-atlas.org/welcome.html

[Richards 2002] Richards, D. (2002) **Advanced Mathematical Methods with MAPLE** (*Cambridge University Press Cambridge*)

[Riley Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press Cambridge*)

[Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** http://mathworld.wolfram.com/

Borrador Preliminar

Capítulo 3

Series II

Borrador Preliminar

La ruta de este capítulo

3.1. Series y espacios de Hilbert

Hemos dejado "sueltos" algunos conceptos para los espacios de Hilbert *infito*-dimensional. El primero de estos conceptos es que un vector $|a\rangle \in E^\infty$ surge de la combinación lineal de elementos de una base infinita $\{|e_i\rangle\}$, (de una serie) que converge al vector $|a\rangle$ para un espacio donde también la norma del vector converge a un valor finito $\|a\|^2 = \langle a\,|a\rangle$.

El segundo concepto fue la posibilidad de expresar un determinado vector (una función) como combinación lineal de una base (de dimensión infinita) de un espacio vectorial E^∞. Efectivamente, esa combinación lineal (de dimensión infinita) habrá de converger a el valor de la función en ese punto. En su momento expresamos estos conceptos intuitivos y fácilmente demostrables para E^n (un espacio vectorial Euclidiano de dimensión finita, $n-$dimensional) y sin mayores justificaciones hicimos el "salto " a E^∞ (un espacio Euclidiano *infinito*-dimensional). Ahora, equipados con los conceptos de convergencia uniforme estamos en capacidad de explorar esas razones que antes eludimos.

Ambos conceptos tienen que ver con la palabra *completitud*, la cual, como veremos, no tiene el mismo significado en cada una de las situaciones antes mencionadas, pero será complementario. En el primer caso la completitud de E^∞ se logra al poder expresar un vector como una combinación lineal de una base infinita que converja al valor del vector. En el segundo caso diremos que la base $\{|e_i\rangle\}$ para E^∞ será completa si expande la totalidad de los vectores de E^∞.

3.1.1. Completitud de E^∞

La primera idea de completitud de un Espacio de Hilbert E^∞ tiene que ver con el hecho que, en ese espacio, donde la norma de un vector es finita $\|a\|^2 = \langle a\,|a\rangle < \infty$, la combinación lineal de los elementos de una base infinita, $\{|e_i\rangle\}$, converja al vector $|a\rangle$. Esto es, $a^i\,|e_i\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} |a\rangle$.

Para el caso de E^n es inmediato que, dada una base (ortonormal, por ejemplo)

$$|a\rangle = a^i\,|e_i\rangle \;\Rightarrow\; \|a\|^2 = \langle a\,|a\rangle = a^i a_i < \infty\,, \qquad \text{con } i = 1, 2, 3, \ldots n\,,$$

la norma es finita, por cuanto es la suma de términos finitos (las componentes del vector $(a^1, a^2, a^3, \cdots a^n)$). Sin embargo, para el caso de E^∞ las componentes del vector será función de las sumas parciales, esto es hasta dónde desarrollemos la serie y debemos demostrar que si

$$|a\rangle_n \Leftrightarrow (a^1_n, a^2_n, a^3_n, a^4_n, \cdots a^n_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} |a_\infty\rangle \Leftrightarrow (a^1_\infty, a^2_\infty, a^3_\infty, \cdots a^j_\infty, \cdots) \;\Rightarrow\; \|\,|a_\infty\rangle - |a_n\rangle\,\| < \epsilon\,.$$

Es decir que, efectivamente, componente a componente el vector $|a_n\rangle$ converja al vector $|a\rangle$.

El criterio de convergencia de Cauchy en este caso significa que: dadas dos sumas parciales (desarrollos parciales en una determinada base infinita $\{|e_i\rangle\}$) $|a_n\rangle = a^i\,|e_i\rangle$ con $i = 1, 2, \ldots n$ y $|a_m\rangle = a^j\,|e_j\rangle$ con $j = 1, 2, \ldots m$ entonces:

$$\|\,|a_m\rangle - |a_n\rangle\,\| = \|\,|a_m\rangle - |a\rangle - |a_n\rangle + |a\rangle\,\| \le \|\,|a\rangle - |a_n\rangle\,\| + \|\,|a\rangle - |a_m\rangle\,\| < \epsilon' + \epsilon'' \equiv \epsilon\,,$$

con lo cual las diferencias en las sumas parciales serán siempre menor que un $0 < \epsilon < 1$.

Nótese que hemos utilizado la desigualdad triangular $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, y es esa misma desigualdad triangular lo que nos garantiza que:

$$|a^j_n - a^j_m|^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} |a^j_n - a^j_m|^2 \equiv \|\,|a_m\rangle - |a_n\rangle\,\|^2 < \epsilon\,,$$

Borrador Preliminar

vale decir, hemos demostrado que el término $j-$ésimo (y con ello todas las componentes del vector) de una suma parcial, converge al término correspondiente de la serie límite. Esto es, $a_n^j \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_m^j \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} a^j$ por lo tanto que la combinación lineal converge al vector. Nos queda por demostrar si su norma es finita, o lo que es lo mismo, $\langle a\,|a\rangle = a^i a_i < \infty$ con $i = 1, 2, 3, \cdots \infty$.

Es claro que:

$$\sum_{j=1}^{M} |a_n^j - a_m^j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a_m^j|^2 \equiv \| \, |a_m\rangle - |a_n\rangle \, \|^2 < \epsilon \,,$$

con lo cual si $m \to \infty$ tendremos que $\sum_{j=1}^{M} |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon$, y si ahora hacemos:

$$M \to \infty \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon \;\Rightarrow\; \langle a\,|a\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |a^j|^2 \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2 \,.$$

Ahora bien, para α y β complejos, se cumple:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \equiv |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \geq 0 \;\Rightarrow\; 2|\alpha||\beta| \leq \alpha|^2 + |\beta|^2 \;\Rightarrow\; |\alpha + \beta|^2 \leq ||\alpha| + |\beta||^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| \,,$$

para que resulte:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \leq 2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) .$$

Finalmente, podemos aplicarlo al caso que nos compete:

$$\langle a\,|a\rangle \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2 \leq 2\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a^j - a_n^j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j|^2\right) < \infty \,.$$

3.1.2. Conjunto completo de funciones

El segundo sentido de completitud tiene que ver con que el conjunto (funciones) de vectores base expandan la totalidad del espacio vectorial (de funciones). Esto es, si $\{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$ es una base ortonormal para E^∞ entonces:

$$|a\rangle = a^i\,|u_i\rangle \;\Rightarrow\; \| \, |a\rangle \, \|^2 = \langle a\,|a\rangle = a^i a_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \qquad \text{con } i = 1, 2, 3, \ldots \infty \,.$$

Otra vez es la misma afirmación que consideramos en el caso de un espacio finito dimensional E^n, en el cual demostramos que una base $\{|u_i\rangle\}$ con $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ expandía todo el espacio.

Si adicionalmente existe una función *cuadrado integrable*, $\mathcal{L}^2_{[a,b]}$ definidas en el intervalo $[a, b]$, la cual pueda ser aproximada por la base:

$$\| \, |f\rangle \, \|^2 \equiv \langle f\,|f\rangle < \infty \;\Rightarrow\; |f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i\,|u_i\rangle \sim \sum_{i=0}^{N} c^i\,|u_i\rangle \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b \mathrm{d}x |f(x)|^2 \;\Rightarrow\; f(x) \sim \sum_{j=0}^{N} c^j\; u_j(x) \,.$$

Nótese que hemos supuesto la existencia de un producto interno y si las bases son ortonormales tendremos que:

$$\langle g\,|f\rangle \equiv \int_a^b \mathrm{d}x\; g^*(x) f(x) \;\Rightarrow\; \langle u^k\,|u_l\rangle \equiv \int_a^b \mathrm{d}x\; u^{*k}(x) u_l(x) = \delta_l^k \;\Rightarrow\; \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b \mathrm{d}x |f(x)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c^j|^2 \,.$$

Borrador Preliminar

donde:

$$c^k = \int_a^b \mathrm{d}x\ u^{*k}(x) f(x)\,.$$

Para demostrar que E^∞ es completo, comenzamos por demostrar la llamada *desigualdad de Bessel*. Esta es: dada una base ortonormal infinita, $\{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$ para un espacio vectorial de Hilbert, E^∞, de funciones cuadrado integrable $f(x) \in \mathcal{L}^2_{[a,b]}$, con un producto interno definido por $\langle g\,|f\rangle \equiv \int_a^b \mathrm{d}x\ g^*(x) f(x)$, entonces se cumple que:

$$\|f(x)\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{con } c^k = \left\langle u^k\,|f\right\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ u^{*k}(x) f(x) \quad \wedge \quad \langle g\,|f\rangle \equiv \int_a^b \mathrm{d}x\ g^*(x) f(x)\,.$$

Para demostrar la desigualdad de Bessel, partimos de una afirmación obvia en espacios finito dimensionales:

$$0 \leq \|\,|f\rangle - c^i\,|u_i\rangle\,\|^2 \equiv \left[\langle f| - c_k^* \left\langle u^k\right|\right]\left[|f\rangle - c^i\,|u_i\rangle\right] = \|\,|f\rangle\,\|^2 - c_k^* \underbrace{\left\langle u^k\,|f\right\rangle}_{c^k} - c^i \underbrace{\langle f\,|u_i\rangle}_{c_i^*} + c_k^* c^i \underbrace{\left\langle u^k\,|u_i\right\rangle}_{\delta_i^k}\,,$$

donde $k, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ Entonces, queda demostrada la desigualdad de Bessel al tomar el límite $n \to \infty$:

$$0 \leq \|\,|f\rangle\,\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \quad \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \|\,|f\rangle\,\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\,.$$

Si definimos el error, M_n, que se comete al aproximar una función con su expansión hasta un término $n-$ésimo como $M_n(b-a) \equiv \|\,|f\rangle - \alpha^i\,|u_i\rangle\,\|^2$ demostraremos que M_n es mínima si $\alpha^i = c^i = \left\langle u^i\,|f\right\rangle$.

Para ello procedemos como es costumbre, partiendo de la definición que acabamos de hacer y nos concentramos en el caso finito dimensional:

$$0 \leq M_n(b-a) \equiv \|\,|f\rangle - \alpha^i\,|u_i\rangle\,\|^2 = \|\,|f\rangle - (\alpha^i - c^i)\,|u_i\rangle - c^k\,|u_k\rangle\,\|^2\,.$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} M_n(b-a) &= \left[\langle f| - (\alpha_k^* - c_k^*)\left\langle u^k\right| - c_k^*\left\langle u^k\right|\right]\left[|f\rangle - (\alpha^i - c^i)\,|u_i\rangle - c^i\,|u_i\rangle\right] \\ &= \|\,|f\rangle\,\|^2 - c_i^*(\alpha^i - c^i) - 2c_i^* c^i - (\alpha_k^* - c_k^*)c^k + \sum_{j=1}^{n} \|\alpha^j - c^j\|^2 + (\alpha_k^* - c_k^*)c^k + c_i^*(\alpha^i - c^i) + c_i^* c^i \\ &= \left[\|\,|f\rangle\,\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|c^i\|^2\right] + \sum_{j=1}^{n} \|\alpha^j - c^j\|^2\,. \end{aligned}$$

Pero la desigualdad de Bessel garantiza que la cantidad entre corchetes es positiva, por lo tanto M_n es mínima (y la denotaremos $\tilde{M}_n$) cuando seleccionamos $\alpha^j = c^j$. Más aún, $\tilde{M}_n$ decrece cuando $n \to \infty$, vale decir:

$$\tilde{M}_n(b-a) = \|\,|f\rangle\,\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|c^i\|^2 \quad \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad \tilde{M}_\infty(b-a) = \|\,|f\rangle\,\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2\,,$$

y si, adicionalmente tenemos que $\tilde{M}_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces es claro que:

$$\|\,|f\rangle\,\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2 \ \Rightarrow\ \{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\} \qquad \text{es completa.}$$

Borrador Preliminar

Esta noción de convergencia se denomina *convergencia al promedio*.

Si adicionalmente exigimos que la serie $c^i\,|u_i\rangle$ converja uniformemente para $x \in [a,b]$ entonces es claro que:

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \|f(x) - c^i\,|u_i\rangle\,\|^2 = 0 \ \Rightarrow\ |f\rangle = c^i\,|u_i\rangle \quad (\text{con } i = 1,2,3\cdots,\infty) \ \Leftrightarrow\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c^i u_i(x)\,.$$

Podemos enumerar las condiciones para la cual exigiremos que una función pueda ser expresada en términos de una base completa de funciones.

- Que $f(x)$ sea cuadrado integrable $f(x) \in \mathcal{L}^2_{[a,b]}$.
- Que la base sea completa, $\{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$ i.e. $\|\,|f\rangle\,\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|c^i\|^2$.
- Que la serie $c^i\,|u_i\rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} c^i u_i(x)$ converja uniformemente, para $x \in [a,b]$.

3.1.3. Ejemplos

3.1.4. Practicando con Maxima

3.1.5. Ejercicios

3.2. Series de Laurent

Anteriormente consideramos series complejas de potencias. En esta sección revisaremos, desde la perspectiva de haber expresado la derivada n-ésima de una función analítica, el equivalente a las series de Taylor para funciones complejas de variable complejas.

3.2.1. Series de Taylor para funciones analíticas

Si $f(z)$ es analítica en un círculo de radio R, encerrado por un contorno $\mathcal{C}$ y centrado en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo $|z - z_0| < R$ de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \equiv f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + R_n\,,$$

con el resto $R_n(z)$ definido como:

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)}\,.$$

Para probar que podemos expandir una función analítica en términos de una serie de potencias partimos de la fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right]\,, \tag{3.1}$$

Borrador Preliminar

de donde:

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\equiv\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\left(\frac{\zeta-z}{\zeta-z_0}\right)}\right],$$

este último corchete proviene de una forma ingeniosa de utilizar una serie geométrica de razón $r=\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}$.

Para entenderlo, recordemos que para una serie geométrica, se cumple que:

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{1}{1-r}-\frac{r^{n+1}}{1-r}\;\Rightarrow\;\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n+\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Entonces:

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\equiv\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j+\frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\left(\frac{\zeta-z}{\zeta-z_0}\right)}\right],$$

con lo cual:

$$f(z)=\sum_{j=0}^{n}(z-z_0)^j\left(\frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}\right)+R_n(z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j+R_n(z)\,,\tag{3.2}$$

donde:

$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^n}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)}\,.\tag{3.3}$$

Obvio que la serie (3.2) converge si $R_n(z)\to 0$ cuando $n\to\infty$ y de eso es fácil convencerse al acotar la ecuación (3.3). Esto es, considerando ζ sobre el contorno $\mathcal{C}$ y z en el interior de $\mathcal{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}|R_n(z)|=\left|\frac{(z-z_0)^n}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)}\right| &< \frac{|z-z_0|^n}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta\right|\\ &< \frac{|z-z_0|^n}{2\pi}M\frac{1}{R^n}2\pi R\,,\end{aligned}$$

donde, una vez más, hemos utilizado la forma polar $\tilde{\zeta}=\zeta-z_0=Re^{i\theta}$ y hemos acotado $\left|\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|<M$, con lo cual es inmediato constatar que $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{z-z_0}{R}\right|^n=0\;\Rightarrow\;R_n(z)\to 0$, con lo cual la serie converge.

Veamos el siguiente ejemplo, vamos a expandir

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\,,$$

alrededor de $z=z_0$.

Esto es:

$$f(z)=\frac{1}{1-z_0}+\frac{1}{(1-z_0)^2}(z-z_0)+\frac{1}{(1-z_0)^3}(z-z_0)^2+\frac{1}{(1-z_0)^4}(z-z_0)^3+\cdots+\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}\,.$$

Borrador Preliminar

Figura 3.1: Expansión de Laurent

3.2.2. Las series de Laurent

Hemos dicho que si una función $f(z)$ es analítica en una región (digamos que circular) $\mathcal{R}$, entonces puede ser expandida por series de Taylor. Sin embargo, si $f(z)$ tiene un polo de orden p, digamos, en $z = z_0$, dentro de la región $\mathcal{R}$, no será analítica en ese punto, mientras que la función: $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región. Entonces $f(z)$ podrá ser expandida como series de potencias (de Laurent) de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k (z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{-n}}{(z - z_0)^n}\,, \text{ con } u_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,, \tag{3.4}$$

para: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ y $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Equivalentemente

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{3.5}$$

La suma de todos los términos que tengan potencias negativas, vale decir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{-n}}{(z-z_0)^n}$, se denomina *parte principal* de $f(z)$.

Para demostrar (3.4) o (3.5), recordamos que, tal y como muestra la figura 3.1 cuadrante I, si $f(z)$ es analítica en la regiún anular, entonces el Teorema de Cauchy, nos garantiza que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0}$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que ambas circulaciones tienen el mismo sentido.

Del mismo modo como procedimos en la ecuación (3.1) reescribimos el segundo par de integrales como

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\zeta\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right] + \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\zeta\, \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \left[\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right]$$

Borrador Preliminar

y ahora invocando, una vez más la progresión geométrica (**??**) podemos construir expresiones de integrales equivalentes a la ecuación (**??**). Vale decir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\zeta\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j + \frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n}{\left(\dfrac{\zeta-z}{\zeta-z_0}\right)}\right] + \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\zeta\, \frac{f(\zeta)}{z-z_0}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^j + \frac{\left(\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n}{\left(\dfrac{\zeta-z}{z-z_0}\right)}\right]$$

y equivalentemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n-1}(z-z_0)^j \underbrace{\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\zeta\, \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}}_{u_j} + R_{n1}(z) + \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} \underbrace{\oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\zeta\, f(\zeta)(\zeta-z_0)^j}_{u_{-j}} + R_{n2}(z) \tag{3.6}$$

Con lo cual queda demostrado la forma funcional de los coeficientes de la expansión de Laurent. La demostración de la convergencia, esto es $n \to \infty \Rightarrow R_{n1}(z) \to R_{n2}(z) \to 0$ sigue el mismo esquema que utilizamos para demostrar la convergencia de la ecuación (3.4) y se lo dejamos como ejercicio al lector.

Otra manera de representar las series de Laurent es por medio de las fórmulas:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}\,, \quad R_1 < |z-z_0| < R_2\,. \tag{3.7}$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,, \tag{3.8}$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-k+1}}dz\,, \quad k = 1,2,\ldots\,. \tag{3.9}$$

En este caso, se supone que la función es analítica en el dominio anular: $R_1 < |z-z_0| < R_2$ y C es un contorno cerrado simple en torno a z_0 y contenido en la región anular.

En el caso de b_k podemos ver que el integrando se puede escribir también como $f(z)(z-z_0)^{k-1}$. Si f es analítica en $|z-z_0| < R_2$, entonces el integrando es una función analítica en dicho disco y por lo tanto $b_k = 0$. Es decir, la serie (3.7) se reduce a una serie de Taylor donde los coeficientes son:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!}\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,.$$

En muchos casos las expansiones en series de Laurent no se generan a partir de las ecuaciones (3.4) o (3.7) sino a partir de manipulaciones algebráicas y expansiones en Taylor moduladas por otros factores. Analicemos el siguiente ejemplo.

El primero lo haremos directamente, vale decir, que como lo vamos a hacer no lo haremos otra vez. Queremos hacer una representación en serie de Laurent de la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}\,.$$

Utilizando las fórmulas de (3.6), construimos la relación

$$u_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{j+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{j+2}(\zeta-1)} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{j+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^{j+2-n}}$$

Borrador Preliminar

convirtiendo a la forma polar tendremos que

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{ri\theta e^{i\theta}\mathrm{d}\theta}{r^{j+2-n}e^{i(j+2-n)\theta}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{j+2-n,1} \quad \Rightarrow \begin{cases} u_n = -1 & \text{para } n \geq -1 \\ u_n = 0 & \text{para } n < -1 \end{cases}$$

es decir

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

3.2.3. Integración por el método de los residuos: los residuos de Laurent

Las expansiones de funciones en series de potencias dejan "residuos" al detener la expansión a para una determinada potencia. Esto se puede apreciar claramente en la expresión de Taylor para funciones analíticas. Ahora, las expansiones de Laurent nos muestran otro "residuo". Explotaremos las series de Laurent para funciones con polos y construiremos un método para evaluar integrales de funciones en esos puntos. Primero estudiaremos los residuos en general y luego los utilizaremos para evaluar integrales.

Hemos dicho que si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}z\, f(z) \neq 0 \;\Rightarrow\; f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

más aún, tendremos que los coeficientes de la expansión pueden ser calculados a partir de

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots \quad \text{si } n = -1, \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2i\pi a_{-1} \equiv 2i\pi \mathrm{Res}\, f(z) \tag{3.10}$$

Es decir, la integración a lo largo de un contorno $\mathcal{C}$ que aisle al polo $z = z_0$ es proporcional al residuo correspondiente a la expansión de Laurent alrededor de ese polo. Nos queda entonces calcular el residuo para así no calcular la integral.

Esta situación se ilustra con el siguiente ejemplo. Supongamos

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \cdots,$$

por lo tanto:

$$a_{-1} = -\frac{1}{3!} \;\Rightarrow\; \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2i\pi a_{-1} = -\frac{i\pi}{3}$$

En general, si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$(z-z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0) + \cdots + a_0(z-z_0)^p + \cdots \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}}[(z-z_0)^p f(z)] = (p-1)!a_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

con lo cual concluimos que

$$a_{-1} \equiv \mathrm{Res}\, f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(p-1)!}\frac{\mathrm{d}^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}}[(z-z_0)^p f(z)]\right) \tag{3.11}$$

Si, por ejemplo consideramos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} \equiv \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_0 = i \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-i)^2 f(z)] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\dfrac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right] \\ z_0 = -i \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z+i)^2 f(z)] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\dfrac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right] \end{cases}$$

Borrador Preliminar

con lo cual

$$\text{Res}\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right|_i = \lim_{z\to i}\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i}\frac{(z+i)^2ie^{iz}-e^{iz}2(z+i)}{(z+i)^2} = \frac{-4ie^{-1}--4ie^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e}$$

del mismo modo se procede para el caso $z=-i$

Un caso particular y muy útil lo constituyen las funciones racionales del tipo $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ y $f(z)$ tiene un polo simple en $z=z_0$. Esto es $q(z_0)=0$ entonces

$$\text{Res}\, f(z)|_{z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)} = p(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{3.12}$$

porque hemos utilizado el Teorema de L'Hopital. Este caso lo podemos ejemplificar si consideramos una función

$$f(z)=\frac{4-3z}{z^2-z}\equiv\frac{4-3z}{z(z-1)} \quad \text{con polos en} \begin{cases} z=0 \;\Rightarrow\; \text{Res}\, f(z)|_{z=0} = \left.\dfrac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=0} = -4 \\[2ex] z=1 \;\Rightarrow\; \text{Res}\, f(z)|_{z=1} = \left.\dfrac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=1} = 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

3.2.4. Ejemplos

1. Expandir

$$f(z)=\ln(1+z)$$

alrededor de $z=0$ (Serie de Maclaurin)

$$f(z)=\ln(1+z)=\ln(1+z)|_{z=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1-z)^{n+1}}\right|_{z=0}z^n \equiv f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+\cdots = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$$

2. Expandir

$$f(z)=\ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right],$$

alrededor de $z=0$ (Serie de Maclaurin)

$$\ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right]\equiv\ln[1+z]-\ln[1-z]=\left[z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\cdots\right]-\left[-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\cdots\right]=2\left[z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\cdots\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Consideremos los siguientes ejemplos de desarrollos en Series de Laurent

3. Dada la función:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}.$$

La función puede escribirse en la forma:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z-2}\right], \quad 0<|z|<2.$$

Borrador Preliminar

Por otro lado, sabemos que:

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,, \quad |z|<2\,,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z(z-2)} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z - \frac{1}{16}z^2 - \frac{1}{32}z^3 - \frac{1}{64}z^4 - \frac{1}{128}z^5 - \cdots\,, \quad 0<|z|<2\,. \end{aligned}$$

4. Sea la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}\,.$$

Esta función tienes polos de orden 1 en $z=1$ y $z=3$. Además, expresando $f(z)$ como una suma de fracciones parciales, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3}\right], \quad 1<|z|<3\,,$$

- Para $1<|z|<3$.
  Tenemos los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\,, \quad |z|>1\,, \\ -\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\,, \quad |z|<3\,, \end{aligned}$$

  La serie es:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right] \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{18}\,z - \frac{1}{54}\,z^2 - \frac{1}{162}\,z^3 - \frac{1}{2}\,z^{-1} - \frac{1}{2}\,z^{-2} - \frac{1}{2}\,z^{-3} - \frac{1}{2}\,z^{-4} - \cdots\,. \end{aligned}$$

- Para $|z|>3$.
  En este caso no podemos utilizar el segundo desarrollo anterior, ya que éste es válido sólo para $|z|<3$. Por lo tanto:

$$-\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-3/z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}\,, \quad |z|>3\,,$$

  podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}\right] = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-3^n}{z^{n+1}} \\ &= z^{-2} + 4\,z^{-3} + 13\,z^{-4} + 40\,z^{-5} + \cdots\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

- para $|z| < 1$.
  Escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{6}\frac{1}{1-z/3}\,,$$

como $|z| < 1$ y $|z/3| < 1$ en este dominio, entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left[1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\,z + \frac{13}{27}\,z^2 + \frac{40}{81}\,z^3 + \frac{121}{243}\,z^4 + \cdots\,. \end{aligned}$$

5. Dada la siguiente función

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\,.$$

Sabemos que:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\,, \quad |z| < \infty\,,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^2 e^{2(z-1)}}{(z-1)^3} = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-1)^n}{n!(z-1)^3} = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z-1)^{n-3} \\ &= e^2\left[\frac{2}{3} + (z-1)^{-3} + 2\,(z-1)^{-2} + 2\,(z-1)^{-1} + \frac{2}{3}\,z + \frac{4}{15}\,(z-1)^2 + \cdots\right]\,, \end{aligned}$$

la cual es válida para: $0 < |z-1| < \infty$.

6. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Esta función se puede escribir como:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Sabemos que:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad |z| < \infty\,,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} &= \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{z^3(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{120}\,z^2 + \frac{1}{5040}\,z^4 - \frac{1}{362880}\,z^6 + \frac{1}{39916800}\,z^8 - \cdots\,, \end{aligned}$$

válida para: $0 < |z| < \infty$.

Borrador Preliminar

7. Para la función $f(z) = (z+3)\text{sen}\left(\frac{1}{z+3}\right)$ identifique el tipo de singularidad y determine la región de convergencia de las serie de Laurent

   La singularidad $z = -3$ es esencial, pero a través de un cambio de variable $u = \frac{1}{z+3}$ podemos reescribir la expresión como

$$(z+3)\text{sen}\frac{1}{z+3} = \frac{\text{sen}u}{u} = \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \cdots\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{6(z+3)^2} + \frac{1}{120(z+3)^4} - + \cdots$$

   La serie converge para todo $z \neq -3$

3.2.5. Practicando con Maxima

Figura 3.2: Regiones de desarrollo de ejercicios de la sección 3.2.6

3.2.6. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes funciones encuentre la serie de Laurent alrededor de cada singularidad. Identifique el tipo de singularidad en cada caso y da la región de convergencia de cada serie.

   a) $(z-3)\text{sen}\frac{1}{z+2}$, $\quad z = -2$

   b) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $\quad z = -2$;

   c) $\frac{1}{z(z-3)^2}$, $\quad z = 3$.

2. Encuentre la expansión en serie de Laurent para $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$ en las regiones que se muestran en la figura 3.2

Borrador Eliminar

3.3. Teorema del Residuo

3.3.1. Integrales impropias

Hemos visto como calcular las integrales de funciones, en regiones múltiplemente conexas, con polos simples a partir de residuos. Ahora generalizaremos ese esquema para una región, también múltiplemente conexa, pero con un número finito de polos. Tal y como se muestra en la figura 3.1 en el cuadrante II, realizamos una circulación ingeniosa, de tal modo que aislamos los distintos polos. Ahora bien, como la función es analítica en la región bordeada por todos esos contornos, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) + \cdots \oint_{\mathcal{C}_m} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$$

y al cambiar el sentido de circulación comprobamos lo que ya sabíamos

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) + \cdots \oint_{\mathcal{C}_m} \mathrm{d}z\ f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

donde hemos utilizado lo que hicimos para la ecuación (3.10)

Con ello podemos enunciar el Teorema del Residuo que ya hemos demostrado

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un número, m, finito de polos $z_{0_1}, z_{0_2}, z_{0_3}, \cdots z_{0_m}$ entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

Una vez más ejemplificamos. Sea la función

$$f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}\,,$$

una función con polos simples en $z=0$ y $z=1$ correspondientes a residuos 4 y 1, respectivamente, tal y como se vio en la sección (3.2.3). Entonces, utilizamos los resultado expuestos en el ejemplo (3.13)

$$\oint_{C} \mathrm{d}z \frac{4-3z}{z^2-z} = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i\,,$$

siempre y cuando el circuito C encierre los dos polos, $z=0$ y $z=1$, para los cuales hemos calculado los residuos.

3.3.2. Evaluación de integrales reales e impropias

El teorema del residuo (3.3) es una herramienta poderosa para evaluar algunos tipos de integrales definidas en variable real. La intención es "extender" el dominio de las funciones de la recta real al plano complejo. Una de las restricciones es que los contornos deben ser cerrados antes de que sean evaluados los residuos. El punto es que muchas integrales reales tienen contornos abiertos y la posibilidad de evaluar estas integrales a través del Teorema del Residuo descansa en la forma como se cierran los contornos. En estos casos se debe estimar las contribuciones de esos contornos adicionales que permiten cerrar los contornos abiertos. A continuación expondremos algunas técnicas para cerrar algunos tipos de contornos abiertos.

Borrador Preliminar

Figura 3.3: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

3.3.3. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$

Este tipo de integrales implica, si ambos límites existen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{r\to-\infty} \int_{r}^{0} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{r\to\infty} \int_{0}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) \leftrightarrow \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x)$$

Necesitaremos que el integrando sea una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $q(x) \neq 0\ \ \forall\ x$. Adicionalmente requeriremos que cuando menos $q(x) \sim x^2 p(x)$. Supuesto todo esto, convertimos nuestra función racional en una función de variable compleja $f(x) \to f(z)$ y consideramos la integral de circulación, $\oint_C \mathrm{d}z\ f(z)$, sobre un contorno C descrito por el eje real y una semicircunsfrencia Γ en el plano complejo con $y \geq 0$, tal y como se muestra en el cuadrante I la figura 3.4. La intención es hacer $r \to \infty$ y con ello evaluar la integral $\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$. Es fácil convencerse que

$$\oint_C \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{\Gamma} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

es decir,

$$\int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}} - \int_{\Gamma} \mathrm{d}z\ f(z)$$

Esta estrategia es válida porque hemos supuesto que $f(x)$ es racional y que $q(x) \neq 0\ \ \forall\ x$, entonces si existen polos para $f(z)$ estarán en el plano complejo (no sobre el eje real). Todos esos polos serán encenrados por el contorno C que hemos seleccionado. Más aún, comprobaremos que $\int_{\Gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \to 0 \quad \text{cuando} z \to \infty$. Esto es sencillo si notamos que

$$q(x) \sim x^2 p(x) \quad \Rightarrow |f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \quad \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} \mathrm{d}z\ f(z) \right| < \frac{k}{r^2}\pi r = \frac{k\pi}{r} \qquad \text{para } |z| = r \geq 0$$

Borrador Preliminar

con lo cual llegamos a que para este tipo de integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}} \quad \text{para } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{con } q(x) \neq 0\ \ \forall\, x\ \wedge p(x) \sim x^2 q(x)\,. \tag{3.14}$$

Como un ejemplo consideremos evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} \ \Rightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

donde hemos utilizado la expresión (3.14). La extensión analítica

$$f(x) \to f(z) = \frac{1}{z^4+1} \quad \text{tendrá cuatro polos simples: } z = e^{\pm\frac{i\pi}{4}};\ z = e^{\pm\frac{3i\pi}{4}};$$

correspondientes a las cuatro raíces de $z^4 = -1$. Acto seguido calculamos los residuos invocando la relación (3.12) que hemos construido para funciones racionales. Esto es

$$\mathrm{Res}\ \frac{p(z)}{q(z)}\bigg|_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \ \Rightarrow\ \begin{cases} z = e^{\frac{i\pi}{4}} \ \Rightarrow\ \mathrm{Res}\ \ f(z)\big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \dfrac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \dfrac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{4} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4} \\[2ex] z = e^{\frac{3i\pi}{4}} \ \Rightarrow\ \mathrm{Res}\ \ f(z)\big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \dfrac{1}{4z^3}\bigg|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \dfrac{e^{\frac{-9i\pi}{4}}}{4} = \dfrac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{4} \end{cases}$$

Hemos considerado únicamente los polos para el semiplano complejo $y > 0$ ya que seguimos considerando el circuito descrito en el cuadrante I de la figura 3.4. Quedan dos polos ubicados en el semiplano complejo $y < 0$, tal y como se muestra en el cuadrante II de la misma figura 3.4.

Consecuentemente, tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) = \pi \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ \Rightarrow\ \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,.$$

3.3.4. Integrales de funciones racionales de $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\ \theta$

Ahora mostraremos la estrategia para integrales de funciones racionales de funciones trigonométricas, $\mathcal{G}(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta))$. La idea es transformar estas integrales en otras de funciones de variable compleja a través de los cambios de variables que conectan las funciones trigonométricas y los números complejos. Esto es transformar integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\ \mathcal{G}(\cos\theta, \mathrm{sen}\ \theta) \quad \to \quad \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{zi} f(z)\,,$$

mediante cambios de variables estándares

$$z = re^{i\theta} \ \Rightarrow\ \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{zi}; \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right); \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\ \theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \tag{3.15}$$

Por ejemplo, en las tablas de integrales encontrábamos[1] que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\mathrm{sen}\ \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{con } |a| > |b|\,,$$

[1] *Encontrábamos* porque hoy en día estas integrales las calculamos con manipuladores simbólicos del tipo `Maple`, `Reduce`, `Matemathica` o `Mupad`

Borrador Preliminar

veamos como se llega a ese resultado.

Haciendo $z = re^{i\theta}$ y asumiendo las consecuencias, tal y como se presenta en (3.15) arriba, tendremos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\mathrm{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{\frac{\mathrm{d}z}{zi}}{a + \frac{b}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \oint_C \frac{2\mathrm{d}z}{bz^2 + 2aiz - b} \quad \text{con } C \text{ una circunferencia } |z| = 1$$

los polos de

$$f(z) = \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} \;\Rightarrow\; z_{\pm 0} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i\,,$$

son los valores de z que anulan el denominador de $f(z)$. Seguidamente verificamos la ubicación de los polos simples y comprobamos que como $|a| > |b|$ entonces

$$|z_{+0}| = \left|\frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i\right| < 1 \qquad \text{y} \qquad |z_{-0}| = \left|\frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i\right| > 1\,,$$

y por lo tanto, sólo el primero de los polos está encerrado por el circuito C con $|z| = 1$ tal y como muestra en el cuadrante III de la figura 3.4.

Una vez más calculamos el residuo para z_{+0} a partir de (3.11). Entonces tendremos que

$$\mathrm{Res}\;\; f(z)|_{z=z_{+0}} = \lim_{z \to z_{+0}} (z - z_{+0}) \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} = \lim_{z \to z_{+0}} \frac{2}{2bz + 2ai} = \frac{1}{bz_{+0} + ai} \equiv \frac{-i}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\mathrm{sen}\,\theta} = \oint_C \frac{2\mathrm{d}z}{bz^2 + 2aiz - b} = 2i\pi \mathrm{Res}\; f(z)_{z=z_{+0}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,.$$

3.3.5. Integrales de Fourier

Otro grupo de integrales que pueden ser evaluadas mediante el teorema de Residuos son las integrales de Fourier. Integrales que involucran funciones racionales, $f(x)$, que satisfacen las condiciones expuestas anteriormente y funciones senos y cosenos. Integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos mx \\ \mathrm{sen}\; mx \end{array} \right\} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) e^{imx} \to \oint_C \mathrm{d}z\; f(z) e^{imz} = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\left| f(z) e^{imz} \right|_{z=z_{0j}} \tag{3.16}$$

Con $m > 0$ y los polos correspondientes a los residuos que se muestran en el lado derecho, están ubicados en el semiplano complejo con $y > 0$. Es claro que el circuito seleccionado es Γ que muestra el cuadrante II de la figura 3.4.

Equivalentemente, igualando partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) \cos mx &= -2\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Im}\;\mathrm{Res}\left| f(z) e^{imz} \right|_{z=z_{0j}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; f(x) \mathrm{sen}\; mx &= 2\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re}\;\mathrm{Res}\left| f(z) e^{imz} \right|_{z=z_{0j}}\,. \end{aligned}$$

Otra vez, el circuito C se separa en una semicircunferencia Γ y el eje real.

Borrador Preliminar

Figura 3.4: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

Para demostrar que para evaluar las integrales de Fourier (3.16) se requiere la suma de los residuos nos convencemos que la integral a lo largo de la semicircunferencia se anula. Esto es fácil si comprobamos que $y > 0$ y $m > 0$, entonces si $z = x + iy$ tendremos que

$$|e^{imz}| = |e^{imx}||e^{-my}| = e^{-my} < 1 \quad \Rightarrow |f(z)e^{imz}| = |f(z)| \leq |f(z)|\,|e^{imz}|$$

con lo cual redujimos al de una función racional.

Por ejemplo, comprobemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\ \cos mx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{k} e^{-km} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\ \operatorname{sen} mx}{x^2 + k^2} = 0$$

es fácil ver que el polo simple de la continuación analítica de $f(x)$ es $z_0 = ik$ y su residuo será

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2} \quad \Rightarrow z_0 = ik \quad \Rightarrow \text{Res}\ \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2}\bigg|_{z=ik} = \frac{e^{imz}}{2z}\bigg|_{z=ik} = \frac{e^{-mk}}{2ik}$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{e^{imx}}{x^2 + k^2} = 2i\pi \frac{e^{-mk}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-mk}$$

3.3.6. Otras integrales impropias

Existen integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración. Esto es, en general

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| \to \infty \quad \Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta \to 0} \int_a^{x_0 - \zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi \to 0} \int_{x_0 + \xi}^b \mathrm{d}x\ f(x)$$

Borrador Preliminar

donde ζ y ξ tienden a cero de forma independiente, es decir, ambos límites se efectúan independientemente. Ahora bien, puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\; f(x) + \lim_{\xi\to 0}\int_{x_0+\epsilon}^{b} \mathrm{d}x\; f(x)\right) \quad \Leftrightarrow \quad V.P.\int_a^b \mathrm{d}x\; f(x)$$

Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy* para esa integral. La estrategia en estos casos será diseñar un circuito tal que evite los polos de la extensión analítica de la función. Normalmente se establece este recorrido rodeando los polos con arcos de circunferencia cuyos radios luego tenderán a cero. Veamos con un ejemplo esta estrategia de circunnavegación.

Por ejemplo, consideremos que queremos evaluar la siguiente integral

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\; \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x\to -0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$

Si bien el límite está definido, cuando hacemos la extensión analítica[2] $f(x) = \operatorname{sen} x/x \to f(z) = e^{iz}/z$ la función compleja presenta un polo simple en $z = 0$, con lo cual la integral compleja presenta un polo en la región de integración. Esto es

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\; \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \to \oint_C \mathrm{d}z\; \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} \mathrm{d}x\; \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_2} \mathrm{d}z\; \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\; \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_1} \mathrm{d}z\; \frac{e^{iz}}{z} = 0\,,$$

donde hemos construido un circuito que rodea el polo $z = 0$ (cuadrante IV de la figura 3.4). Es claro que $\oint_C \mathrm{d}z\; \frac{e^{iz}}{z} = 0$ porque la región no contiene ningún polo.

Ahora mostraremos que $\int_{C_1} \mathrm{d}z\; \frac{e^{iz}}{z} \to 0$, cuando $R \to \infty$.

Para ello, convertimos

$$z = Re^{i\theta} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{z} = i\mathrm{d}\theta\,,$$

entonces

$$\left|\int_{C_1} \mathrm{d}z\; \frac{e^{iz}}{z}\right| = \left|\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\; ie^{iz}\right| \le \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\; |e^{iz}| = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\; \underbrace{|e^{iR\cos(\theta)}|}_{1}\,|e^{-R\operatorname{sen}(\theta)}| = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\; e^{-R\operatorname{sen}(\theta)}\,,$$

con lo cual

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\; |e^{iz}| = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\; e^{-R\operatorname{sen}(\theta)} = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\; e^{-R\operatorname{sen}(\theta)} = 2\left[\int_0^\zeta \mathrm{d}\theta\; \underbrace{e^{-R\operatorname{sen}(\theta)}}_{I_1} + \int_\zeta^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\; \underbrace{e^{-R\operatorname{sen}(\theta)}}_{I_2}\right]\,,$$

para $0 \le \zeta \le \pi/2$.

Es claro que $e^{-R\operatorname{sen}(\theta)}$ es una función decreciente en θ y como estamos tratando de demostrar que la integral a lo largo del circuito se anula $\mathcal{I}_1 \to 0$, podremos considerar los máximos valores para I_1 y I_2 en el entorno de integración y fijarlos como constantes, al hacer esto tendremos lo máximos valores que podrán tomar las integrales respectivas. Los máximos valores para I_1 y I_2, son, 1 y $e^{-R\zeta}$.

Entonces,

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\; |e^{iz}| \le 2\left[\int_0^\zeta \mathrm{d}\theta + e^{-R\operatorname{sen}(\zeta)}\int_\zeta^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\right] = 2\left[\zeta + e^{-R\operatorname{sen}(\zeta)}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right)\right] < 2\zeta + \pi e^{-R\operatorname{sen}(\zeta)}\,.$$

[2] Nótese que la extensión analítica ha sido $f(x) = \operatorname{sen} x/x \to f(z) = e^{iz}/z$ y no $f(x) = \operatorname{sen} x/x \to f(z) = \operatorname{sen} z/z$ La razón de esta selección se fundamenta en el comportamiento patológico (oscilante) de la función seno en infinito.

Borrador Preliminar

Figura 3.5: Contorno con dos polos sobre el eje real

Al considerar que $\zeta \to 0$ y $R \to \infty$ comprobamos que $\mathcal{I}_1 \to 0$.

Seguidamente nos toca demostrar que $\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} \mathrm{d}z\, \frac{e^{iz}}{z} \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Para este caso $z = \epsilon e^{i\theta}$ y como siempre, $\mathrm{d}z/z \;=\; i\mathrm{d}\theta$, entonces la integral

$$\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} \mathrm{d}z\, \frac{e^{iz}}{z} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\; ie^{i\epsilon\exp(i\theta)} \;\Rightarrow\; \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{I}_2 = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\; ie^{i\epsilon\exp(i\theta)} = i\pi\,.$$

Esto implica que

$$\oint_C \mathrm{d}z\, \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} \mathrm{d}x\, \frac{e^{ix}}{x} + i\pi + \int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\, \frac{e^{ix}}{x} = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{x\to -x} \quad \int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} + i\pi = 0\,,$$

con lo cual es claro que

$$\int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\, \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} = -i\pi \;\Rightarrow\; 2i\int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\, \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -i\pi \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{2}\,,$$

donde hemos hecho los límites $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$.

Supongamos ahora que el integrando tiene dos puntos singulares en el eje real, en $x = x_1$ y $x = x_2$, tal y como se muestra en la figura 3.5. La estrategia será la misma: evitar los polos haciendo pequeños semicírculos, dejando que ambos estén en la parte superior del plano complejo, i.e. $y > 0$

Podemos representar la integral cerrada a lo largo de ese contorno como

$$\int_{-\infty}^{x_1-\epsilon} + \int_{C_1} + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} + \int_{C_2} + \int_{x_2+\epsilon}^{\infty} + \int_{C_R} = 2\pi i \sum \text{Res.}$$

El valor principal de la integral se define como la suma de todas las integrales etiquetadas con ϵ en sus límites. La contribución del semicírculo C_1 se puede calcular sustituyendo $z - x_1 = \epsilon e^{i\theta}$:

$$\int_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-x_1)(z-x_2)} = \int_{\pi}^{0} \frac{f\left(x_1 + \epsilon e^{i\theta}\right) i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}\left(x_1 + \epsilon e^{i\theta} - x_2\right)} = -i\pi \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

Borrador Preliminar

y equivalentemente para C_2. Con lo cual tendremos

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}dx - i\pi\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 2\pi i\sum \text{ Res.}$$

Si incluimos el caso para la región con $y<0$ considerando ahora C_1 y C_2 en esa región, obtenemos

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}dx = \pm i\pi\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} + 2\pi i\sum \text{Res}$$

donde el signo más indica el caso en que C_1 y C_2 están en la región $y>0$ y el signo menos el caso en que ambas están en la zona $y<0$. También podemos derivar un interesante resultado cuando ambas singularidades coincidan. En este caso tomamos el límite $x_1\to x_2$ y el lado derecho de la última ecuación se convierte en una derivada

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}dx = \pm i\pi f'(x_0) + 2\pi i\sum \text{ Res.}$$

3.3.7. Ejemplos

1. Para evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} \;\Rightarrow\; f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

donde hemos realizado la extensión analítica $f(x)\to f(z)$ y ubicado sus polos de $z=i$ y $z=i-1$ en el semiplano complejo $y>0$ y los encerrados por el circuito descrito en el cuadrante I de la figura 3.4. El primero de estos polos es de segundo orden, mientras que el segundo corresponde a un polo simple. Consecuentemente, los residuos se calculan invocando la relación general (3.11) arriba expuesta. Con lo cual para

$$z=i \;\Rightarrow\; \lim_{z\to i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-i)^2\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right]\right) = \frac{-12+9i}{100}$$

y para

$$z=i-1 \;\Rightarrow\; \lim_{z\to i-1}(z-i+1)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-i-1)(z+i-1)} = \frac{3-4i}{25}$$

Finalmente, podemos evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = 2i\pi\sum_{j=1}^{2}\text{Res } f(z)_{z=z_{0j}} = 2\pi i\left(\frac{-12+9i}{100}+\frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7\pi}{50}$$

2. Evaluemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x\,\mathrm{sen}\,\pi x}{x^2+2x+5}$$

Partimos de la continuación analítica de

$$f(x)\to f(z)=\frac{ze^{iz\pi}}{z^2+2z+5} \quad\Rightarrow z_{\pm 0}=-1\pm 2i \quad\Rightarrow \oint_C \mathrm{d}z\frac{ze^{iz\pi}}{z^2+2z+5} = \text{Res }\left.\frac{ze^{iz\pi}}{z^2+2z+5}\right|_{z=-1+2i}$$

Borrador Preliminar

ya que ese es el único polo encerrado por la circulación Γ. Calculando el residuo tendremos

$$\text{Res}\ \frac{ze^{iz\pi}}{z^2+2z+5}\bigg|_{z=-1+2i} = \lim_{z\to -1+2i}\left((z+1-2i)\frac{ze^{iz\pi}}{z^2+2z+5}\right) = (-1+2i)\frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i}$$

con lo cual

$$\oint_C \mathrm{d}z\frac{ze^{iz\pi}}{z^2+2z+5} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x\cos\ \pi x}{x^2+2x+5}+i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x\,\mathrm{sen}\,\pi x}{x^2+2x+5} = 2i\pi(-1+2i)\frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i} = \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}$$

igualando parte real e imaginaria tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x\cos\ \pi x}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\frac{x\mathrm{sen}\ \pi x}{x^2+2x+5} = -\pi e^{-2\pi}$$

3. En las funciones de Green o propagadores encontramos con frecuencia expresiones del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}\mathrm{d}x}{x^2-k^2} \qquad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itz}\mathrm{d}z}{z^2-k^2}$$

donde, hemos hecho la extensión analítica con k y t constantes reales.

Para calcular el valor principal de esta integral para $t>0$, elegimos un contorno en la región $y>0$ que excluye dos polos

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}dx}{x^2-k^2} = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}dx}{(x-k)(x+k)} = i\pi\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2k} = -\pi\frac{\sin kt}{k}.$$

Cuando $t<0$, tenemos que cerrar el contorno en la región $y<0$, donde de nuevo no hay polos:

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}dx}{x^2-k^2} = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}dx}{(x-k)(x+k)} = -i\pi\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2k} = \pi\frac{\sin kt}{k}$$

Finalmente, combinando ambos resultados tendremos

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}dx}{x^2-k^2} = -\pi\frac{\sin k|t|}{k}$$

3.3.8. Practicando con Maxima

3.3.9. Ejercicios

1. Determinar los polos y los residuos correspondientes para cada una de las funciones propuestas

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}; \quad f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2; \quad f(z) = \frac{\mathrm{sen}\ z}{z^2}; \quad f(z) = \cot z$$

2. Evaluar

a)

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z\ e^z}{\cosh z} \quad \text{a lo largo de una circunsferencia } |z|=5$$

Borrador Preliminar

b)

$$\oint_C \frac{(2z^2+5)\mathrm{d}z}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} \quad \text{a lo largo de una circunsferencia } |z-2i|=6 \text{ y}$$

un cuadrado de vértices $z=1+i; z=2+i; z=2+2i$ y $z=1+2i$.

3. Evaluar las siguientes integrales

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}; \qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}; \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}$$

4. Compruebe las siguientes evaluaciones

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta+c\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \quad \text{con } a^2>b^2+c^2; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\theta}{5-4\cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}\,.$$

5. Compruebe que

$$\text{Para } m>0 \quad \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4} \qquad \text{y} \quad \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}$$

6. Comprobar las evaluaciones para las siguientes integrales

a)

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \mathrm{sen}\ x^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}x\ \cos\ x^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

b)

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{\ln x}{x^4+1} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}; \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{(\ln x)^2}{x^4+1} = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{16}$$

c)

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{x^{-p}}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \left(\frac{\pi}{\mathrm{sen}\ p\pi}\right)\left(\frac{\mathrm{sen}\ p\alpha}{\mathrm{sen}\ \alpha}\right)$$

3.4. Tranformadas de Fourier

La transformada de Fourier representa (como combinación lineal de funciones sinusoidales) a funciones definidas en toda la recta real y/o sin una periodicidad definida. Puede ser considerada como la generalización de la representación en serie de Fourier, y es mayormente utilizada para expresar funciones que varían en el tiempo con el único requisito que tengan norma acotada, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ |f(t)|$ finita.

Anteriormente hemos visto, que podemos expresar una función en término de series de Fourier complejas

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}\,,$$

donde hemos definido $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$.

Ahora bien, podemos hacer $T\to\infty$ con lo cual $[-T/2,T/2]\to[-\infty,\infty]$ pero también se tiene:

$$T\to\infty \ \Rightarrow\ \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{n} = \Delta\omega \to \mathrm{d}\omega \text{ y además } \frac{\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\ f(t)}{T} \to 0 \quad \text{ya que } \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ f(t)\ \text{, existe y es acotada.}$$

Borrador Preliminar

Si recordamos la expresión que toman los coeficientes de la expansión

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}x\ e^{\frac{-i2n\pi x}{T}} f(x) \ \Rightarrow\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}x\ e^{-inx}f(x)\right)e^{i\omega_n t}\,,$$

con lo cual hacer $T \to \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ e^{i\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ e^{-i\omega x}f(x)}_{F(\omega)}\,.$$

De este modo, la transformada de Fourier de una función y su inversa, pueden escribirse como

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\ e^{-i\omega t}f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ e^{i\omega t}F(\omega)\,.$$

Aunque las Series de Fourier constituyen la herramienta adecuada para aproximar o analizar funciones periódicas, la Transformada o integral de Fourier, $F(\omega)$, es lo mas indicado para las funciones que no sean periódicas. Pasamos de la serie a la transformación tal y como lo hemos mostrado. Construimos un sistema descrito por un continuo de frecuencias "fundamentales". De este modo, tratamos con paquetes de ondas que contienen frecuencias continuas en lugar de discretas

Si $f(t)$ es la respuesta de un sistema en función del tiempo, entonces $F(\omega)$ es la función espectral que mide la cantidad de frecuencias ω significativas presentes en la señal. En muchos casos, resulta que $F(\omega)$ es una función compleja con valores positivos y negativos. En consecuencia, se acostumbra a eliminar parte de la complejidad de $F(\omega)$ utilizando el módulo cuadrado $|F(\omega)|^2$ graficándolo respecto a ω. A esto se le denomina el espectro de potencias y proporciona una visión inmediata de la cantidad de potencia o fuerza en cada componente.

3.4.1. Propiedades

Las transformada de Fourier cumplen con las siguiente propiedades, las cuales de derivan de la definición arriba expuesta

1. Las transformada de la derivada $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathcal{F}[f^n(t)] = i^n\omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es más o menos inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\ e^{i\omega t}f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\ e^{i\omega t}f'(t)i\omega F(\omega)$$

2. La transformada de la integral

$$\mathcal{F}\left[\int^{t}\mathrm{d}s\ f(s)\right] = \frac{1}{i\omega}F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$$

   donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ se denomina delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración

3. Naturalmente las funciones (distribuciones) deltas de Dirac, $\delta(\omega-\omega')$, emergen en los desarrollos para las transformadas de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' t}}{\sqrt{2\pi}}F(\omega')\right)}_{f(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega'\underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'-\omega)t}}{2\pi}\right\}}_{\delta(\omega-\omega')}F(\omega')$$

Borrador Preliminar

4. Escalamiento $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$
5. Traslación $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega}F(\omega)$
6. Multiplicación por un exponencial $\mathcal{F}\left[e^{\alpha t}f(t)\right] = f(\omega + i\alpha)$

Aunque las funciones deltas de Dirac son comunes y y muy útiles en la física teórica, se comporta terriblemente en los cálculos computacionales. Si bien es posible crear aproximaciones numéricas nunca son buenas y complican los cálculos computacionales. Lo mejor es utilizar este tipo de funciones para el cálculo analíticos.

3.4.2. Funciones pares e impares

Al igual que en las expansiones de Fourier, la paridad de las función $f(t)$ es importante. Esto se nota rápidamente a partir de la definición. Supongamos $f(t) = -f(-t)$, entonces

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{-i\omega t}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\,(\cos(\omega t) - i\mathrm{sen}(\omega t))\,f(t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t\ \mathrm{sen}(\omega t)\ f(t)\,,$$

con lo cual podremos definir las transformadas de Fourier seno y coseno para funciones impares y pares respectivamente. Esto es para funciones impares $f(t) = -f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t\ \cos(\omega t)\ f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega\ \cos(\omega t)\ F(\omega)\,,$$

y para funciones pares $f(t) = f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t\ \mathrm{sen}(\omega t)\ f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega\ \mathrm{sen}(\omega t)\ F(\omega)\,.$$

3.4.3. Tranformadas discretas de Fourier

Aquí haremos algo más contemporáneo que será estudiar la versión discreta de esta transformación. En general las integrales, en su mayoría, no se pueden resolver analíticamente por lo que tenemos que proceder a resolverlas de forma numérica. La mayor parte de los métodos numéricos involucra convertir integrales en sumatorias. Es decir en series de funciones.

Hemos visto como las funciones trigonométricas (y las exponenciales de argumento imaginario) son ortogonales bajo integrales evaluadas en un determinado intervalo. En otras palabras con la definición de producto interno en un espacio de funciones. Ahora bien, esas mismas funciones (*Fourier Generalidades*, *cosenos* y funciones *exponenciales* de argumento imaginario) serán también ortogonales al ser evaluadas en puntos muy particulares.

Consideremos los siguientes $2N$ puntos $t_k = \frac{kT}{2N}$ y probaremos que las funciones $e^{2\pi i p t_k/T}$ y $e^{2\pi i q t_k/T}$ serán ortogonales $\propto \delta_{qp}$ en un conjunto esos puntos t_k. Esto es

$$\sum_{k=0}^{2N-1}\left[e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}}\right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s k}{2N}} = \begin{cases} \dfrac{1-r^{2N}}{1-r} = 0 & r \neq 1 \\ 2N & r = 1 \end{cases}$$

donde hemos sustituido $s = q - p$, y evaluado en los puntos $t_k = \dfrac{kT}{2N}$ con $k = 1, 2, 3, \cdots, 2N-1$. Nótese que la última de las series es una serie finita y geométrica con razón $r = e^{(\pi i s)/N}$, que comienza con 1 y por

Borrador Preliminar

lo tanto suma (dependiendo del valor de r) lo que aparece en la llave. Es inmediato convencerse que, para todo N se cumple que $r^{2N} = e^{2\pi i s} = 1$ (con s entero) con lo cual se cumple la relación de ortogonalidad que buscamos

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}}\right]^{\star} e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = 2N\delta_{qp} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \cdots, 2N-1 \tag{3.17}$$

Si hacemos un ligero cambio de notación y llamamos $\omega_m = \dfrac{2\pi m}{T}$ tendremos algunos cambios, en apariencia, cosméticos

$$e^{\pm\frac{2\pi i m t_k}{T}} \quad \to e^{\pm\omega_m t_k} \;\Rightarrow\; F(\omega_m) = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k)e^{\pm\omega_m t_k} \quad \Leftrightarrow \quad f(t_k) = \frac{1}{2N}\sum_{m=0}^{2N-1} F(\omega_m)e^{\pm\omega_m t_k} \tag{3.18}$$

La función $F(\omega_m)$ representa la transformada discreta de Fourier de la $f(t_k)$. Para despejar la función $f(t_k)$ hemos utilizado la relación de ortogonalidad 3.17.

Consideremos el siguiente $f(t_k) = \cos(t_k)$ evaluado en un período $T = 2\pi$ y dividido, digamos en $N = 2$ intervalos. Los puntos en los cuales evaluaremos nuestra serie serán $2N = 4$, vale decir

$$t_k = \frac{kT}{2N} \equiv \frac{k\pi}{2} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_m = \frac{2\pi m}{T} \equiv m \;\Rightarrow\; \frac{e^{i\omega_m t_k}}{2N} \equiv \frac{e^{imk\pi/2}}{2N}$$

nótese que la función $f(t_k)$ puede ser escrita como un vector $f(t_k) = (1, 0, -1, 0)$, con lo cual para encontrar la expresión de su transformada discreta de Fourier, $F(\omega_m)$, podemos expresar la suma como una matriz de transformación con índices m, k. Esto es

$$\frac{e^{imk\pi/2}}{2N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$F(\omega_m) = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k)e^{\pm\omega_m t_k} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} F(\omega_0) \\ F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ F(\omega_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Respecto a la ecuación 3.18 se deben puntualizar varios elementos

- la frecuencia angular $\omega_m = \dfrac{2\pi m}{T}$ corresponde a lo que en Física se denomina el espacio recíproco (al temporal), espacio de frecuencias u ω-espacio. Por ello la función $F(\omega_m)$ está expresada en este espacio de frecuencias, mientras que la función $f(t_k)$ en el de tiempos.
- La elección de uno de los signos $+$ y $-$ en la expresión $e^{\pm\omega_m t_k}$ es arbitraria.

Con lo cual si "reconstruimos" la función original a partir de la transformada discreta nos sorprende el resultado, por cuanto no coincide

$$f(t_k) = \frac{1}{2}e^{-it_k} + \frac{1}{2}e^{-3it_k} \;\Rightarrow\; \Re\left[f(t_k)\right] = \frac{1}{2}\cos(t_k) + \frac{1}{2}\cos(3t_k)$$

Ahora bien, para los puntos $t_k = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, y $\frac{\pi}{2}$ si se cumple que los valores $\cos(t_k) = \frac{1}{2}\cos(t_k) + \frac{1}{2}\cos(3t_k)$. En los pocos puntos seleccionados $\cos(t_k)$ y $\cos(3t_k)$ se asemejan. En la medida que seleccionemos más puntos en esa medida se dejan de parecer y la reconstrucción de la función será más fidedigna.

Borrador Preliminar

Figura 3.6: Aliasing o efecto Nyquist. Si nuestro muestreo se hace sobre los puntos que ambas señales coinciden, esto es: $x = 0{,}000, 0{,}379, 1{,}120, 1{,}500, 1{,}869, 2{,}623, 3{,}000; 3{,}366; 4{,}110; 4{,}500; 4{,}879; 5{,}000$. Entonces no seremos capaces de discernir una señal de otra.

3.4.4. Aliasing o efecto Nyquist

El *aliasing* o efecto Nyquist es la confusión que hace que dos señales diferente, al ser submuetreadas se vuelvan indistinguibles (son alias entre sí). Cuando discretizamos una señal y queremos construir su transformada discreta de Fourier el muestreo es clave. Si lo hacemos sólo un número finito de veces con pocos puntos (gran Δt) somos incapaces de reconstruir su frecuencias. Las frecuencias altas requieren un muestreo de la señal con pequeños pasos de tiempo para que se puedan incluir todas las oscilaciones. Considere el ejemplo de la figura 3.6, si nuestro muestreo se hace sobre los puntos que ambas señales coinciden, esto es: $x = 0{,}000; 0{,}379; 1{,}120; 1{,}500; 1{,}869; 2{,}623; 3{,}000; 3{,}366; 4{,}110; 4{,}500; 4{,}879; 5{,}000$, no seremos capaces de discernir una señal de otra. En la jerga del análisis de señales diremos que al componente de alta frecuencia ha sido confundida (*Aliada*) por la componente de baja frecuencia.

Este efecto es muy común y cotidiano. El Sol tiene un movimiento aparente de **este a oeste** con 24 horas entre cada amanecer. Si tomásemos una fotografía del cielo cada 23 horas, el Sol parecería moverse de **oeste a este** con 24·23=552 horas entre cada amanecer. Las aspas de un ventilador a veces parecen girar en el sentido inverso del que en realidad lo hacen. En ese caso las filmamos o iluminamos por una fuente de luz estroboscópica de una frecuencia menor a la de rotación de las aspas.

Precisando, podremos decir que el *aliasing* se produce cuando una señal que contiene la frecuencia f se muestrea con una tasa de $t_m = \frac{N}{T}$ por unidad de tiempo, con $t_m \leq \frac{f}{2}$. En este caso, las frecuencias f y $f - 2s$ producen la misma transformada discreta y no podríamos determinar la existencia de dos frecuencias. Para evitar el *aliasing* queremos que no existan frecuencias $f > \frac{s}{2}$ en nuestra señal de entrada. Esta exigencia se conoce como el *criterio de Nyquist*.

Borrador Preliminar

Para ilustrar este ejemplo consideremos una caso simple de una función $y(t)$ que se expresa en término de una serie de Fourier de cosenos

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t), \quad \text{con} \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \cos(k\omega t) y(t) \quad \text{donde} \quad T \equiv \frac{2\pi}{\omega}.$$

Entonces, si $y_k \equiv y(t = t_k)$, para $k = 1, 2, 3, ..., N$ y suponemos que el período es $T = Nh$, donde h es el paso entre puntos de la muestra. Además suponemos que nuestra función es periódica, de tal forma que $y_0 = y_N$. Así, tendremos N puntos de muestra para representar la señal y el coeficiente lo podemos calcular aproximando la integral por una sumatoria de Riemann como

$$a_n \simeq \frac{2h}{T}\sum_{k=1}^{N} \cos(n\omega t_k) y(t_k) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) y_k \quad \text{con} \quad n = 0, 1, \ldots N\,,$$

Con lo cual sólo podemos determinar N armónicos de la serie y expresar la función hasta ese grado de aproximación

$$y(t) \simeq \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n\omega t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{Nh}\right)$$

3.4.5. Señal y Ruido

Supondremos que toda señal tiene una componente de ruido, de tal forma que $y(t) = s(t) + r(t)$, entonces para filtrar el ruido $r(t)$ recordaremos que debe ser una señal aleatoria y que, por lo tanto, no estará correlacionada con $s(t)$. Para ello definiremos la *la correlación* entre dos funciones arbitrarias $x(t)$ y $y(t)$ como

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t) x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau) x(t)\,,$$

donde τ es el retardo. Si ambas funciones, $x(t)$ y $y(t)$, oscilan independientemente del valor de τ, entonces es tan probable que el integrando sea positivo como negativo. Entonces las señales interfieren destructivamente y producen un valor pequeño para la integral. En caso contrario, interferirán constructivamente y el valor de $c(\tau)$ será significativo.

Si expresamos $c(\tau)$, $y^*(t)$ y $t)x(t+\tau)$ de la ecuación anterior en término de sus transformadas de Fourier tendremos

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'' C(\omega'') \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'' t}}{\sqrt{2\pi}}, \quad y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega Y^*(\omega) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{y} \quad x(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega' X(\omega') \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Trendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, C(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega'\, Y^*(\omega) X(\omega') \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} 2\pi\delta(\omega' - \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, Y^*(\omega) X(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,.$$

Con lo cual tendremos un resultado contundente que nos dice que la transformada de Fourier de la función de correlación entre dos señales es proporcional al producto de la transformada de una señal y el conjugado complejo de la transformada de la otra:

$$C(\omega) = \sqrt{2\pi} Y^*(\omega) X(\omega)\,.$$

Borrador Preliminar

Más aún, si consideramos la función de correlación de una señal con ella misma tendremos la definición de la *función de autocorrelación*

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t) y(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, y^*(t-\tau) y(t)\,.$$

Este proceso también se llama plegamiento o convolución una función sobre sí misma. La función de autocorrelación nos permitirá eliminar el ruido de una señal al tomar la transformada de Fourier de $y(t) = s(t)+n(t)$ para obtener:

$$Y(\omega) = S(\omega) + R(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} S(\omega) \\ R(\omega) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t \begin{bmatrix} s(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$$

Nótese que $A(\tau)$ es una función cuadrática de $y(t)$ tendremos que $A_y \neq A_s + A_r$, con lo cual

$$A_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t [s(t)s(t+\tau) + s(t)r(t+\tau) + r(t)r(t+\tau)]\,.$$

Si consideramos que el ruido $r(t)$ es completamente aleatorio, es fácil convencerse que las integrales que contengan esa función se anularán y

$$A_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, [s(t)s(t+\tau) + s(t)r(t+\tau) + r(t)r(t+\tau)] \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, s(t)s(t+\tau) \equiv A_s(\tau).$$

La función $|S(\omega)|^2$ es el espectro de potencia de la señal pura. Es decir la función de autocorrelación de la señal ruidosa $A(\omega) = \sqrt{2\pi}|S(\omega)|^2$ nos provee el espectro de potencia de la señal pura.

3.4.6. Ejemplos

3.4.7. Practicando con Maxima

3.4.8. Ejercicios

Borrador Preliminar

Bibliografía

[Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning.** (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.

[Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)

[1] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)

[Cushing 1975] Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences** (*John Wiley & Sons, New York*)

[Hamming 1973] Hamming R.W. (1973) **Numerical Methods For Scientist and Engineers, 2nd ed.** (Dover, New York.)

[Hassani 1991] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*)

[Lebedev 1972] Lebedev, N.N. (1972) **Special Functions & Their Applications** (*Dover Publications, New York*)

[math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** http://www.math-atlas.org/welcome.html

[Richards 2002] Richards, D. (2002) **Advanced Mathematical Methods with MAPLE** (*Cambridge University Press Cambridge*)

[Riley Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press Cambridge*)

[Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** http://mathworld.wolfram.com/

Borrador Preliminar

Capítulo 4

PolinomiosOrtogonales

Borrador Preliminar

La ruta de este capítulo

4.1. Series de Polinomios Ortogonales

Enunciaremos un teorema debido a Weierstrass el cual garantiza que una función continua en un intervalo $[a, b]$ puede ser aproximada uniformemente por una serie de polinomios. Por lo tanto, cualquier función continua podrá ser aproximada por combinaciones lineales de potencias.

El Teorema de aproximación polinómica de Weiernstrass queda enunciado como sigue. Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios en ese mismo intervalo si, para un n suficientemente grande y un ϵ suficientemente pequeño siempre se tiene que

$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall\ x \in [a, b]$$

Aceptaremos este teorema sin demostración[1], sin embargo este teorema nos permitirá desarrollar las secciones siguientes.

4.2. Polinomios de Legendre, $P_n(x)$

El primero de los ejemplos de una base ortonormal de polinomios en la cual podremos expresar cualquier función continua en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ serán los *Polinomios de Legendre*. Estos vienen construidos a partir de la Fórmula de Rodrígues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

con $P_0(x) = 1$.

Es decir

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

4.2.1. Generalidades de los Polinomios de Legendre

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente manera

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}\,.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$. La norma es definida por

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

nótese que los polinomios de Legendre, calculados a partir de la Fórmula de Rodrigues no están normalizados.

[1] Consultar: Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** y Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences.**

Borrador Preliminar

Ejemplos:

1.
$$\int_{-1}^{1} P_1(x)\,P_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} [x]\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = 0\,.$$

2.
$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\,.$$

Al ser los Polinomios de Legendre un conjunto completo de funciones, ellos expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado $x \in [-1,1]$. Por ello cualquier función en el intervalo $[-1,1]$ puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t\right]}_{a_k} P_k(x)\,,$$

los primeros términos son:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1} tf(t)\mathrm{d}t\right]P_1(x) + \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^2-1)f(t)\mathrm{d}t\right]P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4}\left[\int_{-1}^{1}(5t^3-3t)f(t)\mathrm{d}t\right]P_3(x) + \frac{9}{16}\left[\int_{-1}^{1}(35t^4-30t^2+3)f(t)\mathrm{d}t\right]P_4(x) + \cdots \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Si $f(x)$ es un polinomio
$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\,,$$
entonces, no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes a_n se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el caso de $f(x) = x^2$ tendremos
$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) \\ &= a_0 + a_1x + \frac{1}{2}a_2(3x^2-1) \\ &= \left(a_0 - \frac{1}{2}a_2\right) + a_1x + \frac{3}{2}a_2x^2 \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{1}{3}\,, a_1 = 0\,, a_2 = \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)\,. \end{aligned}$$

2. En el caso de una función mas complicada
$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}\,,$$
por un lado
$$\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_k(x)\mathrm{d}x$$

Borrador Preliminar

la expansión en series de Legendre quedaría como

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1-x}{2}} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right] P_1(x) + \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^2-1)\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right] P_2(x) \\
&+ \frac{7}{4}\left[\int_{-1}^{1}(5t^3-3t)\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right] P_3(x) + \frac{9}{16}\left[\int_{-1}^{1}(35t^4-30t^2+3)\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right] P_4(x) + \cdots \\
&= \frac{2}{3}P_0(x) - \frac{2}{5}P_1(x) - \frac{2}{21}P_2(x) - \frac{2}{45}P_3(x) - \frac{2}{77}P_4(x) - \frac{2}{117}P_5(x) - \cdots \\
&= \frac{2}{3}P_0(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}\,.
\end{aligned}$$

Antes de entrar en el detalle de las propiedades de estos polinomios, hay que enfatizar que los Polinomios de Legendre constituyen la única base ortogonal para un espacio de Hilbert con un producto interno definido como el producto simple de funciones en el intervalo cerrado. Al ortonormalizar mediante Gram Schmidt la base $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots\right\}$ del espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado n en el intervalo $[-1,1]$, con el producto interno definido por $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$ se obtienen los polinomios de Legendre.

Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda\, y = 0\,,\ -1 \le x \le 1\,.$$

o de manera equivalente a ecuaciones como

$$(1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2P_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} + n(n+1)\ P_n(x) = 0\,, \tag{4.1}$$

donde $y = P_n(x)$ y $\lambda = n(n+1)$.

La siguiente tabla muestra algunas ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones

n	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2P_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\ \frac{\mathrm{d}P_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0$	$P_0(x) = 1$
1	$(1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2P_1(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\ \frac{\mathrm{d}P_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2\ P_1(x) = 0$	$P_1(x) = x$
2	$(1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2P_2(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\ \frac{\mathrm{d}P_2(x)}{\mathrm{d}x} + 6\ P_2(x) = 0$	$P_2(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2P_3(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\ \frac{\mathrm{d}P_3(x)}{\mathrm{d}x} + 12\ P_3(x) = 0$	$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2P_4(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\ \frac{\mathrm{d}P_4(x)}{\mathrm{d}x} + 20\ P_4(x) = 0$	$P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

4.2.2. Relación de Recurrencia

Supongamos que conocemos todos los polinomios de Legendre hasta $P_n(x)$ y queremos generar el próximo. Obviamente ese polinomio será de grado $n+1$. Nos plantemos generarlo a partir de $xP_n(x)$. Como estos

Borrador Preliminar

polinomios son base del espacio de funciones, entonces

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^{1} P_k(t) t P_n(t)\, \mathrm{d}t \right] P_k(x)\,,$$

Observando con algo más de detalle

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} tP_n(t)\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1} t^2 P_n(t)\mathrm{d}t\right] P_1(x) + \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^3-t)P_n(t)\mathrm{d}t\right] P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4}\left[\int_{-1}^{1}(5t^4-3t^2)P_n(t)\mathrm{d}t\right] P_3(x) + \frac{9}{16}\left[\int_{-1}^{1}(35t^5-30t^3+3t)P_n(t)\mathrm{d}t\right] P_4(x) + \cdots . \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) t P_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} tP_n^2(t)\mathrm{d}t\,,$$

por lo tanto, el integrando es una función impar. Consideremos algunos casos:

Para $n = 0$

$$xP_0(x) = \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t\right] P_1(x) = P_1(x)$$

Para $n = 1$

$$xP_1(x) = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} t^2\mathrm{d}t\right] + \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^4-t^2)\mathrm{d}t\right] P_2(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x)$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} xP_2(x) &= \frac{3}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^4-t^2)\mathrm{d}t\right] P_1(x) + \frac{7}{16}\left[\int_{-1}^{1}(5t^3-3t)(3t^3-t)\mathrm{d}t\right] P_3(x) \\ &= \frac{2}{5}P_1(x) + \frac{3}{5}P_3(x)\,. \end{aligned}$$

Para $n = 3$

$$xP_3(x) = \frac{3}{7}P_2(x) + \frac{4}{7}P_4(x)\,.$$

Se puede apreciar que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) x P_k(x)\mathrm{d}x = 0\,,\ \text{para } k < n-1\,.$$

Esto implica que sobreviven únicamente tres términos

$$xP_n(x) = AP_{n+1}(x) + BP_{n-1}(x)\,.$$

Desarrollando con la fórmula de Rodrígues

$$\begin{aligned} \frac{x}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n &= \frac{A}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} + \frac{B}{(n-1)!2^{n-1}}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}\,, \\ x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n &= \frac{A}{2(n+1)}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} + 2nB\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Igualando coeficientes resulta

$$A = \frac{n+1}{2n+1}\,,\ B = \frac{n}{2n+1}$$

La relación de recurrencia se puede obtener entonces de:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = \ (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,.$$

4.2.3. Función Generatriz de los Polinomios de Legendre

Se puede encontrar una función generatriz $\mathcal{P}(t,x)$ de los polinomios de Legendre, es decir una función que tenga la forma:

$$\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x)\ + P_1(x)\ t + P_2(x)\ t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n\,,\ |t| < 1\,, |x| \leq 1\,,$$

para la cual los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Esta serie converge para $|2xt+t^2| < 1$. Para demostrar que el desarrollo en serie de la función $\mathcal{G}(t,x)$ tiene como coeficientes a los $P_n(x)$ partimos de que:

$$\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{P}(t,x)}{\partial t} = \frac{t-x}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}$$

combinando estas dos expresiones, resulta

$$(t-x)\,\mathcal{P}(t,x) + (1-2xt+t^2)\frac{\partial \mathcal{P}(t,x)}{\partial t} = 0$$

y, consecuentemente

$$(t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n + (1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\ t^{n-1} = 0\,.$$

Multiplicando y acomodando queda

$$\begin{aligned}
(t-x)\,P_0(x) \quad &+ \quad (t-x)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\ t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0\,,\\
(t-x)\,P_0(x) \quad &+ \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\ t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)\ t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n\\
&+ \quad \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0\,,
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

$$
\begin{aligned}
(t-x)\,P_0(x) \quad &+ \quad \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)\ t^n - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)\ t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n \\
&+ \quad \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n = 0\,, \\
(t-x)\,P_0(x) \quad &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)\ t^n + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0\,, \\
tP_0(x) \quad &- \quad xP_0(x) + P_1(x) + 2P_2(x)t + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 3xP_1(x)t - \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)\ t^n \\
&+ \quad \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left[\underbrace{P_1(x) - x\ P_0(x)}_{=0}\right] \quad &+ \quad \left[\underbrace{2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x)}_{=0}\right] t \\
&+ \quad \sum_{n=2}^{\infty}\left[\underbrace{(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\ \ xP_n(x) + nP_{n-1}(x)}_{=0}\right] t^n = 0
\end{aligned}
$$

El primero de los términos se cumple siempre por cuanto $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$. El tercer término conforma la relación de recurrencia para los polinomios de Legendre. Con esto queda demostrado que el desarrollo en series de potencias de la función generatriz, tiene como coeficientes a los polinomios de Legendre.

La función generatriz muestra su utilidad en la expansión de

$$
f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}\,,
$$

recordemos que por la definición del producto interno se tiene

$$
\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_k(x)\mathrm{d}x\,.
$$

Al formar el producto

$$
\sqrt{\frac{1-x}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right] = \sqrt{\frac{1-x}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)\,,
$$

e integrando, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right]\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_n(x)\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2t}\left[1 + t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_n(x)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

Borrador Preliminar

Expandiendo el lado izquierdo en series de potencias de t

$$\frac{4}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x)\mathrm{d}x$$

lo cual nos conduce, al igualar coeficientes a

$$\frac{4}{3} = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x)\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \frac{-4}{(4n^2-1)(2n+3)} = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x)\mathrm{d}x$$

y finalmente a la forma de la expansión en series

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3}P_0(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

4.2.4. Ortogonalidad y norma de los Polinomios de Legendre

Conociendo que la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y la relación de recurrencia, procedemos encontrar el valor de su norma

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

De la relación de recurrencia cambiando $n \to n-1$ se tiene

$$\begin{aligned} nP_n(x) &= (2n-1)\,xP_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}(x)\,, \\ (2n+1)\,P_n(x)nP_n(x) &= (2n+1)\,P_n(x)\left[(2n-1)\,xP_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}(x)\right]\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ahora multiplicamos la relación de recurrencia por $(2n-1)\,P_{n-1}(x)$ para obtener

$$(2n-1)\,P_{n-1}(x)\,(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n-1)\,P_{n-1}(x)\left[(2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right]\,, \tag{4.3}$$

restando miembro a miembro (8.13) - (8.13) obtenemos :

$$(2n+1)\left[nP_n^2(x) + (n-1)\,P_n(x)P_{n-2}(x)\right] - (2n-1)\left[(n+1)\,P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)\right] = 0\,,$$

lo que es igual a:

$$\begin{aligned} (2n+1)\left[nP_n^2(x) + (n-1)\,P_n(x)P_{n-2}(x)\right] &= (2n-1)\left[(n+1)\,P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)\right]\,, \\ P_n^2(x) + \frac{(n-1)}{n}P_n(x)P_{n-2}(x) &= \frac{2n-1}{2n+1}\left[\frac{(n+1)}{n}P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + P_{n-1}^2(x)\right]\,, \end{aligned}$$

integrando y considerando la ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{2n-1}{2n+1}\left[\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\mathrm{d}x\right] \\ \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\left[\left(\frac{2n-3}{2n-1}\right)\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x)\mathrm{d}x\right] \\ \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\left[\left(\frac{2n-3}{2n-1}\right)\left(\frac{2n-5}{2n-3}\right)\int_{-1}^{1} P_{n-3}^2(x)\mathrm{d}x\right] \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Figura 4.1: Polinomios de Legendre

continuando con este proceso

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2n+1}\left[\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\mathrm{d}x\right] = \frac{3}{2n+1}\left[\frac{2}{3}\right]$$
$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\,.$$

4.2.5. Otras propiedades de los polinomios de Legendre

- $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$. Entonces se tiene lo que se conoce como la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo n.
- $P_n(x)$ tiene n raíces en el intervalo $(-1, 1)$ Esta propiedad puede apreciarse para los primeros 5 polinomios en la figura 4.9.
- Tienen una representación integral de la forma
$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \mathrm{d}\varphi$$
- Cambios de variables inmediatos conllevan a ecuaciones diferenciales equivalentes
  - Forma autoadjunta
  $$\left[(1-x^2)\ y'\right]' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$$
  - En coordenadas esféricas con $u = P_n(\cos\theta)$
  $$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\operatorname{sen}(\theta)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda(\lambda+1)u = 0$$
  - En coordenadas esféricas con $u = \sqrt{\operatorname{sen}\theta}P_n(\cos\theta)$
  $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + \left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\operatorname{sen}^2(\theta)}\right]u = 0$$

Borrador Preliminar

4.2.6. Resumen de Propiedades Polinomios Legendre

Definición: $$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplos: $$P_0 \equiv 1; \quad P_1 = x; \quad P_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2-1); \quad P_3 = \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)$$

Relación de Recurrencia: $$(n+1)\,P_{n+1}(x) = \;(2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Ecuaciones Diferenciales: $$(1-x^2)\;y'' - 2x\;y' + \lambda(\lambda+1)\;y = 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}(\theta)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) + n(n+1)u = 0; \quad u = P_n(\cos\theta)$$

Función Generatriz: $$\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\;t^n$$

Representación Integral: $$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \mathrm{d}\varphi$$

Ortogonalidad: $$\int_{-1}^{1} P_\alpha(x)P_\beta(x)\mathrm{d}x = \delta_{\alpha\beta}\frac{2}{2\alpha+1}$$

4.2.7. Ejemplo: la función generatríz y la expansión multipolar

Potencial Electrostático de un Dipolo Eléctrico

En Física el ejemplo claro es el cálculo del potencial electrostático en un punto P, producido por dos cargas $q_1 = +q$ y $q_2 = -q$ separadas por una distancia $2d$. El potencial en ese punto (x, y) genérico viene dado por

$$V = q\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

Tal y como puede apreciarse de la figura 4.2

$$(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r\;d\cos\theta \quad \text{y} \quad R^2 = r^2 + d^2 - 2r\;d\cos(\pi-\theta)\;,$$

por lo cual

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^2\right]^{-1/2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\pi-\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^2\right]^{-1/2}$$

y, consecuentemente

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n \quad \text{y} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi-\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$$

El potencial será

$$V = \frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) - P_n(-\cos\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$$

Borrador Preliminar

Figura 4.2: Potencial electrostático de un dipolo eléctrico

donde todos los términos pares de $P_n(\cos\theta)$ se anulan y finalmente tendremos la expresión del potencial para cualquier punto del plano

$$V = \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos\theta) \left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n+1} \tag{4.4}$$

Claramente, si nos quedamos con el primer término de la serie, si

$$\frac{\mathrm{d}}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V \approx \frac{q}{r^2}\, 2d\cos\theta\,.$$

La configuración de cargas que genera el potencial que se presenta en la ecuación (4.4) se llama dipolo eléctrico, y su dependencia principal va como r^{-2}. El momento dipolar puede identificarse como $2qd$, Si $d \to 0$ y $2qd = \mu = cte$ tendremos

$$V = \mu \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}\,,$$

que es el potencial de un dipolo puntual, de momento dipolar μ, situado en el origen del sistema de coordenadas.

Expansión multipolar

Un cálculo similar del potencial electrostático en un punto P producido por tres cargas $q_1 = +q$, $q_2 = q$ y $q_3 = -2q$ separadas entre ellas por una distancia d. La figura 4.3 representa esa distribución de cargas y el potencial se puede escribir como

$$V_1 = q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right) \quad \text{y} \quad V_2 = q\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right) \quad \Rightarrow V = V_1 + V_2\,.$$

Esta configuración representa un cuadrupolo: un par de dipolos superpuestos con orientaciones opuestas.

Igual que en el caso anterior tendremos

$$R_1^2 = r^2 + d^2 - 2r\; d\cos\theta \quad \text{y} \quad R_2^2 = r^2 + d^2 - 2r\; d\cos(\pi - \theta)\;,$$

con lo cual

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n \quad \text{y} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi-\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n$$

Borrador Preliminar

Figura 4.3: Potencial electrostático de un cuadrupolo eléctrico

El potencial será

$$V = \frac{q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) + P_n(-\cos\theta)\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^n - 2\right] = \frac{2q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n} - 1\right] = \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}}{r}\right)^{2n}.$$

En este caso, se anulan los términos impares y el primer término ($n = 0$). El primer término de la serie, $n = 1$, corresponde al cuadrupolo y se escribe como $V = \frac{2qd^2 P_2(\cos\theta)}{r^3}$ y allí identificaremos el término $\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}$ como la contribución de un cuadrupolo. Más aún, podemos generalizar estas contribuciones al potencial con multipolos puntuales de $i-$cargas en $r \to 0$ con términos proporcionales a $\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$ de la forma

$$V = \frac{1}{r}\left[\sum_i q_i + \sum_i \frac{q_i d_i}{r} P_1(\cos\theta) + \sum_i \frac{q_i d_i^2}{r^2} P_2(\cos\theta) + \cdots\right] = \frac{1}{r}\left[\mu_0 + \frac{\mu_1}{r} P_1(\cos\theta) + \frac{\mu_2}{r^2} P_2(\cos\theta) + \cdots\right]. \tag{4.5}$$

Nótese que hemos supuesto una distribución de carga q_i con distancias d_i al origen de coordenadas. Tal y como se puede apreciar en la expansión (4.5), estas cargas contribuyen al potencial mediante una serie de momentos: el monopolo μ_0, $\sum_i q_i$ que representa la carga total. El dipolo $\mu_1 = \sum_i q_i d_i$ una contribución axialmente simétrica, el cuadrupolo $\mu_2 = \sum_i q_i d_i^2$ y así consecutivamente. La expansión multipolar puede interpretarse como modificaciones a un campo del monopolo (esféricamente simétrico), al cual se le superpone el dipolo (contribución axialmente simétrica), le sigue el cuadrupolo y a partir de allí modificaciones de orden superior con simetrías mas complejas.

El siguiente punto preguntarse cómo se modifica esta expansión si movemos el origen de coordenadas a otro punto $\mathbf{r}_p$. En este caso se debe sustituir en la expresión (4.5) $r \to |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|$, con $|\mathbf{r}_p| \ll |\mathbf{r}|$ y una expansión en Taylor en $|\mathbf{r}_p|$ nos da

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|^n} \approx \frac{1}{r^n} + \frac{n}{r^{n+1}} r_p + \frac{n(n+1)}{r^{n+2}} r_p^2 + \ldots,$$

Esto significa que la contribución multipolar mas baja es independiente del cambio de origen de coordenadas. Si la contribución mas baja es el cuadrupolo –porque los aportes del monopolo y el dipolo se anulan–, entonces los términos multipolares de mayor orden serán sensibles a esta modificación del origen.

Borrador Preliminar

Figura 4.4: Potencial electrostático de una distribución contínua

Es importante señalar que a pesar de haber realizado el desarrollo multipolar a partir de una distribución de cargas discretas, es generalizables para describir fuentes contínuas y extendidas como se muestra en la figura 4.4. Finalmente hay que aclarar que la expansión multipolar se aplica a cualquier potencial que provenga de una campo de fuerzas proporcional a r^{-2}.

4.2.8. Practicando con Maxima

4.2.9. Ejercicios

4.3. Polinomios asociados de Legendre $P_l^m(x)$ y Armónicos Esféricos, $Y_l^m(\theta,\varphi)$

Los polinomios asociados de Legendre son una "generalización" de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos, que es uno de los objetivos de esta sección. Por lo tanto, muchas de las propiedades de estos polinomios asociados las presentaremos sin demostración. Para demostrarlas, el lector se puede inspirar en la forma como presentamos y demostramos las propiedades de los Polinomios de Legendre. Los polinomios Asociados de Legendre nos permitirán romper con la simetría axial que está presente en los polinomios de Legendre y esto será evidente en la definición de los armónicos esféricos.

Los polinomios de Legendre se pueden generalizar de la forma

$$P_l^m(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)\,,$$

donde, claramente, P_l^m con $m=0$ son las funciones de Legendre originales.

4.3.1. Generalidades de los Polinomios Asociados de Legendre

La fórmula de Rodrigues para los Polinomios de Legendre genera una equivalente de los polinomios asociados

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{\mathrm{d}x^l}\left[\left(x^2-1\right)^l\right] \quad \Rightarrow P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l.$$

Borrador Preliminar

Cuadro 4.1: A continuación listamos algunos de los polinomios asociados de Legendre. Los organizamos siguiendo la costumbre $-m \leq l \leq m$

Polinomios		**cartesiana**		**polares**
$P_0^0(x)$	$=$	1		
$P_1^{-1}(x)$	$=$	$\frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$	$=$	$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$
$P_1^0(x)$	$=$	x	$=$	$\cos\theta$
$P_1^1(x)$	$=$	$-(1-x^2)^{1/2}$	$=$	$-\operatorname{sen}\theta$
$P_2^{-2}(x)$	$=$	$\frac{1}{8}(1-x^2)$	$=$	$\frac{1}{8}\operatorname{sen}\theta$
$P_2^{-1}(x)$	$=$	$\frac{1}{2}x\left(1-x^2\right)^{1/2}$	$=$	$\frac{1}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
$P_2^0(x)$	$=$	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$=$	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
$P_2^1(x)$	$=$	$-3x\left(1-x^2\right)^{1/2}$	$=$	$-3\cos\theta\operatorname{sen}\theta$
$P_2^2(x)$	$=$	$3(1-x^2)$	$=$	$3\operatorname{sen}\theta$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Estos *polinomios asociados de Legendre* son solución de la ecuación de Legendre generalizada

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_l^m(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l^m(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0 \tag{4.6}$$

o equivalentemente en su forma autoadjunta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l^m(x)\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0 \tag{4.7}$$

Como m^2 aparece en la ecuación diferencial de Legendre generalizada es costumbre acotar $-m \leq l \leq m$, sin embargo se puede demostrar que $P_l^m \propto P_l^{-m}$ de la forma

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x).$$

En el cuadro 4.1 listamos algunos de los polinomios asociados de Legendre mientras que en las figuras 4.6 graficamos algunos.

4.3.2. Relaciones de recurrencia

Las relaciones de recurrencia para los polinomios asociados de Legendre son mas complicadas que las de los polinomios de Legendre. Son funciones que tienen dos índices. Estas relaciones de los asociados surgen a

Borrador Preliminar

Figura 4.5: Representación gráfica de algunos polinomios asociados de Legendre. Tomado de Geek3 - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=66348538

partir de los originales. Existe una amplia variedad de estas relaciones, entre las cuales mencionamos

$$
\begin{aligned}
P_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) &= 0 \\
(2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) &= 0 \\
(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) + P_{l+1}^{m+1}(x) &= 0 \\
(2l+1)\left(1-x^2\right)^{1/2} P_l^m(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) + (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) &= 0 \\
\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) + \frac{1}{2}P_l^{m+1}(x) &= 0 \\
\left(1-x^2\right)^{1/2} \left(P_l^m(x)\right)' - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Donde hemos indicado con la prima, $'$, la derivada respecto a x.

4.3.3. Función generatriz y valores extremos

La función generatriz para los polinomios de Legendre se puede expresar como

$$
\mathcal{A}_m(x,t) \equiv \frac{(-1)^m(2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} (1-x^2)^{-1/2} P_{s+m}^m(x) t^s \,.
$$

Los polinomios P_l^m se obtienen derivando m veces a P_l, y cada diferenciación cambia la paridad, y multiplicando después por $(1-x^2)^{m/2}$, que tiene paridad par, $P_l^m(x)$ debe tener una paridad que depende de $l+m$, a saber,

$$
P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x) \,.
$$

Por otro lado para evaluar $P_l^m(\pm 1)$ el factor $\left(1-x^2\right)^{m/2}$ hace que $P_l^m(\pm 1)$ desaparezca a menos que $m=0$ entonces $P_l(1)=1$, $P_l(-1)=(-1)^l$. Adicionalmente, para el caso $P_l^m(0)$, depende de si $l+m$ es par o impar, vale decir

$$
P_l^m(0) = \begin{cases} (-1)^{(l+m)/2} \frac{(l+m-1)!!}{(l-m)!!}, & l+m \text{ par} \\ 0, & l+m \text{ impar} \end{cases}
$$

Borrador Preliminar

4.3.4. Ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre

La ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre viene expresada de dos maneras. Primero, esas funciones serán ortogonales para índices iguales de los polinomios de Legendre

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_q^m(x)\mathrm{d}x \equiv \int_0^{\pi} P_p^m(\cos\theta)P_q^m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2p+1}\frac{(p+m)!}{(p-m)!}\delta_{pq}\,.$$

Igualmente serán ortogonales cuando

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_p^n(x)\mathrm{d}x = \frac{(p+m)!}{m(p-m)!}\delta_{mn}$$

4.3.5. Armónicos Esféricos, $Y_l^m(\theta,\varphi)$: generalidades

Vamos a definir los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como

$$Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\,, \tag{4.8}$$

que incluye la elección de la fase de *Condon Shortley*, un $(-1)^m$ que no hemos incluido como factor global.

Estas funciones forman un conjunto completo de funciones ortogonales y, por tanto, una base ortonormal con un producto interno definido como

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\theta\left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) = \delta_{l_1l_2}\delta_{m_1m_2}\,.$$

Por lo tanto cualquier función $f(\theta,\varphi)$ puede ser expandida en términos de estas funciones como

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm}Y_l^m(\theta,\varphi) \quad \Leftrightarrow c_{lm} = \langle Y_l^m \mid f(\theta,\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\theta\, Y_l^m(\theta,\varphi)^* f(\theta,\varphi)\,.$$

Esta expansión puede interpretarse de forma similar a la expansión multipolar que discutimos en la sección 4.2.7, por lo tanto podemos escribir la expansión de Laplace como

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} C_\ell^m Y_\ell^m(\theta,\varphi)\,,$$

donde, el término C_0^0 representa el monopolo; C_1^{-1}, C_1^0 y C_1^1 representan el dipolo; y así sucesivamente. Más aún podemos re-escribir la expresión anterior como

$$f(\theta,\varphi) = C + C_i n^i + C_{ij}n^in^j + C_{ijk}n^in^jn^k + C_{ijk\ell}n^in^jn^kn^\ell + \cdots\,,$$

donde los n^i representan las componentes de un vector unitario en la dirección dada por los ángulos θ y φ, y los índices se suman implícitamente. Como en el caso de la ecuación (4.5), el término C es el monopolo; los tres números C_i, representan el dipolo; y así sucesivamente. En las expansiones anteriores, los coeficientes pueden ser reales o complejos. Si la función que se expresa como expansión multipolar es real, los coeficientes deben satisfacer $C_\ell^{-m} = (-1)^m C_\ell^{m*}$. Adicionalmente, como la función es real también lo serán los coeficientes y tendremos $C = C^*$, $C_i = C_i^*$, $C_{ij} = C_{ij}^*$, $C_{ijk} = C_{ijk}^*$ y así sucesivamente.

Típicamente, la función $f(\theta,\varphi)$, es un campo escalar, pero también es posible ese tipo de expansiones multipolares para campos vectoriales y tensoriales [2]

[2] Thorne, K. S. (1980). Multipole expansions of gravitational radiation. Reviews of Modern Physics, 52(2), 299.

Borrador Preliminar

Figura 4.6: Representación gráfica de algunos armónicos esféricos reales. Nótese las variaciones de los índices l y m. Tomado Wikipedia https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphericalfunctions.svg

m

4.3.6. Relaciones de recurrencia y valores extremos

A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, obtenemos:

$$\cos\theta Y_l^m = \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^m,$$

$$e^{\pm i\varphi}\operatorname{sen}\theta Y_l^m = \mp\left[\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2} Y_{l+1}^{m\pm1} \pm \left[\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2} Y_{l-1}^{m\pm1}.$$

Luego, para $\theta = 0$, el valor de φ se vuelve irrelevante, y todo Y_l^m con dependencia de φ desaparece y como $P_l(1) = 1$, encontramos

$$Y_l^m(0,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}\,, \quad \text{para } \theta = \pi \quad \Rightarrow Y_l^m(\pi,\varphi) = (-1)^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}.$$

4.3.7. Teorema de suma de armónicos

Finalmente, una consecuencia importante de la expansión de Laplace en términos de los armónicos esféricos, Y_{lm}, es el teorema de la suma para armónicos esféricos, que presentaremos sin demostración. Consideremos dos vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_{r'}$ con ángulos esféricos (θ,φ) y (θ',φ'), respectivamente y γ el ángulo entre estos dos vectores unitarios, entonces el teorema de la adición o suma de armónicos esféricos establece que

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\,Y_{lm}(\theta,\varphi)\,.$$

Borrador Preliminar

Cuadro 4.2: A continuación listamos algunos armónicos esféricos los organizamos siguiendo la costumbre $-m \leq l \leq m$

Armónico	**Esféricas**	**Cartesianas**
$Y_0^0(\theta,\varphi)$	$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	
$Y_1^1(\theta,\varphi)$	$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{i\varphi}$	$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x+iy)/r$
$Y_1^0(\theta,\varphi)$	$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$	$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z/r$
$Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$	$= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{-i\varphi}$	$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x-iy)/r$
$Y_2^2(\theta,\varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{2i\varphi}$	$= 3\sqrt{\frac{5}{96\pi}}\left(x^2-y^2+2ixy\right)/r^2$
$Y_2^1(\theta,\varphi)$	$= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta e^{i\varphi}$	$= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3z(x+iy)/r^2$
$Y_2^0(\theta,\varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$	$= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}r^2\right)/r^2$
$Y_2^{-1}(\theta,\varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$	$= +\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3z(x-iy)/r^2$
$Y_2^{-2}(\theta,\varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\,\mathrm{sen}^2\,\theta e^{-2i\varphi}$	$= 3\sqrt{\frac{5}{96\pi}}\left(x^2-y^2-2ixy\right)/r^2$

Esta expresión es particularmente útil en la expansión de funciones del tipo

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma\right)^{1/2}} = \frac{1}{r}\left(1+t^2-2t\cos\gamma\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\cos\gamma)\,,$$

donde hemos supuesto que $|\mathbf{r}'| \equiv r' < |\mathbf{r}| \equiv r$, realizado el cambio de variable $t = r'/r$ e invocado la función generatriz para los polinomios de Legendre. Si utilizamos el teorema de la adición de armónicos esféricos y desandamos el cambio de variables, tendremos

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r'^l}{r^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r^l}{r^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

4.3.8. Ejemplos

1. En Mecánica Clásica la cantidad de momento angular viene definida como $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$, donde asociamos $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la función de onda nos proveen lo siguiente:

$$\langle r|\mathbb{X}|\psi\rangle = x\langle r|\psi\rangle = x\ \psi(\mathbf{r}) \qquad \langle r|\mathbb{P}_x|\psi\rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r|\mathbb{Y}|\psi\rangle = y\langle r|\psi\rangle = y\ \psi(\mathbf{r}) \qquad \langle r|\mathbb{P}_y|\psi\rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial y}\psi(\mathbf{r})$$

$$\langle r|\mathbb{Z}|\psi\rangle = z\langle r|\psi\rangle = z\ \psi(\mathbf{r}) \qquad \langle r|\mathbb{P}_z|\psi\rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial z}\psi(\mathbf{r})$$

Borrador Preliminar

En coordenadas cartesianas, en la representación de coordenadas $\{|r\rangle\}$ tendremos que

$$\langle r|\mathbb{R}|\psi\rangle = \mathbf{r}\ \psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle r|\mathbb{P}|\psi\rangle = -i\hbar\ \boldsymbol{\nabla}\ \psi(\mathbf{r})\,.$$

De forma que en Mecánica Cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular $\langle r|\mathbb{L}|\psi\rangle = -i\hbar\ (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla})\psi(\mathbf{r})$ son:

$$\langle r|\mathbb{L}|\psi\rangle = -i\hbar\ \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(\mathbf{r})\mathbf{i} - i\hbar\ \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\mathbf{r})\mathbf{j} - i\hbar\ \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(\mathbf{r})\mathbf{k}\,.$$

Transformando a coordenadas esféricas tendremos

$$\left.\begin{array}{l} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \\[2ex] y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\[2ex] z = r\cos\theta \end{array}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{z}{r} \\[2ex] \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,,$$

donde queremos indicar que $x^1 = x$, $x^2 = y$ y $x^3 = z$.

De esta forma tendremos

$$\mathbb{L}_x f \Leftrightarrow -iy\frac{\partial f}{\partial z} + iz\frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)f \quad \Rightarrow \mathbb{L}_x \Leftrightarrow i\left(\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

y, similarmente

$$\mathbb{L}_y \Leftrightarrow i\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_z \Leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Es claro que con la definición (4.8) los armónicos esféricos son autofunciones de la componente z del operador cantidad de movimiento,

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\right) = m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \quad \Rightarrow \mathbb{L}_z Y_l^m(\theta,\varphi) = mY_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

Por otro lado, cuando calculamos

$$\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}_x\mathbb{L}_x + \mathbb{L}_y\mathbb{L}_y + \mathbb{L}_z\mathbb{L}_z \Leftrightarrow -\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Por lo tanto, la definición de los armónicos esféricos nos permite escribir

$$\mathbb{L}^2 Y_l^m(\theta,\varphi) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y_l^m(\theta,\varphi) = -\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\right)Y_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

Si ahora reescribimos la ecuación generalizada de Legendre, (4.7), como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l^m(x)\right] - \left[\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = -l(l+1)P_l^m(x)\,,$$

y volvemos a utilizar la definición de armónicos esféricos, (4.8), hacemos el cambio de variables a coordenadas esféricas, nos convencemos que

$$\mathbb{L}^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

Con lo cual concluimos que los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta,\varphi)$ son autofunciones de los operadores $\mathbb{L}^2$ y $\mathbb{L}_z$, con autovalores $l(l+1)$ y m, respectivamente.

Borrador Preliminar

4.3.9. Practicando con Maxima

4.3.10. Ejercicios

1. Considere los operadores de subida y de bajada definidos como

$$\mathbb{L}_+ \Leftrightarrow e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_- \Leftrightarrow e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

Muestre que si asociamos $Y_l^m(\theta,\varphi) \Leftrightarrow |Y_{j,m}\rangle$ podremos expresar

$$\mathbb{L}_+|Y_{jm}\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|Y_{j,m+1}\rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_-|Y_{jm}\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|Y_{j,m-1}\rangle,$$

respectivamente. Más aún que

$$|Y_{l,m}\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}}\mathbb{L}_-^{l-m}|Y_{ll}\rangle$$

4.4. Polinomios de Hermite, $H_n(x)$

Los polinomios de Hermite a diferencia de los de Legendre (y Tchevychev), vienen definidos en toda la recta real, vale decir, $x \in (-\infty,\infty)$, por lo cual la función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita. La función más simple que cumple estos requisitos es $w(x) = e^{-x^2}$ (también algunos autores utilizan $w(x) = e^{-x^2/2}$) Esto es, el producto interno entre los polinomios de Hermite vendrá definido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; w(x)f(x)g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{-x^2} f(x)g(x)\,.$$

Otra vez, para este producto interno, si ortogonalizamos con Gram-Schmidt se obtienen los polinomios de Hermite. Al igual que el resto de los polinomios ortogonales, existe una fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n\; e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}\,,$$

los cinco primeros polinomios de Hermite son los siguientes:

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \qquad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

4.4.1. Generalidades de los Polinomios de Hemite

Los polinomios de Hermite serán ortogonales, pero no normales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x)H_\alpha(x)\mathrm{d}x = 2^\alpha\alpha!\sqrt{\pi}\;\delta_{\alpha\beta}\,,$$

por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x)\mathrm{d}x = 2^\alpha\alpha!\sqrt{\pi}\,.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

Antes de desarrollar funciones en términos de los polinomios de Hermite, expondremos un par de teoremas sin demostración.

Borrador Preliminar

Teorema 1: Sean f y g dos funciones arbitrarias, cuando menos continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y que cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x)\mathrm{d}x \quad \exists \quad \wedge \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x)\mathrm{d} \quad \exists$$

Entonces el conjunto de estas funciones forman un espacio vectorial euclideano $\mathcal{I}_2^w$ con un producto interno definido por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denominan cuadrado-integrables respecto al peso w. Es por ello que denotamos el espacio de funciones como $\mathcal{I}_2^w$.

Teorema 2: Si $f(x)$ es una función continua arbitraria en $\mathcal{I}_2^w$ entonces puede ser aproximada por un polinomio en ese mismo espacio. Es decir

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - p_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[f(x) - p_n(x)\right]^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} = 0$$

Así, la expresión de una función arbitraria en la base de los polinomio de Hermite se reduce a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\, \mathrm{d}x \right] H_k(x)\,,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\, \mathrm{d}x\,.$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 = \sum_{k=0}^{2} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ H_k(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) \\ &= a_0 + a_1(2x) + a_2(4x^2 - 1) \\ &= (a_0 - a_2) + 2a_1 x + 4a_2 x^2 \quad \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}\,, a_1 = 0\,, a_2 = \frac{1}{4}\,. \\ &= \frac{1}{4} H_0(x) + \frac{1}{4} H_2(x) \end{aligned}$$

Si generalizamos para funciones del tipo $f(x) = x^{2p}$ con $p = 1, 2, 3, \cdots$, entonces

$$f(x) = x^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\ H_{2k}(x)\,,$$

por lo tanto

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} H_{2k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Borrador Preliminar

Una integración por partes estratégica muestra que:

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \left\{ x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2px^{2p-1} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \right\} .$$

El primer término de la resta se anula debido a la definición de los polinomios de Hermite

$$x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = x^{2p}(-1)^{2k-1} e^{-x^2} H_{2k-1}(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} .$$

Repitiendo el proceso $2k$ veces, tendremos

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-2k} \; e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

si en la integral hacemos $x = \sqrt{t}$ obtenemos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k} \; e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k-\frac{1}{2}} \; e^{-t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

y utilizando la definición $\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv (z-1)!$, queda como

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right) .$$

Ahora, recurrimos a la propiedad de "duplicación" de la Función Gamma, i.e.

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

tenemos que

$$2^{2p-2k}\Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right)(p-k)! = \sqrt{\pi}\,(2p-2k)!$$

quedan entonces los coeficientes determinados como

$$a_{2k} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(2k)!\,(p-k)!}$$

y, por lo tanto el desarrollo en la base de los polinomios de Hermite

$$f(x) = x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!\,(p-k)!} \qquad -\infty < x < \infty .$$

Muestre que del mismo modo se puede encontrar

$$f(x) = x^{2p+1} = \frac{(2p-1)!}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!\,(p-k)!} \qquad -\infty < x < \infty .$$

Borrador Preliminar

Si $f(x) = e^{-a^2x^2}$ con $\operatorname{Re} a^2 > -1$. Otra vez

$$f(x) = e^{-a^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\ H_{2k}(x)$$

entonces

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2k}(x)\mathrm{d}x$$

Sustituyendo $H_{2k}(x)$ por su expresión integral tendremos

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} \left[\frac{2^{2k+1}(-1)^k e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt\ \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt\ \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \\
&\equiv \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2xt\ \mathrm{d}x \right]\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\sqrt{\frac{\pi}{a^2}}\ e^{-t^2/a^2} \right]\ \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!a} \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+a^{-2})}\ t^{2k}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!}\ \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-s}\ s^{k-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}s \qquad \leftarrow t^2(1+a^{-2}) = s \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!}\ \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

y ahora usando, otra vez la propiedad de "duplicación" de la función gamma,

$$2^{2k}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi}\,(2k)!$$

obtenemos

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k}\ k!\,(1+a^2)^{k+1/2}}$$

por lo tanto

$$f(x) = e^{-a^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k}\ k!\,(1+a^2)^{k+1/2}}\ H_{2k}(x)$$

Al igual que los polinomios de Legendre, los de Hermite, surgen también en sus orígenes como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\ \frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x} + nH_n(x) = 0$$

Vale decir:

Borrador Preliminar

n	Ecuación de Hermite	Solución
0	$\dfrac{\mathrm{d}^2H_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}H_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0$	$H_0(x) = 1$
1	$\dfrac{\mathrm{d}^2H_1(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}H_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2H_1(x) = 0$	$H_1(x) = 2x$
2	$\dfrac{\mathrm{d}^2H_2(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}H_2(x)}{\mathrm{d}x} + 4H_2(x) = 0$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$\dfrac{\mathrm{d}^2H_3(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}H_3(x)}{\mathrm{d}x} + 6H_3(x) = 0$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
4	$\dfrac{\mathrm{d}^2H_4(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}H_4(x)}{\mathrm{d}x} + 8H_4(x) = 0$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

4.4.2. Relación de Recurrencia

A partir de la función generatriz se puede construir la siguiente identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,x)}{\partial t} = (2x - 2t)\,\mathcal{H}$$

y utilizando el desarrollo en series de potencias en t tendremos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^{n+1}\,, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^{n+1} = 0\,, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^n &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\, t^n = 0\,, \\
H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^n &- 2xH_0(x) - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n = 0\,, \\
\underbrace{H_1(x) - 2xH_0(x)}_{=0} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!}(n+1) - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \right] t^n = 0\,,
\end{aligned}$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!}(n+1) - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}}_{=0} \right] t^n = 0\,.$$

Por lo tanto:

$$\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0$$

Borrador Preliminar

Así la relación de recurrencia será

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

De igual modo, podemos partir de otra identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,x)}{\partial x} = 2t\ \mathcal{H} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!}\ t^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^{n+1}\,,$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!}\ t^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\ t^n \ \Rightarrow \frac{H_n'(x)}{n!} = 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

y encontrar una relación para generar las derivadas de los polinomios de Hermite en término de ellos mismos:

$$H_n'(x) = 2n\ H_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Finalmente, utilizando la ecuación anterior en la relación de recurrencia y derivando esa expresión una vez más, queda como:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) &= 0 \\ H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2n\ H_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que los polinomios de Hermite son una solución particular de esa ecuación diferencial.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

Donde hemos hecho $y = H_n(x)$ Adicionalmente, podremos demostrar que $y = e^{-x^2/2}H_n(x)$ es solución de la ecuación diferencial autoadjunta

$$y'' + \left(2n + 1 - x^2\right) y = 0\,.$$

4.4.3. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite

Se puede encontrar una función generatriz $\mathcal{H}(t,x)$ de los polinomios de Hermite:

$$\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x)\ + H_1(x)\ t + \frac{H_2(x)}{2}\ t^2 + \frac{H_3(x)}{3!}\ t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n$$

para la cual los $H_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Es fácil darse cuenta que esta expresión proviene del desarrollo en Serie de Taylor

$$\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t,x)}{\partial t^n}\right]_{t=0}\ t^n \qquad \|t\| < \infty$$

para lo cual

$$\left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t,x)}{\partial t^n}\right]_{t=0} = e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} = (-1)^n\, e^{x^2}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} e^{-(u)^2}\right]_{u=x} = H_n(x)$$

Borrador Preliminar

4.4.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite

En general estos polinomios cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta} \,.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$. Para demostrar el caso $\alpha \neq \beta$ partimos de

$$\begin{aligned} u_\beta \left[u_\alpha'' + \left(2\alpha + 1 - x^2\right) u_\alpha \right] &= 0 \\ u_\alpha \left[u_\beta'' + \left(2\beta + 1 - x^2\right) u_\beta \right] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro e integrando se tiene que:

$$\begin{aligned} \left[u_\alpha' u_\beta - u_\beta' u_\alpha \right]' + 2\left(\alpha - \beta\right) u_\alpha u_\beta &= 0 \\ \left(\alpha - \beta\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x) H_\beta(x) \mathrm{d}x &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x) H_\beta(x) \mathrm{d}x &= 0 \qquad \alpha \neq \beta; \end{aligned}$$

ya que

$$e^{-x^2/2} \left\{ 2\alpha \; H_{\alpha-1}(x) H_\beta(x) - 2\beta \; H_{\beta-1}(x) H_\alpha(x) \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Para encontrar el valor de la norma, procedemos a partir de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} H_n(x) \left[H_n(x) - 2x H_{n-1}(x) + 2(n-1) H_{n-2}(x) \right] &= 0 \\ H_{n-1}(x) \left[H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) \right] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro, multiplicando por e^{-x^2} e integrando entre $(-\infty, \infty)$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha-1}^2(x) \mathrm{d}x$$

repitiendo la operación y recordando que al final queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 \mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}$$

Obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$$

4.4.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite pueden ser representados como

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2itx} t^n \mathrm{d}t$$

Borrador Preliminar

Figura 4.7: Polinomios de Hermite

que puede ser separada como

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\mathrm{d}t\,, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

y para los términos impares

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n+1} \mathrm{sen}(2xt)\mathrm{d}t\,, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

La forma de llegar a cualquiera de estas últimas fórmulas se parte de las conocidas integrales desarrolladas en el plano complejo

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \cos(2xt)\mathrm{d}t$$

se deriva $2n$ veces a ambos miembros se utiliza la definición de los polinomios de Hermite.

Borrador Preliminar

4.4.6. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite

Definición: $$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

Ejemplos: $H_0(x) = 1;\ H_1(x) = 2x;\ H_2(x) = 4x^2 - 2;\ H_3(x) = 8x^3 - 12x$

Relaciones de Recurrencia: $H_0(x) = 1; \qquad H_1(x) = 2x; \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2$

$$H_n'(x) = 2n\ H_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ecuaciones Diferenciales: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

$$u'' + \left(2n + 1 - x^2\right) u = 0; \quad u(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

Función Generatriz: $$\mathcal{H}(t, x) = \mathbf{e}^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n$$

Representación Integral: $$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\ \mathrm{d}t$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \mathrm{sen}(2xt)\ \mathrm{d}t$$

Ortogonalidad: $$2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x$$

4.4.7. Ejemplo: El Oscilador armónico cuántico independiente del tiempo

La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \mathcal{U}(x)\right] \psi(x) = 0\,,$$

con μ la "masa" de la partícula; E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial al cual está sometida la partícula. En el caso que estudiemos un potencial del tipo $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ en el cual la frecuencia angular del oscilador viene representada por ω. La ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2\right] \psi(x) = 0\,,$$

haciendo un cambio de variable $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$ para adimensionalizar la ecuación de Schrödinger, se obtiene

$$\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right] \psi(\xi) = 0\,,$$

Borrador Preliminar

la cual corresponde a la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:

$$\psi''(\xi) + \left[2n + 1 - \xi^2\right] \psi(\xi) = 0\,,$$

y por lo tanto identificamos

$$\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,,$$

con lo cual comprobamos la forma como viene cuantizada la energía en este sistema y la energía del estado fundamental. Por su parte, la función de onda se podrá expresar en la base de soluciones de esa ecuación

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\,.$$

Si mantenemos la normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi)\mathrm{d}\xi = 1 \qquad \text{con } c_n = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,.$$

4.4.8. Practicando con Maxima

4.4.9. Ejercicios

1. A partir de la función generatriz de los polinomios de Hermite

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad \text{para} \quad t > 0$$

deduzca la fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$$

Ahora demuestre la inversa: que la fórmula de Rodrigues implica la función generadora y, en el camino, establezca la representación integral

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} e^{x^2} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz$$

donde el contorno C encierra el punto x.

2. Demuestra que la representación integral de los polinomios de Hermite es

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2} dt$$

Utilice este resultado para derivar explícitamente una serie para los polinomios de Hermite:

$$H_n(x) = \sum_{\substack{r=0 \\ (2r \le n)}}^{n} \frac{(-1)^r n!}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r}$$

Borrador Preliminar

3. Los polinomios de Laguerre son generados por la función generatriz

$$\psi(x,t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n, \quad \text{para} \quad 0 < t < 1$$

Vienen dados directamente por la fórmula

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^n e^{-x} \right), \quad \text{para} \qquad 0 \leqq x \leqq \infty$$

análoga a la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre.

a) Diferenciando la función generatriz con respecto a x se obtiene $(1-t)\psi' = -t\psi$. Entonces, a partir de este resultado derivar la relación de recurrencia

$$L_n' - nL_{n-1}' = -nL_{n-1}$$

Derivando $\psi(x,t)$ con respecto a t, se puede obtener otra relación de recurrencia. Entonces, demostrar que

$$L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + n^2 L_{n-1} = 0$$

b) A partir de estas dos relaciones de recurrencia, derive la ecuación diferencial de Laguerre

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$$

c) Muestre que $L_n(0) = n!$

d) Derive, por integración de contornos, la función generatriz a partir de la fórmula de Rodrigues.

4.5. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales

Hemos considerado un par de ejemplos de Polinomios Ortogonales. En ambos podemos identificar algunas características comunes. En base a estas características comunes definiremos otras familias de polinomios ortogonales.

Nomenclatura	**Nombre**	a	b	$w(x)$	h_n	h_0
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	$\frac{2}{2n+1}$	
$T_n(x)$	Tchebychev 1E	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$U_n(x)$	Tchebychev 2E	-1	1	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$	
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$2^n n! \sqrt{\pi}$	
$L_n(x)$	Laguerre	0	∞	e^{-x}	1	
$L_n^{\alpha}(x)$	Laguerre G	0	∞	$x^{\alpha} e^{-x}$ con $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	
$P_n^{\alpha\beta}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	†	

Cuadro 4.3: Propiedades genéricas de los Polinomios Ortogonales, N_n indica la norma del polinomio de grado n.

† En el caso de los polinomios de Jacobi, la norma es

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \quad \text{con} \quad \alpha > -1 \quad \text{y} \quad \beta > -1\,.$$

Borrador Preliminar

4.5.1. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad

Los polinomios ortogonales se definen como un conjunto de polinomios $\{p_n(x)\}$ de orden n definidos en un determinado intervalo $a \leq x \leq b$, los cuales son ortogonales respecto a una definición de producto interno

$$\int_a^b w(x)p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x = h_n\delta_{nm} \quad \text{con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

que garantiza que la norma sea finita en ese intervalo. Dado que el Teorema de Weierstrass garantiza que el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ es una base completa para un espacio vectorial $\mathbb{E}^\infty$, se procede a ortogonalizar esa base con la definición de producto interno y el intervalo que corresponda. Para cada caso tendremos una base ortogonal de polinomios.

Polinomio	μ_n	$w(x)$	$q(x)$
P_n	$2^n n!$	1	$1-x^2$
T_n	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1-x^2$
U_n	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\pi}}2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{1-x^2}$	$1-x^2$
H_n	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1
L_n	$n!$	e^{-x}	x
L_n^α	$n!$	$x^\alpha e^{-x}$	x

Cuadro 4.4: Funciones para determinar la Fórmula de Rodrigues generalizada

En el cuadro 4.3 resumimos las propiedades más resaltantes, com lo son: la función peso en el producto interno, el intervalo en el cual están definidas estas fuciones y su norma.

4.5.2. Fórmula de Rodrigues genelarizada

En general todos los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ vienen definidos por la fórmula de Rodrigues generalizada

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)\mu_n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(w(x)q(x)^n\right)$$

donde $w(x), q(x)$ y μ_n vienen especficados en el cuadro 4.4 para cada conjunto de polinomios ortogonales

4.5.3. Ejemplos de Polinomios Ortogonales

Utilizando la fórmula de Rodrigues generalizada, podemos construir algunos polinomios generalizados. El cuadro 4.5 muestra algunos de ejemplos de estos polinomios ortogonales

4.5.4. Relaciones de Recurrencia

También se pueden formular, de manera genérica las relaciones de recurrencia. Obviamente, las relaciones de recurrencia también constituyen una forma alternativa de ir construyendo los polinomios ortogonales. Así, un polinomio ortogonal genérico, $p_n(x)$, cumplirá

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x)$$

El cuadro 4.6 contiene las expresiones de los coeficientes para construir las relaciones de recurrencia generalizadas para cada uno de los polinomios

Borrador Preliminar

Polinomio	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
P_n	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
T_n	1	x	$2x^2-1$	$4x^3-3x$	$8x^4-8x^2+1$
U_n	1	$2x$	$4x^2-1$	$8x^3-4x$	$16x^4-12x^2+1$
H_n	1	$2x$	$4x^2-2$	$8x^3-12x$	$16x^4-48x^2+12$
L_n	1	$1-x$	$\frac{1}{2}x^2-2x+1$	$-\frac{1}{6}(x^3-9x^2+18x-6)$	$\frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$

Cuadro 4.5: Ejemplos de Polinomios Ortogonales

Polinomio	a_n	b_n	c_n
P_n	0	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
T_n	0	2	1
U_n	0	2	1
H_n	0	2	$2n$
L_n	$\frac{2n+1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
L_n^α	$\frac{2n+1+\alpha}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n+\alpha}{n+1}$

Cuadro 4.6: Funciones para determinar la Relación de Recurrencia Generalizada

4.5.5. Función generatriz generalizada

Para todos los polinomimos ortogonales podemos definir una función generatriz $\mathcal{G}(x,t)$, de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ será proporcional al coeficiente de t^n del desarrollo en series de Taylor, en potencias de t alrededor del punto $x=0$. Esta función generatriz que constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales viene expresada por la serie

$$\mathcal{G}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x)\ t^n \qquad \text{con } a_n \text{ constante}$$

Las funciones generatrices no son exclusivas de los polinomios ortogonales. Como veremos más adelante, existen funciones generatrices para las funciones de Bessel.

4.5.6. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales

Cada uno de los polinomios ortogonales habrá de ser solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$g_2(x)\frac{\mathrm{d}^2 p_n(x)}{\mathrm{d}x^2}+g_1(x)\frac{\mathrm{d}p_n(x)}{\mathrm{d}x}+\alpha_n p_n(x)=0$$

En el cuadro 4.8 mostramos las expresiones para los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales para las cuales cada uno de los polinomio ortogonales es solución

Borrador Preliminar

Polinomio	C_n	$\mathcal{G}(x,t)$
P_n	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$
T_n	2	$\dfrac{1-t^2}{1-2xt+t^2}+1$
U_n	1	$\dfrac{1}{1-2xt+t^2}$
H_n	$1/n!$	e^{2xt-x^2}
H_{2n}	$1^n/(2n)!$	$\cos(2xt)e^{t^2}$
H_{2n+1}	$1^n/(2n+1)!$	$\mathrm{sen}(2xt)e^{t^2}$
L_n	1	$\dfrac{1}{1-t}e^{-\dfrac{xt}{1-t}}$
L_n^α	1	$\dfrac{1}{(1-t)^\alpha}e^{-\dfrac{xt}{1-t}}$

Cuadro 4.7: Funciones para determinar la función generatriz generalizada

Polinomio	$g_2(x)$	$g_1(x)$	α_n
P_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1-x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1-x$	n
L_n^α	x	$1-x+\alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

Cuadro 4.8: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales

4.6. Aplicaciones para los polinomios ortogonales

4.6.1. Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de n medidas o puntos experimentales $\{(x_1,y_1)=f(x_1),(x_2,y_2)=f(x_2),\cdots,(x_n,y_n)=f(x_n)\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos. El tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Si queremos aproximar esos puntos por una recta el Método de Mínimos Cuadrados es el más utilizado.

Puede ser que el polinomio no sea lineal y sea necesarios ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales. Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es, ajustamos la función como "trozos" de polinomios que a su vez se ajusten a subconjuntos: $\{(x_1,y_1)=f(x_1),(x_2,y_2)=f(x_2),\cdots,(x_m,y_m)=f(x_m)\}$, con $m<n$, de los puntos experimentales En este caso tendremos una función de ajuste, para cada conjunto de puntos.

También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso, el máximo grado del polinomio que los ajuste será $n-1$. Para encontrar este polinomio lo expresaremos como

Borrador Preliminar

Figura 4.8: En el lado izquierdo se muestran el conjunto de puntos experimentales: $\{(2,8),(4,10),(6,11),(8,18),(10,20),(12,34)\}$ y a la derecha la función polinómica que los interpola.

una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es:

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1 = f(x_1) = C_0P_0(x_1) + C_1P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1}P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0P_0(x_2) + C_1P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1}P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0P_0(x_n) + C_1P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1}P_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

que no es otra cosa que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C_0, C_1, \cdots C_{n-1}\}$ Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos.

Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, ya que ellos son base del espacio de funciones. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre están definidos en el intervalo $[-1,1]$ los puntos experimentales deberán re-escalarse a ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre. Esto se puede hacer con la ayuda del siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\mathrm{d}t$$

Consideremos los puntos experimentales representado en la figura 4.8. Al construir el sistema de ecua-

Borrador Preliminar

ciones obtendremos: ($a = 2$ y $b = 12$)

$$
\begin{aligned}
(-1,8) &\Rightarrow \quad 8 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 \\
\left(-\tfrac{3}{5},10\right) &\Rightarrow \quad 10 = C_0 - \tfrac{3}{5}\,C_1 + \tfrac{1}{25}\,C_2 + \tfrac{9}{25}\,C_3 - \tfrac{51}{125}\,C_4 + \tfrac{477}{3125}\,C_5 \\
\left(-\tfrac{1}{5},11\right) &\Rightarrow \quad 11 = C_0 - \tfrac{1}{5}\,C_1 - \tfrac{11}{25}\,C_2 + \tfrac{7}{25}\,C_3 + \tfrac{29}{125}\,C_4 - \tfrac{961}{3125}\,C_5 \\
\left(\tfrac{1}{5},18\right) &\Rightarrow \quad 18 = C_0 + \tfrac{1}{5}\,C_1 - \tfrac{11}{25}\,C_2 - \tfrac{7}{25}\,C_3 + \tfrac{29}{125}\,C_4 + \tfrac{961}{3125}\,C_5 \\
\left(\tfrac{3}{5},20\right) &\Rightarrow \quad 20 = C_0 + \tfrac{3}{5}\,C_1 + \tfrac{1}{25}\,C_2 - \tfrac{9}{25}\,C_3 - \tfrac{51}{125}\,C_4 - \tfrac{477}{3125}\,C_5 \\
(1,34) &\Rightarrow \quad 34 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5
\end{aligned}
$$

y al resolver el sistema obtendremos que

$$
C_0 = \frac{2249}{144}, \quad C_1 = \frac{3043}{336}, \quad C_2 = \frac{1775}{504}, \quad C_3 = -\frac{175}{216}, \quad C_4 = \frac{625}{336}, \quad C_5 = \frac{14375}{3024}
$$

con lo cual

$$
\mathcal{P}(x) = f(x) = \frac{2249}{144} + \frac{3043}{336}\,x + \frac{1775}{504}\,P\,(2,x) - \frac{175}{216}\,P\,(3,x) + \frac{625}{336}\,P\,(4,x) + \frac{14375}{3024}\,P\,(5,x)
$$

la interpolación queda representada en al figura 4.8.

Es importante señalar que, mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorcionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (polinomio) continua a trozos.

4.6.2. Cuadratura e integración de funciones

La integración numérica de una función se le conoce como integración por cuadratura, tiene una historia que se remonta a los orígenes del cálculo. La cuadratura no es más que el caso especial más sencillo: La evaluación de la integral

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} h_k f(x_k) + E_N \approx \sum_{k=1}^{N} h f_k\,,
$$

donde hemos definido $h_k = x_{k+1} - x_k$, $f(x_k) = f_k$ y para simplificar aún mas hemos supuesto que $h = x_{k+1} - x_k$ es un paso constante. Hemos representado por E_N el error que se comete al aproximar la integral por una sumatoria.

La idea es obtener el valor de la integral, con la mayor precisión posible, con el menor número de evaluaciones de la función del integrando. Uno tiene la libertad de elegir métodos de diversos órdenes, con un orden más alto que a veces, pero no siempre, da una mayor precisión. La integración de Romberg, es un formalismo general muy popular en todas las implementaciones de integración numérica.

Con esa idea de calcular el área bajo la curva con poliedros identificamos varias fórmulas populares y famosas

Borrador Preliminar

Figura 4.9: Cuadratura de una función para puntos equi-espaciados

Integración por trapecios y parábolas

Este esquema implica la evaluación de las función en dos puntos y los coeficientes se ajustan con una recta (aproximación lineal)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{2}f_1\right] + E_3(h^3 f'').$$

Aquí el término de error $E_3(h^3 f'')$ corresponde con la estimación del error del orden h^3.

Es inmediato ver que, para dos puntos aproximamos con una recta la función. Esto es $y(x) = ax + b$. Entonces el área bajo la curva será

$$A = \int_0^h (ax+b)\mathrm{d}x = a\frac{x}{2} + bx\Big|_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = h\left(\frac{ah}{2} + b\right) .$$

Pero además

$$f_1 = ah + b \quad \text{y} \quad f_0 = b \quad \Rightarrow A = \frac{h}{2}(f_1 + f_0)$$

Del mismo modo, si empleamos tres puntos, aproximaremos la función con una parábola, y la expresión nos quedará de la forma

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\right] + E_5\left(h^5 f^{(4)}\right) .$$

En ese caso las fórmula será exacta y podemos espejar los coeficientes. Veamos

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h} = \left(\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch\right) - \left(-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch\right) = \frac{2ah^3}{3} + 2ch = \frac{h}{3}(2ah^2+6c) .$$

Borrador Preliminar

Pero además como la parábola pasa por los tres puntos, tendremos

$$f_0 = ah^2 - bh + c \quad f_1 = c \quad \text{y} \quad f_2 = ah^2 + bh + c\,.$$

Entonces

$$A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(f_0 - 2f_1 + f_2 + 6f_1) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)\,.$$

Podemos generalizar la regla de Simpson para un intervalo cualquiera $[a, b]$, n par y $h = \frac{b-a}{n}$, de la forma

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\ldots+4f_{n-1}+f_n) \equiv \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + f_5 + \ldots\right) + 2\left(f_2 + f_4 + f_6 + \ldots\right) + f_n\right]\,.$$

Del mismo modo, podemos construir una fórmula para cinco puntos de la forma de Bode

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x = h\left[\frac{14}{45}f_0 + \frac{64}{45}f_1 + \frac{24}{45}f_2 + \frac{64}{45}f_3 + \frac{14}{45}f_4\right] + E\left(h^7 f^{(6)}\right)\,.$$

Intregración por cuadratura de Gauss-Legendre

Antes vimos el caso de puntos x_i igualmente espaciados, i.e. $h = cte$. Ahora nos planteamos la posiblilidad de aproximar la integral con puntos espaciados estratégicamente. Al igual que el caso anterior esto es:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) + E_N \tag{4.9}$$

Pero ahora la intención es utilizar la función a integrar evaluada en un conjunto de puntos estratégicos para los cuales están definidos unos coeficientes, también inteligentemente seleccionados. Es decir se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \cdots N$). Más aún, esas $2N$ cantidades pueden ser seleccionadas de forma tal que la aproximación es exacta $E_N = 0$ cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$. Esto se parece al caso anterior de Simpson y Bode, pero ahora los puntos no estarán igualmente espaciados y vamos a echarle mano a los polinomios ortogonales.

Supongamos, para empezar que la función $f(x)$ está definida para $x \in [-1, 1]$[3] y por lo tanto los polinomios ortogonales que seleccionaremos para aproximar la integral (y la función) serán los del Legendre (igual pudimos haber utilizado los polinomios de Tchebychev), con lo cual

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)\,,$$

donde:

$$a_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)P_k(x) \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)\,.$$

Con lo cual

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{N} c_k P_n(x_k)\,.$$

Quedan todavía por determinar los pesos c_k y los puntos x_k. Para ello procedemos de la siguiente forma. Notamos que $P_N(x)$ tiene N raíces, $x = x_j$, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Entonces, si seleccionamos esos

[3] Esta no es una limitación muy severa porque siempre podemos hacer, como ya vimos, un cambio de variable del tipo $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \left(\frac{b+a}{2}\right)$ y convertir cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en un intervalo cerrado $[-1, 1]$.

Borrador Preliminar

N	$P_N(x_j) = 0$	$c_j = \dfrac{2}{(1-x_j^2)\,(P'_N(x_j))^2}$	$2N-1$
2	$\pm\sqrt{3}/3$	1	3
3	0 $\pm\sqrt{15}/5$	8/9 5/9	5
4	±0,3399810436 ±0,8611363116	0,65214515 0,34785485	7
5	0 ±0,5384693101 ±0,9061798459	0,56888889 0,47862867 0,23692689	9
6	±0,2386191861 ±0,6612093865 ±0,9324695142	0,46791393 0,36076157 0,17132449	11
⋮	⋮	⋮	⋮

Cuadro 4.9: Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Legendre

puntos $x = x_j$ para evaluar la función $f(x_k)$ se anulan el coeficiente para el término a_N y, además podremos encontrar los pesos c_k resolviendo el sistema de N ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^{N} c_j P_0(x_j) = \sum_{j=1}^{N} c_j = 2 \qquad \wedge \qquad \sum_{j=1}^{N} c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \cdots N-1$$

donde los $P_k(x_j)$ son los distintos polinomios evaluados en las raíces del polinomio de grado N, i.e. $P_N(x_j) = 0$

Se puede demostrar que la solución de este sistema provee los pesos escritos de la forma

$$c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\,(P'_N(x_j))^2}, \quad \text{donde:} \quad P'_N(x_j) = \left.\frac{\mathrm{d}P_N(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_j}$$

Más aún, podremos escribir

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) = 2a_0 + E_N \quad \text{con} \quad E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{N} c_k P_n(x_k)\,,$$

pero como

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k) - E_N$$

Es decir, demostramos que es posible aproximar la integral del la función con un promedio pesado de la función evaluada en unos puntos estratégicos. Los puntos estratégicos son los ceros del polinomio de Legendre de grado igual al número de puntos con los cuales se quiere aproximar la función y los pesos vienen de resolver las ecuaciones para los coeficientes de la expansión. En el cuadro 4.9 se ilustran los valores de los puntos de interpolación y sus pesos correspondientes.

Es inmediato comprobar que si $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq N-1$ la aproximación es exacta y el error es nulo. Pero lo que realmente hace útil a este tipo de aproximaciones es que también será exacta para

Borrador Preliminar

polinomios de grado $\leq 2N-1$. Esto se puede ver si expresamos un polinomio de grado $2N-1$ como la suma de dos polinomios

$$f(x) = P_N(x)Y_1(x) + Y_2(x)$$

donde Y_1 y Y_2 son polinomios de grado $N-1$. Entonces, al integrar miembro a miembro

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x) = \underbrace{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ P_N(x)Y_1(x)}_{=0} + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ Y_2(x)$$

el primer término se anula por ser $P_{N(x)}$ ortogonal a cualquier polinomio de grado inferior, y el segundo término no es más que el caso que analizamos anteriormente de un polinomio de grado $\leq N-1$.

Puede resultar conveniente escribir la ecuación

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Entonces, para la cuadratura de Gauss-Legendre

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k f\left(\frac{(b-a)t_k+b+a}{2}\right)$$

donde los t_k son las raíces de $P_N(t_k) = 0$.

Estrategia General para cuadraturas de Gauss

Para el caso general, la aproximación de una integral

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^{N} c_k f(x_k)\,,$$

donde las $\{x_1, \cdots x_k, \cdots x_N\}$ son los ceros del polinomio ortogonal, de grado N, $p_N(x)$, elegido para hacer esta aproximación. Los N pesos $\{c_1, \cdots c_k, \cdots c_N\}$ surgen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{N} c_j = \frac{h_0}{p_0^2} \quad \text{con } h_0 = \int_a^b w(x)p_0^2(x)\mathrm{d}x \qquad \wedge \qquad \sum_{j=1}^{N} c_j p_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \cdots N-1\,.$$

Así para aproximar integrales con funciones pesos, $w(x)$, utilizaremos cuadraturas adaptadas a los polinomios ortogonales. Esto es

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\ e^{-x}f(x) \Rightarrow \text{Laguerre}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-x^2}f(x) \Rightarrow \text{Hermite}, \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Tchebychev}\,.$$

4.6.3. Ejemplos

Utilizar la fórmula de cuadratura de dos puntos de Gauss-Legendre para calcular

$$\int_2^4 (x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x$$

Borrador Preliminar

Entonces, $N = 2$:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 (x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x &= \frac{4-2}{2}\left[c_1 f\left(\frac{(4-2)t_1 + 4 + 2}{2}\right) + c_2 f\left(\frac{(4-2)t_2 + 4 + 2}{2}\right)\right] \\
&= (1)f\left(\frac{2t_1 + 6}{2}\right) + (1)f\left(\frac{2t_2 + 6}{2}\right) = f\left(\frac{2\sqrt{3}/3 + 6}{2}\right) + f\left(\frac{-2\sqrt{3}/3 + 6}{2}\right) \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{3} = \frac{26}{3}\,.
\end{aligned}$$

4.6.4. Practicando con Maxima

4.6.5. Ejercicios

1. Considere la siguiente integral, $\int_0^x \mathrm{d}u\ \cos(u^2+4)$, con su correspondiente solución "analítica" en término de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ de Fresnel [4]

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^x \mathrm{d}u\ \cos(u^2+4) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\cos(4)\,\mathrm{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) - \mathrm{sen}(4)\,\mathrm{FresnelS}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)\right)\,,$$

   y que la hemos graficado en la figura 4.10. Algunos lenguajes tiene definidas estas funciones especiales en su biblioteca de funciones [5]

   Además, cuando calculamos numéricamente los primeros tres los ceros de esa función obtenemos: $x_1 \approx 1{,}498773378$, $x_2 \approx 2{,}413995819$ y $x_3 \approx 2{,}870742454$

Figura 4.10: Gráfica de la solución analítica de la integral de Fresnel $\int_0^x \mathrm{d}u\ \cos(u^2+4)$

[4] Las expresiones $S(x)$ y $C(x)$ de Fresnel son funciones especiales relacionadas con la función $\mathrm{erf}(x)$. Su definición y propiedades pueden verse en https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral

[5] En Python se encuentran en la biblioteca de funciones especiales https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.special.fresnel.html

Borrador Preliminar

Queremos comparar la exactitud y el costo computacional de calcular numéricamente la integral, $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}u \, \cos(u^2+4)$, mediante tres cuadraturas: Trapecios, Simpson y Gauss-Legendre. Para ello proponemos

a) Determinar la precisión de la aritmética de su esquema de cálculo. Esto es el mínimo número que proviene de la resta de otros dos. Éste se denomina el epsilon, ϵ_m, de la máquina [6]. Este número representa las limitaciones conjuntas del harware y software en la aritmética

b) Luego, calcular el error relativo, $E_r = \frac{|f_{exac} - f_{aprox}|}{|f_{exac}|}$ y graficarlo (*log-log*) respecto al numero de puntos en que se subdivida el intervalo $[x_1 \ldots x_2]$, esto es E_r vs n. Para que sea evidente los comportamientos al graficar trapecios y Simpson, utilice, al menos 20 particiones distintas del intervalo, que cubran de $n = 10$ a $n = 1000$. En el caso de cuadratura de Gauss-Legendre determine a partir de cuantas raíces el error se estabiliza.

c) Seguidamente, ajustar cada curva con una ley de potencias, $E_r \propto n^\alpha$, con los cual

$$E_r \propto n^\alpha \quad \Rightarrow \log E_r = \alpha \log n + cte\,.$$

Es decir, en un gráfico *log - log* la pendiente de la recta representará el orden del método y, como utilizamos $\log_{10}$, tendremos que la ordenada muestra el número de decimales de precisión del método.

2. Para integrales con funciones peso del tipo $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ los pesos son: $w_i = \pi/N$, resultando

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\,, \quad \text{con} \quad x_k = \cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right)\pi$$

Muestre que para un intervalo arbitrario $a \leq x \leq b$, esta última integral es:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \, \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

donde:

$$x_k = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right)\pi\,.$$

[6] Puede consultar su definición e implementación en https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon

Borrador Preliminar

Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Borrador Preliminar

5.1. Motivación, origen y conceptos básicos

En Ciencias, una de las formas de modelar fenómenos físicos es mediante su caracterización a través de una función matemática, digamos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z; t)$. Una las formas (la ideal) para modelar los cambios de esta función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, que depende de la posición y del tiempo, es a través de una ecuación en la cual están involucradas la función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$ y sus derivadas. A esa ecuación, que involucra las derivadas, la llamaremos *Ecuación Diferencial*.

Existe toda una "fauna" de ecuaciones diferenciales y hoy disponemos de un importante arsenal de técnicas, métodos y herramientas para encontrar la función $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, la cual será nuestra función incógnita.

Este curso trata, parcialmente, de mostrar parte de esta "fauna" y de indicarles métodos para resolver un tipo particular de ecuaciones diferenciales: las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo

$$\mathcal{F}\left[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right] = 0\,, \tag{5.1}$$

donde:

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\,, \quad y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}\,, \quad y'''(x) = \frac{\mathrm{d}^3y(x)}{\mathrm{d}x^3}\,, \quad \cdots \quad , y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{(n)}y}{\mathrm{d}x^{(n)}}\,.$$

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$ax + yy' = 0\,, \quad x^2y''' - (y')^2 = e^x\,, \quad y''\cos(x) + \cos(y) = 2\,.$$

Cuando la función incógnita f viene definida por una relación entre sus derivadas parciales con respecto a las variables independientes nos estamos enfrentando a un problema de *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales* Si la función es $f = f(x, y, z)$ una ecuación diferencial en derivadas parciales es una de la forma:

$$\mathcal{F}\left[x, y, z, f, \partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial_z f,\ \partial_x^2 f,\ \partial_y^2 f,\ \partial_z^2 f,\ \partial_{xy} f,\ \partial_{xz} f, \ldots\right] = 0\,, \tag{5.2}$$

donde:

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y}\,, \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial y}\,, \partial_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,, \partial_y^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,, \partial_z^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,, \partial_{xy} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,, \partial_{xz} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

Ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - f(x, y) = p(y)\,.$$

Como ya mencionamos, en estas notas de métodos matemáticos trataremos las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus métodos de resolución. Un estudio de la ecuaciones en derivadas parciales será tratado en un curso posterior.

Empecemos por recordar que desde los primeros cursos hemos tratado, la mayor de las veces sin saberlo o sin explicitarlo, con este tipo de ecuaciones en donde la incógnita no es un número sino un conjunto de números: una función.

5.1.1. Un ejemplo emblemático

El caso más emblemático lo constituye el conjunto de "fórmulas" que aprendimos cuando estudiábamos bachillerato o, más recientemente, en los primeros cursos de física general en la universidad. Entonces describíamos el movimiento de partículas en una dimensión, a través de dos ecuaciones:

$$v_f(t) = v_0 + at \qquad \text{y} \qquad d(t) = v_0 t + a\frac{t^2}{2}\,. \tag{5.3}$$

Borrador Preliminar

De memoria repetíamos que v_f representaba la velocidad final, v_0 la velocidad inicial, a la aceleración, t el tiempo transcurrido y d la distancia recorrida en ese tiempo. El problema consistía en encontrar, para un sinfín de situaciones físicas, primeramente el valor de la aceleración del móvil y a partir de las leyes de Newton, conociendo la velocidad y la posición inicial, encontrábamos la posición d y la velocidad v_f en todo instante de tiempo. Así, mediante diagramas de cuerpo libre y la utilización de las leyes de Newton, encontrábamos el valor de la aceleración y con las "formulitas" (5.3) resolvíamos el problema.

$$\sum F_{ext} = ma \;\Rightarrow\; a = \frac{\sum F_{ext}}{m} \;\Rightarrow\; \begin{cases} v_f = v_0 + at \\ \\ d = v_0 t + a\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \tag{5.4}$$

Lo más probable es que nuestros profesores nos repitieran hasta el cansancio que la sumatoria de fuerzas externas $\sum F_{ext}$ era constante, y lo más seguro que nosotros en aquellos momentos no comprendiéramos la trascendencia de esa suposición.

El caso más representativo era el del movimiento de un cuerpo bajo la acción de un campo gravitatorio: el problema llamado de caída libre.

$$-mg = ma \;\Rightarrow\; a = -g \;\Rightarrow\; \begin{cases} v_f = v_0 - gt \\ \\ d = v_0 t - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \tag{5.5}$$

Lo que está detrás de esta historia que nos inició en el estudio de la física y a muchos de nosotros nos sedujo para seguir estudiando y aprendiendo a tratar de describir la naturaleza, es, efectivamente, la utilización de las leyes de Newton para modelar el fenómeno del movimiento. De este modo:

$$\sum F_{ext} = ma = m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{5.6}$$

Sí la sumatoria de fuerzas externas es una contante tendremos que:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a = \frac{\sum F_{ext}}{m} = \text{constante} \;\Rightarrow\; \begin{cases} v(t) = \int \mathrm{d}t\; a = at + C_2 \\ \\ x(t) = \int \mathrm{d}t\;\; (at + C_2) = a\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_1 \end{cases} \tag{5.7}$$

Claramente al identificar:

$$C_2 = v(t=0) = v_0 \qquad \text{y} \qquad C_1 = x(t=0) = x_0 = 0\,, \tag{5.8}$$

reobtenemos nuestras "formulitas" ancestrales. Es importante señalar que:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = at + C_2\,, \tag{5.9}$$

constituyen ecuaciones diferenciales donde las funciones incógnitas son la velocidad $v(t)$ y la posición, $x(t)$, respectivamente. Ambas funciones se encontraban dentro de un signo de derivada y fueron "despejadas" mediante un proceso de integración.

La descripción del movimiento de un sistema de partículas es más rica y compleja. El movimiento de una gran cantidad de partículas puede ser simulado a través de una ecuación diferencial del tipo:

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\,(t)\,, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{5.10}$$

Borrador Preliminar

El carácter vectorial implica tres ecuaciones diferenciales, una por cada dimensión del movimiento:

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\left(t\right),\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t},t\right)=m\mathbf{a}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sum F_{ext}^{x}\left(x\left(t\right),\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},t\right)=ma_x=m\dfrac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=m\dfrac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\sum F_{ext}^{y}\left(y\left(t\right),\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},t\right)=ma_y=m\dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}=m\dfrac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\sum F_{ext}^{z}\left(z\left(t\right),\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t},t\right)=ma_z=m\dfrac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}=m\dfrac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\end{array}\right.$$

Además del carácter vectorial de la ecuación, las componentes de la fuerza pueden dejar de ser constantes y depender no sólo del tiempo, sino del vector posición, del vector velocidad o de ambas simultáneamente.

En este caso nuestras "formulitas" dejan de ser válidas y debemos integrar las ecuaciones diferenciales para obtener la trayectoria de la partícula, es decir, $\mathbf{r}\left(t\right)$, conocidas: la masa, la expresión de la sumatoria de fuerzas externas, la posición y la velocidad inicial. Este problema se conoce como el problema de condiciones iniciales y es, como hemos dicho antes, la razón de este curso.

Pero antes vamos a mostrar como el conocimiento del movimiento bajo la acción de una fuerza constante, es decir, el movimiento de una partícula con aceleración constante puede resultar muy útil para resolver, de forma aproximada, el caso más general que hemos mencionado.

Veamos con detenimiento que significan estas afirmaciones.

Es claro que el tiempo de evolución esta comprendido entre el tiempo inicial, t_0, y el tiempo final, t_f, es decir: $t_0 \leq t \leq t_f$. Supongamos que dividimos ese intervalo de tiempo en N subintervalos

$$[t_0,t_f]=[t_0,t_1]\cup[t_1,t_2]\cup[t_2,t_3]\cup\cdots\cup[t_i,t_{i+1}]\cup\cdots\cup[t_{N-2},t_{N-1}]\cup[t_{N-1},t_N=t_f]$$

de tal modo que en cada uno de esos N subintervalos la aceleración es constante. En estas situación, nuestras "formulitas" son válidas. Esto es:

$$[t_0,t_1]:\left.\begin{array}{r}v(t_0)=v_0\\[2ex]x\left(t_0\right)=x_0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}v(t_1)=v_1=v_0+a\left(x_0,v_0,t_0\right)\left[t_1-t_0\right]\\[2ex]x\left(t_1\right)=x_1=v_0\left[t_1-t_0\right]+a\left(x_0,v_0,t_0\right)\dfrac{\left[t_1-t_0\right]^2}{2}\end{array}\tag{5.11}$$

$$[t_1,t_2]:\left.\begin{array}{r}v(t_1)=v_1\\[2ex]x\left(t_1\right)=x_1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}v_2=v_1+a\left(x_1,v_1,t_1\right)\left[t_2-t_1\right]\\[2ex]x_2=x_1+v_1\left[t_2-t_1\right]+a\left(x_1,v_1,t_1\right)\dfrac{\left[t_2-t_1\right]^2}{2}\end{array}$$

Si continuamos con este procedimiento, para un tiempo n-ésimo se tiene:

$$[t_i,t_{i+1}]:\left.\begin{array}{r}v(t_i)=v_i\\[2ex]x\left(t_i\right)=x_i\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}v_{i+1}=v_i+a\left(x_i,v_i,t_i\right)\left[t_{i+1}-t_i\right]\\[2ex]x_{i+1}=x_i+v_i\left[t_{i+1}-t_i\right]+a\left(x_i,v_i,t_i\right)\dfrac{\left[t_{i+1}-t_i\right]^2}{2}\end{array}$$

hasta $i=N-1$:

$$[t_{N-1},t_N]:\left.\begin{array}{r}v(t_{N-1})=v_{N-1}\\[2ex]x\left(t_{N-1}\right)=x_{N-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}v_N=v_{N-1}+a\left(x_{N-1},v_{N-1},t_{N-1}\right)\left[t_N-t_{N-1}\right]\\[2ex]x_N=x_{N-1}+v_{N-1}\left[t_N-t_{N-1}\right]+a\left(x_{N-1},v_{N-1},t_{N-1}\right)\dfrac{\left[t_N-t_{N-1}\right]^2}{2}\end{array}$$

Borrador Preliminar

Nótese que las posiciones y velocidades **finales** para cada intervalo, son las posiciones y velocidades **iniciales** para el intervalo siguiente y que el valor de la aceleración, que es variable, se toma como constante e igual al valor que tiene en el comienzo del intervalo.
Para analizar este caso consideremos la situación de una esfera de corcho, con radio a y masa m que se suelta desde el fondo de un tanque de agua de profundidad h.
Queremos conocer con que velocidad llega la esfera a la superficie.
El diagrama de cuerpo libre se puede observar en la Figura 5.1 y la ecuación de Newton para este caso se expresa como:

Figura 5.1: Diagrama de Cuerpo Libre de una esfera de corcho que emerge desde el fondo de un tanque de agua.

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\left(t\right), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) \Rightarrow -mg - \eta v\left(t\right) + m_l g = m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{5.12}$$

En la cual podemos identificar:

$$\text{Peso: } -mg\,, \quad \text{Fricción: } -\eta v\left(t\right)\,, \quad \text{Empuje: } m_l g\,.$$

Como sabemos de cursos anteriores, el empuje o fuerza de Arquímides es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo. Por ello aparece m_l que representa la masa del fluido.

Para el caso en el cual el fluido no es viscoso ($\eta = 0$), es decir, no hay fricción con el fluido, la ecuación se reduce a:

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\left(t\right), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) \Rightarrow -mg + m_l g = ma\,, \tag{5.13}$$

en la cual claramente la aceleración es constante e igual a:

$$a = g\left(\frac{m_l}{m} - 1\right) \equiv g\left(\frac{\rho_l}{\rho} - 1\right) = \text{cte}\,. \tag{5.14}$$

donde hemos identificado ρ_l la densidad del fluido y ρ la densidad del cuerpo.

Para buscar la velocidad con la cual llega a la superficie, encontramos primero el tiempo que tarda en subir y luego evaluamos la velocidad en ese tiempo. Esto es:

$$y(t_f) = h = g\left(\frac{\rho_l}{\rho} - 1\right)\frac{t_f^2}{2} \Rightarrow t_f = \pm\sqrt{\frac{2h\rho}{g\left(\rho_l - \rho\right)}}\,, \tag{5.15}$$

por lo tanto, la velocidad final es:

$$v_f = \pm g\left(\frac{\rho_l}{\rho} - 1\right)\sqrt{\frac{2h\rho}{g\left(\rho_l - \rho\right)}}\,. \tag{5.16}$$

En el caso general, descrito por la ecuación (5.12), procedemos del mismo modo: encontramos el tiempo en el cual llega la superficie y luego evaluamos la expresión de la velocidad para ese tiempo. Fíjense que

Borrador Preliminar

la estrategia para resolver el problema físico es la misma, sólo que tendremos que disponer de un arsenal adicional de herramientas y técnicas para "despejar" la función velocidad.

Aprenderemos a resolver ecuaciones diferenciales de la misma manera que antes resolvíamos ecuaciones algebraicas. En este caso, y como veremos más adelante, la solución exacta para la expresión de la velocidad es:

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -mg - \eta v\left(t\right) + m_l g \;\Rightarrow\; v\left(t\right) = \frac{g\left(m - m_l\right)}{\eta}\left[e^{-\frac{\eta}{m}t} - 1\right]. \tag{5.17}$$

Con lo cual:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = v\left(t\right) = \frac{g\left(m - m_l\right)}{\eta}\left[e^{-\frac{\eta}{m}t} - 1\right], \tag{5.18}$$

y la función posición surge de integrar la ecuación diferencial anterior

$$y\left(t\right) = -\frac{g(m - m_l)}{\eta^2}\left[me^{-\frac{\eta}{m}t} + \eta t - m\right], \tag{5.19}$$

desafortunadamente, no se puede despejar el tiempo de manera exacta por cuanto la ecuación:

$$y(t_f) = h = -\frac{gm\left(m - m_l\right)}{\eta^2}\left[e^{-\frac{\eta}{m}t_f} - 1 + \frac{\eta}{m}t_f\right], \tag{5.20}$$

para el tiempo final t_f, ésta es una ecuación *trascendente* y debe ser resuelta numéricamente.

Hagamos ahora algunas sustituciones simplificadoras:

$$m_l = \frac{4\pi}{3}\xi\,\rho\,a^3\,, \quad m = \frac{4\pi}{3}\,\phi\,\rho\,a^3\,, \quad \rho_l = \xi\rho\,, \quad \rho = \phi\rho_a\,, \tag{5.21}$$

donde ξ y ϕ representan las densidades relativas del fluido y del cuerpo respecto al agua (que es de densidad ρ_a), respectivamente. Sustituyendo por valores numéricos:

$$g = 9{,}8\,; \quad a = 0{,}02\,; \quad \rho_a = 10^3\,; \quad \xi = 1\,; \quad \phi = 0{,}8\,; \quad v_0 = 0\,; \quad \eta = (6\pi a)\left(1{,}002 \times 10^{-3}\right), \tag{5.22}$$

entonces, de la ecuación (5.20) nos queda que para $h = 10$(mts)

$$10 = 12339{,}72755\left[1 - e^{(-0{,}01409062500t_f)}\right] - 173{,}8744736t_f\,, \tag{5.23}$$

y se obtiene, de manera numérica, que $t_f = 2{,}876443096$ s.

Con este resultado se evalúa la ecuación para la velocidad:

$$v\left(t_f\right) = 173{,}8744730\left[1 - e^{(-0{,}01409062500\ t_f)}\right] \;\Rightarrow\; v_f = 6{,}9063798\ \mathrm{m/s}\,. \tag{5.24}$$

En la siguiente tabla se implementan las ecuaciones (5.11) habida cuenta de las simplificaciones (5.21) y los valores numéricos (5.22) para $h = 1/10 \sim [t_{i+1} - t_i]$

Borrador Preliminar

$t_i(s)$	$v_i(m/s)$	$y_i(m)$	$v(t)(m/s)$	$y(t)(m)$
0.100	0.2449999997	0.01224999998	0.2448275	0.01225
0.200	0.4896547791	0.04898273892	0.4893102	0.04895
0.300	0.7339648246	0.11016371910	0.7334487	0.11009
0.400	0.9779306220	0.19575849150	0.9772434	0.19563
0.500	1.221552656	0.30573265540	1.2206949	0.30553
0.600	1.464831412	0.44005185880	1.4638035	0.43976
0.700	1.707767373	0.59868179800	1.7065698	0.59828
0.800	1.950361022	0.7815882177	1.9489943	0.78106
0.900	2.192612841	0.9887369109	2.1910775	0.98807
1.000	2.434523312	1.220093719	2.4328198	1.21926
1.100	2.676092916	1.475624530	2.6742217	1.47462
1.200	2.917322134	1.755295283	2.9152836	1.75410
1.300	3.158211444	2.059071962	3.1560062	2.05767
1.400	3.398761326	2.386920600	3.3963898	2.38529

aquí, v_i y y_i representan la velocidad y la posición aproximada, tal y como se expresan en las ecuaciones (5.11). Mientras que $v\,(t)$ y $y\,(t)$ ilustran los valores de la velocidad y la posición exactas, calculadas a partir de las ecuaciones (5.18) y (5.19). Es claro que la aproximación es buena hasta la segunda cifra decimal.

5.1.2. Ejemplos de algunas ecuaciones diferenciales

- Thomas Robert Malthus[1] fue uno de los primeros en darse cuenta que la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencias crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones,* el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la población y las necesidades que ellas generaban, erán de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies. La Ley de Malthus o Decaimiento Radioactivo es:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k\,y(t) \;\Rightarrow\; y(t) = y_0 e^{k\,t}\,, \;\; \text{con } y_0 = y(0)\,. \tag{5.25}$$

  Para $k > 0$ la población crece y para $k < 0$ tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza los procesos de decaimiento radiactivo.

- La ecuación logística o Ley de Verhulst[2] se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta el decrecimiento de la población con el término $-y^2$

$$\frac{dy(t)}{dt} = [k - ay(t)]\;y(t) = ky(t) - ay^2(t) \;\Rightarrow\; y(t) = \frac{k\;y_0}{a\;y_0 + (k - a\;y_0)\;e^{-k\,t}}$$

- La Ley de Enfriamiento de Newton expresa que la tasa de cambio de la temperatura respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = k(T - T_m) \;\Rightarrow\; T(t) = (T_0 - T_m)\;e^{k\,t} + T_m\,, \quad \text{con } T_0 = T(0)$$

[1] En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834).

[2] **Pierre François Verhulst** 1804 - 1849. Matemático belga con sus más importantes comtribuciones en estadística demográfica.

Borrador Preliminar

- La Ley de Torricelli, la cual establece (para un tanque cilíndrico) la tasa de cambio respecto al tiempo de la profundidad del agua en un tanque:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{A}\sqrt{y(t)} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t + y(0)^2 \,.$$

5.1.3. De ecuaciones y ecuaciones diferenciales

En cursos anteriores consideramos una ecuación algebráica como aquella que se cumplía para ciertos valores de x:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2\,,$$

llamaremos ahora una ecuación diferencial aquella que se cumple para ciertas **funciones** i.e.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = e^x$$

Definición:Sea $f(x)$ una función definida sobre un intervalo $a < x < b$. Por una Ecuación Diferencial Ordinaria entenderemos toda ecuación que involucre a x, $f(x)$ y una o más derivadas de $f(x)$.

Ejemplos:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + f(x) = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3} = -e^{-x}\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\cos(x)}{1-x^2}\,, \quad x\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 2[f(x)]^2\,.$$

Utilizaremos para tal efecto varias notaciones equivalentes:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + g(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - af^2(x) &= k(x) \\
f''(x) + g(x)f'(x) - af^2(x) &= k(x) \\
f_{xx}(x) + g(x)f_x(x) - af^2(x) &= k(x)\,.
\end{aligned}$$

Se llaman ordinarias porque involucran funciones de una sola variable y derivadas respecto a ella. En el segundo caso, las derivadas son parciales y la ecuación se denomina ecuación diferencial parcial.

Los ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales parciales son las ecuaciones del calor y la ecuación de onda

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad \text{y} \quad v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,,$$

respectivamente. Note que α^2 y v^2 son constantes físicas que representan la conductividad térmica y la velocidad de la onda. La ecuación del calor describe la conducción de calor en un cuerpo sólido y la ecuación de onda surge en una variedad de problemas que involucran el movimiento ondulatorio en sólidos o fluidos. En ambas ecuaciones la función solución $u = u(x,t)$ depende de las dos variables independientes x y t.

5.1.4. Sistema de ecuaciones diferenciales

Si hay una sola función incógnita basta con una ecuación. Sin embargo, si hay dos o más funciones desconocidas, entonces se requiere un sistema de ecuaciones. Por ejemplo en el modelado de en Ecología son típicos los sistemas de ecuaciones de la forma

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = a\;x(t) - \alpha\;x(t)y(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -c\;y(t) + \gamma\;x(t)y(t)$$

Borrador Preliminar

donde las funciones incógnitas $x(t)$ e $y(t)$ representan las poblaciones las especies presa y depredadora. Las constantes a, α, c y γ se ajustan en función de observaciones empíricas y dependen de la especie concreta que se estudie.

5.1.5. Orden y linealidad

Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n, generica suele denotarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,, \tag{5.26}$$

y será lineal si sólo parecen funciones lineales de $y(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} y'y'' + yy' - ay^2 &= k(x) \quad \text{es no lineal} \\ \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y &= k(x) \quad \text{es lineal} \end{aligned}$$

Muchas veces se acostumbra a omitir la dependencia de la función de la variable porque ésta queda sobreentendida: $y(x) = y$.

El orden de la derivada mayor define el orden de la ecuación diferencial, para la EDO (5.26) se tiene entonces que ésta será de orden n. Ejemplos:

$$\begin{array}{rcll} y'' & + & (3y')^3 + 2x = 7\,, & \text{EDO no lineal de orden 2} \\ y' & + & y = x\,, & \text{EDO lineal de orden 1}\,. \end{array}$$

La ecuación diferencial (5.26) será homogénea si NO contiene términos independientes de $y(x)$, en caso contrario será inhomogénea:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + g(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - ay(x) &= k(x) \quad \text{lineal inhomogénea} \\ y''(x) + g(x)y'(x) - ay(x) &= 0 \quad \text{lineal homogénea.} \end{aligned}$$

5.1.6. Ejemplos

5.1.7. Practicando con Maxima

5.1.8. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones determine su orden e indique también si es o no lineal, homogénea o inhomogénea.

   a) $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + t\dfrac{\mathrm{d}y}{dx} + 2y = \cos x$

   b) $\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{dt^4} + \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = x^3$

   c) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \cos(t + y) = \tan t$

   d) $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\ \cos^2 t = t^3$

Borrador Preliminar

Figura 5.2: Gráfica de la función implícita $f(x,y) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0$

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones verifique que la función o funciones propuestas constituyen soluciones de las ecuaciones diferenciales

   a) $y'' - y = 0; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = \cosh t$

   b) $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y_1(t) = e^{-3t}, \quad y_2(t) = e^t$

   c) $ty' - y = t^2; \quad y = 3t + t^2$

5.2. Sobre las soluciones

5.2.1. Soluciones explícitas e implícitas

Las soluciones heredan su nombre del tipo de función que las representa, así tendremos soluciones explícitas cuando las funciones sean soluciones y sean explícitas. Esto es

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + 4\ e^t \ \Rightarrow\ y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2\ te^t$$

y también

$$y' = (x+y)^2 \ \Rightarrow\ y(t) = \tan(t - C_1) - t\,, \quad \text{con } t - C_1 \neq \frac{\pi}{2}$$

Las soluciones serán implícitas si son representadas por funciones como

$$y\ y' + x = 0 \ \Rightarrow\ f(x,y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y = & \sqrt{25 - x^2} \\ y = & -\sqrt{25 - x^2} \end{array} \right. \quad \text{con } -5 < x < 5$$

En este caso, se tiene que seleccionar una rama de la función raíz.

Borrador Preliminar

Igualmente, será solución implícita de la ecuación:

$$[y^2(x) - x]\ y'(x) - y(x) + x^2 = 0$$

la siguiente función

$$f(x, y) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0,$$

ahora no es tan fácil verificar si efectivamente es una solución. Para comprobarla derivamos la función

$$\frac{\mathrm{d}[f(x,y)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left[x^3 + y^3(x) - 3xy(x)\right]}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - 3y(x) - 3x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,,$$

simplificando y agrupando obtenemos la ecuación diferencial. Otra vez, la función solución no es univaluada. Al graficarla (ver Figura 5.2) nos damos cuenta que tenemos varias soluciones de funciones univaluadas unas contínuas y otras no. La función es univaluada fuera del lóbulo. Esto es para $x \leq 0\ \wedge\ x > 2^{\frac{2}{3}}$. Con lo cual tendremos que seleccionar, dentro del lóbulo, cuál de las partes univaluadas corresponde a la solución.

5.2.2. Soluciones generales y particulares

Veamos las siguientes ecuaciones y soluciones

$$\begin{array}{rcl} y' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_1 \\ y'' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_2 x + C_1 \\ y''' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_3 x^2 + C_2 x + C_1 \end{array}$$

Cada una de las soluciones representan familias de soluciones, una para cada constante. Este tipo de soluciones las denominaremos soluciones generales. Es decir, llamaremos solución general de una ecuación diferencial aquella que queda indeterminada por un conjunto de constantes $\{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n\}$. En contraste, cuando *particularizamos* los valores de las constantes tendremos una solución *particular* par cada una de las ecuaciones. Adicionalmente, cuando nos referimos a las ecuaciones no lineales el concepto de solución particular varía. Soluciones particulares en este tipo de ecuaciones serán aquellas que se cumplen para rangos (o puntos) muy particulares. Vale decir

$$\left.\begin{array}{r} (y')^2 + y^2 = 0 \\ (y'')^2 + y^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{única solución}$$

Tamibién en este caso llamaremos a este tipo de soluciones, particulares. De igual modo puede darse casos para los cuales no exista solución en un determinado intervalo.

$$\left.\begin{array}{r} |y'|^2 + 1 = 0 \\ |y''|^2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{no tienen solución}$$

Ecuaciones de la forma

$$xy' = 1 \ \Rightarrow\ y(x) = \ln|x| + C \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y(x) = \ln(x) + C_1 \text{ para } x > 0 \\ \\ y(x) = \ln(-x) + C_1 \text{ para } x < 0 \end{array}\right.$$

con: $-1 < x < 0\ \wedge\ 0 < x < 1$, tienen soluciones particulares para intervalos de la variables x.

Del mismo modo

$$(y' - y)(y' - 2y) = 0 \quad \Rightarrow [y(x) - C_1 e^x]\left[y(x) - C_2 e^{2x}\right] = 0$$

tendrá dos soluciones particulares.

Borrador Preliminar

5.2.3. Familia de soluciones $n-$paramétricas

Si $y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ es solución de una ecuación diferencial

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,,$$

para n constantes $\{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n\}$ arbitrarias, entonces diremos que

$$y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad \text{es una familia } n\text{-paramétrica de soluciones.}$$

Existe una diferencia entre una solución general de una ecuación y una solución $n-$paramétrica. La solución general tiene que contener **todas** las soluciones de una ecuación diferencial determinada. Una solución $n-$paramétrica no necesariamente. Veamos

$$y = xy' + (y')^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(x) = Cx + C^2 \\ \\ y(x) = -\dfrac{x^2}{4} \end{cases}$$

Se estaría tentado en llamar solución general a la solución $1-$paramétrica $y = Cx + C^2$. Sin embargo, se deja por fuera a la otra solución que no tiene que ver con un valor particular de la constante C.

Otro ejemplo, lo constituye

$$y' = -2y^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{C^2}{(Cx+1)^2}\,, \ \forall\, x\,,$$

pero también

$$y(x) = \left(x + \tilde{C}\right)^{-2}\,, \text{ es solución con } y(x) \neq 0\,.$$

Una solución $n-$paramétrica se denominará solución general si contiene **todas** las soluciones de una determinada ecuación diferencial. En el caso de ecuaciones diferenciales lineales, las soluciones $n-$paramétricas constituyen las soluciones generales a las ecuaciones diferenciales.

5.2.4. Solución particular, valores iniciales y valores de contorno

Dependiendo de la situación física que estemos modelando quizá podamos determinar las constantes arbitrarias de una familia $n-$paramétrica con información para un único punto $x = x_0$. Esto es:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$$

donde

$$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$$

En este caso diremos que tendremos un problema de valores iniciales, ya que determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un solo punto, por ejemplo:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\omega}\text{sen}(\omega x)\,.$$

Si por el contrario, para determinar el valor de las constantes arbitrarias disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, diremos que tendremos un problema de contorno. Esto es:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \text{sen}(n\pi\omega x)\,.$$

Borrador Preliminar

Nótese que también pudimos haber tenido información del tipo

$$y(0) = y_0 \, , \, y'(1) = y_1 \, ; \, y'(0) = y_0 \, , \, y'(1) = y_1 \, ; \, y'(0) = y_0 \, , \, y(1) = y_1 \, ,$$

y para cada uno de estos caso tendremos una solución distinta.

Demostraremos que los problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales siempre tienen solución particular (siempre se pueden determinar las constantes a partir de la información de la función y las derivadas en UN punto). No así los problemas de valores de contorno.

5.2.5. Ejemplos

5.2.6. Practicando con Maxima

5.2.7. Ejercicios

Borrador Preliminar

Capítulo 6

Ecuaciones diferenciales de orden 1

Borrador Preliminar

6.1. Soluciones analíticas

Es fundamental, primero que todo, identificar con que tipo de ecuación diferencial ordinaria que estamos tratando antes de cualquier intento de conseguir una solución. Veamos varios ejemplos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\mathrm{sen}(\theta) &= 0\,, && \text{EDO no lineal, homogénea de orden 2}\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta &= 0\,, && \text{EDO lineal, homogénea de orden 2}\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta &= E(t)\,, && \text{EDO lineal, no homogénea de orden 2}\\
y' + xy &= \frac{x}{y^3}\,, && \text{EDO no lineal, homogénea de orden 1}\\
y' - x^3 + 2\tfrac{y}{x} - \tfrac{1}{x}y^2 &= 0\,, && \text{EDO no lineal, no homogénea de orden 1}\\
\tan(x)y' - y &= \tan^2(x)\,, && \text{EDO lineal, homogénea de orden 1}\\
xy' + y &= x^3\,, && \text{EDO lineal, no homogénea de orden 1}
\end{aligned}$$

Ahora de manera un poco más sistemática diremos que una ecuación diferencial de primer orden será un funcional tal que si es explícita respecto a la derivada ésta se podrá despejar

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y' \equiv \dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = H(x,y) \\[2ex] P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$y' = 2xy + e^x \quad \Rightarrow \quad (2xy - e^x)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0\,,$$

$$y' = \ln(x) + y \quad \Rightarrow \quad (\ln(x) + y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

6.1.1. Métodos elementales de integración

Para comenzar expondremos unos métodos de integración, los cuales si bien son elementales y casi triviales serán utilizados en lo que sigue con bastante frecuencia.

Integración directa

La integración directa tiene varias variantes las cuales nos hemos tropezado en varias situaciones de modelaje y que nos han permitido integrar (intuitivamente) ecuaciones diferenciales. La más directa de todas tiene que ver con la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

Borrador Preliminar

por lo cual, al integrar (analítica o numéricamente) tendremos la expresión para la función $y(x)$,

$$\int \mathrm{d}y(x) = \int \mathrm{d}x\ f(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \mathrm{d}x\ f(x) + C$$

La integración directa fue la estrategia que utilizamos anteriormente para encontrar las formulitas que nos aprendimos en bachillerato. Esto es

$$\frac{\sum F_{ext}}{m} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = a = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v(t) = \int \mathrm{d}t\ a = at + C_1 \\ \\ x(t) = \int \mathrm{d}t\ \ (at + C_1) = a\dfrac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

en la cual al recordar las condiciones iniciales se tiene:

$$v(0) = v_0 \equiv C_1 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + at$$

$$x(0) = x_0 \equiv C_2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}\,.$$

Una primera variante de la estrategia de integración directa anterior se aplica a la siguiente ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(y)$$

acomodando los términos e integrando resulta:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[y(x)] = x + C$$

donde $\mathcal{F}[y(x)]$ será un funcional, desde el cual quizá se pueda despejar $y(x)$.

Esta estrategia se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -ay\,(x)\ ,\ \text{con } y(0) = 2\,,$$

entonces:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -a\int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ce^{-ax} \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = 2e^{-ax}\,.$$

la Figura 6.1 muestra varias soluciones particulares pertenecientes a esta familia, para $a = \frac{1}{3}$.

Otro ejemplo de integración directa se puede ver en la búsqueda de la solución de la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$yy' = (y+1)^2$$

esto es:

$$\frac{yy'}{(y+1)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y\mathrm{d}y}{(y+1)^2} = \int \mathrm{d}x\,,\ \text{para } y \neq -1\,,$$

integrando

$$\frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x + C\,,$$

que no es otra cosa que una familia de soluciones implícitas, $1-$paramétrica. Para una condición inicial como $y(2) = 0$ entonces

$$y(2) = 0 \Rightarrow C = -1 \quad \Rightarrow \frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x - 1 \text{ para } y \neq -1\,,$$

una vez más esta familia de soluciones $1-$paramétrica no constituye la solución general de la ecuación diferencial ya que no contiene todas las soluciones. En este caso, $y(x) = -1$ también es solución.

Borrador Preliminar

Figura 6.1: Familia de soluciones 1−paramétrica para $a = \frac{1}{3}$. En particular han sido tomados los valores $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

6.1.2. Ecuaciones diferenciales separables

Los casos anteriores de integración directa son generalizados por una ecuación que llamaremos separable. Esto es, la función (funcional) de dos variables del lado derecho se supone que es el resultado del producto de dos funciones de una variable, con lo cual las variables dependientes e independientes se agrupan a lados distintos de la igualdad. La siguiente ecuación es separable

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = F[y(x)]G(x)$$

y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{F(y)} = G(x)\ \mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{F(y)} = \int G(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Por ejemplo, al querer resolver la siguiente ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = x + xy$$

se tiene

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} = \int x\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^{\frac{x^2}{2}} - 1\,,$$

donde C o A son constantes arbitrarias a ser determinadas por las condiciones iniciales y además con $y \neq -1$. De todos modos $y = -1$ es una solución particular.

Borrador Preliminar

6.1.3. Variaciones sobre separabilidad

Existen otras situaciones en las cuales encontremos ecuaciones diferenciales que podremos convertir en separables a través de un cambio de variable:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\underbrace{ax+by+c}_{z}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}z = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y\,,$$

por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = bf(z) + a$$

es decir, el cambio de variable nos conduce a una ecuación diferencial separable:

$$\frac{\mathrm{d}z}{bf(z)+a} = \mathrm{d}x\,.$$

Un ejemplo nos clarifica de qué se trata

$$y' = \mathrm{sen}^2(x-y) \quad \Rightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{d}x - \mathrm{d}y\,,$$

esto es

$$y' = 1 - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad z' = 1 - \mathrm{sen}^2(z) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}z}{1-\mathrm{sen}^2(z)} = \int \mathrm{d}x$$

es decir

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\cos^2(z)} = x + C \Rightarrow \tan(z) = x + C \Rightarrow \tan(x-y) = x + C \Rightarrow y = x - \arctan(x+C)\,.$$

Se puede tratar de generalizar el caso anterior y considerar ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

Entonces, se distinguen dos casos dependiendo de si las rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$ son paralelas o no.

1. Son paralelas:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right) \equiv \tilde{f}(a_1x+b_1y)$$

   la cual analizamos anteriormente.

2. No son paralelas, entonces se intuye el siguiente cambio de variables

$$\begin{array}{lll} u = a_1x+b_1y+c_1 & \Rightarrow & \mathrm{d}u = a_1\mathrm{d}x + b_1\mathrm{d}y \\ v = a_2x+b_2y+c_2 & \Rightarrow & \mathrm{d}v = a_2\mathrm{d}x + b_2\mathrm{d}y \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \dfrac{b_2\mathrm{d}u - b_1\mathrm{d}v}{a_1b_2-a_2b_1} \\ \mathrm{d}y = \dfrac{a_1\mathrm{d}v - a_2\mathrm{d}u}{a_1b_2-a_2b_1} \end{array}$$

   con lo cual, la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = f\left(\frac{u}{v}\right)\,,$$

Borrador Preliminar

queda de la forma

$$\left[a_2 + b_2 f\left(\frac{u}{v}\right)\right] \mathrm{d}u - \left[a_1 + b_1 f\left(\frac{u}{v}\right)\right] \mathrm{d}v = 0\,,$$

donde la función $f\left(\frac{u}{v}\right)$ se conoce como una función homogénea al igual que la ecuación diferencial que hereda de ésta su nombre. Este tipo de ecuaciones diferenciales serán consideradas en la próxima sección.

Otro enfoque (equivalente) de este mismo problema puede ser consultado en el problemario de Kiseliov, Kransnov, Makarenko[1]. En este enfoque el cambio de variables se relaciona con el punto de corte (x_0, y_0)

Para ejemplificar este caso analizaremos un ejemplo sencillo de una función con argumento inhomogéneo del tipo.

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad \Leftrightarrow \quad Q(x,y)\mathrm{d}y + P(x,y)\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} Q(x,y) \propto a_2 x + b_2 y + c_2 \\ \\ P(x,y) \propto a_1 x + b_1 y + c_1 \end{cases}$$

Decimos, entonces que los coeficientes $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ son inhomogéneos ($c_i \neq 0$). Supondremos que las rectas no son paralelas, por lo cual utilizamos el cambio de variable propuesto anteriormente. Entonces

$$u = a_2 x + b_2 y + c_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = a_2 \mathrm{d}x + b_2 \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{b_2 - b_1}\left(\frac{\mathrm{d}u}{a_2} - \frac{\mathrm{d}v}{a_1}\right)$$

$$v = a_1 x + b_1 y + c_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = a_1 \mathrm{d}x + b_1 \mathrm{d}y \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{a_2 - a_1}\left(\frac{\mathrm{d}u}{b_2} - \frac{\mathrm{d}v}{b_1}\right)$$

con lo cual convertimos los coeficientes $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ en homogéneos. Esto es

$$\underbrace{(a_2 x + b_2 y + c_2)\mathrm{d}y + (a_1 x + b_1 y + c_1)\mathrm{d}x = 0}$$
$$\Downarrow$$
$$\overbrace{\left(\frac{u}{a_2(b_2 - b_1)} + \frac{v}{b_2(a_2 - a_1)}\right)\mathrm{d}u - \left(\frac{u}{a_1(b_2 - b_1)} + \frac{v}{b_1(a_2 - a_1)}\right)\mathrm{d}v = 0}$$

es decir

$$P(u,v) = u\left(\frac{1}{a_2(b_2 - b_1)} + \frac{\frac{v}{u}}{b_2(a_2 - a_1)}\right) = u g_1\left(\frac{v}{u}\right)\,,$$

y

$$Q(u,v) = u\left(\frac{1}{a_1(b_2 - b_1)} + \frac{\frac{v}{u}}{b_1(a_2 - a_1)}\right) = u g_2\left(\frac{v}{u}\right)\,.$$

Este tipo de funciones homogéneas serán consideradas más adelante.

6.1.4. Ecuaciones diferenciales no separables

Veamos ahora un caso bastante sencillo de resolver donde la EDO no es una ecuación diferencial separable. Consideremos, a manera de prueba, la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + a y(x) = e^{-x}\,, \text{ con } y(0) = 2\,,$$

[1] A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko (1969) **Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.** (*Mir*, Moscú)

Borrador Preliminar

entonces, podemos preguntarnos sobre la posibilidad de que exista una función $\mu(x)$ de manera que si multiplicamos ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$ entonces, el lado izquierdo de la ecuación diferencial se pueda escribir como:

$$\mu(x)\left[\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+ay(x)\right]\stackrel{?}{\equiv}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mu(x)y(x)]\,.$$

De esta manera, la función $\mu(x)$ es una función a determinar (en este caso a adivinar). Efectivamente tenemos que si

$$\mu(x)=e^{ax}\,,$$

entonces al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$, resulta:

$$\begin{aligned} e^{ax}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+e^{ax}ay(x) &= e^{ax}e^{-x}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{ax}y(x)\right] &= e^{(a-1)x}\\ \int \mathrm{d}\left[e^{ax}y(x)\right] &= \int \mathrm{d}x\; e^{(a-1)x} \end{aligned}$$

de forma y manera que:

$$e^{ax}y(x)=\frac{1}{a-1}e^{(a-1)x}+C\,.$$

Para $y(0)=2$:

$$y(0)=2=\frac{1}{a-1}+C\;\Rightarrow\;C=\frac{2a-3}{a-1}$$

Una solución particular será entonces:

$$y_p(x)=\frac{1}{a-1}\left[e^{-x}+(2a-3)e^{-ax}\right]\,.$$

Un par comentarios son pertinentes:

- Llamaremos al término $\mu(x)$ factor integrador de la ecuación diferencial. Este factor está relacionado con propiedades de simetría de la ecuación, pero en este nivel lo buscaremos tanteando.
- La solución general de esa ecuación diferencial toma la forma de $y(x)=e^{-x}+Ce^{-ax}$, donde el segundo de los términos $y_H(x)=Ce^{-ax}$ corresponde a la solución general para la ecuación homogénea asociada a esa ecuación diferencial: $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+ay(x)=0$. El otro término $y_I(x)=e^{-x}$ corresponde a la solución particular de la inhomogénea: $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+ay(x)=e^{-x}$.

Esto último será una propiedad general para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Resolveremos la ecuación homogénea y luego encontraremos una solución de la inhomogénea. La solución general será una suma de ambas soluciones.

En general, para la ecuación

$$y'+ay=g(x)\,,\quad \text{el factor integrador es: } \mu(x)=e^{ax}$$

y se tiene la siguiente solución general

$$y(x)=\underbrace{e^{-ax}\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}t\;g(t)e^{at}}_{\text{solución de la inhomogénea}}+\underbrace{Ce^{-ax}}_{\text{solución de la homogénea}}$$

la demostración la dejamos como ejercicio para el lector.

La figura 6.2 muestra el mapa de ruta para la resolución de las EDO lineales.

Borrador Preliminar

Figura 6.2: Mapa de las ecuaciones diferenciales explícitas

6.1.5. Método de las isoclinas

Este método se basa en la idea de campo y curvas integrales que vimos cuando estudiamos campos vectoriales. Se remonta a los orígenes de las ecuaciones diferenciales[2] La idea es muy simple, en general, una ecuación diferencial de primer orden (explícita respecto a la derivada) se podrá representar como:

$$y' = f(y, x)\,. \tag{6.1}$$

Ahora bien, el lado derecho de esa igualdad lo representa una función de dos variables, la cual tendrá un valor en cada punto (x, y). Ese valor (por la igualdad que representa la ecuación diferencial) será el valor de la derivada en ese punto y el valor de la derivada en un punto, no es otra cosa que la pendiente de la recta tangente a una curva en ese punto. Con eso, al construir una gráfica recordamos las curvas integrales de los campos vectoriales y reconstruimos las curvas solución a partir de sus tangentes.

Tenemos entonces que si $y = f(x)$ o $f(x, y) = 0$ define y como una función de x que satisface $y' = f(y, x)$ sobre un intervalo $a < x < b$, entonces el gráfico de esta función se denomina una curva integral y a la totalidad de esas curvas se le llama un campo de direcciones. A las curvas con la propiedad: $y' = f(x, y) =$ constante se le denominan isoclinas (igual pendiente).

Por ejemplo, si consideramos la EDO:

$$y' = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = Cx \leftarrow \text{curva integral.} \qquad (x \neq 0\,, y \neq 0)\,.$$

[2] Aparentemente es el mismo Johann Bernoulli fue quien por primera vez explicó la idea en su obra *Modus generalis construendi omnes aequationes diferenciales primi gradus, Acta Eruditorum, noviembre de 1694* Citado en Tournès, D. (2016). Résolution graphique des équations différentielles pag. 8.

Borrador Preliminar

Figura 6.3: Isoclinas para los ejemplos (a) y (b)

O para la ecuación

$$y' = -\frac{x}{y} \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = C^2 \leftarrow \text{curva integral.} \qquad (x \neq 0\,, y \neq 0)\,.$$

Cuando por un punto pasa más de una curva integral lo llamaremos un punto singular y para los puntos por donde pase una y solo una curva integral le llamaremos puntos ordinarios.

La Figura 6.3 contiene la representación gráfica para las tangentes de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a)} \quad y' = e^{-x} - \frac{1}{3}y \qquad\qquad \text{(b)} \quad y' = \frac{y}{x}$$

y la Figura 6.4 las de

$$\text{(c)} \quad y' = -\frac{x}{y} \qquad\qquad \text{(d)} \quad y' = 1 + xy$$

En el Cuadrante (a) de la Figura 6.3 se muestran las soluciones particulares para las condiciones iniciales: $y(0) = 0{,}75,\ 0{,}50,\ 0,\ -0{,}50,\ -0{,}75$. El Cuadrante (b) de la misma figura corresponde a las tangentes generadas a partir de la ecuación diferencial. Nótese que son curvas integrales radiales y que para el punto $x = 0$ no está definida la curva integral. En el Cuadrante (c), de la Figura 6.4, se representan las tangentes de la ecuación. Finalmente el Cuadrante (d) contiene las tangentes a la ecuación diferencial, en ella se han indicado las curvas integrales para las soluciones particulares correspondientes a las condiciones iniciales: $y(0) = 0{,}75,\ 0{,}50,\ 0,\ -0{,}50,\ -0{,}75$.

Es importante señalar que este método permite obtener las posibles soluciones de una ecuación diferencial no importa lo complicada que se

6.1.6. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Primero que todo, definamos qué son las funciones homogéneas de grado n.

Borrador Preliminar

Figura 6.4: Isoclinas para los ejemplos (c) y (d)

Definición: Diremos que una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n si

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{si } w = \dfrac{y}{x} \Rightarrow f(x,y) = x^n g(w) \\ \\ \text{si } w = \dfrac{x}{y} \Rightarrow f(x,y) = y^n h(w) \end{cases}$$

donde n es una constante y $t > 0$.

Las funciones homogéneas indican un comportamiento particular cuando cambiamos la escala de sus variables. Se utilizan con bastante frecuencia en hidrodinámica y termodinámica.

Por ejemplo, la siguiente función:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

es una función homogénea de grado 2, ya que:

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 \ln\left(\frac{ty}{tx}\right) \;\Rightarrow\; f(tx,ty) = t^2\left[x^2 + y^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] = t^2 f(x,y)\,.$$

Definición: Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\,, \tag{6.2}$$

será una ecuación diferencial con coeficientes homogéneos si:

$$Q(x,y) \text{ y } P(x,y) \text{ son homogéneas de grado } n\,.$$

Borrador preliminar

Teorema: Si los coeficientes $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ de una ecuación diferencial son homogéneos de orden n, entonces la siguiente sustitución: $y = ux$, convertirá la ecuación diferencial en una ecuación diferencial donde las variables son separables.

Demostración Como $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas de orden n (hipótesis) entonces:

$$P(x,y) = x^n f(u) \quad \text{y} \quad Q(x,y) = x^n g(u)\,,$$

sustituyendo en la ecuación diferencial (6.2):

$$\begin{aligned} x^n f(u)\mathrm{d}x + x^n g(u)(u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u) &= 0 \\ [f(u) + ug(u)]\,\mathrm{d}x + xg(u)\mathrm{d}u &= 0 \\ [f(u) + ug(u)]\,\frac{\mathrm{d}x}{x} + g(u)\mathrm{d}u &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{g(u)\mathrm{d}u}{f(u) + ug(u)} &= 0\,, \end{aligned}$$

donde $x \neq 0$ y $f(u) + ug(u) \neq 0$. ◀

El lector, debe demostrar que la sustitución $x = uy$ también convierte la ecuación diferencial en una de variables separables.

Nótese que exigir que $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ sean funciones homogéneas de grado n, equivale a imponer que

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \equiv F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{donde } F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ es homogéna de grado } 0\,,$$

con lo cual estamos diciendo que si los coeficientes $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ son funciones homogéneas de grado n, la ecuación diferencial es invariante de escala.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial no linea

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Esto es

$$\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} P(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + ty &= t\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right) \\ Q(tx,ty) = -tx \end{cases}$$

los coeficientes son funciones homogéneas de grado 1 y por lo tanto al hacer $y = ux$ tendremos

$$x\left(\sqrt{1 - u^2} + u\right)\mathrm{d}x - x(u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u) = 0 \;\Rightarrow\; \pm\sqrt{1 - u^2}\mathrm{d}x - x\mathrm{d}u = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \pm\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}}\,.$$

Notemos que: $u \neq \pm 1$ y $x \neq 0$. Integramos y, finalmente, llegamos a

$$\ln|x| = \operatorname{arcsen}(u) + C \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) + C\,, \quad \text{para } \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \text{ con } x > 0$$

$$-\ln|-x| = \operatorname{arcsen}(u) + C \quad \Rightarrow \quad -\ln|-x| = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right) + C\,, \quad \text{para } \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \text{ con } x < 0\,.$$

En este caso tenemos que $u = \left|\frac{y}{x}\right| = 1 \;\Rightarrow\; y = \pm x$ también es solución.

Borrador Preliminar

6.1.7. Ecuaciones isóbaras

Las ecuaciones isóbaras generalizan a las ecuaciones homogéneas por cuanto los coeficientes de la ecuación $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ no son funciones homogéneas del mismo grado y se busca una transformación que convierta la ecuación en homogénea. Es decir, si la dimensionalidad en potencias de y es la misma que la dimensionalidad en potencias de x. Diremos que una ecuación diferencial es isóbara si cumple con

$$\begin{array}{rcl} P(x,y)\mathrm{d}x & + & Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \\ & \Downarrow & \\ Q(tx,t^m y) & \to & t^n P(x,y) \\ P(tx,t^m y) & \to & t^{n-m+1} Q(x,y) \end{array}$$

y el cambio de variable que se impone es $y = vx^m$. Con lo cual habrá que estudiar si es posible "balancear" el orden de las dimensionalidades de variables y funciones.

Tratemos con un ejemplo para ilustrar las ecuaciones isóbaras. Consideremos la ecuación

$$2xyy' + y^2 + \frac{2}{x} = 0\,, \quad \text{entonces,}$$

$$\left(y^2 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lcl} x \to x & \leftrightarrow & \mathrm{d}x = \mathrm{d}x \\ y \to z^m & \leftrightarrow & \mathrm{d}y = mz^{m-1}\mathrm{d}z \end{array} \right.$$

En la contabilidad de los exponentes de x aporta un peso de 1 mientras que y aporta un peso de m. La intención es balancear los términos para que la ecuación sea homogénea de grado n. Esto es

$$\begin{array}{rcl} \left(z^{2m} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x & + & 2xz^m mz^{m-1}\mathrm{d}z = 0 \\ \left(z^{2m} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x & + & 2mxz^{-1}z^{2m}\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = vx^m \Rightarrow y = \frac{v}{\sqrt{x}} \end{array}$$

El exponente del primer término es $2m$, del segundo -1 del tercero $2m$. Al balancear todos los exponentes tendremos $2m = -1$, con lo cual $m = -\frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{v^2}{x} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x + 2x\frac{v}{\sqrt{x}}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{v}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right) = 0 \Rightarrow v\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$$

entonces al integrar y devolver el cambio $v = y\sqrt{x}$ tendremos

$$\int \mathrm{d}v\; v + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \ln|x| = c \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 x + \ln|x| = c\,.$$

6.1.8. Ecuaciones diferenciales exactas

El segundo grupo de estrategias apunta a escribir una ecuación diferencial como una derivada total de un conjunto de funciones. Uno se ayuda en una posible función que pueda acomodar los términos de la ecuación. Esa función se denomina factor integrador, para una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)y(x) = g(x)\,,$$

al multiplicar a ambos lados por $\mu(x)$ resulta

$$\mu(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \mu(x)f(x)y(x) = \mu(x)g(x)\,,$$

Borrador Preliminar

por otro lado, tenemos y queremos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mu(x)y(x)] \equiv \mu(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}y(x) = \mu(x)g(x)\,,$$

para que esas dos últimas ecuaciones sean equivalentes los coeficientes de $y(x)$ tienen que ser iguales, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} = \mu(x)f(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} = \int \mathrm{d}x\; f(x) \;\Rightarrow\; \mu(x) = e^{\int \mathrm{d}x\; f(x)}$$

Con lo cual hemos demostrado que para una ecuación lineal de primer orden, siempre es posible encontrar un factor integrador $\mu(x)$ tal que la ecuación diferencial pueda ser expresada como una derivada total del factor integrador y la función incógnita.

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)y(x) = g(x) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)g(x) \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mathrm{d}x\,\mu(x)g(x) + C\right]$$

donde $\mu(x) = e^{\int \mathrm{d}x\; f(x)}$.

Definición: Una ecuación diferencial de la forma

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\,,$$

se llama una ecuación diferencial exacta si esta es el diferencial total de alguna función $f(x,y)$, es decir, si:

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \text{y} \quad Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,.$$

Teorema: Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\,,$$

sea exacta es que:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\,,$$

donde las funciones: $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial_y P(x,y)$, $\partial_x Q(x,y)$ deben existir y ser contínuas.

Demostración Vamos a probar que si: $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$, entonces: $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y)$.

Como la ecuación es exacta, por la definición anterior se tiene que:

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \wedge \quad Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,,$$

y como suponemos que $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial_y P(x,y)$, $\partial_x Q(x,y)$ existen y son contínuas:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \quad \exists\,,$$

y como:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,,$$

Borrador Preliminar

por lo tanto tenemos que una condición necesaria es:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\,.$$

Por otro lado, probemos que si: $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y)$ entonces: $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ es exacta.

Así, para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$\mathrm{d}\left[f(x,y)\right] = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\left[f(x,y)\right] = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

donde $f(x,y)$ será la función a determinar.

Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\[2ex] Q(x,y) \Leftrightarrow \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\left[f(x,y)\right] = 0$$

Si esto se cumple entonces, podremos encontrar la función $f(x,y)$ integrando respecto a cualquiera de las variables (ahora consideradas independientes ambas)

$$P(x,y) \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Leftrightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(u,y)\mathrm{d}u + S(y) \Rightarrow Q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(u,y)\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y}$$

entonces

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(u,y)}{\partial y}\mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y} \equiv \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(v,y)}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y} = Q(v,y)\big|_{v=x_0}^{v=x} + \frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y}$$

con lo cual nos queda finalmente otra ecuación diferencial para encontrar $S(y)$ y con ella $f(x,y)$. Esto es

$$\frac{\mathrm{d}S(y)}{\mathrm{d}y} = Q(x_0,y) \;\Rightarrow\; S(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,w)\mathrm{d}w \;\Rightarrow\; f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(u,y)\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,w)\mathrm{d}w = C\,. \;\blacktriangleleft$$

Hay que hacer notar que los segmentos de línea que unen el punto (x_0,y_0) con los puntos genéricos $(x,y_0) \wedge (x_0,y)$ pertenecen al entorno de (x_0,y_0). Este tipo de entornos también se denomina *multiplemente conexo*.

Notemos que además de demostrar el teorema también encontramos una familia 1-paramétrica de soluciones:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(u,y)\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,w)\mathrm{d}w = C\,.$$

Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$[x\mathrm{sen}(y) - y^2]y' = \cos(y)\,.$$

Entonces:

$$y'\left[x\mathrm{sen}(y) - y^2\right] = \cos(y) \;\Leftrightarrow\; \cos(y)\,\mathrm{d}x - \left(x\mathrm{sen}(y) - y^2\right)\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{lcl} P(x,y) & = & \cos(y) \\[2ex] Q(x,y) & = & -\left(x\mathrm{sen}(y) - y^2\right) \end{array}\right.$$

Borrador Preliminar

y verificamos que esta ecuación diferencial es exacta, ya que

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\operatorname{sen}(y) \;\Rightarrow\; f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(u,y)\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} Q(x,w)\mathrm{d}w = C$$

con lo cual, si particularizamos el punto $(x_0, y_0) \equiv (0,0)$ tendremos que

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \cos(y)\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} w^2\mathrm{d}w = C \quad \Rightarrow x\cos(y) + \frac{y^3}{3} = C$$

6.1.9. Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1

Una ecuación diferencial lineal de orden 1

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)y(x) = g(x)\,,$$

no es exacta, ya que:

$$[f(x)y(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} P(x,y) &= f(x)y(x) - g(x) \\ Q(x,y) &= 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

pero como ya vimos, si $\mu(x)$ es un factor integrador, entonces:

$$\mu(x)\,[f(x)y(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x + \mu(x)\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} P(x,y) &= \mu(x)\,[f(x)y(x) - g(x)] \\ Q(x,y) &= \mu(x) \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \partial_x \mu(x) &= \partial_y\{\mu(x)\,[f(x)y(x) - g(x)]\} \\ \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} &= \mu(x)f(x) \\ \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} &= f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} = \int f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int f(x)\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Esto significa que para las ecuaciones lineales de orden 1 se tiene

$$e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\,[f(x)y(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x + e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} P(x,y) &= e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\,[f(x)y(x) - g(x)] \\ Q(x,y) &= e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \end{cases}$$

por lo tanto ahora es una ecuación exacta, ya que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &\Rightarrow \partial_y\left[e^{\int f(x)\mathrm{d}x} f(x)y(x) - e^{\int f(x)\mathrm{d}x} g(x)\right] = f(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &\Rightarrow \partial_x\left[e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\right] = f(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Volviendo a la ecuación original multiplicada por el factor integrador que la convierte en exacta, podemos escribir:

$$\begin{aligned} e^{\int f(x)\mathrm{d}x} f(x)y(x)\mathrm{d}x - e^{\int f(x)\mathrm{d}x} g(x)\mathrm{d}x + e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y &= 0 \\ e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y + e^{\int f(x)\mathrm{d}x} f(x)y(x)\mathrm{d}x &= e^{\int f(x)\mathrm{d}x} g(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}\left[y(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\right] &= e^{\int f(x)\mathrm{d}x} g(x)\mathrm{d}x \\ y(x)e^{\int f(x)\mathrm{d}x} &= \int e^{\int f(x)\mathrm{d}x} g(x)\mathrm{d}x + C\,. \end{aligned}$$

Llegamos entonces a la fórmula que nos dará la solución general para cualquier ecuación diferencial lineal de orden 1.

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int f(x)\mathrm{d}x}} \int e^{\int f(x)\mathrm{d}x} g(x)\mathrm{d}x + \frac{C}{e^{\int f(x)\mathrm{d}x}}\,. \tag{6.3}$$

En realidad, lo anterior se puede formalizar con el siguiente teorema para el problema de valores iniciales. Consultar la bibliografía recomendada para estudiar su demostración

Teorema: Sean las funciones F y $\partial_y F$ funciones continuas en algún intervalo $a < x < b$ y $c < y < d$ que contienen al punto (x_0, y_0). Entonces, en algún intervalo $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ contenido en $a < x < b$, existe una única solución $y = y(x)$ del problema de valores iniciales:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = F(x, y)\,, \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0\,.$$

Por ejemplo, se la ecuación

$$y' - 2xy = e^{x^2}\,.$$

Aquí: $f(x) = -2x$ y $g(x) = e^{x^2}$. Por lo tanto, el factor integrador es:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\mathrm{d}x} = e^{\int -2x\mathrm{d}x} = e^{-x^2}\,.$$

y la solución viene a ser:

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x^2}} \int e^{-x^2} e^{x^2}\mathrm{d}x + \frac{C}{e^{-x^2}} \;=\; e^{x^2}\,(x + C)\,.$$

6.1.10. Ecuaciones diferenciales no lineales y el factor integrador

Del mismo modo, y con la misma idea, podemos incorporar el factor integrador $\mu(x, y)$ para extender la idea a ecuaciones que no sean, necesariamente lineales. Así para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$\mathrm{d}\left[f(x, y)\right] = 0 \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad \mu(x, y)Q(x, y)\mathrm{d}y + \mu(x, y)P(x, y)\mathrm{d}x = 0$$

es decir

$$\mathrm{d}[f(x, y)] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\mathrm{d}y = \mu(x, y)Q(x, y)\mathrm{d}y + \mu(x, y)P(x, y)\mathrm{d}x = 0$$

Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es:

$$\left.\begin{aligned} \mu(x, y)P(x, y) &\Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \mu(x, y)Q(x, y) &\Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x, y)P(x, y)\right] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x, y)Q(x, y)\right]$$

Borrador Preliminar

y, obviamente, esta condición de integrabilidad dependerá del $\mu(x,y)$ que propongamos. Veamos algunos casos:

1. Si $\mu(x,y)=\mu(x)$ entonces la condición es

$$\mu(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}Q(x,y)+\mu(x)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{Q(x,y)}\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right]$$

con lo cual, si se cumple que

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right]=f(x)=\frac{1}{\mu(x)}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}\ \Rightarrow\ \mu(x)=e^{\int \mathrm{d}x\, f(x)}$$

podremos determinar el factor integrador.

Una vez identificado procedemos a integrar, formalmente $f(x,y)$

$$f(x,y)=\mu(x)\int_{y_0}^{y}Q(x,u)\mathrm{d}u+S(x)\ \Rightarrow\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\mu(x)P(x,y)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)\int_{y_0}^{y}Q(x,u)\mathrm{d}u+S(x)\right]$$

y finalmente, una vez más

$$\mu(x)P(x,y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial\mu(x)Q(x,u)}{\partial x}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}\ \Rightarrow\ \mu(x)P(x,y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial\mu(x,u)P(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}$$

con lo cual

$$S(x)=\int_{x_0}^{x}\mu(u,y_0)P(u,y_0)\mathrm{d}u\ \Rightarrow\ f(x,y)=\mu(x)\int_{y_0}^{y}Q(x,u)\mathrm{d}u+\int_{x_0}^{x}\mu(u,y_0)P(u,y_0)\mathrm{d}u+C\,.$$

Por ejemplo, consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\cos(y)y'=-e^{x}+\mathrm{sen}(y)\,.$$

Esta ecuación no es exacta, ya que:

$$[e^{x}-\mathrm{sen}(y)]\,\mathrm{d}x+\cos(y)\mathrm{d}y=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}P(x,y) &= e^{x}-\mathrm{sen}(y)\\ Q(x,y) &= cos(y)\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0\neq\frac{\partial P}{\partial y}=-\cos(y)\,.$$

Podemos ver que el arreglo:

$$f(x)=\frac{1}{Q(x,y)}\left[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right]=\frac{-\cos(y)-0}{\cos(y)}=-1\,,$$

entonces, el factor integrante es exacta:

$$\mu(x)=e^{\int \mathrm{d}x\, f(x)}=e^{-\int \mathrm{d}x}=e^{-x}\,.$$

Por lo tanto, la ecuación

$$e^{-x}\,[e^{x}-\mathrm{sen}(y)]\,\mathrm{d}x+e^{-x}\cos(y)\mathrm{d}y=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}P(x,y) &= 1-e^{-x}\mathrm{sen}(y)\\ Q(x,y) &= e^{-x}cos(y)\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-e^{-x}\cos(y)\,.$$

Queda como ejercicio resolver esta ecuación diferencial.

Borrador Preliminar

2. Si $\mu(x,y) = \mu(y)$ entonces la condición queda como

$$\frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}y}P(x,y) + \mu(y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \mu(y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\mu(y)}\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{P(x,y)}\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right],$$

con lo cual si se cumple que

$$\frac{1}{P(x,y)}\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] = f(y) = \frac{1}{\mu(y)}\frac{\mathrm{d}\mu(y)}{\mathrm{d}y} \;\Rightarrow\; \mu(y) = e^{\int \mathrm{d}y\, f(y)}$$

y podremos determinar el factor integrador.

Es claro que otras cambios de variables apropiados, como $\mu = \mu(z)$ donde $z = xy$, pueden hacer posible encontrar un factor integrante.

6.1.11. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli, formulada por James Bernoulli[3] y resuelta por su hermano Johann Bernoulli, se caracteriza por tener la forma:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + y(x)f(x) = y(x)^n g(x)\,. \tag{6.4}$$

Es fácil darse cuenta de que la ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación con variables separadas cuando $n = 0$ y cuando $n = 1$ se trata de una ecuación de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y(x)\left[g(x) - f(x)\right].$$

la cual también es de variables separables. Entonces, es la presencia del término y^n lo que hace que la ecuación no sea lineal.

Leibniz, en 1696, indicó que el cambio de variable $z = y^{1-n}$ convierte la ecuación (6.4) en una ecuación lineal.

Consideremos entonces $n \neq 1$, si multiplicamos ambos lados de (6.4) por $(1-n)y^{-n}$ resulta:

$$\begin{aligned}
(1-n)y^{-n}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yf(x)\right] &= (1-n)y^{-n}y^n g(x) \\
(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1-n)f(x)y^{1-n} &= (1-n)g(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y^{1-n}\right] + (1-n)f(x)y^{1-n} &= (1-n)g(x)\,,
\end{aligned}$$

si se hace el cambio de variable $z = y^{1-n}$ se tiene

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)f(x)\,z = (1-n)g(x)\,. \tag{6.5}$$

La ecuación (6.5) es una ecuación diferencial lineal, la cual ya sabemos resolver.

Ejemplo, sea la ecuación:

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}\,, \qquad \text{con } y \neq 0\,.$$

[3] James Bernoulli (1654-1705), fue un matemático y científico suizo, formaba parte de la gran familia Bernoulli. En 1690 se convirtió en la primera persona en desarrollar la técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables.

Borrador Preliminar

Esta ecuación es de la forma (6.4) con $n = -3$. Si multiplicamos por $4y^3$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\left(4y^3\right) y' + \left(4y^3\right) xy &= \left(4y^3\right) \frac{x}{y^3} \\
\left(4y^3\right) y' + 4xy^4 &= 4x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y^4\right] + 4xy^4 &= 4x
\end{aligned}$$

con el cambio de variable $z = y^4$, resulta

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 4xz = 4x\,,$$

la cual es una ecuación diferencial lineal con factor integrador

$$\mu(x) = e^{\int \mathrm{d}x\ f(x)} = e^{\int 4x\mathrm{d}x} = e^{2x^2}\,,$$

Por lo tanto, la solución vendrá dada por

$$y(x) = \frac{1}{e^{2x^2}} \int e^{2x^2}(4x)\mathrm{d}x + \frac{C}{e^{2x^2}} = \frac{1}{e^{2x^2}}\left[e^{2x^2}\right] + \frac{C}{e^{2x^2}} = 1 + Ce^{-2x^2}\,.$$

6.1.12. Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati[4] es conocida como una ecuación diferencial no lineal que tiene la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = A(x) + B(x)y(x) + C(x)y(x)^2\,, \quad C(x) \neq 0\,. \tag{6.6}$$

Esta ecuación fue estudiada por muchos matemáticos, entre ellos los propios integrantes de la familia Bernoulli. Daniel Bernoulli, hijo de John y sobrino de James Bernoulli, publicó su solución en 1724, luego de mantenerla oculta por mucho tiempo en modo de anagrama.

Podemos seguir las recomendaciones de Euler[5] quien propuso que una sustitución del tipo:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\,, \tag{6.7}$$

donde $y_1(x)$ es una solución particular de (6.6), convierte la ecuación de Riccati en una ecuación lineal para $z(x)$. Al sustituir (6.7) en (6.6) resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= A(x) + B(x)\left[y_1 + \frac{1}{z}\right] + C(x)\left[y_1 + \frac{1}{z}\right]^2 \\
z^2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \left[A(x) + B(x)y_1 + C(x)y_1^2\right] z^2 + \left[2\,C(x)y_1 + B(x)\right] z + C(x) \\
-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \underbrace{\left[A(x) + B(x)y_1 + C(x)y_1^2 - \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right]}_{=0} z^2 + \left[2\,C(x)y_1 + B(x)\right] z + C(x)
\end{aligned}$$

[4] El conde Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) fue un matemático veneciano, que estudió detalladamente la hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana.

[5] Leonhard Paul Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un reputado matemático y físico, y es considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia.

Borrador Preliminar

por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\left[2\,C(x)y_1 + B(x)\right]z - C(x)\,. \tag{6.8}$$

También podemos hacer la siguiente sustitución

$$y(x) = y_1(x) + u(x) \tag{6.9}$$

donde $y_1(x)$ es una solución particular de (6.6). Esto es, al sustituir (6.9) en (6.6) resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= A(x) + B(x)\left[y_1 + u\right] + C(x)\left[y_1^2 + 2y_1u + u^2\right] \\
\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= A(x) + B(x)y_1 + C(x)y_1^2 + \left[B(x) + 2C(x)y_1\right]u + C(x)u^2 \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \left[B(x) + 2C(x)y_1\right]u + C(x)u^2\,,
\end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left[B(x) + 2C(x)y_1\right]u = C(x)u^2\,, \tag{6.10}$$

que no es más que la ecuación de Bernoulli (6.4) con $f(x) = -\left[B(x) + 2C(x)y_1\right]$, $g(x) = C(x)$ y $n = 2$.

Como un ejemplo, resolvamos la siguiente ecuación de Riccati

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}\,,$$

conociendo la solución particular $y_1 = 1/x$.

En lugar de hacer todo el desarrollo anterior, podemos reconocer de manera fácil que:

$$A(x) = -\frac{2}{x^2}\,, \quad B(x) = 0\,, \quad C(x) = 1\,.$$

Tenemos entonces dos posibilidades: la primera es utilizar la ecuación lineal (6.8)

$$\frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x} = -\left[\frac{2}{x}\right]z(x) - 1 \quad \Rightarrow \quad z(x) = -\frac{1}{3}\,x + \frac{c}{x^2}\,.$$

por lo tanto, al volver a la variable $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{1}{3}\,x + \frac{c}{x^2}} = -\frac{2\,x^3 + 3\,c}{x\,(x^3 - 3\,c)}\,.$$

La segunda, es resolver la ecuación de Bernoulli (6.10) con $n = 2$

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \left[\frac{2}{x}\right]u(x) = u(x)^2 \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{3x^2}{x^3 - 3\,c}\,,$$

y en función de $y(x)$

$$y(x) = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 - 3\,c} = -\frac{2\,x^3 + 3\,c}{x\,(x^3 - 3\,c)}\,.$$

Borrador Preliminar

6.1.13. Un tipo muy especial de ecuación diferencial no lineal

Vamos a estudiar la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{y\left(Ax^p y^q + Bx^r y^s\right)}{x\left(Cx^p y^q + Dx^r y^s\right)}\,,$$

donde A, B, C, D son constantes.

La ecuación diferencial puede ser escrita como:

$$y\left(Ax^p y^q + Bx^r y^s\right)\mathrm{d}x + x\left(Cx^p y^q + Dx^r y^s\right)\mathrm{d}y = 0\,.$$

Y se puede demostrar que el factor integrante será de la forma

$$\mu(x,y) = x^a y^b\,,$$

donde a y b son constantes a determinar. Veamos un ejemplo.

Veamos un ejemplo:

$$y\left(2x^2y^3+3\right)\mathrm{d}x + x\left(x^2y^3-1\right)\mathrm{d}y = 0\,,$$

entonces:

$$\begin{cases} P(x,y) &= y\left(2x^2y^3+3\right) \\ Q(x,y) &= x\left(x^2y^3-1\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2y^3 - 1 \neq \frac{\partial P}{\partial y} = 8x^2y^3 + 3$$

La ecuación no es exacta.

Si $\mu(x,y) = x^a y^b$ es un factor integrante, resulta que:

$$\begin{aligned} \left(x^a y^b\right)\left(2x^2y^4+3y\right)\mathrm{d}x &+ \left(x^a y^b\right)\left(x^3y^3 - x\right)\mathrm{d}y = 0 \\ \left(2x^{2+a}y^{4+b} + 3x^a y^{1+b}\right)\mathrm{d}x &+ \left(x^{3+a}y^{3+b} - x^{1+a}y^b\right)\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

y será exacta si $\partial_y P = \partial_x Q$, esto es

$$\partial_y P = 2x^{2+a}(4+b)y^{3+b} + 3x^a(1+b)y^b = (3+a)x^{2+a}y^{3+b} - (1+a)x^a y^b = \partial_x Q\,,$$

si multiplicamos por $1/(x^a y^b)$ la ecuación anterior queda como:

$$2(4+b)x^2y^3 + 3(1+b) = (3+a)x^2y^3 - (1+a)\,,$$

igualando coeficientes resulta

$$\begin{cases} 8+2b &= 3+a \\ 3+3b &= -1-a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{5}\,, \quad b = -\frac{9}{5}\,.$$

Por lo tanto el factor integrador es $\mu(x,y) = x^{7/5}y^{-9/5}$.

Queda como ejercicio verificar que con este factor integrador la ecuación original es exacta.

Borrador Preliminar

6.1.14. Solución paramétrica: ecuaciones no resueltas respecto a la derivada

Podemos preguntarnos sobre los casos donde no es posible despejar y' de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden: $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$.

Varias situaciones pueden aparecer:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F}[y'(x)] & = & 0 \\ \mathcal{F}[x, y'(x)] & = & 0 \\ \mathcal{F}[y(x), y'(x)] & = & 0 \\ \mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] & = & 0 \end{array} \right.$$

Veamos todos estos casos:

1. $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$

   Como $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$ no contiene ni a x ni a $y(x)$, entonces sí existe al menos una raíz κ_i de la ecuación $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$ entonces

   $$y' = \kappa_i \quad \Rightarrow \quad y(x) = \kappa_i x + C \quad \Rightarrow \quad \kappa_i = \frac{y(x) - C}{x}.$$

   Por lo tanto

   $$\mathcal{F}\left[\frac{y(x) - C}{x}\right] = 0\,,$$

   es la integral de la ecuación diferencial.

   Ejemplo: la solución de la ecuación

   $$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0\,,$$

   es

   $$\left(\frac{y(x) - C}{x}\right)^7 - \left(\frac{y(x) - C}{x}\right)^5 + \frac{y(x) - C}{x} + 3 = 0$$

2. $\mathcal{F}[x, y'(x)] = 0$

   Si se puede despejar x, entones podemos hacer los siguientes cambios de variable

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f(t) \\ y' & = & g(t) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} \mathrm{d}x & = & f'(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y & = & g(t)\,\mathrm{d}x \end{array} \Rightarrow \mathrm{d}y = g(t) f'(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y(x) & = & \int g(t) f'(t)\,\mathrm{d}t + C \\ x & = & f(t) \end{array} \right.$$

   Este tipo de soluciones se conocen como soluciones parametrizadas.

   Ejemplo: la ecuación

   $$(y')^3 - y' = 1 + x\,.$$

   Hacemos entonces los siguientes cambios de variables

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t^3 - t - 1 \\ y' & = & t \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} \mathrm{d}x & = & (3t^2 - 1)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y & = & t\,\mathrm{d}x \end{array} \Rightarrow \mathrm{d}y = t(3t^2 - 1)\,\mathrm{d}t$$

Borrador Preliminar

integrando:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int \mathrm{d}y & = & \int t(3t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ x & = & t^3-t-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y(x) & = & \frac{t^2}{4}(3t^2-2)+C \\ x & = & t^3-t-1 \end{array}\right.$$

3. Caso: $\mathcal{F}[y(x), y'(x)] = 0$

   a) Se puede despejar $y(x)$, es decir: $y = f(y')$. Entonces hacemos los siguientes cambios de variables:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & z \\ y & = & f(z) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y & = & z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y & = & f'(z)\,z'\,\mathrm{d}x \end{array} \Rightarrow z(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

   Por lo tanto, la solución paramétrica será

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{z} + C \\ y & = & f(z) \end{array}\right.$$

   Ejemplo: la ecuación

$$y = a(y')^2 + b(y')^3\,, \quad a \text{ y } b = \text{constantes}$$

   Tenemos entonces:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & z \\ y & = & az^2+bz^3 \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{d}x = (2az+3bz^2)\,\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

   la solución paramétrica es :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \int (2a+3bz)\,\mathrm{d}z + C \\ y & = & az^2+bz^3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2az+\frac{3}{2}bz^2+C \\ y & = & az^2+bz^3 \end{array}\right. .$$

   En el caso de que queramos obtener $y(x)$ podemos intentar despejar z de la primera ecuación, en este caso esto es posible

$$z(x) = -\frac{1}{3b}\left[2\,a \pm \sqrt{4\,a^2+6\,b(x-C)}\right]\,,$$

   y sustituir en la segunda:

$$y(x) = \frac{1}{27b^2}\left(2\,a \pm \sqrt{4\,a^2+6\,b(x-C)}\right)^2\left(a \mp \sqrt{4\,a^2+6\,b(x-C)}\right).$$

   b) No se puede despejar y' ni y de $\mathcal{F}[y(x), y'(x)] = 0$, pero puede existir un parámetro tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & f(t) \\ y' & = & g(t) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y & = & f'(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y & = & g(t)\,\mathrm{d}x \end{array} \Rightarrow f'(t)\,\mathrm{d}t = g(t)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{f'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

   La solución paramétrica es entonces la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int \frac{f'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t & = & x+C \\ y & = & f(t) \end{array}\right. .$$

Borrador Preliminar

Ejemplo: la ecuación

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1\,,$$

tenemos entonces:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \cos^3(t) \\ y' & = & \mathrm{sen}^3(t) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad -\frac{3\cos^2(t)\mathrm{sen}(t)}{\mathrm{sen}^3(t)}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

Por lo tanto

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3\int \cot^2(t)\mathrm{d}t & = & x + C \\ y & = & \cos^3(t) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3\left[\cot(t) + t\right] + C \\ y & = & \cos^3(t) \end{array}\right.$$

4. Caso: $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$

   a) Si se puede despejar la función y, entonces $y = \mathcal{G}(x, y')$. En este caso consideramos la siguiente sustitución: $y' = z(x)$

   $$y = \mathcal{G}(x, y') = \mathcal{G}(x, z) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \partial_x\mathcal{G}\,\mathrm{d}x + \partial_z\mathcal{G}\,\mathrm{d}z = z\,\mathrm{d}x\,,$$

   por lo tanto:

   $$z = \partial_x\mathcal{G} + \partial_z\mathcal{G}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \phi(x, z, C) & = & 0 \\ y & = & \mathcal{G}(x, z) \end{array}\right.$$

   b) Si se puede despejar a la variable x, entonces $x = \mathcal{H}(y, y')$. Como en el caso anterior tenemos la siguiente sustitución: $y' = z(x)$

   $$x = \mathcal{H}(y, y') = \mathcal{H}(y, z) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \partial_y\mathcal{H}\,\mathrm{d}y + \partial_z\mathcal{H}\,\mathrm{d}z\,.$$

   Si multiplicamos por z, se tiene

   $$z\mathrm{d}x = z\left[\partial_y\mathcal{H}\,\mathrm{d}y + \partial_z\mathcal{H}\,\mathrm{d}z\right]$$

   por lo tanto:

   $$\mathrm{d}y = z\left[\partial_y\mathcal{H}\,\mathrm{d}y + \partial_z\mathcal{H}\,\mathrm{d}z\right] \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \phi(y, z, C) & = & 0 \\ x & = & \mathcal{H}(x, z) \end{array}\right.$$

   Aquí podemos considerar dos tipos de ecuaciones bien conocidas:

   $$y = xf(y') + g(y') \quad \rightarrow \quad \text{Ecuac. de Lagrange}$$

   y un caso particular de la ecuación de Lagrange:

   $$y = xy' + g(y') \quad \rightarrow \quad \text{Ecuac. de Clairaut}$$

   En cuanto a la ecuación de Clairaut podemos notar que al reemplazar y' por el parámetro m, lo que se obtiene es la ecuación de la línea recta

   $$y = mx + f(m)\,.$$

Borrador Preliminar

Por ejemplo, la solución de la ecuación de Clairaut: $y = xy' + (y')^2$ es la familia de rectas con pendiente m, es decir: $y(x) = mx + m^2$.

Ejemplo: Sea la ecuación

$$y = x(y')^2 - (y')^{-1} \quad \Rightarrow \quad y = \mathcal{G}(x, y')\,.$$

Tenemos entonces:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & z \\ \\ y & = & xz^2 - z^{-1} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y & = & z\,\mathrm{d}x \\ \\ \mathrm{d}y & = & z^2\,\mathrm{d}x + \left(2xz + \frac{1}{z^2}\right)\,\mathrm{d}z \end{array} \Rightarrow z\,\mathrm{d}x = z^2\,\mathrm{d}x + \left(2xz + \frac{1}{z^2}\right)\,\mathrm{d}z$$

es decir:

$$\begin{array}{rcl} z & = & z^2 + \left(2xz + \dfrac{1}{z^2}\right)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ 1 & = & z + \left(2x + \dfrac{1}{z^3}\right)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} & = & z\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + 2x + \dfrac{1}{z^3} \\ (z-1)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + 2x & = & -\dfrac{1}{z^3} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \dfrac{2x}{z-1} & = & -\dfrac{1}{z^3(z-1)}\,. \end{array}$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial lineal, por lo tanto, la sabemos resolver

$$\begin{array}{rcl} x(z) & = & \dfrac{1}{e^{\int f(z)\mathrm{d}z}}\displaystyle\int e^{\int f(z)\mathrm{d}z} g(z)\mathrm{d}z + \dfrac{C}{e^{\int f(z)\mathrm{d}z}} \\ & = & \dfrac{1}{e^{\int \frac{2}{z-1}\mathrm{d}z}}\displaystyle\int e^{\int \frac{2x}{z-1}\mathrm{d}z}\left[-\dfrac{1}{z^3(z-1)}\right]\mathrm{d}z + \dfrac{C}{e^{\int \frac{2x}{z-1}\mathrm{d}z}} \\ & = & -\dfrac{1}{(z-1)^2}\displaystyle\int \dfrac{z-1}{z^3}\,\mathrm{d}z + \dfrac{C}{(z-1)^2} \\ & = & \dfrac{2\,Cz^2 + 2\,z - 1}{2\,(z-1)^2\,z^2} \end{array}$$

La solución, en forma paramétrica, a la ecuación diferencial es entonces

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(z) & = & \dfrac{2\,z(Cz+1) - 1}{2\,(z-1)^2\,z^2} \\ \\ y(x) & = & xz^2 - z^{-1} \end{array}\right. .$$

6.1.15. El método de las envolventes

Hemos descrito varios métodos para obtener una familia 1-paramétrica de soluciones a la ecuación $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$. Si ésta familia de soluciones $f(x, y, C) = 0$ no es una solución general, entonces el problema de encontrar una solución particular puede llegar a ser complejo. Sin embargo, en algunos casos, existe un método para encontrar soluciones particulares de una ecuación diferencial de primer orden, este método tiene que ver con el concepto de *envolvente* de una familia de curvas. Primero veamos que significa una envolvente de manera conceptual

Borrador Preliminar

Una curva Γ se denomina una envolvente de una familia de curvas $f(x, y, C) = 0$ si se cumplen las siguientes dos propiedades

1. En cada punto de la envolvente existe un único miembro de la familia tangente al punto.
2. Todo miembro de la familia de curvas es tangente a la envolvente en un punto distinto de la envolvente.

El siguiente teorema nos suministra una condición suficiente para que exista una envolvente de la familia de curvas $f(x, y, C) = 0$.

Teorema: Si la función $f(x, y, C) = 0$ es una función dos veces diferenciable para un conjunto de valores x, y, C, y si para este conjunto de valores se cumple que:

$$f(x, y, C) = 0\,, \qquad \partial_c f(x, y, C) = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_{cx} f & \partial_{cy} f \end{vmatrix} \neq 0\,, \qquad \partial_{cc} f \neq 0\,,$$

entonces, la familia de curvas $f(x, y, C) = 0$ tiene una envolvente cuya ecuación paramétrica estará dada por:

$$\begin{cases} f(x, y, C) & = & 0 \\ \partial_c f(x, y, C) & = & 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, vamos a ver si la siguiente familia de curvas

$$y = \cos(x + C)\,,$$

posee una envolvente.

Tenemos entonces:

$$f(x, y, C) = y - \cos(x + C) \;\Rightarrow\; \partial_c[y - \cos(x + C)] = \operatorname{sen}(x + C) = 0 \;\Rightarrow\; x + C = \pi/2$$

por otro lado

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x + C) & 1 \\ \cos(x + C) & 0 \end{vmatrix} = -\cos(x + C)\,, \qquad \partial_{cc} f = \cos(x + C)\,,$$

La función $\cos(x + C)$ es diferente de cero si $x + C \neq \pi/2$, por lo tanto, todos los valores que excluyan a $x + C = \pi/2$ y que satisfacen la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} y - \cos(x + C) & = & 0 \\ \operatorname{sen}(x + C) & = & 0 \end{cases}$$

conforman una envolvente a la familia $y = \cos(x + C)$.

Podemos notar lo siguiente, si tomamos la primera de estas curvas: $y = \cos(x + C)$, la elevamos al cuadrado y sumamos con la segunda también elevada al cuadrado, resulta:

$$y^2 = \cos^2(x + C) + \operatorname{sen}^2(x + C) = 1 \;\Rightarrow\; y = \pm 1\,.$$

Las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son las envolventes de $y = \cos(x + C)$.

Borrador Preliminar

Envolventes y soluciones

Sea $f(x, y, C) = 0$ una familia 1-paramétrica de soluciones a la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Para esta familia puede existir o no una envolvente, si la envolvente existe, entonces se tiene que en cada punto de la envolvente hay un miembro de la familia de soluciones tangente a la envolvente. Esto significa que la curva envolvente en cada uno de sus puntos tiene la misma pendiente y' que las curvas integrales, y por lo tanto, cada envolvente satisface la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$.

Podemos decir entonces, que una envolvente de una familia de soluciones de $y' = f(x, y)$ es también una solución de la ecuación diferencial. La inversa de esta afirmación no tiene porque ser verdadera, es decir, una solución particular, que no sea obtenida a partir de la familia 1-paramétrica de soluciones, no es necesariamente una envolvente.

Por ejemplo, utilizando el método de las envolventes podemos encontrar una solución particular de

$$y' = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

que no sea obtenible de la familia de soluciones $y = \cos(x + C)$.

Como vimos en el ejemplo anterior, $y = 1$ y $y = -1$ son envolventes de $y = \cos(x + C)$. Por lo tanto, tenemos dos soluciones particulares a la ecuación diferencial: $y = 1$ y $y = -1$.

6.1.16. Ejemplos

1. Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5-y}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x + \sqrt{5-y}\ \mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \int \mathrm{d}x\ \sqrt{1-x^2} + \int \mathrm{d}y\ \sqrt{5-y} = 0$$

con lo cual, al integrar resulta que

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}(x) + \frac{2}{3}(5-y)^{3/2} = C \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad y > -5$$

Nótese que el $\mathrm{arcsen}(x)$ es multivaluada por lo tanto debemos restringir el intervalo a su valor principal $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

2. $$y' = -\frac{2x+3y-1}{4x+6y+2} \quad \Rightarrow \lambda = 2\,, \quad z = 2x + 3y - 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{d}z = 2\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y \ \Rightarrow\ y' = \frac{1}{3}(z' - 2)$$

con lo cual

$$\frac{1}{3}(z' - 2) = -\frac{z}{2z+4} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z+8}{2z+4} \quad \Rightarrow \int \frac{2z+4}{z+8}\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow 2z - 12\ln|z+8| = x + C\,,$$

por lo tanto, la solución será:

$$4x + 6y - 2 - 12\ln|2x + 3y + 7| = x + C \ \Rightarrow\ x + 2y - 4\ln|2x + 3y + 7| = \tilde{C}\,,$$

con $2x + 3y + 7 \neq 0$. Podemos comprobar que $2x + 3y + 7 = 0$ es una solución particular de la ecuación diferencial.

3. Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$(x + y)y' - 2x + y - 1 = 0$$

Borrador Preliminar

la cual corresponde al caso en los cuales los coeficientes de la ecuación $Q(x,y)$ y $P(x,y)$ son funciones inhomogéneas. Tal y como hemos visto un cambio de variable lo convierte en homogéneo. De nuevo, hay que tener cuidado con el signo + de: $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

$$(2x-y+1)\,\mathrm{d}x-(x+y)\,\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} u = 2x-y+1 \\ v = -(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\mathrm{d}u - \mathrm{d}v) \\ \mathrm{d}y = -\frac{1}{3}(\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}v) \end{array}$$

así nuestra ecuación diferencial tendrá la forma de una ecuación homogénea

$$(u+v)\mathrm{d}u - (u-2v)\mathrm{d}v = 0\,,$$

y ahora haciendo el cambio de variables $u = tv$ con lo cual $\mathrm{d}u = t\mathrm{d}v + v\mathrm{d}t$

$$(tv+v)(t\mathrm{d}v + v\mathrm{d}t) - (tv-2v)\mathrm{d}v = 0 \;\Rightarrow (t^2+2)\mathrm{d}v + v(t+1)\mathrm{d}t = 0 \;\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}v}{v} + \int \frac{t+1}{t^2+2}\mathrm{d}t = 0$$

e integrando tendremos que

$$\ln|v| + \frac{1}{2}\ln|t^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = C \;\Rightarrow\; \ln|v^2(t^2+2)| + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = \tilde{C}\,,$$

para $v \neq 0$, y ahora

$$t = \frac{u}{v} = \frac{2x-y+1}{-(x+y)} \quad \Rightarrow \ln\left|(x+y)^2 + 2(2x-y+1)^2\right| + \sqrt{2}\arctan\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2x-y+1}{-(x+y)}\right| = C\,,$$

para $x+y \neq 0$. La Figura 6.7 ilustra esta familia de soluciones.

Figura 6.5: Solución gráfica para la ecuación diferencial $(x+y)y' - 2x + y - 1 = 0$. Las curvas de diferentes colores indican soluciones particulares: $y(0) = 7; y(0) = 5; y(0) = 2; y(0) = -7; y(0) = -5; y(0) = -2$.

Borrador Preliminar

4. Sea la siguiente ecuación, y verifiquemos si es exacta o no

$$\left(x^2y+y^3\right)y'+x^3+y^2x=0\,.$$

Por lo tanto:

$$\left(x^3+y^2x\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y+y^3\right)\mathrm{d}y \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{lcl} P(x,y) & = & x^3+y^2x \\ Q(x,y) & = & x^2y+y^3 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2yx$$

la ecuación diferencial es exacta, y otra vez:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_{x_0}^{x}\left(u^3+y^2u\right)\mathrm{d}u+\int_{y_0}^{y}\left(x^2w+w^3\right)\mathrm{d}w=C\,, \\ &= x^4+2x^2y^2+y^4=C\,, \\ &= \left(x^2+y^2\right)^2=C\,. \end{aligned}$$

5. Dada la siguiente ecuación diferencial

$$\left(1+x^2\right)y'+xy=0\,.$$

Esta ecuación no es exacta, ya que:

$$(xy)\mathrm{d}x+\left(1+x^2\right)\mathrm{d}y=0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{lcl} P(x,y) & = & xy \\ Q(x,y) & = & 1+x^2 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x}=2x\neq\frac{\partial P}{\partial y}=x\,.$$

Podemos ver que el arreglo:

$$\frac{1}{P(x,y)}\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]=\frac{2x-x}{xy}=\frac{1}{y}=f(y)\,,$$

entonces, el factor integrante es

$$\mu(y)=e^{\int\frac{\mathrm{d}y}{y}}=e^{\ln(y)}=y\,.$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta:

$$(xy^2)\mathrm{d}x+\left(y+yx^2\right)\mathrm{d}y=0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{lcl} P(x,y) & = & xy^2 \\ Q(x,y) & = & y+yx^2 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2xy\,.$$

Queda como ejercicio resolver esta ecuación diferencial.

6. **Otros métodos**

Muchas veces, la solución de una ecuación diferencial se puede obtener utilizando más de un método. Si fallan los métodos vistos anteriormente entonces podemos utilizar un poco de ingenio matemático. Veamos los siguientes ejemplos

a) Resolvamos la ecuación

$$xy'=y-y^2-x^2\,,$$

Borrador Preliminar

la ecuación no es del tipo con coeficientes homogéneos

$$\left(y-y^2-x^2\right)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} P(x,y) &= y-y^2-x^2 \\ Q(x,y) &= -x \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \neq 1-2y = \frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

pero podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y - \left(y^2+x^2\right)\mathrm{d}x &= 0 \\ \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} &= \left[\frac{y^2}{x^2}+1\right]\mathrm{d}x\,, \quad x\neq 0 \\ -\mathrm{d}\left[\frac{y}{x}\right] &= \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]\mathrm{d}x \\ -\frac{\mathrm{d}\left[\frac{y}{x}\right]}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

integrando:

$$-\int \frac{\mathrm{d}\left[\frac{y}{x}\right]}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1} = \int \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) = x+C \;\Rightarrow\; y(x) = -x\tan(x+c)\,, \quad x\neq 0\,.$$

b) Resolver

$$y' = -2x + 2\left(x^2+y-1\right)^{\frac{2}{3}}\,.$$

Podemos hacer la siguiente sustitución:

$$z = x^2+y-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2x$$

Por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2x = -2x + 2z^{\frac{2}{3}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2z^{\frac{2}{3}}$$

Nos queda entonces una ecuación separable

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^{\frac{2}{3}}} = 2\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \int z^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}z = \int 2\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad 3z^{\frac{1}{3}} = 2x+C\,, \quad z\neq 0$$

regresando a la variable original

$$3\left(x^2+y-1\right)^{\frac{1}{3}} = 2x+C \quad\Rightarrow\quad 27\left(x^2+y-1\right) = (2x+C)^3\,, \quad x^2+y-1\neq 0$$

para finalizar, despejamos lo que será nuestra solución

$$y(x) = 1-x^2+\frac{1}{27}(2x+C)^3\,.$$

Es bueno acotar y queda como ejercicio, demostrar que $y(x) = 1-x^2$ también es una solución.

Borrador Preliminar

c) Resolver

$$2\cos(y)y' + \operatorname{sen}(y) = x^2\csc(y)\,, \quad y \neq 0\,.$$

Podemos verificar que los métodos anteriores no funcionan, pero si multiplicamos por $\operatorname{sen}(y)$:

$$\begin{aligned} 2\cos(y)\operatorname{sen}(y)y' + \operatorname{sen}^2(y) &= x^2\csc(y)\operatorname{sen}(y) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\operatorname{sen}^2(y)\right] + \operatorname{sen}^2(y) &= x^2 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación lineal para $\operatorname{sen}^2(y)$, si hacemos $z = \operatorname{sen}^2(y)$ tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = x^2$$

donde el fácil ver que el factor integrador es $\mu(x) = e^x$. Por lo tanto:

$$z = \frac{1}{e^x}\int x^2 e^x \mathrm{d}x + \frac{C}{e^x} = \frac{1}{e^x}\left(2 - 2\,x + x^2\right)e^x + \frac{C}{e^x} = 2 - 2\,x + x^2 + Ce^{-x}\,,$$

la solución es entonces:

$$y(x) = \operatorname{arcsen}\left[\pm\sqrt{2 - 2\,x + x^2 + Ce^{-x}}\right], \quad y \neq 0\,.$$

7. Consideremos la ecuación

$$y = xy' + \frac{a}{2}\frac{1}{y'}\,, \quad \text{donde } a \text{ es una constante.}$$

Como resolvimos con anterioridad $y = \mathcal{G}(x, y')$. Entonces:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' &=& z \\ y &=& xz + \frac{a}{2z} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{lcl} \mathrm{d}y &=& z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y &=& z\,\mathrm{d}x + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right)\mathrm{d}z \end{array} \Rightarrow z\,\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}x + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right)\mathrm{d}z$$

con un poco de álgebra se tiene

$$\begin{aligned} z &= z + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ 0 &= \left(x - \frac{a}{2z^2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2z^2} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{a}{2x}} \end{aligned}$$

por lo tanto, un conjunto de la soluciones particulares son

$$y(x) = \pm x\sqrt{\frac{a}{2x}} \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2x}{a}}\,.$$

Y la familia 1-paramétrica de soluciones será: $y(x) = xC + \dfrac{a}{2C}$.

8. Encontrar las envolventes de

$$y^2 = 2xC - C^2\,.$$

Borrador Preliminar

Como vimos anteriormente,

$$f(x,y,C) = y^2 - 2xC + C^2 \;\Rightarrow\; \partial_c[y^2 - 2xC + C^2] = -2x + 2C = 0 \;\Rightarrow\; x = C$$

$$\begin{vmatrix} -2C & 2y \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4y \neq 0\,, \qquad \partial_{cc} f = 2 \neq 0\,,$$

Aquí, $y \neq 0$. La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2 - 2xC + C^2 & = & 0 \\ x & = & C \end{array} \right. \Rightarrow\; y^2 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ y & = & -x \end{array} \right.$$

9. Encontrar una solución particular de

$$9(y')^2(2 - y^2) = 4(3 - y)\,,$$

no obtenible de su solución $(x - C)^2 = 3y^2 - y^3$.

Veamos si esta familia de soluciones tiene envolventes

$$f(x,y,C) = (x - C)^2 - 3y^2 + y^3 \;\Rightarrow\; \partial_c[(x - C)^2 - 3y^2 + y^3] = -2(x - C) = 0 \;\Rightarrow\; x = C$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} 2(x - C) & -6y + 3y^2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6y(2 - y) \neq 0 \qquad \partial_{cc} f = 2 \neq 0\,,$$

Se tiene que $y \neq 0$ y $y \neq 2$. La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x - C)^2 - 3y^2 + y^3 & = & 0 \\ x & = & C \end{array} \right. \Rightarrow\; -y^2(3 - y) = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ y & = & 3 \end{array} \right.$$

La solución $y = 0$, no se puede considerar ya que el determinante anterior tiene que ser diferente de cero. Por lo tanto, una solución particular es la recta $y = 3$.

10. Resuelva la ecuación de Clairaut

$$y = xy' + (y')^2$$

y estudie sus posibles envolventes.

Esta es una ecuación del tipo $y = \mathcal{G}(x, y')$. Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & z \\ y & = & xz + z^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y & = & z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y & = & z\,\mathrm{d}x + (x + 2z)\,\mathrm{d}z \end{array} \right. \Rightarrow\; z\,\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}x + (x + 2z)\,\mathrm{d}z$$

es decir:

$$0 = \left(\frac{x}{z} + 2\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad x = -2z$$

Borrador Preliminar

Esto nos permite encontrar una solución particular de la ecuación diferencial, ya que

$$z = -\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; y = xz + z^2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{x^2}{4}\,.$$

Si consideramos $y(x) = xC + C^2$, que es la familia de soluciones de la ecuación diferencial, entonces al hacer un estudio sobre las envolventes encontramos lo siguiente

$$f(x,y,C) = y - xC - C^2 \;\Rightarrow\; \partial_c[y - xC - C^2] = -x - 2C = 0 \;\Rightarrow\; x = -2C$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} -C & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \partial_{cc} f = -2 \neq 0\,,$$

La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\begin{cases} y - xC - C^2 &= 0 \\ x &= -2C \end{cases} \Rightarrow\; y + \frac{x^2}{4} = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = -\frac{x^2}{4}\,.$$

6.1.17. Practicando con Maxima

6.1.18. Ejercicios

1. Pruebe que

$$y'\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-y}\,,$$

tiene como solución:

$$\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-y} = C \quad \text{para } -1 < x < 1 \quad \wedge \quad y < 1\,.$$

Es $y = 1$ una solución particular?

2. Utilice el método de las isoclinas para estudiar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a)} \quad y' = x + y\,,\ |x| < 5\,. \quad \text{(b)} \quad y' = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ |x| < 1\,. \quad \text{(c)} \quad y' = 1 + xy\,,\ |x| < 5\,.$$

3. Muestre que:

   a) $f(x,y) = \sqrt{y}\,\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$ es homogénea de grado $\frac{1}{2}$.

   b) $f(x,y) = e^{y/x} + \tan\left(\frac{x}{y}\right)$ es homogénea de grado 0.

4. Resuelva la ecuación diferencial estudiando el hecho de que sea exacta o no

$$\left(2xy\text{sen}^2(x)\right)y' + x^3 + xy^2\text{sen}(2x) + y^2\text{sen}^2(x) = 0\,.$$

5. Resuelva la ecuación

$$xy' + 3y = \frac{\text{sen}(x)}{x^2}\,, \qquad \text{con } x \neq 0\,,\ \text{y}\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

Borrador Preliminar

6. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = xy$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int \mathrm{d}z\, f(z)}\,,$$

donde:

$$f(z) = \frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{yQ(x,y) - xP(x,y)}$$

Con este resultado resuelva la ecuación:

$$\left(x^3 + x^2 y + x\right) y' + y^3 + xy^2 + y = 0\,.$$

7. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = x/y$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int \mathrm{d}z\, f(z)}\,,$$

donde:

$$f(z) = \frac{y^2\left[\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right]}{yQ(x,y) + xP(x,y)}$$

Resuelva la ecuación:

$$xy' = 3y\,.$$

8. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = y/x$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int \mathrm{d}z\, f(z)}\,,$$

donde:

$$f(z) = \frac{x^2\left[\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]}{yQ(x,y) + xP(x,y)}$$

Resuelva la ecuación:

$$3xy' = y\,.$$

9. Resuelva la ecuación

$$xy' + y - y^2 \ln x = 0\,.$$

10. Resuelva la siguiente ecuación de Riccati

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2\,, \quad y_1(x) = -x^2\,.$$

11. Encuentre, utilizando el método de las envolventes, soluciones particulares no obtenibles de la familia de soluciones.

a)

$$y' = \sqrt{y - x}\,, \qquad y = x + \frac{1}{4}(x+c)^2\,, \qquad x \le y \le x + 1\,.$$

b)

$$y' = 3y^{2/3}\,, \qquad y = (x-c)^3\,.$$

Borrador Preliminar

c)

$$y = xy' + 3\sqrt{1+(y')^2}\,, \qquad y = Cx + 3\sqrt{1+C^2}\,, \qquad y > 0\,,\ x^2 < 9\,.$$

d)

$$y = xy' + \ln y'\,, \qquad y = Cx + \ln C\,.$$

e)

$$y = xy' - (y')^{2/3}\,.$$

6.2. Soluciones numéricas

En muchos problemas prácticos que involucran ecuaciones diferenciales no resulta posible expresar la solución en términos de funciones elementales y es necesario recurrir a métodos numéricos. Por una solución numérica entenderemos como aquellas soluciones que vendrán estipuladas como tablas de valores donde para cada valor de x_k le corresponde algún valor de la función $y_k(x_k)$. Más adelante encontraremos algunas soluciones que tampoco vienen expresadas en términos de funciones elementales, como es el caso de la solución $y = J_0(x)$, las funciones de Bessel.

6.2.1. Las ideas generales

Dada una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right]$$

siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden, al extender el espacio de variables de la forma

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} \equiv p(t) \\ \\ x \equiv q(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{x}(t) = F\left[\dot{x}(t), x(t), t\right] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{q} = p(t) \\ \\ \dot{p} = F\left(p(t), q(t), t\right) \end{array}\right.$$

este sistema puede ser rearreglado en forma vectorial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q(t) \\ \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ \\ F\left[p(t), q(t), t\right] \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\left(\mathbf{Q}(t), t\right)$$

Así dado un conjunto de potenciales elásticos y las fuerzas que de ellos derivan,

$$V(x) = \left\{\begin{array}{lcl} p = 1 & \rightarrow & kx \\ \\ p = 2 & \rightarrow & \frac{1}{2}kx^2 \\ \\ p = 3 & \rightarrow & \frac{1}{3}kx^3 \\ \vdots & & \vdots \\ & & \frac{1}{p}k|x|^p \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad F_k(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \left\{\begin{array}{l} -k\frac{x}{|x|} \\ \\ -kx \\ \\ -kx^2 \\ \vdots \\ -k|x|^{p-1}\frac{x}{|x|} \end{array}\right.$$

el sistema dinámico correspondiente a la ecuación de Newton será

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\left(\mathbf{Q}(t), t\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ \\ \frac{1}{m}\left[F_{\mathrm{ext}}\left(x(t), t\right)\right] - k|x(t)|^{p-1}\frac{x(t)}{|x(t)|} \end{pmatrix}$$

Borrador Preliminar

6.2.2. Métodos y su clasificación

Dada una ecuación diferencial de primer orden,

$$y'(x) = f(y(x), x),$$

donde $y(x)$ es probablemente una función continua de la variable continua x. Tengamos claro que una solución numérica de ésta ecuación es en realidad una aproximación a la función $y(x)$.

Al resolver numéricamente, lo que se obtiene es una función $y_k = y(x_k)$ que resulta ser el valor de la función obtenida con el método. La función es evaluada para un conjunto de puntos discretos $x_k = x_0 + kh$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$ y $x_0 < x_1 < x_2 \cdots$. A h se le denomina la longitud del paso.

Diremos que un método es de **paso único** si la determinación de y_{k+1} sólo involucra un único valor de y_k y **múltiple paso** si para calcularlo se utilizan varios valores $y_k, y_{k-1}, \cdots, y_{k-p}$. Por otra parte se denomina un método **explícito** si para determinar y_{k+1} se utilizan valores anteriores $y_k, y_{k-1}, \cdots, y_{k-p}$ y **implícito** si se utilizan una función del mismo valor y_{k+1}.

Así

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h\ f\left(x_k, y_k\right)$$

representa un método **explícito de paso único** mientras que

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\ \left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}\right)\right]$$

será **implícito de múltiples pasos.**

El rebusque de Taylor

Tal y como hemos dicho arriba, dada una ecuación diferencial, su solución a través de un método de paso único puede ser escrita como

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \ \varphi\left(x_k, y_k, h\right) \qquad \text{con} \quad h = x_{i+1} - x_i;$$

Lo primero que se puede hacer es expandir por Taylor alrededor del punto $x = x_k$

$$y(x) = y(x_k) + (x - x_k)\ \ y'(x_k) + \frac{1}{2!}\left(x - x_k\right)^2\ \ y''(x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(x - x_k\right)^n\ \ y^{(n)}(x_k) + \cdots$$

e identificamos

$$\begin{aligned}
y(x_k) &\to y_k \\
y'(x_k) &\to f(y_k, x_k) \\
y''(x_k) &\to f'(y_k, x_k) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_x \\ y=y_k}} y'_k \\
y'''(x_k) &\to f''(y_k, x_k) = \partial_x f' + \partial_y f'\ \ y'_k = \partial_{xx} f + \left(\partial_{xy} f\right) y'_k + \left[\partial_{yx} f + \left(\partial_{yy} f\right) y'_k\right] y'_k + \partial_y f\ \ y''_k \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Por lo que podemos reconstruir la serie de Taylor hasta el orden que podamos o requiramos

$$y_{n+1} = y_n + h\ f(y_k, x_k) + \frac{1}{2!}h^2\ f'(y_k, x_k) + \frac{1}{3!}h^3\ f''(y_k, x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}\ h^n\ f^{(n-1)}(y_k, x_k) + \cdots$$

Borrador Preliminar

quedando acotado el error por

$$\varepsilon_{red} = \frac{1}{(n+1)!}\ h^{n+1}\ f^{(n)}(y(\xi), x(\xi))\,.$$

Podemos considerar el siguiente ejemplo donde tenemos siguiente ecuación diferencial cuya solución exacta conocemos

$$y' = x^2 + y \ \Rightarrow\ y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2$$

si tenemos como condición inicial $y(0) = 1$, entonces

$$y' = x^2 + y\,,\ y'' = 2x + y'\,,\ y''' = 2 + y''\,,\ y^{(4)} = y'''\,, \ldots$$

al tomar en cuenta la condición inicial

$$y'(0) = 1\,,\ y''(0) = 1\,,\ y'''(0) = 3\,,\ y^{(4)}(0) = 3\,, \ldots$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} y(h) &= y(0) + hy'(0) + \frac{1}{2!}h^2y''(0) + \frac{1}{3!}h^3y'''(0) + \frac{1}{4!}h^4y^{(4)}(0) + \cdots \\ &= 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{8}h^4 + \cdots \end{aligned}$$

Algunos valores se muestran a continuación, tomando términos de la serie hasta orden 4.

h	$y(h)$	$y(x)$
0.1	1.1055125	1.1055128
0.2	1.2242000	1.2242083
0.3	1.3595125	1.3595764
0.4	1.5152000	1.5154741

podemos ver que a medida que nos alejemos del origen el método no es tan bueno.

6.2.3. La idea de la integración y los métodos

La idea de integrar una ecuación diferencial ordinaria puede ilustrarse, formalmente de la siguiente forma

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}\xi\ f\left(\xi, y(\xi)\right)\ ,$$

entonces el método se centra en como se aproxima la función dentro de la integral

Euler	Se aproxima la función con en el punto anterior
$f\left(x_k, y_k\right)$	$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\ f\left(x_k, y_k\right)$
Euler Mejorado o Heuns	Se aproxima la función mediante un promedio en los extremos
$\frac{1}{2}\left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}\right)\right]$	$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}\right)\right]$
	$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y_k + h\ f\left(x_k, y_k\right)\right)\right]$

Con $h = x_{i+1} - x_i$ el paso de integración. Nótese además que hemos utilizado Euler otra vez para expresar $y_{k+1} = y_{k+1}(y_k, x_k)$.

Borrador Preliminar

El método de Euler constituye una expansión por Taylor hasta primer orden por lo que el error es claramente de segundo orden por cuanto si comparamos con la expansión en series de Taylor correspondiente tendremos

$$y_{k+1} = y_k + h \left.\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_k} + \frac{h^2}{2!} \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_k} + \cdots$$

$$\|\varepsilon_{tot}\| \propto \frac{h^2}{2!} \left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_k}$$

6.2.4. El método de Euler y el problema de valores iniciales

Este método si bien no se utiliza en la práctica en su forma estándar para ecuaciones diferenciales ordinarias, si ilustra el proceso de discretización de una ecuación diferencial y su solución mediante métodos numéricos.

Para resolver la ecuación de un oscilador armónico libre que parte del reposo, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\phi(t) = 0 \quad \text{con: } \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad \phi\left(t_0\right) = 1; \quad \text{y} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = 0$$

en la cual $\phi(t)$ representa la posición de un cuerpo de masa m unido a un resorte de constante elástica k.

Discretizando mediante diferencia centrada

$$h = t_{i+1} - t_i; \qquad \frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[\phi(t_{i+1}) - 2\phi(t_i) + \phi(t_{i-1})\right] \equiv \frac{1}{h^2}\left[\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}\right]$$

con lo cual la ecuación del oscilador libre queda como

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\phi(t) = 0 \qquad \Rightarrow \phi_{i+1} - \left(2 - h^2\omega_0^2\right)\phi_i + \phi_{i-1} = 0$$

esta última ecuación es la versión en **diferencias finitas** de la ecuación diferencial y es claro que se convierte en una ecuación algebraica.

Finalmente, los dos valores iniciales para la iteración ϕ_0 y ϕ_1 surgen de las condiciones iniciales

$$\phi_0 \equiv \phi\left(t = t_0\right) = 1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = 0 \quad \Rightarrow \phi_1 \approx \phi_0\,.$$

6.2.5. Los métodos de Runge-Kutta

Es el conjunto de métodos más populares y de mayor uso. La idea del método de Runge-Kutta es producir resultados equivalentes a desarrollos en Taylor de orden superior a Euler en métodos de un único paso por lo tanto

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}\xi\; f\left(\xi, y(\xi)\right)$$

y se aproxima la función con un promedio ponderado.

$$f\left(\xi, y(\xi)\right) \approx \left[\alpha\; f\left(y_k, x_k\right) + \beta\; f\left(y_k + \delta\; f\left(y_k, x_k\right) h_k, x_k + \gamma\; h_k\right)\right] \quad \text{con} \quad h_k = x_{k+1} - x_k$$

donde α, β, γ y δ son los pesos estadísticos a ser determinados. Por lo tanto

$$y_{k+1} = y_k + \left[\alpha\; f\left(y_k, x_k\right) + \beta\; f\left(y_k + \delta\; f\left(y_k, x_k\right) h_k, x_k + \gamma\; h_k\right)\right] h_k$$

Borrador Preliminar

Expandiendo por Taylor de dos variables

$$g\left(x+\lambda,\ y+\mu\right)=g\left(x,y\right)+\left[\lambda\ \partial_x g+\mu\ \partial_y g\right]+\frac{1}{2!}\left[\lambda^2\ \partial_x^2 g+2\lambda\mu\ \partial_{xy} g+\mu^2\ \partial_y^2 g\right]+\cdots$$

tendremos

$$\begin{aligned} y_{k+1}&=y_k+\left[\alpha+\beta\right]f_k\ h_k+\beta\left[\gamma\ \partial_x f_k+\delta\ f_k\ \partial_y f_k\right]h_k^2+\\ &+\beta\left[\frac{\gamma^2}{2}\partial_x^2 f_k+2\gamma\delta\ f_k\ \partial_{xy} f_k+\frac{\delta^2}{2}\ f_k^2\ \partial_y^2 f_k\right]h_k^3+\cdots \end{aligned}$$

con $f_k=f\left(y_k,x_k\right)$ y como se ve claramente, queda libertad para escoger

Euler Mejorado o Heuns $\alpha=\beta=\frac{1}{2};\quad \gamma=\delta=1$

$$y_{k+1}=y_k+f_k\ h_k+\tfrac{1}{2}\left[\partial_x f_k+\ f_k\ \partial_y f_k\right]h_k^2$$

Euler Modificado $\alpha=0;\quad \beta=1;\quad \gamma=\delta=\frac{1}{2}$

$$y_{k+1}=y_k+f_k\ h_k+\left[\tfrac{1}{2}\partial_x f_k+\tfrac{1}{2}\ f_k\ \partial_y f_k\right]h_k^2$$

Runge-Kutta de cuarto orden aproxima la función $f\left(\xi,y(\xi)\right)$ en cuatro puntos intermedios en el intervalo $x_k<x<x_{k+1}$ por lo cual

$$y_{k+1}=y_k+\left[\alpha\ \kappa_1+\beta\ \kappa_2+\gamma\ \kappa_3+\delta\ \kappa_4\right]h_k$$

podemos plantearnos varias formas de hacerlo

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h_k}{6}\left[\kappa_1+2\kappa_2+2\kappa_3+\kappa_4\right]$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_1&=f\left(x_k,y_k\right)\\ \kappa_2&=f\left(x_k+\frac{1}{2}h_k,\ y_k+\frac{1}{2}\kappa_1\right)\\ \kappa_3&=f\left(x_k+\frac{1}{2}h_k,\ y_k+\frac{1}{2}\kappa_2\right)\\ \kappa_4&=f\left(x_k+h_k,\ y_k+\kappa_3\right) \end{aligned}$$

o también

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h_k}{8}\left[\kappa_1+3\kappa_2+3\kappa_3+\kappa_4\right]$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_1&=f\left(x_k,y_k\right)\\ \kappa_2&=f\left(x_k+\frac{1}{3}h_k,\ y_k+\frac{1}{3}\kappa_1\right)\\ \kappa_3&=f\left(x_k+\frac{1}{3}h_k,\ y_k+\frac{1}{3}\kappa_2\right)\\ \kappa_4&=f\left(x_k+h_k,\ y_k+\kappa_3\right) \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Más aún el método de **Fehlberg de 4/5 orden** se puede escribir como

$$y_{k+1} = y_k + h_k \left[C_1\kappa_1 + C_2\kappa_2 + C_3\kappa_3 + C_4\kappa_4 + C_5\kappa_5 + C_6\kappa_6\right] + O(h^6)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= f\left(x_k, y_k\right)\\
\kappa_2 &= f\left(x_k + a_2h_k,\ y_k + b_{21}\kappa_1\right)\\
\kappa_3 &= f\left(x_k + a_3h_k,\ y_k + b_{31}\kappa_1 + b_{32}\kappa_2\right)\\
\kappa_4 &= f\left(x_k + a_4h_k,\ y_k + b_{41}\kappa_1 + b_{42}\kappa_2 + b_{43}\kappa_3\right)\\
&\vdots\\
\kappa_6 &= f\left(x_k + a_6h_k,\ y_k + b_{61}\kappa_1 + b_{62}\kappa_2 + b_{63}\kappa_3 + b_{64}\kappa_4 + b_{65}\kappa_5\right)
\end{aligned}$$

la cual puede ser redefinida y truncada para obtener

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h_k \left[\tilde{C}_1\kappa_1 + \tilde{C}_2\kappa_2 + \tilde{C}_3\kappa_3 + \tilde{C}_4\kappa_4 + \tilde{C}_5\kappa_5\right] + O(h^5)$$

Volvamos al mismo ejemplo que vimos anteriormente

$$y' = x^2 + y \quad \Rightarrow \quad y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2$$

con la condición inicial $y(0) = 1$.

Tenemos entonces que $f(x, y) = x^2 + y$. Los valores iniciales son $x_0 = 0$ y $y_0 = y(x_0) = 1$. Si tomamos $h = 0{,}1$, entonces al considerar la ecuación de Runge-Kutta de cuarto orden

$$y(x_0 + h) = y(0{,}1) = y(0) + \frac{1}{6}\left[\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right]$$

donde

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= (0{,}1)f\left(x_k,\ y_k\right) = (0{,}1)f\left(0, 1\right) = 0{,}1\\
\kappa_2 &= (0{,}1)f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k,\ y_k + \frac{1}{2}\kappa_1\right) = (0{,}1)f\left(0{,}05,\ 1{,}05\right) = 0{,}10525\\
\kappa_3 &= (0{,}1)f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k,\ y_k + \frac{1}{2}\kappa_2\right) = (0{,}1)f\left(0{,}05,\ 1{,}052625\right) = 0{,}1055125\\
\kappa_4 &= (0{,}1)f\left(x_k + h_k,\ y_k + \kappa_3\right) = (0{,}1)f\left(0{,}1,\ 1{,}1055125\right) = 0{,}11155125
\end{aligned}$$

por lo tanto el valor aproximado para $y(0{,}1)$ es:

$$y(0{,}1) = y(0) + \frac{1}{6}\left[\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right] = 1{,}1055127$$

De manera similar podemos calcular $y(0{,}2)$.

$$y(x_1 + h) = y(0{,}2) = y(0{,}1) + \frac{1}{6}\left[\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4\right]$$

pero ahora: $x_1 = 0{,}1$ y $y_1 = y(x_1) = 1{,}1055127$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= (0{,}1)f\left(x_k,\ y_k\right) = (0{,}1)f\left(0{,}1,\ 1{,}1055127\right) = 0{,}11155127\\
\kappa_2 &= (0{,}1)f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k,\ y_k + \frac{1}{2}\kappa_1\right) = (0{,}1)f\left(0{,}15,\ 1{,}1612883\right) = 0{,}1183788\\
\kappa_3 &= (0{,}1)f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k,\ y_k + \frac{1}{2}\kappa_2\right) = (0{,}1)f\left(0{,}15,\ 1{,}1647021\right) = 0{,}1187202\\
\kappa_4 &= (0{,}1)f\left(x_k + h_k,\ y_k + \kappa_3\right) = (0{,}1)f\left(0{,}2,\ 1{,}2242329\right) = 0{,}1264233
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

tenemos entonces que

$$y(0{,}2) = 1{,}2242081$$

El resto de los valores se pueden apreciar en la siguiente tabla y donde además podemos hacer algunas comparaciones con lo visto anteriormente

h	$y(h)$(Taylor)	y(h) (R-K)	$y(x)$(Exacto)
0.1	1.1055125	1.1055127	1.1055128
0.2	1.2242000	1.2242081	1.2242083
0.3	1.3595125	1.3595761	1.3595764
0.4	1.5152000	1.5154736	1.5154741

6.2.6. Métodos multipaso

Los métodos multipaso se basan en encontrar el valor y_{n+k} como una función de k de valores precedentes: $y_{n+k-1},\ y_{n+k-2},\ y_{n+k-3},\ \cdots y_n$. Para $k = 1$, retomamos los métodos de paso único del tipo Euler o Runge-Kutta. Será *explícito (abierto)* si el valor y_{n+k} puede ser calculado directamente o *implícito* (*abierto*) si la fórmula contiene el valor y_{n+k} deseado.

Otra vez la idea está en aproximar el argumento de la integración formal

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} \mathrm{d}\xi\ f(\xi, y(\xi))$$

nótese en este caso que el punto $i+1$ recibe la contribución de k puntos anteriores. El integrando $f(\xi, y(\xi))$ lo aproximaremos con un polinomio de interpolación de Newton de orden n. Tal que

$$f(\xi, y(\xi)) \to f(\xi) = p_n(\xi) + R_n(\xi)$$

con $p_n(\xi)$ el polinomio de interpolación y $R_n(\xi)$ el residuo. Donde $_i$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f[x_n] + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \cdots \\ &\quad + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \cdots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \cdots x_0] \\ R_n(x) &= (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \cdots (x - x_0) \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \qquad \text{con } x_0 < \zeta < x_n \end{aligned}$$

haciendo $p_n(x) \equiv f(x_n + \alpha h)$ con α cero o negativo de tal modo que en términos del operador diferencias atrasada $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ siendo h el incremento

$$\begin{aligned} f(x_n + \alpha h) &= f_n + \alpha \nabla f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} \nabla^3 f_n + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+r-1)}{r!} \nabla^r f_n \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

donde hemos denotado $f_n \equiv f\left(x_n, y(x_n)\right)$, $\nabla^m f_n \equiv \nabla^m f|_{x=x_n}$, y $\alpha = (x - x_i)/h$ Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} \mathrm{d}\xi\ f\left(\xi, y(\xi)\right) \\
&= y_i + h \int_{-k}^{1} \mathrm{d}\alpha\ f\left(x_n + \alpha h\right) \\
y_{i+1} &= y_i + h \left[\alpha f_i + \frac{\alpha^2}{2}\nabla f_i + \alpha^2\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}\right)\frac{\nabla^2 f_i}{2!} + \alpha^2\left(\frac{\alpha^2}{4} + \alpha + 1\right)\frac{\nabla^3 f_i}{3!} + \right. \\
&\qquad \left. + \alpha^2\left(\frac{\alpha^3}{5} + \frac{3\alpha^2}{2} + \frac{11\alpha}{3} + 3\right)\frac{\nabla^4 f_i}{4!} + \cdots\right]_{-k}^{1}
\end{aligned}$$

por razones de conveniencia que son evidentes al hacer el desarrollo, se toman las fórmulas para $k = r$ y k impar y obtendremos

$$\left.\begin{matrix} k=0 \\ r=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_{i+1} = y_i + h\left[f_i + \frac{1}{2}\nabla f_i + \frac{5}{12}\nabla^2 f_i + \frac{3}{8}\nabla^3 f_i\right] \\ R = \frac{251}{720}h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} k=1 \\ r=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_{i+1} = y_i + h\left[2f_i + 0\nabla f_i\right] \\ R = \frac{1}{3}h^3 f^{(2)}(\zeta) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} k=3 \\ r=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_{i+1} = y_i + h\left[4f_i - 4\nabla f_i + \frac{3}{8}\nabla^2 f_i + 0\nabla^3 f_i\right] \\ R = \frac{14}{45}h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} k=5 \\ r=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_{i+1} = y_i + h\left[6f_i - 12\nabla f_i + 15\nabla^2 f_i - 9\nabla^3 f_i + \frac{33}{10}\nabla^4 f_i\right] \\ R = \frac{41}{140}h^7 f^{(6)}(\zeta) \end{matrix}\right.$$

y al expresar las diferencias atrasadas las fórmulas explícitas (abierta) quedan expresadas como

$$\left.\begin{matrix} k=0 \\ r=3 \end{matrix}\right\} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right] \qquad R \sim O\left(h^5\right)$$

$$\left.\begin{matrix} k=1 \\ r=1 \end{matrix}\right\} \quad y_{i+1} = y_i + 2hf_i \qquad R \sim O\left(h^3\right)$$

$$\left.\begin{matrix} k=3 \\ r=3 \end{matrix}\right\} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{4h}{3}\left[2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}\right] \qquad R \sim O\left(h^5\right)$$

$$\left.\begin{matrix} k=5 \\ r=5 \end{matrix}\right\} \quad y_{i+1} = y_i + \frac{3h}{10}\left[11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}\right] \qquad R \sim O\left(h^7\right)$$

Siguiendo el mis procedimiento se pueden escribir las fórmulas implícitas (cerradas) para las mismas "curiosas" situaciones. Para este caso la conveniencia se obtienes para k impar y $r = k + 2$

$$\left.\begin{matrix} k=0 \\ r=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_{i+1} = y_i + h\left[f_{i+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{i+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{i+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{i+1}\right] \\ R = \frac{-19}{720}h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} k=1 \\ r=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_{i+1} = y_{i-1} + h\left[2f_{i+1} - 2\nabla f_i - \frac{1}{3}\nabla^2 f_{i+1} - 0\nabla^3 f_{i+1}\right] \\ R = \frac{-1}{90}h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} k=3 \\ r=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_{i+1} = y_{i-3} + h\left[4f_{i+1} - 8\nabla f_i - \frac{20}{3}\nabla^2 f_{i+1} - \frac{8}{3}\nabla^3 f_{i+1} + \frac{14}{45}\nabla^4 f_{i+1}\right] \\ R = \frac{-8}{945}h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{matrix}\right.$$

Borrador Preliminar

desarrollando las diferencias atrasadas, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array}\right\} \quad y_{i+1}=y_i+\tfrac{h}{24}\left[9f_{i+1}+19f_{i-1}-5f_{i-1}+9f_{i-2}\right] \qquad R\sim O\left(h^5\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} k=1 \\ r=3 \end{array}\right\} \quad y_{i+1}=y_{i-1}+\tfrac{h}{3}\left[f_{i+1}+f_i+f_{i-1}\right] \qquad R\sim O\left(h^5\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} k=3 \\ r=5 \end{array}\right\} \quad y_{i+1}=y_{i-3}+\tfrac{2h}{45}\left[7f_{i+1}+32f_i+12f_{i-1}+32f_{i-2}+7f_{i-3}\right] \qquad R\sim O\left(h^7\right)$$

Se debe puntualizar lo siguiente respecto a las fórmulas explícitas e implícitas de los métodos multipaso antes mencionados

- Los métodos multipasos, normalmente, requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos monopaso para un mismo nivel de precisión.
- Los métodos multipaso requieren de un método monopaso que le permita determinar los $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, \cdots, y_n$ puntos iniciales.
- Las fórmulas explícitas son, normalmente, menos precisas que las implícitas. La razón se fundamenta en que, mientras las explícitas extrapolan la solución al punto y_{i+1}, las implícitas la interpolan, por cuanto la toman en cuenta en el momento de calcularla.
- Las fórmulas explícitas e implícitas deben ser consideradas como complementarias, por cuanto las explícitas pueden *predecir* el valor de y_{i+1} necesario para la $f_{i+1}=f(x_{i+1},y_{i+1})$ del cálculo de y^*_{i+1} en la fórmula implícita.
  Existen varias combinaciones *predictor-corrector*, entre ellas mencionamos:
  Milne de cuarto orden
  - Predictor
  $$y_{i+1}=y_{i-3}+\frac{4h}{3}\left[2f_i-f_{i-1}+2f_{i-2}\right]$$
  - Corrector
  $$y_{i+1}=y_{i-1}+\frac{h}{3}\left[f_{i+1}-4f_i+f_{i-1}\right]$$

  Milne de sexto orden
  - Predictor
  $$y_{i+1}=y_{i-5}+\frac{3h}{10}\left[11f_i-14f_{i-1}+26f_{i-2}-14f_{i-3}+11f_{i-4}\right]$$
  - Corrector
  $$y_{i+1}=y_{i-3}+\frac{2h}{45}\left[7f_{i+1}+32f_i+12f_{i-1}+32f_{i-2}+7f_{i-3}\right]$$

  Adams Modificado o Adams Moulton
  - Predictor
  $$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{24}\left[55f_i-59f_{i-1}+37f_{i-2}-9f_{i-3}\right]$$
  - Corrector
  $$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{24}\left[9f_{i+1}+19f_i-5f_{i-1}+f_{i-2}\right]$$

Borrador Preliminar

El método de extrapolación multipaso más exitoso (conjuntamente con los métodos de paso único del tipo **Runge-Kutta**) es el de extrapolación racional de **Bulirsch-Stoer** en el cual se define un paso superior de H y una serie de subpaso $h_\eta = H/\eta$ con el aumento del número de subpasos, en algún momento siguiendo algún criterio de convergencia se hace una extrapolación (racional) que representa el límite $\eta \to \infty$.

El método de Bulirsch-Stoer tiene una estrategia diferente al los anteriores y posee, como motor de aproximación el método del punto medio modificado o salto de rana (*leap frog*). Este esquema se utiliza con frecuencia en discretizaciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y se basa en aproximar la derivada por el valor el promedio en los dos extremos:

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y'(x_n) = f(y(x_n), x_n) = \frac{y(x_n) - y(_{n-1})}{2h}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv y(x) \\ z_1 &= z_0 + hf(x, z_0) \\ &\vdots \\ z_{n+1} &= z_{n-1} - 2hf(x + nh, z_n) \end{aligned}$$

para finalmente calcular

$$y(x + H) \approx y_n \equiv \frac{1}{2}\left[z_n + z_{n-1} + hf\left(x + H, z_n\right)\right]$$

Nótese que si reacomodamos

$$y(x + H) \approx \frac{4y_n - y_{n/2}}{3}$$

obtendremos un método de cuarto orden que requiere menos evaluaciones de $f(y(x_n), x_n)$ por paso h

6.2.7. Control del paso

En General para métodos de 4to orden. Tal y como se mencionó en el caso de la integración numérica, el primer criterio que surge es dividir el paso h en la mitad, calcular todo de nuevo y comparar los resultados a ver si está dentro del los límites de tolerancia que nos hemos impuesto

$$\left\| \frac{y_h - y_{h/2}}{y_h} \right\| \equiv \Delta\left(y_h, y_{h/2}\right) < \varepsilon_{\text{máx}} \Rightarrow$$

$$\frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta\left(y_h, y_{h/2}\right)} \approx \left(\frac{h_0}{h_t}\right)^5 \Rightarrow h_0 = h_t \left(\frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta\left(y_h, y_{h/2}\right)}\right)^{1/5}$$

donde hemos denotado h_0 como el paso ideal. Esta relación es general para cualquier método de 4 orden de paso único, multipaso, implícito o explícito.

Más aún, la práctica ha indicado que

$$h_0 = \begin{cases} \mathcal{M}h_t \left(\frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta\left(y_h, y_h^*\right)}\right)^{0,20} \equiv \mathcal{M}h_t \left(\begin{array}{c} \Delta_0 \\ \Delta_h \end{array}\right)^{0,20} & \Delta_0 \geq \Delta_1 \\ \\ \mathcal{M}h_t \left(\frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta\left(y_h, y_h^*\right)}\right)^{0,25} \equiv \mathcal{M}h_t \left(\begin{array}{c} \Delta_0 \\ \Delta_h \end{array}\right)^{0,25} & \Delta_0 < \Delta_1 \end{cases}$$

Borrador Preliminar

donde $0 < \mathcal{M} < 1$ un factor de seguridad

Para métodos Runge-Kutta. es importante mencionar que se utilizan mayoritariamente métodos hasta cuarto orden porque de mayor orden (M, por ejemplo) involucran más de M evaluaciones (y menos $M-2$) de la derivada. Por ello para este tipo de métodos se descubrió que considerando el mismo número de puntos para la evaluación intermedia se pueden generar métodos de distinto orden, y para colmo de suerte el menor orden de esta situación se expresa para métodos de 4 y 5 orden. En particular Runge-Kutta de 5 orden se puede escribir como:

$$y_{k+1} = y_k + h_k \left[C_1\kappa_1 + C_2\kappa_2 + C_3\kappa_3 + C_4\kappa_4 + C_5\kappa_5 + C_6\kappa_6\right] + O(h^6)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= f\left(x_k, y_k\right)\\
\kappa_2 &= f\left(x_k + a_2 h_k,\ y_k + b_{21}\kappa_1\right)\\
\kappa_3 &= f\left(x_k + a_3 h_k,\ y_k + b_{31}\kappa_1 + b_{32}\kappa_2\right)\\
\kappa_4 &= f\left(x_k + a_4 h_k,\ y_k + b_{41}\kappa_1 + b_{42}\kappa_2 + b_{43}\kappa_3\right)\\
&\vdots\\
\kappa_6 &= f\left(x_k + a_6 h_k,\ y_k + b_{61}\kappa_1 + b_{62}\kappa_2 + b_{63}\kappa_3 + b_{64}\kappa_4 + b_{65}\kappa_5\right)
\end{aligned}$$

y con los mismos puntos (¡ las mismas evaluaciones !) se puede reescribir para 4 orden como:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h_k \left[\tilde{C}_1\kappa_1 + \tilde{C}_2\kappa_2 + \tilde{C}_3\kappa_3 + \tilde{C}_4\kappa_4 + \tilde{C}_5\kappa_5\right] + O(h^5)$$

por lo tanto el error se puede estimar

$$\Delta\left(y_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{6} \left(C_i - \tilde{C}_i\right) k_i$$

y el control del paso se utiliza exactamente igual

$$h_0 = h_t \left(\frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{\Delta\left(y_h, \tilde{y}_h\right)}\right)^{0,20}$$

Para métodos multipasos y predictor corrector la situación puede tener un refinamiento adicional antes de proceder a modificar el paso h. El esquema sería para un método predictor corrector del tipo Adams Modificado o Adams Moulton, donde el

- Predictor
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right]$$
- Corrector
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right]$$

se realiza una serie de iteraciones dentro de la fórmula de corrector, i.e.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) + 19f\left(x_i, y_i\right) - 5f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_{i-2}, y_{i-2}\right)\right].$$

Borrador Preliminar

6.2.8. Ejemplos

6.2.9. Practicando con Maxima

6.2.10. Ejercicios

6.3. Algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

Modelar o describir matemáticamente un fenómeno es el fin último de la ciencias. Las matemáticas son el lenguaje de la física: ¿Cómo describir el chisporroteo de una llama? ¿la textura de un pintura al oleo? ¿el tráfico en carreteras durante horas picos? ¿el titilar de las estrellas? Describir matemáticamente estas situaciones no sólo no es fácil, pero tampoco es única. Son fenómenos complejos y su descripción puede tener muchos grados de profundidad.

6.3.1. Ley de Malthus y el decaimiento radioactivo

Malthus[6] postuló esta famosa ecuación:

$$\frac{dy(x)}{dx} = k\ y(x) \tag{6.11}$$

con $k > 0$ o $k < 0$ y $y(0) = y_0$, Es fácil verificar que la solución viene dada por:

$$y(t) = y_0\ e^{k\,t}\,. \tag{6.12}$$

Para $k < 0$ tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza los procesos de decaimiento radiactivo. El tiempo de vida media se define como el tiempo necesario para que la mitad de los núcleos decaigan, lo cual es independiente de la cantidad de la muestra y permite medir la edad de todo aquello que contenga isótopos radioactivos. En particular el C^{14} del cual se sabe que: tiene una vida media de 5730 años y que todos los organismos están (o estuvieron) formados por carbono. Por lo tanto, si sabemos el porcentaje de C^{14} en una muestra, digamos el 63 % podremos inferir su edad

$$y(0) = 1$$

$$y(5730) = \ e^{k\,5730} = \tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto, despejando k

$$k = \frac{-\ln 2}{5730}$$

tendremos finalmente

$$y(t) = 2^{-t/5730}$$

de aquí obtendremos la edad en años de la muestra

$$y(t) = 0{,}63 \ \Rightarrow\ t = -\frac{\ln 0{,}63}{\ln 2}5730 \approx 3819{,}48$$

[6] En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834). Quien fue uno de los primeros en darse cuenta queñ la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencias crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones,* el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la población y las necesidades que ellas generaban, eran de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies.

Borrador Preliminar

Figura 6.6: Decaimiento Radioactivo

En la Figura 6.6 se puede apreciar la solución de la ecuación (6.11) y el valor aproximado de la edad de la muestra.

Para $k > 0$ la ecuación 6.11 describe el incremento poblacional. El valor de k se calcula experimentalmente (promediando sus valores para cada uno de los parámetros). Para la población venezolana $k = 0{,}018$

Población Venezolana (Millones Hab.)

Año	Población	$y(t) = 0{,}350\ \mathrm{e}^{0{,}018t}$
1800 (0)	0.350	0.350
1847 (47)	0.750	0.816
1873 (73)	1.000	1.302
1881 (81)	1.750	1.504
1891 (91)	2.100	1.801
1926 (126)	2.850	3.381
1936 (136)	3.200	4.048
1941 (141)	3.850	4.429
1950 (150)	4.350	5.208
1961 (161)	6.800	6.348
1971 (171)	10.800	7.600
1981 (181)	14.100	9.099

El crecimiento de la población venezolana (Tabla 1) desde 1800 puede modelarse con $k = 0{,}018$ y $a = 0{,}001$, como se puede apreciar en la Figura 6.7.

6.3.2. La ecuación logística o ley de Verhulst

Esta ecuación se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus.

Borrador Preliminar

Figura 6.7: Población de Venezuela desde 1800

Esta ecuación toma en cuenta le decrecimiento de la población con el término $-y^2$

$$y' = (k - ay)\ y = ky - ay^2$$

donde k y a son constantes arbitrarias. Esta ecuación es separable y la solución tiene la forma de

$$\ln\left|\frac{y}{k - ay}\right| = k\ t + C\,,$$

y por lo tanto

$$y(t) = \frac{k\ y_0}{a\ y_0 + (k - a\ y_0)\ e^{-k\,t}}\,.$$

Nótese que para $k > 0$, resulta que

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{k\ y_0}{a\ y_0 + (k - a\ y_0)\ e^{-k\,t}}\right] = \frac{k}{a}\,.$$

6.3.3. La Ley de enfriamiento de Newton

Esta ley viene expresada de la siguiente forma

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_m)\,, \quad T(0) = T_0 \tag{6.13}$$

la solución será

$$T = (T_0 - T_m)\ e^{k\,t} + T_m\,.$$

La gráfica para el caso de una torta recién sacada del horno y que se encuentra a una temperatura de $T_0 = 176°$, con una temperatura ambiente de $T_m = 23°$, y con $T(8) = 63°$, se aprecia en la Figura 6.8 ($k \approx$-0.1677).

Borrador Preliminar

Figura 6.8: Enfriamiento de una torta recién horneada

También se puede modelar el enfriamiento con una temperatura del ambiente variable esto es:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k\left[T - T_m(t)\right] \qquad T(0) = T_0$$

tómese, por ejemplo,

$$T_m(t) = 23 - 10\cos\left(\frac{\pi\ t}{12}\right) \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 24 \text{ horas}$$

entonces:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}\left[T - 23 - 7\cos\left(\frac{\pi\ t}{12}\right)\right]$$

con la solución

$$T\left(t\right) = C\ e^{\frac{1}{4}\,t} + \frac{207 + 23\,\pi^2 + 63\ \cos\left(\frac{\pi\,t}{12}\right) - 21\pi\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi\,t}{12}\right)}{9 + \pi^2}$$

si $T(0) = 15°$, entonces la constante C resulta ser

$$C = -\frac{135 + 8\,\pi^2}{9 + \pi^2}$$

es decir:

$$T\left(t\right) = \left(-\frac{135 + 8\,\pi^2}{9 + \pi^2}\right) e^{\frac{1}{4}\,t} + \frac{207 + 23\,\pi^2 + 63\ \cos\left(\frac{\pi\,t}{12}\right) - 21\pi\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi\,t}{12}\right)}{9 + \pi^2}\,.$$

6.3.4. Interés compuesto.

Otra de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es en el cálculo del crecimiento del capital inicial $\mathcal{C}_0$, depositado en un banco durante un cierto lapso de tiempo y sujeto a una determinada tasa de interés ζ. Luego del lapso de tiempo, el nuevo capital será

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0\left(1 + \frac{\zeta}{100}\right)$$

Borrador Preliminar

Pasados dos lapsos (años) de tiempo el capital será:

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1\left(1+\frac{\zeta}{100}\right) = \mathcal{C}_0\left(1+\frac{\zeta}{100}\right)\left(1+\frac{\zeta}{100}\right)$$

y en t lapsos de tiempo:

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_0\left(1+\frac{\zeta}{100}\right)^t$$

Ahora bien, si el pago de los intereses se hace varias veces durante ese lapso, entonces tendremos

$$\mathcal{C}_2 = C_1\left(1+\frac{\zeta}{100\cdot 2}\right) = \mathcal{C}_0\left(1+\frac{\zeta}{100\cdot 2}\right)\left(1+\frac{\zeta}{100\cdot 2}\right).$$

Finalmente, si el interés se paga k veces en cada lapso, entonces

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_0\left(1+\frac{\zeta}{100\cdot k}\right)^{kt}. \tag{6.14}$$

Si $k = 12$ entonces se tienen intereses pagaderos sobre saldos mensuales. En el caso de que $k = 365$, los intereses son pagaderos sobre saldos diarios. Nótese que si

$$k \to \infty \Rightarrow \left(1+\frac{\zeta}{100\cdot k}\right)^{kt} \to e^{\left(\frac{\zeta}{100}\ t\right)};$$

entonces, podemos aproximar este modelo discreto de pagos sobre saldos por uno continuo, i.e.

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_0 e^{\left(\frac{\zeta}{100}\ t\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}'(t) = \frac{\zeta}{100}\mathcal{C}(t).$$

Existen situaciones en las cuales los bancos, movidos por la competencia, ofrecen cancelar los intereses sobre un año hipotético de 360 días. En este caso, el capital crece como:

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_0\left(1+\frac{\zeta}{100\cdot 360}\right)^{365t}. \tag{6.15}$$

La siguiente tabla muestra una comparación del crecimiento del capital inicial $\mathcal{C}_0 = 1$, en un lapso de 10 años, sujeto a intereses del 40 % sobre saldos diarios y siguiendo los tres modelos antes mencionados.

Años	$\mathcal{C}(t) = e^{\left(\frac{\zeta}{100}\ t\right)}$	$\mathcal{C}(t) = \left(1+\frac{\zeta}{100\cdot k}\right)^{kt}$	$\mathcal{C}(t) = \left(1+\frac{\zeta}{100\cdot 360}\right)^{365t}$
0	1.0	1.0	1.0
1	1.491497997	1.491824698	1.499797972
2	2.224566275	2.225540928	2.249393957
3	3.317936142	3.320116923	3.373636494
4	4.948695110	4.953032424	5.059773172
5	7.380968843	7.389056099	7.588637542
6	11.00870024	11.02317638	11.38142320
7	16.41945436	16.44464677	17.06983543
8	24.48958329	24.53253020	25.60130455
9	36.52616442	36.59823444	38.39678465
10	54.47870107	54.59815003	57.58741975

Borrador Preliminar

6.3.5. Mecánica elemental

El estudio del movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de un conjunto de fuerzas externas, fue una de las principales motivaciones para el planteamiento y solución de las ecuaciones diferenciales.

$$\sum_{\text{externas}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v}(t))}{\mathrm{d}t} = m\ \mathbf{a}(t)\ , \tag{6.16}$$

para sistemas con $m = \text{cte}$ (partículas), con $\mathbf{v}(t)$ la velocidad y $\mathbf{r}(t)$ la posición.

6.3.6. Movimientos con aceleración constante

En carreras de velocidad, en las cuales los autos tienen que generar el máximo posible de velocidad para una distancia dada tendremos, que la ecuación Newton (6.16) se expresa de la siguiente forma

$$\text{cte} = F = m\ \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v(t) = v_0 + \dfrac{F}{m}t \\ \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}\dfrac{F}{m}t^2 \end{cases}$$

Los valores típicos para este caso son $v_0 = r_0 = 0$, $a = \frac{F}{m} = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$, y por lo tanto la velocidad final a los 400 m es:

$$v_f = \sqrt{2ax} \approx 89\ \text{m/s} = 320,4\ \text{Km/h}\,.$$

Fricción en fluidos

En la descripción del movimiento de un paracaidista la ecuación (6.16) se convierte en:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{ext.}} F(v(t)) &= -mg + \eta v^2 \\ &= \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = m\ a(t)\,, \end{aligned} \tag{6.17}$$

con η una constante arbitraria que depende de la forma del cuerpo.

Integrando esta ecuación separable se obtiene

$$v(t) = -v_t \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)} \right]\ . \tag{6.18}$$

Donde hemos definido la velocidad terminal como:

$$v_t \equiv \sqrt{\frac{mg}{\eta}}\,,$$

la velocidad que anula la sumatoria de fuerzas y a partir de la cual el cuerpo cae sin aceleración.

El tiempo que tarda en alcanzar esa velocidad es estrictamente para $t \longrightarrow \infty$, sin embargo, una buena aproximación que surge de la ecuación (6.18), la constituye: $t \gg v_t/2g$. La velocidad terminal típica en un día soleado para un paracaidista de 70 Kg, en posición de "águila extendida", es $54\ \text{ms}^{-1}$ ($194,4\ \text{Km h}^{-1}$) y por lo tanto alcanza la velocidad terminal luego de aproximadamente 15 s, esta situación se aprecia claramente en la Figura 6.9.

Borrador Preliminar

Figura 6.9: Velocidad y posición del paracaidista en función del tiempo.

Por su parte, la posición surge al integrar la ecuación (6.18)

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -v_t \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)} \right],$$

integrando esta ecuación obtendremos

$$y_0 - y(t) = v_t \left\{ t + \frac{v_t}{g} \ln \left[\frac{2}{\exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right) + 1} \right] \right\}. \tag{6.19}$$

Con el comportamiento gráfico que muestra la Figura 6.9.

Fuerzas elásticas

Otra situación muy conocida se presenta bajo la acción de fuerzas elásticas. Así, la ecuación (7.40), ahora se expresa como

$$\sum_{\text{ext.}} F(v(t)) = -kx(t) = m\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = ma(t)\,. \tag{6.20}$$

Utilizando la "regla de la cadena"

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}x(t)}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = v(t)\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}x(t)}\,.$$

Se convierte en separable y se integra para obtener la velocidad:

$$mv(t)^2 = -kx(t)^2 + C_1 \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{-k\;x(t)^2 + C_1}{m}}\,. \tag{6.21}$$

La posición será

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\right).$$

Borrador Preliminar

Figura 6.10: Trayectoria de la Flecha al abandonar el arco.

Para analizar el caso del lanzamiento de una flecha (23 g) por una arco de 30 lb (134 N) el cual un arquero puede separarlo 0,72 m se obtiene la velocidad de salida de la flecha como

$$v_f = d\sqrt{\frac{k}{m}} = 0,72\sqrt{\frac{\frac{134}{0,72}}{23\times 10^{-3}}} = 65 \text{ m/s}$$

Es interesante mencionar que en 100 m la flecha baja una distancia de ≈ 11 m.

Sistemas de masa variable

Otro de los ejemplos interesantes es la evolución de sistemas de masa variable. El primero de los casos a considerar tiene que ver con una barca de masa m_0 que tiene una velocidad inicial v_0 en su navegar, comienza a llover y se va llenando de agua. El agua se acumula con una tasa σ (masa por unidad de tiempo). Se pide encontrar la velocidad de la barca como función del tiempo.

$$P = mv = \text{const} = m_0 v_0$$

si $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \sigma = \text{cont} \;\Rightarrow\; m(t) = m_0 + \sigma t$, y consecuentemente

$$v(t) = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \sigma t}\,.$$

Un segundo caso tiene que ver con una masa M atada a una cadena de densidad lineal de masa ρ. Esta masa se impulsa hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Se pide encontrar el tiempo en que alcanza la altura máxima. La ecuación de Newton para este caso se puede expresar como

$$-P_{\text{masa}} - P_{\text{cadena}} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} \qquad \Leftrightarrow \qquad -Mg - \rho x g = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}m$$

o equivalentemente

$$-g\rho\xi = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \text{donde:} \qquad \begin{cases} \xi = \frac{M}{\rho} + x \\ \text{y} \\ p = mv = \rho\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Borrador Preliminar

con lo cual

$$-g\rho\xi p = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad -g\rho\xi m\mathrm{d}\xi = p\mathrm{d}p \qquad \Rightarrow \qquad -g\rho\xi\rho\xi\mathrm{d}\xi = p\mathrm{d}p$$

$$-\int_{\frac{M}{\rho}}^{\xi} g\rho^2\xi^2\mathrm{d}\xi = \int_{m_0v_0}^{p} p\mathrm{d}p \qquad \Rightarrow \qquad g\rho^2\left[\frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3}\right] = \frac{p^2}{2} - \frac{(m_0v_0)^2}{2}$$

$$t - t_0 = \int \frac{\rho\xi\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2g\rho^2\left[\frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3} + \frac{(m_0v_0)^2}{2}\right]}}\,.$$

Un cohete en movimiento

Finalmente el caso más emblemático es el movimiento de un cohete que consume una fracción importante de su combustible. Llamemos v la velocidad de cohete para un instante de tiempo t y v' la velocidad de salida de los gases respecto a tierra. Para ese instante t la cantidad de movimiento del cohete es mv un instante $\mathrm{d}t$ más tarde la cantidad de movimiento será

$$p' = \underbrace{(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)}_{\text{cohete}} + \underbrace{(-\mathrm{d}m)v'}_{\text{gases}} = mv + m\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}m\,\underbrace{(v'-v)}_{\text{vel. rel.}}$$

Entonces, el cambio en la cantidad de movimiento será

$$\mathrm{d}p = p' - p = m\mathrm{d}v - v_{\text{gases}}\,\mathrm{d}m$$

y por lo tanto la ecuación de Newton

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} - v_{\text{gases}}\frac{\mathrm{d}m}{dt} = \sum_{\text{externas}} F$$

Despreciando la resistencia del aire y suponiendo la gravedad constante, tendremos

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{v_{\text{gases}}}{m}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -g$$

integrando

$$v = v_0 + v_{\text{gases}}\ln\left[\frac{m_i}{m(t)}\right] - gt$$

si suponemos que el combustible se quema de la forma

$$m(t) = m_i(1+\alpha t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \alpha = \text{cte}\,.$$

La cantidad

$$E = v_{\text{gases}}\left|\frac{dm}{dt}\right|\,,$$

se denomina el empuje del cohete.

Borrador Preliminar

Figura 6.11: Velocidad y posición del Cohete

6.3.7. Modelado de concentraciones de soluciones

Otro de los problemas típicos donde se aplican exitosamente las ecuaciones diferenciales son los problemas de manejo de concentración de sustancias en soluciones líquidas. El principal objetivo, consiste en plantear el problema en término del problema de valores iniciales que gobierna el fenómeno (ecuación diferencial + condiciones iniciales). Para ello, en este tipo de problemas, siempre utilizaremos la regla intuitiva de

$$\text{Tasa de cambio de la concentración} = \text{Tasa de ingreso} - \text{Tasa de egreso}$$

Así, tendremos que para un problema típico en el cual inicialmente se encuentran diluidos en un recipiente (un tanque) y_0 gr de una sustancia en V_0 litros de un líquido. A este tanque le cae otro líquido con una concentración distinta de la misma sustancia a $v_{entrada}$ lit/min, mientras que v_{salida} lit/min salen del tanque.

Si suponemos que dentro del tanque sucede algún proceso de homogenización de la solución, la pregunta típica es que queremos saber la cantidad de sustancia que se encuentra en el tanque en un tiempo t. A la concentración de la sustancia en el líquido de entrada (gr/lit), en un tiempo t, la denotaremos como $C(t)$ gr/lit. La figura (6.12) ilustra este proceso.

Para empezar notemos que, en esta situación el volumen no es constante. Por lo tanto, con el mismo espíritu de la "ley de balanceo" que hemos propuesto, si las velocidades de ingreso y egreso son constantes, nos queda que la variación del volumen inicial viene dada por la diferencia de estas velocidades, esto es

$$V'(t) = v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}} \Rightarrow V(t) = V_0 + (v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})\, t\,,$$

con lo cual también hemos integrado una ecuación diferencial para encontrar como variará el volumen con el tiempo.

Para la construcción de la ecuación diferencial, procedemos de manera similar y si describimos la cantidad de sustancia en el tanque como $y(t)$, nos queda que la tasa de cambio de la cantidad de sustancia en el tanque será

$$y'(t) = \underbrace{v_{\text{entrada}}\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right) C(t)\left(\frac{\text{gr}}{\text{lit}}\right)}_{\text{Tasa de Ingreso}} - \underbrace{v_{\text{salida}}\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)\left(\frac{y(t)}{V_0 + (v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})\, t}\frac{\text{gr}}{\text{lit}}\right)}_{\text{Tasa de Egreso}}$$

Por lo tanto la ecuación diferencial tomará la forma típica de una ecuación diferencial lineal de primer orden inhomogénea

$$y'(t) + y(t)\frac{v_{\text{sal}}}{V_0 + (v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}})\, t} = v_{\text{ent}} C(t)$$

Borrador Preliminar

Figura 6.12: Soluciones y tanques

que tendrá por solución

$$y(t) = \underbrace{\frac{y_0}{(-V_0)^{-\left(\frac{v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}}-v_{\text{sal}}}\right)}}\left((-v_{\text{ent}}+v_{\text{sal}})\,t-V_0\right)^{\left(\frac{-v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}}-v_{\text{sal}}}\right)}}_{\text{Respuesta a las Condiciones iniciales}}$$
$$\underbrace{-\left((-v_{\text{ent}}+v_{\text{sal}})\,t-V_0\right)^{\frac{v_{\text{sal}}}{-v_{\text{ent}}+v_{\text{sal}}}}\int_0^t v_{\text{ent}}\,C(u)\left(u\,(v_{\text{ent}}-v_{\text{sal}})+V0\right)^{\left(\frac{v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}}-v_{\text{sal}}}\right)}\mathrm{d}u}_{\text{Respuesta a la Exitación externa}}$$

Nótese lo genérico de esta solución. Por un lado, la concentración de la sustancia, $C(t)$, en la solución que entra al sistema es distinta a la concentración de la sustancia presente en el tanque, más aún, puede ser variable con el tiempo. Por otro lado esta solución presenta una singularidad (un infinito) cuando la velocidad de ingreso es igual a la velocidad de egreso. Para este caso en el cual el volumen del tanque permanece constante tendremos que resolver la ecuación diferencial

$$y'(t)+y(t)\,\frac{v_{\text{sal}}}{V_0}=v_{\text{ent}}C(t)\Rightarrow y(t)=\left(\int_0^t C(u)\,v_{\text{entrada}}\,e^{\left(\frac{v_{\text{salida}}\,u}{V}\right)}\mathrm{d}u+y0\right)e^{-\frac{v_{\text{salida}}\,t}{V}}$$

Tal y como hemos mencionado varias veces (y seguiremos mencionando) la solución general para una ecuación diferencial in homogénea se compone de dos soluciones, la solución de la ecuación diferencial homogénea más la solución de la inhomogéna.

$$y_{\text{general}}(x)=y_{\text{homogénea}}(x)+y_{\text{inhomogénea}}(x)\ .$$

Este ejemplo nos permite constatar el sentido cada una de estas soluciones, vale decir

$$y(t)=\underbrace{y0e^{-\frac{v_{salida}\,t}{V}}}_{\text{Respuesta a las Condiciones Iniciales}}+\underbrace{e^{-\frac{v_{salida}\,t}{V}}\int_0^t C(u)\,v_{entrada}\,e^{\left(\frac{v_{salida}\,u}{V}\right)}\mathrm{d}u}_{\text{Respuesta a la Exitación externa}}$$

Borrador Preliminar

En esta es una visión que debemos conservar, en general para todas las ecuaciones lineales inhomogéneas independientes del orden de la ecuación diferencial, así recordando, dada una ecuación diferencial y su solución tal que se cumple la condición inicial $y(0) = y_0$ entonces siempre es posible

$$\frac{d}{dx}y(x) + p(x)\,y(x) = g(x) \Leftrightarrow y(x) = \underbrace{y_0 e^{\int_0^x -p(u)du}}_{\text{solución homgénea}} + \underbrace{e^{\int_0^x -p(u)du}\int_0^x g(u)\,e^{\int p(u)du}du}_{\text{Solución inhomogénea}},$$

donde ahora vemos claramente que la solución de la homogénea da cuenta a las condiciones iniciales del proceso y la solución de la inhomogénea provee la respuesta a la excitación externa al sistema.

Este comportamiento de las soluciones es útil si nos planteamos que al tratar de "limpiar" una piscina, a la cual le hemos añadido el doble de la cantidad de sulfatos permitida, y queremos saber cuanto tiempo tenemos que mantener abierta una entrada de 120 lits/min de agua sin sulfatos y la salida de la piscina que responde a 60 lits/min. La piscina en cuestión tiene 20 m de longitud, 10 m de ancho y 2 m de profundidad. Siguiendo los pasos anteriormente planteados, tendremos que

$$y'(t) + y(t)\left(\frac{v_{\text{sal}}}{V_0 + (v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}})\,t}\right) = 0 \Rightarrow y'(t) + y(t)\left(\frac{60\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)}{4\times 10^5\text{lit} + (120-60)\,t\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)}\right) = 0$$

$$y'(t) + y(t)\left(\frac{60\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)}{4\times 10^5\text{lit} + 60\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)t}\right) = 0 \Rightarrow y(t) = 20000\frac{y_0}{3t+20000}$$

donde el volumen es $V = 400m^3 = 400\,(100cm)^3 = 4\times 10^8 cm^3 = 4\times 10^8\left(10^{-3}\text{lit}\right) = 4\times 10^5$ lit.

Con lo cual el tiempo para que la cantidad final decaiga a la mitad de la inicial surge de

$$y_0 = 20000\frac{2y_0}{3t+20000} \;\Rightarrow\; t \approx 6.666{,}66 \text{ minutos !!!!!}$$

6.3.8. Ejemplos

6.3.9. Practicando con Maxima

6.3.10. Ejercicios

Borrador Preliminar

Capítulo 7

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor a 1

Borrador Preliminar

Vamos a estudiar algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor a 1, esto es, ecuaciones del tipo

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)] = 0\,.$$

Primero estudiemos las lineales.

Una ecuación diferencial lineal de orden n, es una ecuación de la forma

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)\,, \tag{7.1}$$

donde $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones contínuas de x en un intervalo $\mathbf{I}$ y $f_n(x) \neq 0$.

Si $Q(x) \neq 0$ la E.D.O se denomina una E.D.O. Lineal de orden n inhomogénea. Si $Q(x) = 0$ se llama una E.D.O. Lineal de orden n homogénea.

Teorema: Si $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son todas funciones contínuas sobre un intervalo común $\mathbf{I}$, y $f_n(x) \neq 0$ cuando $x \in \mathbf{I}$, entonces la ecuación diferencial

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)\,,$$

tiene una y sólo una solución

$$y = y(x)\,,$$

que satisface el conjunto de condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n)}(x_0) = y_{n-1}\,.$$

Donde $x_0 \in \mathbf{I}$ y $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ son constantes.

Estudiemos algunas propiedades

1. La ecuación diferencial homogénea asociada a la ecuación (7.1), es decir, cuando $Q(x) = 0$:

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0\,, \tag{7.2}$$

   tienen n soluciones linealmente independientes: $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots, y_n(x)$.

2. La combinación lineal de esas soluciones

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + \cdots + c_ny_n(x)\,,$$

   donde $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son un conjunto de constantes arbitrarias, es también una solución de (7.2). De dice que se tiene una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación (7.2).

3. La función

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,,$$

   donde $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea (7.1), es una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación (7.1).

4. Si $y_p(x)$ es una solución particular de (7.1), entonces $\alpha y_p(x)$ es una solución de (7.1) si reemplazamos $Q(x)$ por $\alpha Q(x)$.

Borrador Preliminar

5. Si $y_{p1}(x)$ es una solución de:

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q_1(x)$$

y $y_{p2}(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q_2(x)$$

entonces $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q_1(x) + Q_2(x)\,.$$

Esta propiedad se conoce como el Principio de Superposición.

6. Si $y_p(x) = u(x) + iv(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = R(x) + iC(x)\,,$$

entonces, la función $u(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = R(x)\,,$$

y la parte imaginaria $v(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = C(x)\,,$$

7.1. Lineales homogéneas con coeficientes constantes

Por lo general, las ecuaciones del tipo (7.1) donde los coeficientes $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ no presentan ningún tipo de restricción no tienen soluciones exactas. Recordemos que las soluciones exactas son aquellas que se pueden escribir en términos de funciones elementales. Sin embargo, si los coeficientes de (7.1) son todos constantes es posible obtener soluciones exactas.

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0\,, \tag{7.3}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

Consideremos (¡o adivinemos!) que una posible solución a la ecuación (7.3) tiene la forma

$$y(x) = e^{mx}\,. \tag{7.4}$$

Ahora bien, ¿que forma debe tener m para que (7.4) sea la solución de (7.3)? Sustituyamos la solución de prueba (7.4) en (7.3):

$$\begin{aligned} a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{mx} &+ a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} e^{mx} + \cdots + a_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} e^{mx} + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{mx} + a_0 e^{mx} \\ a_n m^n e^{mx} &+ a_{n-1} m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0 \\ a_n m^n &+ a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \end{aligned} \tag{7.5}$$

De esta manera hemos respondido a la pregunta: el valor de m que hace que (7.4) sea la solución de (7.3) es aquel valor que satisface ésta última ecuación algebraica de grado n. La ecuación (7.5) tendrá por lo

Borrador Preliminar

menos n raíces que denotaremos por: $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$. Esto significa que cada función $y_i(x) = e^{m_i x}$ con $i = 1, 2, 3 \ldots$ será una solución de (7.3).

La ecuación (7.5) se denomina *Ecuación Característica* de (7.3) y se obtiene de una manera muy sencilla simplemente intercambiando $y'(x)$ por m y el orden de la derivada por su correspondiente valor numérico. Por ejemplo:

$$5y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0 \;\Rightarrow\; 5m^2 + 3m + 1 = 0\,.$$

Como se puede ver, la ecuación característica

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0\,,$$

condicionará la solución de la siguiente forma

1. Si m es una raíz real con multiplicidad $k \geqq 2$ entonces las k soluciones asociadas con m serán de la forma
$$e^{mx}, xe^{mx}, x^2e^{mx}, x^3e^{mx}, \cdots, x^{k-1}e^{mx}\,.$$

2. Si m y $\overline{m}$ son parejas de soluciones complejas, $\alpha \pm i\beta$, del polinomio característico y tienen multiplicidad k, entonces las soluciones correspondientes serán
$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x), \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^{k-1}e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)\,.$$

Podemos ver algunos casos y ejemplos

- La ecuación
$$24y''' + 2y'' - 5y' - y = 0 \;\Leftrightarrow\; 24r^3 + 2r^2 - 5r - 1 = (3r+1)(2r-1)(4r+1) = 0\,,$$
consecuentemente tendrá las raíces
$$m_1 = -\frac{1}{3}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad m_3 = -\frac{1}{4},$$
y una solución de la forma
$$y(x) = C_1 e^{-x/3} + C_2 e^{x/2} + C_3 e^{-x/4}\,.$$

- La ecuación
$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \;\Leftrightarrow\; r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0\,,$$
con las raíces $m = -1$ y con multiplicidad $k = 3$, tendrá una solución de la forma
$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}\,.$$

- La ecuación
$$4y^{(4)} + 12y''' + 49y'' + 42y' + 10y = 0 \;\Leftrightarrow\; 4r^4 + 12r^3 + 49r^2 + 42r + 10 = (r^2 + 2r + 10)(2r+1)^2 = 0\,,$$
con raíces
$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad m_3 = -\frac{1}{2}, \text{ con multiplicidad } 2\,.$$
Tendrá como solución
$$y(x) = e^{-x}\left[C_1\cos(3x) + C_2\mathrm{sen}(3x)\right] + C_3 e^{-x/2} + C_4 x e^{-x/2}$$

Borrador Preliminar

- La ecuación

$$y^{(4)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0 \;\Leftrightarrow\; r^4 + 4r^3 + 24r^2 + 40r + 100 = (r^2 + 2r + 10)^2 = 0\,,$$

tendrá las raíces

$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad \text{con multiplicidad } 2\,.$$

Y una solución de la forma

$$y(x) = e^{-x}\left[C_1\cos(3x) + C_2\text{sen}(3x) + C_3\; x\cos(3x) + C_4\; x\text{sen}(3x)\right]$$

- La ecuación

$$4y''' + 33y' - 37y = 0\,,$$

con

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 3 \;\Leftrightarrow\; 4r^3 + 33r - 37 = (r-1)(4r^2 + 4r + 37) = 0\,,$$

consecuentemente con una solución general de la forma

$$y(x) = C_1 e^x + e^{-x/2}\left[C_2\cos(3x) + C_3\text{sen}(3x)\right]\,,$$

y con la solución particular

$$y(x) = \frac{8}{45}e^x - e^{-x/2}\left[\frac{8}{45}\cos(3x) + \frac{19}{45}\text{sen}(3x)\right].$$

Como pudimos ver, al buscar las raíces de la ecuación característica puede ocurrir varios casos los cuales vamos a resumir a continuación.

7.1.1. Las raíces de la ecuación característica son todas diferentes

Cuando las n raíces de la ecuación (7.5) son distintas entonces las n soluciones linealmente independientes de (7.3) se pueden escribir como:

$$y_1(x) = e^{m_1 x}\,,\; y_2(x) = e^{m_2 x}\,,\; y_3(x) = e^{m_3 x}\,, \quad \ldots \quad , y_n(x) = e^{m_n x}\,,$$

por lo tanto, la solución general de (7.3) será

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}\,.$$

7.1.2. Las raíces de la ecuación característica se repiten

Cuando la ecuación característica tiene una raíz $m = a$ que se repite k veces, entonces la solución general de (7.3) es

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{k-1}\right) e^{ax}$$

Si la ecuación característica presenta raíces múltiples puede ser que la ecuación característica se pueda escribir como una colección de productos de términos, por ejemplo, supongamos que la ecuación característica se puede factorizar de la forma siguiente

$$m^2(m-a)^3(m+b)^4(m+c) = 0\,,$$

Borrador Preliminar

en este caso se tiene que las raíces son

$$\begin{array}{rclcl} m & = & 0 & (2 \text{ veces}) & \rightarrow & y_1 = c_1 + c_2 x \\ m & = & a & (3 \text{ veces}) & \rightarrow & y_2 = \left(c_3 + c_4 x + c_5 x^2\right) e^{ax} \\ m & = & -b & (4 \text{ veces}) & \rightarrow & y_3 = \left(c_6 + c_7 x + c_8 x^2 + c_9 x^3\right) e^{-bx} \\ m & = & -c & (1 \text{ vez}) & \rightarrow & y_4 = c_{10} e^{-cx} \end{array}$$

La solución general será entonces

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \left(c_3 + c_4 x + c_5 x^2\right) e^{ax} + \left(c_6 + c_7 x + c_8 x^2 + c_9 x^3\right) e^{-bx} + c_{10} e^{-cx} .$$

7.1.3. Las raíces de la ecuación característica son números complejos

Puede suceder también que las raíces resultantes sean números complejos. En este caso es bueno notar que si lo coeficientes de la ecuación característica son todos reales, entonces las raíces imaginarias que puedan aparecer lo harán en la forma de pares conjugados, es decir, que si $a+ib$ es una raíz entonces $a-ib$ también lo será. Supongamos por un momento que $m_1 = a+ib$ y $m_2 = a-ib$ son dos raíces de la ecuación característica, entonces la solución de la ecuación diferencial de segundo orden asociada será:

$$y(x) = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x} = c_1 e^{ax} e^{ibx} + c_2 e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}\left[c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}\right]$$

si utilizamos la fórmula de Euler

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & e^{ax}\left[c_1\{\cos(bx) + i\text{sen}(bx)\} + c_2\{\cos(bx) - i\text{sen}(bx)\}\right] \\ & = & e^{ax}\left[(c_1 + c_2)\cos(bx) + i(c_1 - c_2)\,\text{sen}(bx)\right] \\ & = & e^{ax}\left[\mathcal{C}_1 \cos(bx) + i\,\mathcal{C}_2\,\text{sen}(bx)\right] \end{array}$$

lo que viene a ser una segunda manera de escribir la solución de la ecuación diferencial.

7.1.4. Ejemplos

1. Queremos encontrar la solución general de

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 .$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$m^3 + 2m^2 - m - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -1 \\ m_3 = -2 \end{array}\right.$$

por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} .$$

2. Intentemos encontrar la solución general de

$$y'''' - 3y'' + 2y' = 0 .$$

Borrador Preliminar

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$m^4 - 3m^2 + 2m = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \\ m_3 = 1 \\ m_4 = -2 \end{cases}$$

la solución será

$$y(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)\, e^x + c_4 e^{-2x}\,.$$

3. Encontremos la solución general de

$$y'''' + 2y'' + 1 = 0\,.$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \left(m^2+1\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m_1 = i \\ m_2 = i \\ m_3 = -i \\ m_4 = -i \end{cases}$$

la solución será entonces de la forma

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{ix} + (c_3 + c_4 x)e^{-ix}\,.$$

4. Veamos otro ejemplo, encontrar la solución general de

$$y''' - 8y'' + 22y' - 20y = 0\,.$$

La ecuación característica asociada es

$$m^3 - 8m^2 + 22m - 20 = 0 \;\Rightarrow\; (m-2)\left(m^2 - 6m + 10\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 3 + i \\ m_3 = 3 - i \end{cases}$$

la solución será:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{(3+i)x} + c_3 e^{(3-i)x} \\ &= c_1 e^{2x} + e^{3x}\left[c_2 e^{ix} + c_3 e^{-ix}\right] \\ &= c_1 e^{2x} + e^{3x}\left[\mathcal{C}_2 \cos(x) + i\,\mathcal{C}_3 \operatorname{sen}(x)\right]\,. \end{aligned}$$

7.1.5. Practicando con Maxima

7.1.6. Ejercicios

7.2. Lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Antes de entrar de lleno en los métodos de solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas vamos a estudiar una herramienta que es utilizada para demostrar que un conjunto de soluciones es linealmente independiente. Hablaremos de el wronskiano.

Pero primero que todo recordemos el concepto de independencia y dependencia lineal de funciones.

Borrador Preliminar

Definición: Independencia y dependencia lineal.

Sean n funciones $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)$, cuando menos $n-1$ veces diferenciables. Entonces, el conjunto $S = \{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)\}$, se dice linealmente dependiente en el intervalo I, si existen algunas constantes, $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \cdots c_n$ distintas de cero tal que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\ f_i(x) = c_1\ f_1(x) + c_2\ \ f_2(x) + \cdots + c_n\ f_n(x) = 0$$

Por el contrario, si no existe ninguna constante $c_i \neq 0$, se dirá que S es linealmente independiente.

7.2.1. El wronskiano

Definición: Wronskiano.

El conjunto $S = \{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)\}$ de funciones, cuando menos $n-1$ veces diferenciables, conforman el wronskiano,

$$W(S) = W(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x))$$

a través del siguiente determinante

$$W(S) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si $W(S) \neq 0$ al menos en un punto dentro del intervalo I, entonces S es linealmente independiente

Definamos ahora lo que se denomina un conjunto fundamental de soluciones.

Definición: Conjunto fundamental de soluciones.

El conjunto $S = \{f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots f_n(x)\}$ de n soluciones no triviales a la ecuación diferencial:

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_n(x)\ y^{(n)}(x) = 0, \tag{7.6}$$

Se le denomina conjunto fundamental de soluciones.

La combinación lineal

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\ f_i(x) = c_1\ f_1(x) + c_2\ \ f_2(x) + \cdots + c_n\ f_n(x)$$

también es solución de la ecuación diferencial (7.6) y se denomina como solución general de (7.6).

Adicionalmente, si los coeficientes $a_i(x)$ son continuos en el intervalo abierto I, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, entonces la ecuación diferencial (7.6) tiene un conjunto fundamental de n soluciones linealmente independientes.

Esto nos lleva a distinguir entre los diferentes tipos de soluciones.

Definición: Soluciones particulares y generales.
Dada una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_n(x)\ y^{(n)}(x) = Q(x) \tag{7.7}$$

Si $y_p(x)$ es solución de (7.7) sin constantes arbitrarias, entonces $y_p(x)$ se denomina solución particular de (7.7). De igual modo, se denominará solución general de (7.7) a la suma de la solución, $y_h(x)$, de la ecuación homogénea (7.6) más la solución particular:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Anteriormente vimos que la solución general de la ecuación diferencial

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,,$$

se puede escribir como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,,$$

donde $y_h(x)$ es la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a la no homogénea, es decir, cuando $Q(x) = 0$, y $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Como ya sabemos de un método para resolver la ecuación homogénea queda preguntarse como se hace para calcular una solución particular. Veamos algunos métodos.

7.2.2. El método de los coeficientes indeterminados

Este método se utiliza si la función $Q(x)$ esta conformada por funciones que tienen un número finito de derivadas linealmente independientes, es decir, que $Q(x)$ contenga únicamente términos del tipo: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$ y combinaciones lineales de tales términos. Por ejemplo, si $Q(x) = \operatorname{sen}(ax)$ podemos construir un conjunto con las derivadas sucesivas, esto es:

$$\operatorname{sen}(ax) \ \to\ \left\{a\cos(ax)\,,\ -a^2\operatorname{sen}(ax)\,,\ -a^3\cos(ax)\,,\ a^4\operatorname{sen}(ax)\ldots\right\}$$

pero de este conjunto infinito únicamente las funciones: $\{\operatorname{sen}(ax)\,,\ \cos(ax)\}$ son linealmente independientes. Otros ejemplos son:

$$\begin{array}{ccc} x^3 & \to & \left\{3x^2\,,\ 6x\,,\ 6\right\} \\ \dfrac{1}{x} & \to & \left\{-\dfrac{1}{x^2}\,,\ \dfrac{2}{x^3}\,,\ -\dfrac{6}{x^4}\,,\ldots\right\} \end{array}$$

Podemos estudiar el wronskiano de este conjunto de funciones para ver si son linealmente independientes. Para el ejemplo anterior tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(ax) & \cos(ax) \\ a\cos(ax) & -a\operatorname{sen}(ax) \end{vmatrix} &= -a\operatorname{sen}^2(ax) - a\cos^2(ax) \\ &= -a\left[\operatorname{sen}^2(ax) + \cos^2(ax)\right] = -a \neq 0\,. \end{aligned}$$

Volviendo al punto que tiene que ver con la búsqueda de $y_p(x)$, para el método de los coeficientes indeterminados necesitamos comparar los términos de $Q(x)$ con los de $y_h(x)$ y pueden resultar los siguientes casos:

Borrador Preliminar

Caso 1 La funciones $Q(x)$ y $y_h(x)$ no contienen términos en común. En este caso, se construye una solución particular $y_p(x)$ con el conjunto conformado por $Q(x)$ y todas sus derivadas linealmente independientes.

Por ejemplo, encontremos la solución general de

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x \,.$$

Si resolvemos la ecuación homogénea: $y'' + 4y' + 4y = 0$, encontraremos que

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

Queda claro que $Q(x)$ y $y_h(x)$ no contienen términos en común. La solución particular la construiremos de esta manera:

$$Q(x) = 4x^2 + 6e^x \quad \to \quad \underbrace{\left\{x^2\,,\,x\,,\,1\right\}}_{x^2} \quad \cup \quad \underbrace{\left\{e^x\right\}}_{e^x}$$

No hace falta tomar en cuenta las constantes. La solución particular será una combinación lineal de los elementos que resultan de la unión de esos conjuntos

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$$

donde las constantes A, B, C, D tendrán que ser determinadas.

Una vez que la solución es propuesta, no queda más que derivar y sustituir en la ecuación diferencial problema:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ax + B + De^x \\ y_p''(x) &= 2A + De^x \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} [2A + De^x] + 4\,[2Ax + B + De^x] + 4\left[Ax^2 + Bx + C + De^x\right] &= 4x^2 + 6e^x \\ 4Ax^2 + [8A + 4B]\,x + [2A + 4B + 4C] + 9De^x &= 4x^2 + 6e^x \end{aligned}$$

igualando coeficientes

$$\left\{\begin{aligned} 4A &= 4 \\ 8A + 4B &= 0 \\ 2A + 4B + 4C &= 0 \\ 9D &= 6 \end{aligned}\right. \Rightarrow \; A = 1\,,\, B = -2\,,\, C = \frac{3}{2}\,,\, D = \frac{2}{3}\,,$$

por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$$

Caso 2 Los términos de $Q(x)$ aparecen como x^k veces un término de la solución $y_h(x)$, donde k es un entero positivo. Esto es, si la función $y_h(x)$ contiene un término, digamos $u(x)$, tal que un término de $Q(x)$ es $x^k u(x)$ entonces una solución particular se puede construir con una combinación lineal de $x^{k+1}u(x)$ y todas las derivadas linealmente independientes. En todo lo anterior se ignoran las constantes. Si $Q(x)$ contienen términos que cumplen con el Caso 1 estos también deben ser agregados a la solución particular.

Borrador Preliminar

Por ejemplo, dada la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}\,.$$

Si resolvemos la ecuación homogénea: $y'' - 3y' + 2y = 0$, encontraremos que

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 \underbrace{e^{2x}}_{u(x)}$$

Notemos que

$$Q(x) = 2x^2 + 3\,\underbrace{e^{2x}} \quad \to \quad e^{2x} = x^0\,\overbrace{e^{2x}}^{u(x)} \quad \to \quad k = 0\,.$$

La solución particular se puede construir a partir del siguiente conjunto:

$$\underbrace{\left\{xe^{2x}\,,\,e^{2x}\right\}}_{x^{0+1}e^{2x}} \quad \cup \quad \underbrace{\left\{x^2\,,\,x\,,\,1\right\}}_{x^2}$$

Del primer conjunto no tomamos en cuenta el término e^{2x} porque éste ya aparece en $y_h(x)$. Por lo tanto, la solución particular será una combinación lineal de los elementos que resultan de la unión de esos conjuntos:

$$\left\{xe^{2x}\,,\,x^2\,,\,x\,,\,1\right\}\,,$$

esto significa que proponemos como solución particular la siguiente:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}\,.$$

Derivando:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x} \\ y_p''(x) &= 2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x}\,. \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} \left[2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x}\right] - 3\left[2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x}\right] + 2\left[Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}\right] &= 2x^2 + 3e^{2x} \\ 2Ax^2 + \left[2B - 6A\right]x + \left[2A - 3B + 2C\right] + De^{2x} &= 2x^2 + 3e^{2x}\,. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\left\{\begin{aligned} 2A &= 2 \\ 2B - 6A &= 0 \\ 2A - 3B + 2C &= 0 \\ D &= 3 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad A = 1\,,\, B = 3\,,\, C = \frac{7}{2}\,,\, D = 3\,,$$

por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x}\,.$$

Caso 3 Este caso se aplica si se cumplen las siguientes condiciones

Borrador Preliminar

1. La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea tiene una raíz multiple que se repite r veces.
2. $Q(x)$ contiene un término que es x^k veces un término, digamos $u(x)$, de la solución $y_h(x)$. La función $u(x)$ se obtiene de la raíz múltiple.

En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y todas las derivadas linealmente independientes. Si además $Q(x)$ contiene términos que correspondan al Caso 1 estos deben agregarse.

Por ejemplo, dada la ecuación

$$y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}\,.$$

Si resolvemos la ecuación homogénea: $y'' + 4y' + 4y = 0$, encontraremos que

$$y_h(x) = c_1e^{-2x} + c_2x\underbrace{e^{-2x}}_{u(x)} \;\Rightarrow\; m_1 = -2\,,\, m_2 = -2 \;\Rightarrow\; r = 2$$

Notemos que

$$Q(x) = 3\underbrace{xe^{-2x}} \;\Rightarrow\; xe^{-2x} = x^1\,\overbrace{e^{-2x}}^{u(x)} \;\Rightarrow\; k = 1\,.$$

La solución particular se puede construir a partir del siguiente conjunto:

$$\underbrace{\left\{x^3e^{-2x}\,,\, x^2e^{-2x}\,,\, xe^{-2x}\,,\, e^{-2x}\right\}}_{x^{1+2}e^{-2x}}$$

No tomaremos en cuenta los términos $\left\{xe^{-2x}\,,\, e^{-2x}\right\}$ porque estos ya aparecen en $y_h(x)$. Por lo tanto, la solución particular será la siguiente combinación lineal

$$y_p(x) = Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}\,.$$

Se deriva

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -2Ax^3e^{-2x} + 3Ax^2e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} + 2Bxe^{-2x} \\ y_p''(x) &= 4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x} \end{aligned}$$

Se sustituye en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \left[4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x}\right] &+ \\ 4\left[-2Ax^3e^{-2x} + 3Ax^2e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} + 2Bxe^{-2x}\right] + 4\left[Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}\right] &= 3xe^{-2x} \\ 6Axe^{-2x} + 2Be^{-2x} &= 3xe^{-2x} \end{aligned}$$

igualando coeficientes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6A &=& 3 \\ 2B &=& 0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad A = \frac{1}{2}\,,\, B = 0\,,$$

por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^3e^{-2x}\,.$$

Borrador Preliminar

7.2.3. Método de la variación de parámetros

Vamos a continuar con el estudio de los métodos para resolver ecuaciones del tipo:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,, \tag{7.8}$$

donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

El método de los coeficientes indeterminados, para encontrar una solución particular de (7.30), esta limitado por la condición de que la función $Q(x)$ sea una función con la que se pueda construir un conjunto finito de derivadas linealmente independientes. Estudiemos un método que quita esta restricción.

Por simplicidad, para desarrollar este método vamos a considerar el caso $n = 2$, luego veremos como generalizar al caso de orden n. Es decir, vamos a estudiar la ecuación

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,, \quad a_2 \neq 0\,, \tag{7.9}$$

donde $Q(x)$ es una función continua y diferente de cero. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son un par de soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada a (7.9), es decir, de la ecuación

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0\,, \tag{7.10}$$

entonces, vamos a proponer que una solución particular de la ecuación (7.9) es de la forma:

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)\,, \tag{7.11}$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son dos funciones a determinar.

Derivando:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x) \\
&= [u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)] + [u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)] \\
y_p''(x) &= u_1''(x)y_1(x) + u_1'(x)y_1'(x) + u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) \\
&+ u_2''(x)y_2(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x) \\
&= [u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x)] + [u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)] + [u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_1(x)]'
\end{aligned}$$

y sustituyendo en (7.9) resulta:

$$\begin{aligned}
a_2\,[u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x)] &+ a_2\,[u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)] + a_2\,[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)]' + \\
a_1\,[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)] &+ a_1\,[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)] + a_0\,[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)] = Q(x)
\end{aligned}$$

acomodando términos:

$$\begin{aligned}
u_1(x)\overbrace{[a_2y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_0y_1(x)]}^{=0} &+ u_2(x)\overbrace{[a_2y_2''(x) + a_1y_2'(x) + a_0y_2(x)]}^{=0} + \\
a_2\,[u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)] &+ a_2\,[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)]' + a_1\,[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)] = Q(x)
\end{aligned}$$

Es claro que lo que tenemos es una ecuación con dos incógnitas: $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, pero como buscamos una solución particular podemos tomar de esta última ecuación el siguiente caso:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) &=& 0 \\[2ex]
u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) &=& \dfrac{Q(x)}{a_2}
\end{array}\right. \tag{7.12}$$

Borrador Preliminar

La solución de este sistema resulta ser:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_1(x)\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = G_2(x)$$

Integrando y omitiendo las constantes de integración:

$$u_1(x) = \int G_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u_2(x) = \int G_2(x)\,\mathrm{d}x$$

por lo tanto, la solución general es:

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)\,.$$

Si la ecuación diferencial es de orden n, se puede demostrar que

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x) \tag{7.13}$$

será una solución particular de la ecuación no homogénea, donde $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son las n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea.

Sustituyendo la ecuación (7.13), para la solución particular, en la ecuación diferencial y siguiendo el mismo procedimiento que para el caso de orden 2 se tendría que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + \cdots + u_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & \dfrac{Q(x)}{a_n} \end{array}\right.$$

Consideremos un ejemplo, encontremos la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)\,.$$

Cuando se resuelve la ecuación diferencial homogénea asociada a la ecuación diferencial del problema se tiene

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \;\Rightarrow\; y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}\,,$$

por lo tanto: $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$.

Como ya hicimos el desarrollo para $n = 2$ podemos ir directamente al sistema resultante:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} & = & 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} & = & \dfrac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{1} \end{array}\right.$$

Al resolver el sistema resulta:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \operatorname{sen}\left(e^{-x}\right) & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^{3x}}\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \operatorname{sen}\left(e^{-x}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^x\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^{3x}}$$

Borrador Preliminar

Figura 7.1: A la izquierda la solución $y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^{x}$ y a la derecha la solución $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{x}$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

Integrando por partes:

$$u_1(x) = -\int \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^{x}}\,\mathrm{d}x = -\cos\left(e^{-x}\right)\ , \quad u_2(x) = \int \frac{\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right) + e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)$$

La solución particular es entonces:

$$y_p(x) = -\cos\left(e^{-x}\right)e^{x} + \left[-\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right) + e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)\right]e^{2x} = -e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)\ ,$$

por lo tanto, la solución general resulta ser

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{2x} - e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^{-x}\right)$$

7.2.4. Ejemplos

1. La ecuación

$$a\ y'' + b\ y' + c\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\ r^2 + b\ r + c = 0$$

tiene asociada ese polinomio característico y sus raíces m_1 y m_2 condicionan la solución de la manera siguiente:

a) Si $m_1 \neq m_2$ y m_1 y m_2 son reales, entonces la solución es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

b) Si $m_1 = m_2$ y m_1 y m_2 son reales, entonces la solución es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2\ xe^{m_1x}$$

c) Si $m_1 = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ y $m_2 = \overline{m}_1 = \alpha - i\beta$, entonces la solución es

$$y = e^{\alpha x}\left[C_1\cos(\beta x) + C_2\ \operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

Borrador Preliminar

Figura 7.2: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2\, xe^{-x}$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

2. La ecuación

$$y'' + 3y' - 4y = 0; \qquad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 3r - 4 = (r+4)(r-1) = 0$$

tiene asociado ese polinomio característico y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^{x}$$

En la figura 7.1 se encuentra graficada esa solución particular. De igual modo, para distintos valores de $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$ tendremos las gráficas representadas en la figura 7.1 ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

3. Otra ejemplo es el siguiente, dada la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0; \qquad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \;\Leftrightarrow\; r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0\,,$$

que tiene como solución general

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2\, xe^{-x} \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = e^{-x}$$

Para distintos valores de $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$ tendremos las gráficas representadas en la figura 7.2. Cabe seguir preguntando ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

4. Finalmente, la ecuación

$$y'' + 4y' + 20y = 0; \qquad y(0) = 3 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \;\Leftrightarrow\; r^2 + 4r + 20 = (r+2)^2 + 16 = 0$$

con las siguientes soluciones $r = -2 \pm 4i$ y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = e^{-2x}\;\left[C_1 \cos(4x) + C_2 \mathrm{sen}(4x)\right]\,,$$

y como solución particular

$$y(x) = e^{-2x}\;\left[3\cos(4x) + \frac{5}{4}\mathrm{sen}(4x)\right]\,.$$

Borrador Preliminar

Figura 7.3: A la izquierda la solución $y(x) = e^{-2x}\ \left(3\cos 4x + \frac{5}{4}\text{sen}4x\right)$ y a la derecha la solución $y(x) = e^{-2x}\ (C_1 \cos 4x + C_2 \text{sen}4x)$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

La representación gráfica se encuentra en la figura 7.3 y para distintos valores de las constantes. Al igual que en los casos anteriores, para distintos valores de las constantes de integración, tendremos las gráficas de la figura 7.3

5. Otro ejemplo interesante es la ecuación inhomogénea de Cauchy[1]-Euler[2]

$$a_0\ y(x) + a_1\ x\ y'(x) + \cdots + a_n\ x^n\ y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

con los $a_i = ctes$, puede ser resuelta por este método. Consideremos una ecuación de orden 2

$$c\ y(x) + b\ x\ y'(x) + a\ x^2\ y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

La solución de la homogénea se propone como $y_h = x^m$ por lo tanto

$$\begin{aligned} c\ y(x) + b\ x\ y'(x) + a\ x^2\ y''(x) &= 0 \\ c\ x^m + b\ x\ mx^{m-1} + a\ x^2\ m(m-1)x^{m-2} &= 0 \\ x^m\ (c + bm + am(m-1)) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

con

$$m = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo tanto

a) Si $m_1 \neq m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

[1] **Louis Augustin Baron de Cauchy** (1789-1857). Matemático francés, uno de los creadores del análisis matemático moderno. Estudió, entre otras cuestiones, los criterios de convergencia de series, las funciones de variable compleja y los sistemas de ecuaciones diferenciales

[2] **Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo. Destacó en el estudio de diversas cuestiones del cálculo logarítmico y diferencial, así como de las series algebraicas y la trigonometría.

Borrador Preliminar

b) Si $m_1 = m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{m_1}\left(C_1 + C_2\ \ln x\right)$$

c) Si $m_1 = \overline{m}_2 = \alpha + i\beta$, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{\alpha}\left(C_1 \cos(\beta\ \ln x) + C_2\ \mathrm{sen}(\beta\ \ln x)\right)$$

Ahora para lograr la solución de la inhomogénea suponemos el caso $m_1 \neq m_2$ por lo tanto

$$y_{1h} = x^{m_1} \quad y_{2h} = x^{m_2}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1\ x^{m_1-1} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1\ x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1\ x^{m_1-1} & m_2\ x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1\ x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a\ x^2} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x)$$

La siguiente ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy' + 5y = \frac{1}{x}$$

tiene como solución de la homogénea

$$y_h = x\ \left(C_1 \cos(2\ \ln x) + C_2\ \mathrm{sen}(2\ \ln x)\right)$$

la solución particular por el método de variación de los parámetros queda como

$$y_p = u_1(x)\ y_{h1} + u_2(x)\ y_{h2}$$

calculando los coeficientes respectivos en donde el Wronskiano

$$W\left(x\ \cos(2\ \ln x);\ x\ \mathrm{sen}(2\ \ln x)\right) = 2x$$

por lo cual los coeficientes quedan

$$u_1 = \int \mathcal{G}_1(x)\ dx = \int \frac{x\mathrm{sen}(2\ln x)\frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4}\cos(2\ln x)$$

$$u_2 = \int \mathcal{G}_2(x)\ dx = \int \frac{x\cos(2\ln x)\frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\ln x)$$

finalmente las solución particular será

$$y_p = x\left(\frac{1}{4}\cos^2(2\ln x) + \frac{1}{4}\mathrm{sen}^2(2\ln x)\right) = \frac{1}{4}x$$

y la general

$$y = x\ \left(C_1 \cos(2\ \ln x) + C_2\ \mathrm{sen}(2\ \ln x)\right) + \frac{1}{4}x$$

Borrador Preliminar

7.2.5. Practicando con Maxima

7.2.6. Ejercicios

7.3. Lineales no homogéneas con coeficientes no constantes

Ahora vamos a desarrollar un método para resolver ecuaciones diferenciales lineales:

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)\,, \tag{7.14}$$

donde $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x en un intervalo común I, además $f_n(x) \neq 0$.

7.3.1. Método de reducción del orden

Para aplicar este método, primero que todo, debemos poder encontrar una solución (no trivial) de la ecuación diferencial homogénea asociada a (7.14)

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0\,. \tag{7.15}$$

Consideremos, por simplicidad, el caso $n = 2$:

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)\,. \tag{7.16}$$

y sea $y_1(x)$ una solución (no trivial) de la ecuación diferencial homogénea asociada a (7.16):

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0\,. \tag{7.17}$$

El método permitirá encontrar una segunda solución de la ecuación homogénea y también una solución particular de (7.16).

Sea $y_2(x)$ una segunda solución de la ecuación diferencial homogénea y vamos a suponer que tiene la forma

$$y_2(x) = y_1(x)\int u(x)\mathrm{d}x\,, \tag{7.18}$$

donde $u(x)$ es una función a determinar. Por lo tanto:

$$y_2'(x) = y_1(x)u(x) + y_1'(x)\int u(x)\mathrm{d}x \tag{7.19}$$

$$y_2''(x) = y_1(x)u'(x) + 2y_1'(x)u(x) + y_1''(x)\int u(x)\mathrm{d}x \tag{7.20}$$

sustituyendo en (7.17) resulta:

$$f_2(x)\left[y_1(x)u'(x) + 2y_1'(x)u(x) + y_1''(x)\int u(x)\mathrm{d}x\right] + f_1(x)\left[y_1(x)u(x) + y_1'(x)\int u(x)\mathrm{d}x\right] + f_0(x)\left[y_1(x)\int u(x)\mathrm{d}x\right] = 0$$

$$\left[f_2(x)y_1''(x) + f_1(x)y_1'(x) + f_0(x)y_1(x)\right]\int u(x)\mathrm{d}x + f_2(x)y_1(x)u'(x) + \left[2f_2(x)y_1'(x) + f_1(x)y_1(x)\right]u(x) = 0$$

Como el primer término de la última ecuación es idénticamente igual a cero, entonces:

$$f_2(x)y_1(x)u'(x) + \left[2f_2(x)y_1'(x) + f_1(x)y_1(x)\right]u(x) = 0\,, \tag{7.21}$$

Borrador Preliminar

acomodando términos

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} + 2\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{y_1(x)} = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{u} + 2\int \frac{\mathrm{d}y_1(x)}{y_1(x)} = -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x$$

esto es:

$$\begin{aligned}
\ln|u(x)| + 2\ln|y_1(x)| &= -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x \\
\ln|u(x)(y_1(x))^2| &= -\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x \\
u(x)(y_1(x))^2 &= \exp\left[-\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x\right] \\
u(x) &= \frac{1}{(y_1(x))^2}\exp\left[-\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si logramos integrar esta última ecuación estaremos encontrando una segunda solución linealmente independiente de (7.17):

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{(y_1(x))^2}\exp\left[-\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\,. \tag{7.22}$$

Consideremos el siguiente ejemplo para encontrar la solución general de

$$x^2y'' + xy' - y = 0\,,$$

donde $y_1 = x$ es una solución de la ecuación diferencial y $x \neq 0$.

Como esta ecuación es de orden 2, podemos ir directamente a la ecuación (7.22) en lugar de hacer el desarrollo nuevamente, esto es:

$$y_2(x) = x\int \frac{1}{x^2}\exp\left[-\int \frac{x}{x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x = x\int \frac{1}{x^2}\exp\left[-\ln|x|\right]\mathrm{d}x = x\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x}$$

por lo tanto:

$$y_h(x) = C_1x + C_2\frac{1}{x}\,.$$

Si queremos encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea (7.16), también podemos utilizar la solución de prueba (7.18). Repitiendo los cálculos que nos llevaron a la ecuación (7.21) resultará que ahora tenemos:

$$\begin{aligned}
f_2(x)y_1(x)u'(x) + \left[2f_2(x)y_1'(x) + f_1(x)y_1(x)\right]u(x) &= Q(x) \\
u'(x) + \left[2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]u(x) &= \frac{Q(x)}{f_2(x)y_1(x)}
\end{aligned} \tag{7.23}$$

y esta ecuación es simplemente una ecuación diferencial lineal de primer orden para $u(x)$. Esto significa que debemos encontrar el factor integrador

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left[2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]\mathrm{d}x\right)$$

Borrador Preliminar

para luego escribir la solución:

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) \frac{Q(x)}{f_2(x) y_1(x)} \mathrm{d}x + \frac{C}{\mu(x)} \,. \tag{7.24}$$

Consideremos otro ejemplo para encontrar la solución de

$$x^2 y'' + x y' - y = x \,,$$

En el ejemplo anterior vimos que la ecuación homogénea tiene dos soluciones linealmente independientes:

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \;\Rightarrow\; y_1(x) = x \,,\; y_2(x) = x^{-1}$$

Podemos entonces proponer la siguiente solución particular para la ecuación diferencial no homogénea:

$$y_p(x) = x \int u(x) \mathrm{d}x \,,$$

En lugar de repetir los cálculos que consisten en derivar $y_p(x)$ un par de veces y sustituir en la ecuación diferencial problema, podemos ir directamente al grano pues ya sabemos el resultado, esto es, la ecuación (7.23):

$$u'(x) + \left[2\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2} \right] u(x) = \frac{x}{x^3} \quad \Rightarrow \quad u'(x) + \frac{3}{x} u(x) = \frac{1}{x^2}$$

el factor integrador para esta ecuación es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} \mathrm{d}x} = e^{\ln |x|^3} = x^3$$

por lo tanto:

$$u(x) = \frac{1}{x^3} \int \frac{x^3}{x^2} \mathrm{d}x + \frac{C}{x^3} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{x^3} \int x \mathrm{d}x + \frac{C}{x^3} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{x^3} \frac{x^2}{2} + \frac{C}{x^3}$$

Como lo que queremos es una solución particular podemos omitir la constante de integración:

$$u(x) = \frac{1}{2x}$$

y la solución particular es entonces

$$y_p(x) = x \int \frac{1}{2x} \mathrm{d}x = \frac{x}{2} \ln |x|$$

La solución general de la ecuación diferencial resulta ser:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-1} + \frac{x}{2} \ln |x| \,.$$

7.3.2. La ecuación de Euler

La ecuación inhomogénea de Cauchy[3]-Euler[4] es la siguiente

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = Q(x) \tag{7.25}$$

[3] **Louis Augustin Baron de Cauchy** (1789-1857). Matemático francés, uno de los creadores del análisis matemático moderno. Estudió, entre otras cuestiones, los criterios de convergencia de series, las funciones de variable compleja y los sistemas de ecuaciones diferenciales.

[4] **Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo. Destacó en el estudio de diversas cuestiones del cálculo logarítmico y diferencial, así como de las series algebraicas y la trigonometría.

Borrador Preliminar

donde los a_i son constantes. Esta ecuación puede ser resuelta por el método que se describe a continuación.

Consideremos, por razones de simplicidad, una ecuación de orden 2:

$$a_2x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_0y(x) = Q(x)\,.$$

Propondremos que la ecuación homogénea tiene como solución una función de la forma: $y = x^m$, esto es:

$$\begin{aligned} a_2x^2y''(x) + a_1xy'(x) + a_0y(x) &= 0 \\ a_2x^2m(m-1)x^{m-2} + a_1xmx^{m-1} + a_0x^m &= 0 \\ x^m\left[a_2m(m-1) + a_1m + a_0\right] &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$a_2m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{-(a_1 - a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}\,.$$

Esto significa que se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si $m_1 \neq m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$$

2. Si $m_1 = m_2 = m$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^m\left(C_1 + C_2\ \ln|x|\right)$$

3. Si $m_1 = \overline{m}_2 = \alpha + i\beta$, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^\alpha\left[C_1\cos(\beta\ \ln|x|) + C_2\ \mathrm{sen}(\beta\ \ln|x|)\right]\,.$$

Para buscar la solución de la ecuación inhomogénea vamos a suponer el caso $m_1 \neq m_2$, por lo tanto, tomaremos como punto de partida las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$$y_1 = x^{m_1} \quad y_2 = x^{m_2}\,.$$

Podemos aplicar el método de variación de parámetros que vimos anteriormente. (Queda como ejercicio repetir los cálculos que llevaron al sistema (7.12)). Por lo tanto, en nuestro caso resulta que

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \dfrac{Q(x)}{a_2x^2} & m_2x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1x^{m_1-1} & m_2x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \mathcal{G}_1(x)\,, \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1x^{m_1-1} & \dfrac{Q(x)}{a_2x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1x^{m_1-1} & m_2x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \mathcal{G}_2(x)$$

Consideremos el siguiente ejemplo.

$$x^2y'' - xy' + 5y = \frac{1}{x}$$

tiene como solución de la homogénea:

$$y_h = x\left[C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\ \mathrm{sen}(2\ln|x|)\right]\,,$$

Borrador Preliminar

la solución particular por el método de variación de los parámetros queda como

$$y_p = u_1(x)\ y_1 + u_2(x)\ y_2\,,$$

calculando los coeficientes respectivos, en donde el Wronskiano es:

$$W\left[x\cos(2\ln|x|)\ ;\ x\ \mathrm{sen}(2\ln|x|)\right] = \begin{vmatrix} x\cos(2\ln|x|) & x\ \mathrm{sen}(2\ln|x|) \\ \cos(2\ln|x|) - 2\ \mathrm{sen}(2\ln|x|) & \mathrm{sen}(2\ln|x|) + 2\cos(2\ln|x|) \end{vmatrix} = 2x\,,$$

resulta:

$$u_1 = \int \mathcal{G}_1(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{sen}(2\ln|x|)}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cos(2\ln|x|)\,,$$
$$u_2 = \int \mathcal{G}_2(x)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\cos(2\ln|x|)}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\ln|x|)\,,$$

finalmente las solución particular será

$$y_p = x\left(\frac{1}{4}\cos^2(2\ln|x|) + \frac{1}{4}\mathrm{sen}^2(2\ln|x|)\right) = \frac{1}{4}x\,,$$

por lo tanto, la solución general es:

$$y = x\left[C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\ \mathrm{sen}(2\ln|x|)\right] + \frac{1}{4}x\,.$$

La ecuación de Euler puede representarse de una manera más general:

$$a_0y(x) + a_1(x-x_0)y'(x) + \cdots + a_n(x-x_0)^n y^{(n)}(x) = Q(x)\,, \tag{7.26}$$

donde x_0 también es una constante. El siguiente cambio de variable:

$$x - x_0 = e^u \quad \Rightarrow \quad u = \ln(x-x_0)$$

transforma la ecuación de Euler en una ecuación lineal con coeficientes constantes. Para ver esto, consideremos el caso $n = 3$, es decir:

$$a_0y(x) + a_1(x-x_0)y'(x) + a_2(x-x_0)^2y''(x) + a_3(x-x_0)^3y'''(x) = Q(x)\,. \tag{7.27}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} &= (x-x_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} &= (x-x_0)^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}u^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} &= (x-x_0)^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\,, \end{aligned}$$

al sustituir en la ecuación (7.27) resulta:

$$\begin{aligned} a_0y(u) \quad &+ \quad a_1(x-x_0)\left[\frac{1}{(x-x_0)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right] + a_2(x-x_0)^2\left[\frac{1}{(x-x_0)^2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right\}\right] \\ &+ \quad a_3(x-x_0)^3\left[\frac{1}{(x-x_0)^3}\left\{\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}u^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right\}\right] = Q(u) \\ a_0y(u) \quad &+ \quad a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + a_2\left\{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right\} + a_3\left\{\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}u^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right\} = Q(u)\,, \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

factorizando:

$$a_0 y(u) + (a_1 - a_2 + 2a_3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + (a_2 - 3a_3)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}u^2} + a_3\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}u^3} = Q(u)\,.$$

Esta última es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes que ya sabemos resolver.

7.3.3. Ejemplos

7.3.4. Practicando con Maxima

7.3.5. Ejercicios

1. Si $y_p(x) = \left[\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\mathrm{sen}(x)\right] + i\left[\frac{1}{10}\mathrm{sen}(x) + \frac{3}{10}\cos(x)\right]$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$. Encuentre una solución particular de:

   a) $y'' - 3y' + 2y = \cos(x)$.

   b) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sen}(x)$.

   Verifique la validez de los resultados.

2. Demuestre que la solución $y_h(x) = e^{ax}\left[\mathcal{C}_1\cos(bx) + i\,\mathcal{C}_2\,\mathrm{sen}(bx)\right]$ se puede escribir de alguna de las siguientes formas:

   $$y_h(x) = \mathcal{C}e^{ax}\mathrm{sen}(bx + \mathcal{D}) \quad \text{o} \quad y_h(x) = \mathcal{C}e^{ax}\mathrm{sen}(bx - \mathcal{D})$$

   donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son constantes.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $y'' + 2y = 0$

   b) $y'' - 3y + 2y = 0$

   c) $y'' - y = 0$

   d) $y''' + y'' - 6y' = 0$

   e) $y'' + 3y + 2y = 4$

   f) $y'' + 3y + 2y = 12e^x$

   g) $y'' + 3y + 2y = \mathrm{sen}(x)$

   h) $y'' + 3y + 2y = \cos(x)$

   i) $y'' + 3y + 2y = 8 + 6e^x + 2\mathrm{sen}(x)$

   j) $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x} + 3\mathrm{sen}\,(x)$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por variación de parámetros

   a) $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$

   b) $y'' + y' = \tan(x)\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de reducción de orden.

   a) $x^2y'' + xy' - 4y = x^3\,, \quad y_1(x) = x^2$

   b) $x^2y'' + xy' - y = x^2e^{-x}\,, \quad y_1(x) = x$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones de Euler

Borrador Preliminar

a) $(x-3)^2y'' + (x-3)y' + y = x, \quad x \neq 3$
b) $x^2y'' + xy' = 0, \quad x \neq 0$
c) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = x, \quad x \neq 0$

7. Resuelva utilizando el método de variación de parámetros y verifique los resultados

a) $y'' + y = \sec(x)$
b) $y'' + y = \sec^3(x)$
c) $y'' + 3y' + 2y = 12e^x$
d) $y'' + y = 4x\mathrm{sen}(x)$
e) $x^2y'' - xy' + y = x, \quad y_{1h} = x,\ y_{2h} = x\ln(x)$
f) $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x\ln(x), \quad y_{1h} = x,\ y_{2h} = x^2$
g) $x^2y'' + xy' - 4y = x^3, \quad y_{1h} = x^2,\ y_{2h} = x^{-2}$

8. Resuelva utilizando el método de reducción del orden y verifique los resultados

a) $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y_{1h} = x$
b) $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, \quad y_{1h} = x$
c) $(2x^2+1)y'' - 4xy' + 4y = 0, \quad y_{1h} = x$
d) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad y_{1h} = x^{1/2}$
e) $x^2y'' + xy' - 4y = x^3, \quad y_{1h} = x^2$
f) $y'' + (x^2-1)y' - x^2y = 0, \quad y_{1h} = e^x$
g) $x^2y'' - 2y = 2x^2, \quad y_{1h} = x^2$

9. Demuestre que las siguientes sustituciones

$$y = e^{\int y_1(x)\mathrm{d}x}, \quad y' = y_1(x)e^{\int y_1(x)\mathrm{d}x}, \quad y'' = y_1^2(x)e^{\int y_1(x)\mathrm{d}x} + y_1'(x)e^{\int y_1(x)\mathrm{d}x},$$

transforman la ecuación lineal

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

en la siguiente ecuación de Riccati:

$$y_1' = -\frac{f_0(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)}y_1 - y_1^2$$

donde, si $y_1(x)$ es solución de la ecuación de Riccati, entonces $y = e^{\int y_1(x)\mathrm{d}x}$ es solución de la ecuación lineal. Aplique las sustituciones anteriores para trasformar la ecuación

$$xy'' - y' - x^3y = 0.$$

en una ecuación de Riccati y trate de resolver estas dos ecuaciones.

Borrador Preliminar

7.4. El operador diferencial y las ecuaciones diferenciales

7.4.1. El operador diferencial

Un operador es un objeto matemático que convierte una función en otra, por ejemplo, el operador derivada convierte una función en una función diferente llamada la función derivada. Podemos definir el operador derivada $\mathbf{D}$ que al actuar sobre una función diferenciable produce la derivada de esta, esto es:

$$\mathbf{D}^0 f(x) = f(x)\,, \quad \mathbf{D}^1 f(x) = f'(x)\,, \quad \mathbf{D}^2 f(x) = f''(x)\,, \ldots, \mathbf{D}^n f(x) = f^{(n)}(x)\,.$$

Es posible construir la siguiente combinación lineal con los operadores diferenciales:

$$P(\mathbf{D}) = a_0 + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 + \cdots + a_n\mathbf{D}^n\,, \quad a_n \neq 0\,. \tag{7.28}$$

donde $a_2, a_1, a_2, \ldots a_n$ son constantes. A este nuevo objeto lo podemos llamar el *operador polinomial* de orden n.

La utilidad de este objeto matemático quedará clara si hacemos la siguiente definición

$$\begin{aligned} P(\mathbf{D})y &\equiv \left(a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0\right) y \\ &= a_n\mathbf{D}^n y + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1}y + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 y + a_1\mathbf{D}y + a_0 y \\ &= a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y\,. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Por otro lado, recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x)\,, \tag{7.30}$$

por lo tanto, (7.30) se puede escribir de una manera compacta como

$$P(\mathbf{D})y = Q(x)\,. \tag{7.31}$$

El operador polinomial es lineal, esto significa que tiene las siguientes propiedades

- Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones diferenciables de orden n, entones

  $$P(\mathbf{D})\left[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right] = \alpha P(\mathbf{D})f_1(x) + \beta P(\mathbf{D})f_2(x)$$

  donde α y β son constantes. Además:

- Si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son n soluciones de la ecuación diferencial homogénea $P(\mathbf{D})y = 0$ entonces $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ es también una solución.

- Si $y_h(x)$ es una solución de $P(\mathbf{D})y = 0$ y $y_p(x)$ es una solución de $P(\mathbf{D})y = Q(x)$ entonces $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ es una solución de $P(\mathbf{D})y = Q(x)$.

- Si $y_{p1}(x), y_{p2}(x), \ldots, y_{pn}(x)$ son soluciones particulares de las respectivas n ecuaciones

  $$P(\mathbf{D})y = Q_1(x),\ P(\mathbf{D})y = Q_2(x), \ldots, P(\mathbf{D})y = Q_n(x)$$

  resulta entonces que

  $$P(\mathbf{D})\left[y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \cdots + y_{pn}(x)\right] = Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_n(x)$$

  implica que

  $$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \cdots + y_{pn}(x)$$

  es una solución de

  $$P(\mathbf{D})y = Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_n(x)$$

Borrador Preliminar

Por ejemplo, encontremos una ecuación particular de

$$y'' + y = x^2 + xe^{2x} + 3 \;\Rightarrow\; \left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = x^2 + xe^{2x} + 3\,.$$

Por alguno de los métodos anteriormente vistos podemos encontrar las soluciones particulares de cada una de las siguientes ecuaciones

$$\left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = x^2\,, \quad \left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = xe^{2x}\,, \quad \left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = 3$$

las soluciones son, respectivamente

$$y_{p1}(x) = x^2 - 2\,, \quad y_{p2}(x) = \frac{1}{5}\left(xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}\right)\,, \quad y_{p3}(x) = 3$$

por lo tanto, una solución particular de la ecuación diferencial problema es

$$y_p(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{5}\left(xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}\right) + 3 = x^2 + 1 + \frac{1}{5}\left(xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}\right)\,.$$

Al operador diferencial también se le pueden agregar las siguientes propiedades. Consideremos los operadores

$$P_1(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0 \tag{7.32}$$

$$P_2(\mathbf{D}) = b_n\mathbf{D}^n + b_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + b_2\mathbf{D}^2 + b_1\mathbf{D} + b_0 \tag{7.33}$$

con $n \geq m$.

- $(P_1+P_2)f(x) = P_1f(x)+P_2f(x) = \left[a_n\mathbf{D}^n + \cdots + a_n\mathbf{D}^n + \cdots + (a_2+b_2)\mathbf{D}^2 + (a_1+b_1)\mathbf{D} + a_0 + b_0\right] f(x)$
- $[g(x)P(\mathbf{D})]\, f(x) = g(x)\,[P(\mathbf{D})f(x)]$
- $g(x)\,[P_1(\mathbf{D}) + P_2(\mathbf{D})]\, f(x) = g(x)\,[P_1(\mathbf{D})f(x)] + g(x)\,[P_2(\mathbf{D})f(x)]$
- $[P_1(\mathbf{D})P_2(\mathbf{D})]\, f(x) = P_1(\mathbf{D})\,[P_2(\mathbf{D})f(x)]$
- Si el operador polinomial diferencial puede ser factorizado, es decir, si:

  $$P(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0 = a_n(\mathbf{D} - m_1)(\mathbf{D} - m_2)\cdots(\mathbf{D} - m_n)\,,$$

  las cantidades: $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son las raices de la ecuación característica de $P(\mathbf{D})y = 0$.
- Si

  $$P(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0\,,$$

  es un operador polinomial de orden n, entonces:

  $$P(\mathbf{D} + a) = a_n\left(\mathbf{D} + a\right)^n + a_{n-1}\left(\mathbf{D} + a\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\mathbf{D} + a\right)^2 + a_1\left(\mathbf{D} + a\right) + a_0$$

  donde a es una constante.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D} - 2\mathbf{D} - 3)\left[\operatorname{sen}(x) + x^2\right] &= (\mathbf{D} + 1)(\mathbf{D} - 3)\left[\operatorname{sen}(x) + x^2\right] \\
&= (\mathbf{D} + 1)\left[(\mathbf{D} - 3)\left[\operatorname{sen}(x) + x^2\right]\right] \\
&= (\mathbf{D} + 1)\left[\cos(x) + 2x - 3\operatorname{sen}(x) - 3x^2\right] \\
&= -\operatorname{sen}(x) + 2 - 3\cos(x) - 6x + \cos(x) + 2x - 3\operatorname{sen}(x) - 3x^2 \\
&= -4\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x) - 3x^2 - 4x + 2
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Teorema: Si
$$P(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0$$
es un operador polinomial diferencial con coeficientes constantes y $u(x)$ es una función n veces diferenciable, entonces:
$$P(\mathbf{D})\left[ue^{ax}\right] = e^{ax}P(\mathbf{D}+a)u\,,$$
donde a es una constante.

Vamos a evaluar la siguiente expresión
$$\left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 3\right)\left(x^3e^{-2x}\right)$$
Al comparar la forma de esta expresión con la de teorema anterior, vemos que $a = -2$ y $u(x) = x^3$.

Por lo tanto, si hacemos
$$P(\mathbf{D}-2) = (\mathbf{D}-2)^2 - (\mathbf{D}-2) + 3 = \mathbf{D}^2 - 5\mathbf{D} + 9$$
se obtiene que
$$\left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 3\right)\left(x^3e^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\mathbf{D}-2\right)x^3 = e^{-2x}\left(\mathbf{D}^2 - 5\mathbf{D} + 9\right)x^3 = e^{-2x}\left(9x^3 - 15x^2 + 6x\right)\,.$$

7.4.2. Solución de ecuaciones diferenciales lineales con el operador polinomial

El método puede aplicarse a ecuaciones diferenciales de orden n, ya que si se tiene que
$$(\mathbf{D}-m_1)(\mathbf{D}-m_2)\cdots(\mathbf{D}-m_n)y = Q(x)\,,$$
entonces se puede definir la función u como
$$u = (\mathbf{D}-m_2)\cdots(\mathbf{D}-m_n)y\,,$$
y lo que queda es resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden
$$(\mathbf{D}-m_1)u = Q(x)\,.$$

Una vez resuelta la ecuación para u se sustituye en:
$$(\mathbf{D}-m_2)(\mathbf{D}-m_3)\cdots(\mathbf{D}-m_n)y = u(x)$$
Repitiendo el proceso,
$$v = (\mathbf{D}-m_3)\cdots(\mathbf{D}-m_n)y \;\Rightarrow\; (\mathbf{D}-m_2)v = u(x)$$
Integrando:
$$(\mathbf{D}-m_3)\cdots(\mathbf{D}-m_n)y = v(x)$$
Esta repetición nos llevará entonces hasta la solución $y(x)$.

Para resolver ecuaciones del tipo
$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x)\,, \quad a_n \neq 0\,,$$
es decir, con coeficientes constantes, vamos a estudiar el siguiente ejemplo:

Consideremos el siguiente ejemplo:
$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x}\,.$$

Borrador Preliminar

Al escribir esta ecuación utilizando el operador diferencial resulta

$$\left(\mathbf{D}^3 + 2\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} - 2\right) y = e^{2x} \;\Rightarrow\; (\mathbf{D} - 1)(\mathbf{D} + 1)(\mathbf{D} + 2)\, y = e^{2x}$$

Si llamamos $u = (\mathbf{D} + 1)(\mathbf{D} + 2)\, y$ entonces se puede ver que

$$(\mathbf{D} - 1)\, u = e^{2x} \;\Rightarrow\; u' - u = e^{2x} \;\Rightarrow\; u = e^{2x} + C_1 e^x$$

Conocida la función u entonces se tiene que

$$(\mathbf{D} + 1)(\mathbf{D} + 2)\, y = e^{2x} + C_1 e^x$$

Repetimos el proceso, pero ahora hacemos $v = (\mathbf{D} + 2)\, y$, por lo tanto

$$(\mathbf{D} + 1)\, v = e^{2x} + C_1 e^x \;\Rightarrow\; v' + v = e^{2x} + C_1 e^x \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{C_1}{2} e^x + c_2 e^{-x}$$

Conocida v, entonces

$$(\mathbf{D} + 2)\, y = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{C_1}{2} e^x + c_2 e^{-x}$$

Integrando una vez más:

$$y' + 2y = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{C_1}{2} e^x + c_2 e^{-x} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{12} e^{2x} + C_1 e^x + c_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}\,.$$

Notemos que existe una manera bastante sencilla de resolver la ecuación combinando varios métodos. Si buscamos $y_h(x)$ a través de la ecuación característica se obtiene que la solución es: $y_h(x) = C_1 e^x + c_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$. Ahora bien, una solución particular se obtiene al considerar $u(x) = e^{2x}$ entonces $v = \frac{1}{3} e^{2x}$ y por lo tanto $y_p(x) = \frac{1}{12} e^{2x}$.

7.4.3. El operador inverso

Los operadores suelen tener su inversa, esto significa que si

$$P(\mathbf{D})y = Q(x) \;\Rightarrow\; P^{-1}(\mathbf{D})P(\mathbf{D})y = P^{-1}(\mathbf{D})Q(x) \;\Rightarrow\; y_p = P^{-1}(\mathbf{D})Q(x)\,,$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de $P(\mathbf{D})y = Q(x)$. Notemos que esto significa que

$$\mathbf{D}^{-n} Q(x) = \underbrace{\int\int \cdots \int}_{n \text{ veces}} Q(x)dx\,.$$

Por ejemplo, evaluar

$$\mathbf{D}^{-2}(2x + 3)\,.$$

Se tiene entonces lo siguiente:

$$\mathbf{D}^{-2}(2x + 3) = \mathbf{D}^{-1} \int (2x + 3)dx = \mathbf{D}^{-1}(x^2 + 3x) = \int (x^2 + 3x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\,.$$

De todos modos es fácil verificar que $y_p = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ es una solución particular de $\mathbf{D}^2 y = 2x + 3$.

El operador inversa de $P(\mathbf{D})$, es decir $P^{-1}(\mathbf{D})$, puede también representarse como $1/P(\mathbf{D})$. Debe quedar claro que su significado radica en el hecho de que al actuar sobre $Q(x)$ produce una solución particular y_p.

Borrador Preliminar

Esta última notación resulta ser a veces más conveniente y dependiendo de la forma de $Q(x)$ puede resultar algunas veces de fácil solución.

En general, se tiene que sí

$$P(\mathbf{D})y = \left(a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{D} + a_0\right) y = Q(x)\,,$$

entonces

$$\begin{aligned} y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\,[Q(x)] &= \frac{1}{a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\mathbf{D} + \frac{a_2}{a_0}\mathbf{D}^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\mathbf{D}^{n-1} + \frac{a_n}{a_0}\mathbf{D}^n\right)}\,[Q(x)] \\ &= \frac{1}{a_0}\left(1 + c_1\mathbf{D} + c_2\mathbf{D}^2 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + c_n\mathbf{D}^n\right)[Q(x)]\,, \quad a_0 \neq 0\,, \end{aligned}$$

donde el término $\left(1 + c_1\mathbf{D} + c_2\mathbf{D}^2 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + c_n\mathbf{D}^n\right)/a_0$ es la expansión en serie de $1/P(\mathbf{D})$.

Por otro lado, notemos que si $a_0 = 0$, entonces

$$P(\mathbf{D})y = \left(a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{D}\right) y = \mathbf{D}\left(a_n\mathbf{D}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-2} + \cdots + a_1\right) y = Q(x)\,,$$

Si ambos $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$, entonces se puede seguir factorizando. Por lo tanto, en general:

$$P(\mathbf{D})y = \mathbf{D}^r\left(a_n\mathbf{D}^{n-r} + \cdots + a_{r+1}\mathbf{D} + a_r\right) y = Q(x)\,.$$

esto significa que

$$\begin{aligned} y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\,[Q(x)] &= \frac{1}{\mathbf{D}^r\left(a_n\mathbf{D}^{n-r} + \cdots + a_{r+1}\mathbf{D} + a_r\right)}[Q(x)] \quad a_r \neq 0 \\ &= \frac{1}{\mathbf{D}^r}\left[\frac{1}{\left(a_n\mathbf{D}^{n-r} + \cdots + a_{r+1}\mathbf{D} + a_r\right)}\,[Q(x)]\right] \end{aligned}$$

Muchos cálculos se simplificarán notablemente por la forma que pueda tener la función $Q(x)$, por ejemplo, si $Q(x) = bx^k$, entonces

$$P(\mathbf{D})y = bx^k\,.$$

Note que si $k = 0$, entonces:

$$y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\,[b] = \frac{b}{a_0}\,, \quad a_0 \neq 0\,.$$

porque b es constante.

Encontremos una solución particular de

$$y'' - 2y' - 3y = 5 \;\Rightarrow\; (\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D} - 3)y = 5\,,$$

aquí podemos ver que: $a_0 = -3$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $b = 5$ y $k = 0$, y por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\,[5] = -\frac{5}{3}\,.$$

7.4.4. El operador polinomial inverso y fracciones parciales

La mejor manera de ilustrar el método es con un ejemplo. Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 2e^{4x} \;\Rightarrow\; \left(D^3 - 5D^2 + 8D - 4\right) y = 2e^{4x}\,.$$

Borrador Preliminar

Busquemos su solución general.

Podemos notar que

$$D^3 - 5D^2 + 8D - 4 = (D-2)^2(D-1)\,,$$

por lo tanto

$$y_p = P^{-1}(\mathbf{D})\,[Q(x)] = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[2e^{4x}\right] = \frac{1}{D^3 - 5D^2 + 8D - 4}\left[2e^{4x}\right] = \frac{1}{(D-2)^2(D-1)}\left[2e^{4x}\right]$$

podemos hacer una expansión en fracciones parciales

$$\frac{1}{(D-2)^2(D-1)} = \frac{1}{D-1} - \frac{1}{D-2} + \frac{1}{(D-2)^2}$$

por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{D-1}\left[2e^{4x}\right] - \frac{1}{D-2}\left[2e^{4x}\right] + \frac{1}{(D-2)^2}\left[2e^{4x}\right]\,.$$

Ahora estamos en capacidad de resolver cada término por separado:

$$y_p = \frac{2e^{4x}}{3} - \frac{2e^{4x}}{2} + \frac{2e^{4x}}{4} = \frac{e^{4x}}{6}\,.$$

Par otro lado, la familia de soluciones de la ecuación homogénea es

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

y la solución general resulta ser entonces:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{e^{4x}}{6}\,.$$

7.4.5. Ejemplos

1. Encontrar una solución particular de

$$4y'' - 3y' + 9y = 5x^2 \;\Rightarrow\; (4\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D} + 9)y = 5x^2\,,$$

ahora: $a_0 = 9$, $a_1 = -3$, $a_2 = 4$, $b = 5$ y $k = 2$, esto significa que:

$$y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[5x^2\right] = \frac{1}{9\left(1 - \frac{3}{9}\mathbf{D} + \frac{4}{9}\mathbf{D}^2\right)}\left[5x^2\right] = \frac{5}{9}\left(1 + \frac{1}{3}\mathbf{D} - \frac{1}{3}\mathbf{D}^2\right)\left[x^2\right] = \frac{5}{9}\left[x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right]\,.$$

Cuando se hace la expansión en serie de $1/P(\mathbf{D})$ no hace falta ir más allá de $\mathbf{D}^3$, ya que $\mathbf{D}^3\left[x^2\right] = 0$.

2. Encontrar una solución particular de

$$y^{(5)} - y^{(3)} = 2x^2 \;\Rightarrow\; (\mathbf{D}^5 - \mathbf{D}^3)y = 2x^2 \;\Rightarrow\; \mathbf{D}^3(\mathbf{D}^2 - 1)y = 2x^2$$

por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[2x^2\right] = \frac{1}{\mathbf{D}^3}\left[\frac{1}{\mathbf{D}^2 - 1}\left[2x^2\right]\right]\,.$$

Trabajamos por partes,

$$\frac{1}{\mathbf{D}^2 - 1}\left[2x^2\right] = \frac{1}{(-1)\,(1 - \mathbf{D}^2)}\left[2x^2\right]\,,$$

Borrador Preliminar

aquí $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b = 2$ y $k = 2$, por lo tanto

$$\frac{1}{\mathbf{D}^2 - 1}\left[2x^2\right] = -2\frac{1}{(1-\mathbf{D}^2)}\left[x^2\right] = -2\left(1+\mathbf{D}^2\right)\left[x^2\right] = -2(x^2+2)$$

ahora tenemos que

$$y_p = \frac{1}{\mathbf{D}^3}\left[-2(x^2+2)\right] = -2\mathbf{D}^{-3}\left[x^2+2\right] = -2\left(\frac{x^5}{60}+\frac{x^3}{3}\right).$$

3. Si $Q(x) = be^{ax}$, entonces

$$P(\mathbf{D})y = be^{ax}$$

Se puede demostrar (queda como ejercicio) que una solución particular de esta ecuación es

$$y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[be^{ax}\right] = \frac{be^{ax}}{P(a)}, \quad P(a) \neq 0.$$

Encuentremos una solución particular de

$$y''' - y'' + y' + y = 3e^{-2x}.$$

Entonces

$$(\mathbf{D}^3 - \mathbf{D}^2 + \mathbf{D} + 1)y = 3e^{-2x},$$

aquí $b = 3$ y $a = -2$, por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[3e^{-2x}\right] = \frac{3e^{-2x}}{P(-2)} = \frac{3e^{-2x}}{(-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 1} = -\frac{3}{13}e^{-2x},$$

4. Si $Q(x) = b\cos(ax)$ o $Q(x) = b\,\mathrm{sen}(ax)$. En este caso podemos utilizar la fórmula de Euler y volver al caso anterior.

Encuentremos una solución particular de

$$y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{sen}(2x),$$

entonces:

$$(\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D} + 2)y = 3\mathrm{sen}(2x),$$

sabemos que: $e^{2ix} = \cos(2x) + i\mathrm{sen}(2x)$ y que la parte imaginaria de una solución particular de

$$(\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D} + 2)y = 3e^{2ix}$$

será una solución de nuestro problema. Por lo tanto, con $b = 3$ y $a = 2i$ se tiene:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[3e^{2ix}\right] = \frac{3e^{-2x}}{P(2i)} = \frac{3e^{-2x}}{(2i)^2 - 3(2i) + 2} = \frac{3e^{-2x}}{-2(1+3i)} = \frac{3(1-3i)e^{-2x}}{-20} \\ &= -\frac{3}{20}(1-3i)(\cos(2x) + i\mathrm{sen}(2x)) = -\frac{3}{20}\left[\cos(2x) + 3\mathrm{sen}(2x) + i(\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x))\right] \end{aligned}$$

la parte imaginaria de esta última ecuación será nuestra solución particular

$$y_p = -\frac{3}{20}[\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x)].$$

5. Si $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_n(x)$, entonces

$$y_p = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[Q(x)\right] = \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[Q_1(x)\right] + \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[Q_2(x)\right] + \cdots + \frac{1}{P(\mathbf{D})}\left[Q_2(x)\right]$$

Borrador Preliminar

7.4.6. Practicando con Maxima

7.4.7. Ejercicios

1. Resuelva la ecuación
$$y'' + y = e^x \,.$$

2. Encuentre la solución general de
$$y'' - y = x^3 + 3x - 4 \,.$$

7.5. Ecuaciones diferenciales y las transformadas de Laplace

7.5.1. Algunas definiciones previas

En general vamos a definir una transformación integral, $F(s)$, de una función, $f(t)$ como

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t = \mathbf{T}\{f(t)\}\ , \tag{7.34}$$

donde $\mathcal{K}(s,t)$ es una función conocida de s y t, denominada el *núcleo* de la transformación. Si a y b son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita. Dependiendo de la selección del núcleo y los limites tendremos distintas transformaciones integrales. En Física las más comunes son las siguientes

Nombre	$F(s) = \mathbf{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbf{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace	$\mathcal{L}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\mathcal{L}(s)\mathrm{d}s$
Fourier de senos y cosenos	$\mathcal{F}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \begin{matrix}\mathrm{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix}\ f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \begin{matrix}\mathrm{sen}(ts)\\ \cos(ts)\end{matrix}\ \mathcal{F}(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja	$\mathcal{F}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ist} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-ist}\mathcal{F}(s)\mathrm{d}s$
Hankel (Fourier-Bessel)	$F(s) = \int_0^\infty tJ_n(st)f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^\infty sJ_n(ts)F(s)\mathrm{d}s$
Mellin	$\mathcal{M}(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\ f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t}\ \mathcal{M}(s)\mathrm{d}s$

La idea detrás de la utilidad de las transformaciones integrales puede resumirse en el siguiente esquema

EDO para $f(t)$	$\longrightarrow$ transformación directa $\longrightarrow$ $F(s) = \mathbf{T}\{f(t)\}$	relación para $F(s)$ eventualmente más fácil
$\downarrow$		$\downarrow$
solución directa difícil		solución para $F(s)$ más fácil
$\downarrow$		$\downarrow$
se encuentra $f(t)$	$\longleftarrow$ transformación inversa $\longleftarrow$ $f(t) = \mathbf{T}^{-1}\{F(s)\}$	se encuentra $F(s)$

Borrador Preliminar

7.5.2. Transformada de Laplace

En nuestro caso ilustraremos el uso de transformaciones integrales con la transformada de Laplace, que denotaremos de manera simbólica como $F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$. Esto es:

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\,, \quad 0 \le t < \infty\,.$$

Es bueno tener en cuenta que si la integral impropia

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\,, \quad 0 \le t < \infty$$

converge para algún valor de $s = s_0$, entonces convergerá para todo $s > s_0$. Si la integral existe se denominará la transformada de Laplace de $f(t)$.

Por ejemplo, podemos ver que si $f(t) = t$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t] &= F(s) = \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \lim_{h\to\infty}\int_0^h te^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{h\to\infty}\left[e^{-st}\left(-\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\right]_0^h = \lim_{h\to\infty}\left[-\frac{he^{-sh}}{s}-\frac{e^{-sh}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{s^2}\,.\end{aligned}$$

Se puede ver que si $f(t) = 0$, entonces

$$\mathcal{L}[0] = \int_0^\infty 0e^{-st}\mathrm{d}t = 0\,.$$

Existen tablas con las transformadas de Laplace, de manera que no es necesario ir calculando las integrales impropias para cada una de las funciones.

Las transformadas de Laplace son lineales, es decir:

$$\mathcal{L}[C_1f_1(t) + C_2f_2(t)] = C_1\mathcal{L}[f_1(t)] + C_2\mathcal{L}[f_2(t)]$$

además, existe también la transformación inversa de Laplace. Esto significa que si

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

La transformación inversa de Laplace también es un operador lineal.

7.5.3. Transformadas de Laplace y las ecuaciones diferenciales lineales

Vamos a considerar un método para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones del tipo

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0 = Q(x)\,, \tag{7.35}$$

utilizando las transformadas de Laplace. Este método, como veremos a continuación, permite obtener una solución particular dado un conjunto de condiciones iniciales.

Si multiplicamos (7.35) por e^{-sx} e integramos, podemos ver que

$$\int_0^\infty e^{-sx}\left[a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0\right]\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-sx}Q(x)\mathrm{d}x$$

Borrador Preliminar

término por término:

$$\begin{aligned} a_n \int_0^\infty e^{-sx} y^{(n)} \mathrm{d}x + a_{n-1} \int_0^\infty e^{-sx} y^{(n-1)} \mathrm{d}x + \cdots + a_2 \int_0^\infty e^{-sx} y'' \mathrm{d}x &+ a_1 \int_0^\infty e^{-sx} y' \mathrm{d}x + \\ a_0 \int_0^\infty e^{-sx} y \mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{-sx} Q(x) \mathrm{d}x \\ a_n \mathcal{L}\left[y^{(n)}\right] + a_{n-1} \mathcal{L}\left[y^{(n-1)}\right] + \cdots + a_2 \mathcal{L}\left[y''\right] + a_1 \mathcal{L}\left[y'\right] + a_0 \mathcal{L}\left[y\right] &= \mathcal{L}\left[Q(x)\right] \end{aligned} \tag{7.36}$$

Ahora bien, podemos observar lo siguiente

$$\mathcal{L}\left[y'\right] = \int_0^\infty e^{-sx} y' \mathrm{d}x$$

y al integrar por partes, con $u = e^{-sx}$ y $\mathrm{d}v = y'\mathrm{d}x$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} y' \mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-sx} y\right]_0^b - \int_0^\infty (-s) e^{-sx} y \mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-sb} y(b) - y(0)\right] + s \int_0^\infty y e^{-sx} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Si agregamos la suposición adicional de que la solución de la ecuación diferencial, es decir, $y(x)$ satisface

$$\lim_{x\to\infty} \left[e^{-sx} y^{(k)}(x)\right] = 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,,\ s > s_0\,,$$

entonces:

$$\mathcal{L}\left[y'\right] = \int_0^\infty e^{-sx} y' \mathrm{d}x = -y(0) + s\mathcal{L}\left[y\right]\ .$$

Para calcular $\mathcal{L}\left[y''\right]$ se procede de manera similar, pero ahora es necesario integrar dos veces por partes y utilizar el resultado para $\mathcal{L}\left[y'\right]$. Resultando:

$$\mathcal{L}\left[y''\right] = -y'(0) + s\mathcal{L}\left[y'\right] = s^2\mathcal{L}\left[y\right] - \left[y'(0) + sy(0)\right]\ .$$

Repitiendo el proceso:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[y'''\right] &= s^3\mathcal{L}\left[y\right] - \left[y''(0) + sy'(0) + s^2 y(0)\right] \\ \mathcal{L}\left[y^{(4)}\right] &= s^4\mathcal{L}\left[y\right] - \left[y'''(0) + sy''(0) + s^2 y'(0) + s^3 y(0)\right]\ , \end{aligned}$$

y si seguimos hasta orden n, se puede demostrar que

$$\mathcal{L}\left[y^{(n)}\right] = s^n\mathcal{L}\left[y\right] - \left[y^{(n-1)}(0) + sy^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-2}y'(0) + s^{n-1}y(0)\right]\ .$$

Al sustituir todos estos últimos resultados en (7.36), sacando los términos que contienen a $\mathcal{L}\left[y\right]$, resulta

Borrador Preliminar

que podemos escribir (7.36) de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
a_n s^n \mathcal{L}[y] & - & a_n \left[y^{(n-1)}(0) + sy^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-2}y'(0) + s^{n-1}y(0)\right] \\
+a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}[y] & - & a_{n-1}\left[y^{(n-2)}(0) + sy^{(n-3)}(0) + \cdots + s^{n-3}y'(0) + s^{n-2}y(0)\right] \\
+a_{n-2}s^{n-2}\mathcal{L}[y] & - & a_{n-2}\left[y^{(n-3)}(0) + sy^{(n-4)}(0) + \cdots + s^{n-4}y'(0) + s^{n-3}y(0)\right] \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
+a_2 s^2 \mathcal{L}[y] & - & a_2\left[y'(0) + sy(0)\right] \\
+a_1 s\mathcal{L}[y] & - & a_1 y(0) \\
+a_0\mathcal{L}[y] & = & \mathcal{L}[Q(x)]
\end{array}$$

factorizando para $\mathcal{L}[y]$ se tiene:

$$\begin{array}{rl}
 & \left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right]\mathcal{L}[y] \\
- & \left[a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1\right] y(0) \\
- & \left[a_n s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_3 s + a_2\right] y'(0) \\
\vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
- & \left[a_n s^n + a_{n-1}\right] y^{(n-2)}(0) \\
- & a_n y^{(n-1)}(0) = \mathcal{L}[Q(x)]\ .
\end{array} \tag{7.37}$$

En (7.37) se puede apreciar que es necesario conocer las cantidades: $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, ... , $y^{(n-1)}(0)$, las cuales se pueden determinar vía las condiciones iniciales. Por otra lado, también se puede ver que la transformada de Laplace de la función que estamos buscando $\mathcal{L}[y]$ se puede despejar directamente de (7.37).

Por ejemplo, encontraremos la solución a siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y = \operatorname{sen}(2x) \qquad \text{con:} \begin{cases} y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si nos fijamos en (7.37) vemos que para este caso se tiene: $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ y $a_0 = 1$, entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\left[a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right]\mathcal{L}[y] - \left[a_2 s + a_1\right] y(0) - \left[a_2\right] y'(0) & = & \mathcal{L}[\operatorname{sen}(2x)] \\
\left[s^2 + 1\right]\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) & = & \mathcal{L}[\operatorname{sen}(2x)] \\
\left[s^2 + 1\right]\mathcal{L}[y] - 1 & = & \dfrac{2}{s^2+4} \\
\mathcal{L}[y] & = & \dfrac{1}{s^2+1}\left[\dfrac{2}{s^2+4} + 1\right]
\end{array}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)} = -\frac{2}{3(s^2+4)} + \frac{5}{3(s^2+1)} = \frac{-\frac{2}{3}}{s^2+4} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1}$$

mediante la transformada inversa en cada término

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-\frac{2}{3}}{s^2+4}\right] & = & -\dfrac{1}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2+2^2}\right] = -\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(2x) \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\frac{5}{3}}{s^2+1}\right] & = & \dfrac{5}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right] = \dfrac{5}{3}\operatorname{sen}(x)
\end{array}$$

Borrador Preliminar

se tiene

$$\mathcal{L}\left[y\right] = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{3}\text{sen}(2x) + \frac{5}{3}\text{sen}(x)\right] = \frac{-\frac{2}{3}}{s^2+4} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1}$$

por lo tanto, nuestra solución particular para las condiciones iniciales dadas es:

$$y(x) = -\frac{1}{3}\text{sen}(2x) + \frac{5}{3}\text{sen}(x)\,.$$

7.5.4. Integral de Convolución

Algunas veces es posible identificar la transformada de Laplace $H(s)$ como el producto de dos transformadas de Laplace, $F(s)$ y $G(s)$ las cuales son las transformadas de funciones conocidas $f(t)$ y $g(t)$. **Pero eso es algunas veces: en general la transformada del producto de funciones no es el producto de transformadas**. Esas veces están contenidas en el llamado Teorema de Convolución, según el cual se establece una especie de "producto generalizado" de funciones f y g.

Teorema de Convolución: Sean

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \quad \text{y} \quad G(s) = \mathcal{L}\left[g(t)\right] \quad \text{definidas en el intervalo } s > a > 0\,,$$

entonces

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\left[h(t)\right]\,, \quad \text{para } s > a$$

donde

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right] = \int_0^t f(t-\tau)\; g(\tau)\; \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\; g(t-\tau)\; \mathrm{d}\tau = \left(f * g\right)(t)$$

y $h(t)$ se identifica como la convolución de f y g.

Las integrales arriba expuestas se conocen con integrales de convolución y hemos denotado $h(t) = (f * g)(t)$ para insistir que se trata de un "producto generalizado" de funciones f y g, que comparte, con el producto ordinario de funciones, las siguientes propiedades

$$f * g = g * f \qquad \text{(conmutatividad)}$$

$$f * [g + k] = f * g + f * k \qquad \text{(distributividad)}$$

$$f * [g * k] = [f * g] * k \qquad \text{(asociatividad)}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

Sin embargo $f * 1 \neq f$, tal y como se puede apreciar de

$$\left(f * 1\right)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\; 1\; \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(t-\tau)\; \mathrm{d}\tau \neq f\left(t\right)\,,$$

en el caso particular de que $f\left(t\right) = \cos\left(t\right)$ tendremos

$$\left(\cos * 1\right)(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)\; 1\; \mathrm{d}\tau = \text{sen}(t-\tau)|_{\tau=0}^{\tau=t} = \text{sen}(0) - \text{sen}(t) = -\text{sen}(t)\,.$$

Por la misma razón, no hay garantía que $\left(f * f\right)(t) > 0 \quad \forall\; f \neq 0$.

Borrador

El ejemplo más emblemático de la aplicación del Teorema de Convolución es el estudio del oscilador amortiguado y forzado, el cual viene descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\lambda\ \dot{x} + \omega_0^2\ x = f(t)\,, \quad \text{con:} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

La transformada de Laplace (ecuación (7.37)) no conduce a lo siguiente

$$\begin{aligned} \left[a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right] \mathcal{L}\left[x\right] - \left[a_2 s + a_1\right] x(0) - \left[a_2\right] \dot{x}(0) &= \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\ \left[s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2\right] \mathcal{L}\left[x\right] - \left[s + 2\lambda\right] x(0) - \dot{x}(0) &= \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\ \left[s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2\right] \mathcal{L}\left[x\right] - \left[s + 2\lambda\right] x_0 - \dot{x}_0 &= F(s) \\ \mathcal{L}\left[x\right] &= \frac{F(s) + \left[s + 2\lambda\right] x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}\left[x\right] = \frac{F(s) + \left[s + 2\lambda\right] x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{2\lambda\ x_0 + \dot{x}_0 + s x_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} + \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2}\,,$$

para el primer sumando de la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

$$\mathcal{L}\left[x\right]_{(1)} = \frac{2\lambda\ x_0 + \dot{x}_0 + s x_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{x_0\ \ (s + \lambda)}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)} + \frac{\dot{x}_0 + x_0\ \lambda}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)}\,,$$

y mediante la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x_0\ \ (s + \lambda)}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)} + \frac{\dot{x}_0 + x_0\ \lambda}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)}\right]_{(1)} = x_0\ e^{-\lambda t} \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \mathrm{sen}(\omega t)\,,$$

con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

Para el segundo sumando

$$\mathcal{L}\left[x\right]_{(2)} = \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2}\,,$$

por el teorema de convolución se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2}\right]_{(2)} = \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \mathrm{sen}[\omega\,(t - \tau)]\ f\,(t)\ \ \mathrm{d}\tau\,.$$

La solución será entonces:

$$x\,(t) = x_0\ e^{-\lambda t} \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \mathrm{sen}(\omega t) + \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \mathrm{sen}[\omega\,(t - \tau)]\ f\,(t)\ \ \mathrm{d}\tau\,.$$

7.5.5. Ejemplos

1. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función escalón:

$$y'' + 4y = h(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \pi \\ 1 & \pi < x \le 2\pi \end{cases} \qquad \text{con:} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Borrador Preliminar

podemos escribir

$$y'' + y = h(x) = u_\pi(x) - u_{2\pi}(x)$$

volviendo a fijarnos en (7.37)

$$\begin{aligned}
\left[a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right] \mathcal{L}[y] - [a_2 s + a_1]\, y(0) - [a_2]\, y'(0) &= \mathcal{L}[h(x)] \\
\left[s^2 + 4\right] \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) &= \mathcal{L}[u_\pi(x) - u_{2\pi}(x)] \\
\left[s^2 + 4\right] \mathcal{L}[y] - s &= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} \\
\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2+4}\left[s + \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}\right]
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+4}\left[s + \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}\right] = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s\,(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s\,(s^2+4)}$$

mediante las transformadas inversas

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] &= \cos(2x) \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s\,(s^2+4)}\right] &= u_\pi(x) g\,(x-\pi)\,, \quad \text{con } g\,(\tau) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s^2+4)}\right]
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s\,(s^2+4)}\right] = u_\pi(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)\right] = u_\pi(x)\left[\frac{1}{4}\left\{1 - \cos[2(x-\pi)]\right\}\right]$$

del mismo modo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s\,(s^2+4)}\right] = u_{2\pi}(x)\left[\frac{1}{4}\left\{1 - \cos[2(x-2\pi)]\right\}\right]$$

Recordemos que hemos definido la función escalón como

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases} \qquad c > 0\,.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}\left[\cos(2x) + u_\pi(x)\left[\frac{1}{4}\left\{1 - \cos[2(x-\pi)]\right\}\right] + u_{2\pi}(x)\left[\frac{1}{4}\left\{1 - \cos[2(x-2\pi)]\right\}\right]\right] \\
&= \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s\,(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s\,(s^2+4)}\,,
\end{aligned}$$

y finalmente la solución será

$$y(x) = \cos(2x) + u_\pi(x)\left[\frac{1}{4}\left\{1 - \cos[2(x-\pi)]\right\}\right] + u_{2\pi}(x)\left[\frac{1}{4}\left\{1 - \cos[2(x-2\pi)]\right\}\right]\,.$$

Borrador Preliminar

2. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función impulso (delta de Dirac)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta\left(x - \pi\right) \ , \quad \text{con: } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

La función (distribución) delta de Dirac viene definida por

$$\delta\left(t - t_0\right) = 0 \qquad \text{con } t \neq t_0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \ \delta\left(\tau - \tau_0\right) = 1 \tag{7.38}$$

con la útil propiedad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \ \delta\left(\tau - \tau_0\right) \ f\left(\tau\right) = \ f\left(\tau_0\right) \tag{7.39}$$

La transformada de Laplace de la función (distribución) Delta de Dirac es:

$$\mathcal{L}\left[\delta\left(t - c\right)\right] = e^{-cs} \, ,$$

por lo tanto, para nuestra ecuación problema

$$y'' + 2y' + 2y = \delta\left(x - \pi\right)$$

vemos que según (7.37)

$$\begin{aligned} \left[a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right] \mathcal{L}\left[y\right] - \left[a_2 s + a_1\right] y(0) - \left[a_2\right] y'(0) &= \mathcal{L}\left[\delta\left(x - \pi\right)\right] \\ \left[s^2 + 2s + 2\right] \mathcal{L}\left[y\right] - \left[s + 2\right] y(0) - y'(0) &= \mathcal{L}\left[\delta\left(x - \pi\right)\right] \\ \left[s^2 + 2s + 2\right] \mathcal{L}\left[y\right] &= e^{-\pi s} \\ \mathcal{L}\left[y\right] &= \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L}\left[y\right] = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2} = e^{-\pi s} \frac{1}{\left(s + 1\right)^2 + 1}$$

miramos la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi s} \frac{1}{\left(s + 1\right)^2 + 1}\right] = u_\pi(x) \left[e^{-(x - \pi)} \mathrm{sen}\left(x - \pi\right)\right]$$

esto significa que:

$$\mathcal{L}\left[y\right] = \mathcal{L}\left[u_\pi(x) \left[e^{-(x - \pi)} \mathrm{sen}\left(x - \pi\right)\right]\right] = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$$

resultando

$$y(x) = u_\pi(x) \left[e^{-(x - \pi)} \mathrm{sen}\left(x - \pi\right)\right]$$

o si lo preferimos en la otra notación:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < \pi \\ e^{-(x - \pi)} \mathrm{sen}\left(x - \pi\right) & x \geq \pi \, . \end{cases}$$

Borrador Preliminar

7.5.6. Practicando con Maxima

7.5.7. Ejercicios

1. Resuelva, utilizando transformadas de Laplace, las siguientes ecuaciones

   a) $y' - y = 0, \quad y(0) = 1$
   b) $y' - y = e^x, \quad y(0) = 1$
   c) $y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 1$
   d) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
   e) $y'' - y' - 2y = 5\text{sen}(x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$
   f) $y''' - 2y'' + y' = 2e^x + 2x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

2. Evalúe cada una de las siguientes funciones

   a) $\Gamma(6)$
   b) $\Gamma(7)$
   c) $\Gamma(-5/2)$
   d) $\Gamma(5/2)$

3. Evalúe cada una de las siguientes funciones factoriales

   a) $(-\frac{5}{2})!$
   b) $(-\frac{7}{2})!$
   c) $(\frac{3}{2})!$
   d) $(\frac{5}{2})!$

7.6. Algunas aplicaciones de las ecuaciones de orden superior

7.6.1. Mecánica y Electricidad

Una de las más famosas ecuaciones diferenciales, lineales, ordinaria con coeficientes constantes es

$$\alpha\ \ddot{u} + \beta\ \dot{u} + \gamma\ u \equiv \alpha\ \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \beta\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \gamma\ u = \Lambda\,(t)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\ x = F\,(t) \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} x & \Rightarrow & \text{Desplazamiento} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \Rightarrow & \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow & \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow & \text{Constante de Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow & \text{Constante Elástica} \\ F\,(t) & \Rightarrow & \text{Fuerza Aplicada} \end{cases}$$

Borrador Preliminar

y circuitos eléctricos

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\,Q=E\left(t\right)\qquad\text{donde}\quad\left\{\begin{array}{ccl} Q & \Rightarrow & \text{Carga Eléctrica}\\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=I & \Rightarrow & \text{Intensidad de Corriente}\\ L & \Rightarrow & \text{Inductancia}\\ R & \Rightarrow & \text{Resistencia}\\ C & \Rightarrow & \text{Capacitancia}\\ E\left(t\right) & \Rightarrow & \text{Fuerza Electromotriz}\end{array}\right.$$

Analicemos la ecuación que describe sistemas mecánicos y dejamos la cual describe sistemas eléctricos para un análisis posterior. El primero de los casos a analizar será el de las oscilaciones libres, vale decir $F\left(t\right)=0$, lo cual en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales se traduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. En contraste, si $F\left(t\right)\neq 0$, es decir, el caso inhomogéneo, estaremos describiendo oscilaciones forzadas.

7.6.2. Oscilaciones libres

Analicemos pues del caso del oscilador armónico libre, i.e.

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k\,x=0\qquad\Rightarrow\qquad x\left(t\right)=C_1\cos\left(\omega_0t\right)+C_2\operatorname{sen}\left(\omega_0t\right)\qquad\text{con}\quad\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 se denomina la frecuencia natural de oscilación y C_1 y C_2 las constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales. Es claro que

$$\text{si}\quad\left\{\begin{array}{l} C_1=A\cos\delta\\ C_2=A\operatorname{sen}\delta\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\qquad x\left(t\right)=C_1\cos\left(\omega_0t\right)+C_2\operatorname{sen}\left(\omega_0t\right)\qquad\Leftrightarrow\qquad x\left(t\right)=A\cos\left(\omega_0t+\delta\right)$$

con R la amplitud y δ en ángulo de fase. Obviamente, el período del movimiento será

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Como un ejemplo analicemos el caso de un sistema en el cual $m=0{,}1$ Kg. y $k=0{,}4$ N/m En este caso la frecuencia angular $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$ rad/sg. La ecuación diferencial que describe este movimiento será

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\,x=0\quad\wedge\quad\left\{\begin{array}{lll} x\left(0\right)=1; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0; & \Rightarrow\quad x\left(t\right)=\cos(2t)\\ x\left(0\right)=4; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0 & \Rightarrow\quad x\left(t\right)=4\cos\left(2t\right)\\ x\left(0\right)=-2; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0 & \Rightarrow\quad x\left(t\right)=-2\cos\left(2t\right)\end{array}\right.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\,x=0\quad\wedge\quad\left\{\begin{array}{lll} x\left(0\right)=0; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1; & \Rightarrow\quad x\left(t\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\\ x\left(0\right)=0; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=4; & \Rightarrow\quad x\left(t\right)=2\operatorname{sen}\left(2t\right)\\ x\left(0\right)=0; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-2 & \Rightarrow\quad x\left(t\right)=-\operatorname{sen}\left(2t\right)\end{array}\right.$$

Borrador Preliminar

Figura 7.4: Oscilador armónico libre. Cambios en la posición inicial no afectan la frecuencia natural.

7.6.3. Oscilaciones libres amortiguadas

Consideremos que en el movimiento actúa una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, por lo cual el movimiento viene descrito por

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\eta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k\,x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x=0$$

la cual constituye una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Las raíces del polinomio característico asociado serán

$$r=\frac{-\eta\pm\sqrt{\eta^2-4km}}{2m}=-\frac{\eta}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}$$

por lo tanto la solución será

$$x\left(t\right)=C_1e^{\left(-\left(\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)}+C_2e^{\left(-\left(\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)}$$

de donde se deducen los siguientes casos

$$x\left(t\right)=C_1\;e^{r_1t}+C_2\;e^{r_2t} \qquad \Leftarrow \quad \mu^2-\omega_0^2>0 \quad \text{Sobreamortiguado}$$

$$x\left(t\right)=\left(C_1+C_2\;t\right)e^{\mu\;t} \qquad \Leftarrow \quad \mu^2-\omega_0^2=0 \quad \text{Crítico}$$

$$x\left(t\right)=e^{-\mu\;t}\left\{C_1\cos\left[\left(\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}\right)t\right]+C_2\,\mathrm{sen}\left[\left(\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}\right)t\right]\right\} \qquad \Leftarrow \quad \mu^2-\omega_0^2<0 \quad \text{Subamortiguado}$$

Como un ejemplo analicemos el mismo caso del sistema anterior en el cual $m=0{,}1$ Kg. y $k=0{,}4$ N/m, sólo que ahora la constante de amortiguamiento será $\eta=0{,}60,0{,}40$ y $0{,}15$ En todos los caso la frecuencia angular $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$ rad/sg. y la cantidad subradical $\left(\mu^2-\omega_0^2\right)$ corresponderá a los tres casos anteriormente

Borrador Preliminar

Figura 7.5: Oscilador Armónico Libre. Cambios de velocidad incial no afectan la frecuencia natural

mencionados. Las ecuaciones diferenciales que describen este movimiento serán

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+6\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4\,x=0 \quad\wedge\quad \left\{\begin{array}{l} x\left(0\right)=0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=4 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{2\sqrt{5}}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2\sqrt{5}}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4\,x=0 \quad\wedge\quad \left\{\begin{array}{l} x\left(0\right)=0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=4 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=\left(1+6t\right)e^{-2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4\,x=0 \quad\wedge\quad \left\{\begin{array}{l} x\left(0\right)=0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=4 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{9}{\sqrt{15}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right]$$

Si en los casos anteriores cambiamos el signo de la velocidad inicial, i.e. $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-4$ m/s, tendremos la siguiente representación gráfica.

$$x\left(0\right)=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-4;\quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)t}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)t}$$

$$x\left(0\right)=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-4;\quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=\left(1+2t\right)e^{-2t}$$

$$x\left(0\right)=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-4\quad\Rightarrow\quad x\left(t\right)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{-7}{\sqrt{15}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right]$$

En todos los casos dado que $r_1, r_2<0$ se tiene que $x\left(t\to 0\right)\to 0$. El movimiento subamortiguado es periódico y el período viene descrito por

$$T_{am}=\frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}}=\frac{T}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}}\qquad\text{si}\qquad\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2<<1\quad\Rightarrow\quad T_{am}\approx T\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Borrador Preliminar

Figura 7.6: Oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas. Nótese que el período es mayor para el caso subamortiguado

el cual siempre sera mayor que el periodo de oscilación natural del sistema.

7.6.4. Oscilaciones forzadas

Supongamos ahora que existe una fuerza aplicada al sistema tal que

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\mu\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$$

Oscilaciones forzadas no amortiguadas

En este caso $\mu = 0$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$$

Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$

y tendrá como solución

$$x(t) = \underbrace{C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\cos(\varpi t)}_{\text{inhomogénea}} = A\cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\cos(\varpi t)$$

con lo cual es la suma de dos movimientos armónicos con distintas frecuencias y amplitudes. Si el cuerpo parte del reposo, esto es: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ entonces

$$\left.\begin{array}{c} C_1 = \frac{-F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)} \\ \\ C_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\left[\cos(\varpi t) - \cos(\omega_0 t)\right]$$

Borrador Preliminar

Figura 7.7: Oscilaciones Libres amortiguadas con cambio de signo en la velocidad inicial

dado que

$$\cos(\omega_0 t) = \cos\left[\left\{\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right) + \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right)\right\} t\right]$$

$$\cos(\omega_0 t) = \cos\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right)$$

$$\cos(\varpi t) = \cos\left[\left\{\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right) - \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right)\right\} t\right]$$

$$\cos(\varpi t) = \cos\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}\right)$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{2F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2}t\right)\right]}_{\text{Envolvente}}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2}t\right)\right]$$

El mismo sistema anterior en el cual $m = 0{,}1$ Kg. y $k = 0{,}4$ N/m, cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0{,}5\cos(3t)$. Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento será

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\,x = 5\cos(3t) \quad \left\{\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t) = \underbrace{\cos(2t)}_{\text{homogénea}} - \underbrace{\cos(3t)}_{\text{inhomogénea}} \equiv \underbrace{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}_{\text{envolvente}}\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}t\right)$$

Borrador Preliminar

Figura 7.8: Oscilador armónico forzado con $\varpi = \omega_0^2$ Nótese el fenómeno de resonancia

Resonancia $\varpi = \omega_0$

En el caso que la frecuencia de la fuerza de excitación coincida con la frecuencia natural del sistema, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\ x = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0} t}_{\text{envolvente}} \ \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

El sistema anterior ($m = 0{,}1$ Kg. y $k = 0{,}4$ N/m), cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0{,}5 \cos(2t)$. Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento será

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\ x = 5 \cos(2t) \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{c} x(0) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \frac{5t}{4} \operatorname{sen}(2t)$$

7.6.5. Oscilaciones forzadas amortiguadas

En este caso $\mu \neq 0$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\mu\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

la cual tendrá como solución

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\right) t\right)} + C_2 e^{\left(-\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\right) t\right)} + \frac{F_0}{m} \left(\frac{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right) \cos(\varpi t) + 2\mu\varpi \operatorname{sen}(\varpi t)}{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2} \right)$$

Borrador Preliminar

Figura 7.9: Oscilador armónico forzado. Nótese la envolvente de la función

una vez más se puede convertir en

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{\left(-\left(\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)} + C_2 e^{\left(-\left(\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)}}_{\text{solución homogéne} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{m}\frac{\cos(\varpi t-\zeta)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\varpi^2\right)^2+(2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{ régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{\left(\omega_0^2-\varpi^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\varpi^2\right)^2+(2\mu\varpi)^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\varpi^2\right)^2+(2\mu\varpi)^2}}$$

Es claro que el término homogéneo en todos sus casos (sobreamortiguado, crítico y subamortiguado) tiende a cero, por ello se considera un término transitorio, no así el término no homogéneo que permanece oscilando. En términos Físico se pude decir que el término transitorio representa la disipación de la energía inicial que se le provee al sistema a través de la posición y la velocidad inicial de lanzamiento. Esta energía inicial se expresa a través de las condiciones iniciales se disipa. Si no existiera disipación esta energía inicial permanecería por siempre en el sistema. Finalmente el término no homogéneo, a través de la fuerza de excitación, impone el movimiento al sistema. Nótese además que el termino no homogéneo nunca se hace infinito, ni siquiera para el caso para el cual tiene un máximo y es aquel en el cual la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

Veamos el siguiente ejemplo. En un circuito RLC, cuyos componentes son $L = 1$ henry, $R = 40$ ohmios y $C = \frac{1}{40000}$ faradios, se le aplica un tensión de $V = 24$ voltios. Determine el comportamiento de la carga y la intensidad de corriente en el circuito.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2Q(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,Q = E(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2Q(t)}{\mathrm{d}t^2} + 40\,\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} + 40000\,Q(t) = \frac{1}{2}$$

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,I(t) = \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2I(t)}{\mathrm{d}t^2} + 40\,\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + 40000\,I(t) = 0$$

Borrador Preliminar

Figura 7.10: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje constante. Nótese que el sistema alcanza el régimen estacionario cercano a los 0,3 seg

tomando en cuenta las condiciones iniciales tendremos como solución

$$\left.\begin{array}{l} Q\left(0\right)=10^{-4} \\ \\ I\left(0\right)=\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=10^{-2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} Q(t)=\frac{1}{8000}+e^{-20t}\left[\frac{47\sqrt{11}}{2640000}\mathrm{sen}\ \left(\sqrt{11}60t\right)+\frac{7}{8000}\cos\left(\sqrt{11}60t\right)\right] \\ \\ I\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=e^{-20t}\left[\frac{1}{100}\cos\left(\sqrt{11}60t\right)-\frac{37\sqrt{11}}{6600}\mathrm{sen}\ \left(\sqrt{11}60t\right)\right] \end{array}\right.$$

Si en vez de un tensión constante de 0,5 V. la fuente de tensión es sinusoidal de la forma $E\left(t\right)=\frac{1}{2}\cos\left(180t\right)$ voltios las ecuaciones se transforman en

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+40\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+40000\ Q=\frac{1}{2}\cos\left(180t\right) \quad \text{con} \quad Q\left(0\right)=10^{-4} \quad \wedge \quad I\left(0\right)=\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=10^{-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+40\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+40000\ I=-90\mathrm{sen}\ \left(180t\right)$$

con sus correspondientes soluciones a las condiciones iniciales del sistema

$$Q(t)=\frac{1}{1000}\left\{e^{-20t}\left[\frac{293\sqrt{11}}{30140}\mathrm{sen}\ \left(60\sqrt{11}t\right)+\frac{91}{685}\cos\left(60\sqrt{11}t\right)\right]-\frac{9}{274}\cos\left(180t\right)+\frac{19}{548}\mathrm{sen}\ \left(180t\right)\right\}$$

$$I(t)=\frac{1}{100}\left\{e^{-20t}\left[\frac{103}{274}\cos\left(60\sqrt{11}t\right)-\frac{2461\sqrt{11}}{3014}\mathrm{sen}\ \left(60\sqrt{11}t\right)\right]+\frac{81}{137}\mathrm{sen}\ \left(180t\right)+\frac{171}{274}\cos\left(180t\right)\right\}$$

Por analogía con el caso mecánico procedemos a identificar cantidades

$$\left.\begin{array}{r} 2\mu=\frac{R}{L} \\ \\ \omega_0^2=\frac{1}{LC} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow A=\frac{V_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\varpi^2\right)^2+\left(\frac{R}{L}\varpi\right)^2}}\ =\frac{1}{2\sqrt{\varpi^4-78400\varpi^2+1600000000}}$$

con ello se puede ver la funcionalidad de la amplitud con la frecuencia excitatriz

Borrador Preliminar

Figura 7.11: Intensidad en un circuito RLC sometido a un voltaje constante.

7.6.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio

La fuerza elástica $F = -kx$, más allá de ser el caso más simple, representa la primera aproximación al movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable. Si recordamos que para una fuerza que derive de un potencial se tiene

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad F = -k\,x = -\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}k\ x^2\right)}{\mathrm{d}x}\,,$$

mas aún, un punto de equilibrio estable se define como aquel en el cual no existen fuerzas externas, vale decir

$$F|_{x=x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 0\,,$$

por lo cual, dado un potencial de una fuerza arbitraria siempre podemos expandirlo en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\ \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}}_{=0} + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\ \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3\ \left.\frac{\mathrm{d}^3V}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_0} \cdots$$

En general, alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$ la primera aproximación de una función potencial sera

$$V(x) \approx \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\ \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} \approx \frac{1}{2}k\ (x - x_0)^2$$

Así, un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{1}{6}x^6 - 2x^5 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + 12x^2$$

genera una fuerza

$$F = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = -\left(x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x\right)$$

Borrador Preliminar

Figura 7.12: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$. Nótese el régimen transitorio ($0 \leq t \lesssim 0{,}17$) y estacionario ($t \gtrsim 0{,}17$).

tendrá como puntos de equilibrio $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$. En torno a $x = 0$ se podrá aproximar con un potencial parabólico

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} = 12x^2$$

tal y como se observa en la figura 7.15

7.6.7. Péndulo simple con desplazamiento finito

El caso típico de esta aproximación lo constituye el péndulo simple: una masa m, empotrada a una varilla, de masa despreciable y de longitud L. La varilla se desplaza un ángulo θ de la vertical y se suelta. La Figura (7.16) muestra el diagrama de cuerpo libre del Péndulo Físico. Desde la ancestral física general, aún en secundaria, era proverbial resolver este problema suponiendo ángulos pequeños. En esas tempranas épocas de nuestro conocimiento de Física era limitado y más limitado aún era nuestra capacidad para resolver ecuaciones diferenciales. A este "problema" se le conoce con el péndulo físico. Aproximar es un arte y exploraremos este arte. Como norma general tendremos que se debe aproximar al final, pero no siempre es así.

Si suponemos un cuerpo de masa constante, m, las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no pueden ser otras que aquellas que provengan de las ecuaciones de Newton

$$\sum_{\text{externas}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m\,\mathbf{a}(t) = m\left(a_r\,\hat{\mathbf{u}}_r + a_\theta\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right), \tag{7.40}$$

Es bueno recordar que hay que expresar la aceleración en un sistema de coordenadas móviles $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta)$.

Borrador Preliminar

Figura 7.13: Intensidad de corriente en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$

Esto es

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \cos(\theta)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = [-\operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{i} + \cos(\theta)\,\mathbf{j}]\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta = -\operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{i} + \cos(\theta)\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{u}}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\left[\cos(\theta)\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}(\theta)\,\mathbf{j}\right]\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_r$$

con lo cual

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\,\hat{\mathbf{u}}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left[r(t)\,\hat{\mathbf{u}}_r\right]}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

y para la aceleración

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\left[\dot{r}(t)\,\hat{\mathbf{u}}_r + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right]}{\mathrm{d}t} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\hat{\mathbf{u}}_r + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Es claro que si $r(t) = L = \text{cte}$

$$\mathbf{r}(t) = L\hat{\mathbf{u}}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left(L\hat{\mathbf{u}}_r\right)}{\mathrm{d}t} = L\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta$$

y además

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\left[L\dot{\theta}(t)\,\hat{\mathbf{u}}_\theta\right]}{\mathrm{d}t} = -L\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{u}}_r + L\ddot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta\,.$$

Así, y para este caso particular, las ecuaciones de Newton quedan como

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\,\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\,a_r = -mL\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos(\theta) \\ m\,a_\theta = mL\ddot{\theta} = -mg\,\operatorname{sen}(\theta)\,. \end{cases} \tag{7.41}$$

Borrador Preliminar

Figura 7.14: Amplitud como función de la frecuencia excitatriz. Nótese el máximo de la amplitud cuando el sistema entra en resonancia, i.e. $\varpi = \omega_0$

El caso más simple proviene de la suposición: $\theta \approx \operatorname{sen}(\theta) \ll 1$, que implica lo siguiente

$$m\ \mathbf{a} = \mathbf{T} + m\ \mathbf{g} \quad \Rightarrow \begin{cases} mL\dot{\theta}^2 = -T + mg \\ mL\ddot{\theta} = -mg\theta. \end{cases} \tag{7.42}$$

ahora sabemos que podemos integrar inmediatamente. Si suponemos que el sistema parte del reposo: $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$, entonces resulta:

$$L\ddot{\theta} = -g\theta \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

y el período puede ser integrado, ya que:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{total}} \propto \text{cte} = \dot{\theta}^2 + 2\frac{g}{L}\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}\left(\theta_0^2 - \theta^2\right)}$$

que no es otra cosa que la energía total del sistema. Por lo tanto, en el instante inicial, si soltamos la masa desde un ángulo θ_0, la energía total es puramente potencial. Es decir

$$E_{\text{total}} = E_{\text{potencial}} = mgL\left(1 - \cos(\theta_0)\right) = 2mgL\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) \tag{7.43}$$

por otro lado, de la ecuación (7.6.7) podemos obtener el período de oscilación para el Péndulo Físico linealizado:

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}\left(\theta_0^2 - \theta^2\right)} \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{L}{g}} \arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}\right).$$

Borrador Preliminar

Figura 7.15: Aproximación por una parábola en torno a $x = 0$

Este caso también se conoce con el nombre de oscilador armónico simple. Igualmente podemos analizar el caso general del péndulo amortiguado forzado linealizado. Vale decir, una masa, m, atada a una varilla sin masa de longitud L, y que oscila, inmersa en un fluido que la frena el movimiento de la masa con una fuerza: $-\eta\ \mathbf{v}(t)$. Y que adicionalmente está excitada por una fuerza exterior $F(t) = F_0 \cos(\varpi t)$. Recordamos que en este caso la ecuación en la dirección tangente ($\hat{\mathbf{u}}_\theta$), es

$$mL\ \ddot{\theta} + \eta\ \dot{\theta} + mg\ \theta = F_0 \cos(\varpi t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + 2\mu\ \dot{\theta} + \omega_0^2\ \theta = \frac{F_0}{mL} \cos(\varpi t)$$

donde, por costumbre, hemos rebautizado las constantes como: $\mu = \dfrac{\eta}{2mL}$ y $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

Por lo tanto, como ya vimos con anterioridad, su solución tendrá la forma

$$\theta(t) = C_1 e^{\left(-\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\right)t\right)} + C_2 e^{\left(-\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}\right)t\right)} + \frac{F_0}{mL} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ($F_0 = 0$) se derivan tres casos posibles: el caso Subamortiguado ($\mu^2 - \omega_0^2 < 0$), el Sobreamortiguado ($\mu^2 - \omega_0^2 > 0$) y el caso Crítico ($\mu^2 - \omega_0^2 = 0$).

En el caso del Péndulo Físico amortiguado forzado ($F_0 \neq 0$) la física se hace mucho más rica y pueden ocurrir fenómenos de resonancia cuando $\left(\omega_0^2\ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2 \to 0$.

Es interesante considerar los gráficos tanto de la evolución del sistema en el espacio directo: $\theta(t)$ vs t; como la evolución del sistema en el espacio de fases $\omega = \dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$. Las figuras (7.19) y (7.21) muestran la primera de estas evoluciones, es decir, la evolución del ángulo en el espacio directo. Las figuras (7.20) y

Borrador Preliminar

Figura 7.16: Diagrama de Cuerpo Libre, del Péndulo Físico

(7.22) muestran la evolución del sistema en el espacio de fases. Es claro de la ecuación (7.6.7), en la cual aparece $\omega = \dot{\theta}(t)$, que las curvas en el diagrama de fase tanto para el caso libre (figura(7.18)) como para los casos amortiguados (figuras(7.20) y (7.22)) corresponden a curvas con la misma energía. En el caso del Péndulo Físico linealizado libre, corresponden a curvas de energía constante. En los otros casos el sistema va disipando energía debido al coeficiente de amortiguación.

Nótese que la disipación obliga al sistema a evolucionar al punto de equilibrio siguiendo trayectorias espirales en el espacio de fases. Claramente más rápidamente en el caso sobreamortiguado que en el subamortiguado. También sabemos que para el caso crítico ($\mu^2 - \omega_0^2 = 0$) el tiempo de evolución del sistema hasta llegar al punto de equilibrio será menor que en cualquiera de los casos sobreamortiguados. Dejamos al lector la comprobación de esta última afirmación.

Ahora bien, la situación que nos interesa simular es la del péndulo físico para los casos en los cuales los ángulos de oscilación no necesariamente sean pequeños.

Denominaremos péndulo libre al caso en el cual no recurriremos a ninguna aproximación respecto al ángulo de oscilación. Recordemos que para este caso partimos de la ecuación (7.41) en la dirección tangente. Es decir

$$L\ddot{\theta}(t) = -g\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\mathrm{sen}(\theta)\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{total}} \propto \text{cte} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L}\cos(\theta)$$

Al igual que en la ecuación en la dirección tangente linealizada (7.6.7), nos encontramos con la energía total del sistema. Con lo cual es fácil despejar $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta(t))$ y construir los diagramas de fases del sistema.

Otra vez, las líneas del diagrama de fase serán líneas de la misma energía. Así podemos graficar

$$\dot{\theta}(t) = \pm\sqrt{C + \frac{2g}{L}\cos(\theta)} \tag{7.44}$$

para distintos valores de la constante $C = 4,01;\ 4,1;\ 6;\ 8;\ 10$ y 20, para el caso $\frac{g}{L} = 4$.

La Figura (7.23) representa el diagrama de fase para estos casos. Las curvas cerradas (aquellas que tienen los valores de ángulos y velocidades acotadas) representan oscilaciones del sistema, mientras que las curvas abiertas (aquellas en las cuales las velocidades están acotadas pero no así el valor del ángulo) representan

Borrador Preliminar

Figura 7.17: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

que el sistema rota. Nótese que el sistema presenta puntos de equilibrio inestable para $\theta(t) \approx \pm n\pi$ con $n = 0, 1, 2$. Lo cual era de esperarse por cuanto corresponde al ángulo en el cual el sistema *varilla-masa* se encuentran verticalmente dispuestos y el peso y la tensión son colineales y se anulan momentáneamente.

Otro enfoque, quizá más intuitivo para resolver este problema, pudo haber sido el análisis energético. Para ello sabemos que, por ser un sistema conservativo, la energía total viene definida por

$$E_{\text{total}} = \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{mgL\left(1-\cos(\theta)\right)}_{\text{Energía Potencial}} \equiv \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + 2mgL\ \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

por consiguiente

$$\dot{\theta}(t) = \pm\sqrt{\frac{2E_{total}}{mL^2} - \frac{4g}{L}\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \equiv \pm\ 2\ \sqrt{\frac{g}{L}\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]} \tag{7.45}$$

donde hemos sustituido $E_{\text{total}} = 2mL\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)$ con $\theta_{\text{máx}}$, el ángulo máximo que alcanza el Péndulo Físico, por cuanto en ese punto la energíá total es puramente potencial. Nótese que ese ángulo no necesariamente es el ángulo inicial, debido a que la velocidad inicial puede ser distinta de cero.

La ecuación (7.45) es claramente integrable por separación de variables y conduce a encontrar una expresión para el período:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{g}{L}\left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}} \qquad \text{con: } -\pi \leq \theta(t) \leq \pi \quad \text{y} \quad \theta_0 = \theta(0)\ .$$

La integral anterior, puede ser transformada en otra que aparece en las tablas integrales, si hacemos

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)}\ ,$$

Borrador Preliminar

Figura 7.18: Digrama de Fase para el Oscilador Armónico Simple. Nótese que el punto de equilibrio es el origen de coordenadas.

con lo cual:

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \operatorname{sen}^2(\beta)}} \,,$$

donde

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)} \,, \quad \text{y} \quad \zeta(t) = \arcsin\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)}\right] .$$

Es claro que el recorrido entre $\zeta(0) = 0 \Rightarrow \theta = 0$ a $\theta = \theta_{\text{máx}} \Rightarrow \zeta(t) = \frac{\pi}{2}$, representa un cuarto del período, por consiguiente el período total del Péndulo Físico será:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \operatorname{sen}^2(\beta)}}$$

7.6.8. Digresión elíptica

En este punto haremos una digresión respecto a las integrales elípticas, su clasificación y algunas de sus propiedades. En general encontrarán en la bibliografía que las integrales elípticas se dividen en

- Integrales elípticas de primera especie

$$F(\varphi \backslash \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha) \operatorname{sen}^2(\beta)}} \Leftrightarrow F(x|m) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \,, \quad \text{con: } 0 \leq m \leq 1 \,,$$

  las cuales, para el caso particular $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ o $x = 1$, se puede reacomodar como una **Integral elíptica de primera especie completa**

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - m\operatorname{sen}^2(\beta)}} \equiv \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \qquad \text{con: } 0 \leq m \leq 1 \,. \tag{7.46}$$

Borrador Preliminar

Figura 7.19: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Simple, Subamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$) libre,para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

- Integrales elípticas de segunda especie

$$E(\varphi\backslash\alpha) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \text{sen}^2(\alpha)\text{sen}^2(\beta)}\mathrm{d}\beta \Leftrightarrow E(x|m) = \int_0^{x} \sqrt{\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}}\mathrm{d}t\,, \quad \text{con: } 0 \leq m \leq 1$$

y si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $x = 1$, entonces se obtiene una **Integral elíptica de segunda especie completa**

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\ \text{sen}^2(\beta)}\mathrm{d}\beta \equiv \int_0^{1} \sqrt{\frac{1 - mt^2}{1 - t^2}}\mathrm{d}t\,, \quad \text{con: } 0 \leq m \leq 1$$

Adicionalmente, y también sin perder generalidad, dado que $0 \leq m \leq 1$, el denominador de la integral elíptica $K(m)$ de la ecuación (7.46) puede ser expandido en series de potencias. Con lo cual

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 - m\ \text{sen}^2(\beta)}} &= 1 + \frac{1}{2}\text{sen}^2(\beta)m + \left[\frac{3}{8}\text{sen}^4(\beta^2)\right] m^2 + \left[\frac{5}{16}\text{sen}^6(\beta^3)\right] m^3 + \left[\frac{35}{128}\text{sen}^8(\beta^4)\right] m^4 + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\pi\left[1 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\text{sen}^2(\beta)\right] m + \left[\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\text{sen}^4(\beta)\right] m^2 + \left[\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\text{sen}^6(\beta)\right] m^3 + \cdots\right]
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m\ \text{sen}^2(\beta)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!!} m^n\, \text{sen}^{2n}(\beta)\,,$$

Borrador Preliminar

Figura 7.20: Evolución $\dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$ del Péndulo Físico Subamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediablemente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

y siendo una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término como

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - m\,\mathrm{sen}^2(\beta)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \mathrm{sen}^{2n}(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^{2n}(\beta)\ \mathrm{d}\beta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 m^n\,.$$

Del mismo modo se obtiene para las integrales elípticas completas de segunda especie que

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\,\mathrm{sen}^2(\beta)}\mathrm{d}\beta = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{m^n}{2n-1}\right]\,.$$

Finalmente podemos mencionar la relación de "recurrencia" de Legendre para las Integrales Elípticas completas. Ella es

$$E(m)\,K(1-m) + E(1-m)\,K(m) - K(m)\,K(1-m) = \frac{\pi}{2}$$

Las integrales elípticas de primera y segunda especie, incompletas y completa deben resolverse numéricamente y tradicionalmente están tabuladas en algunas tablas integrales[5].

En nuestros días también pueden ser resueltas numéricamente utilizando comandos de manipuladores simbólicos[6].

[5] Abramowitz, M. y Stegun I.A (1964) *Handbook of Mathematical Functions* Dover, New York

[6] En el caso de MAPLEV se puede proceder directamente evaluando numéricamente las integrales a través del comando `evalf(int(...))` o mediante la función de biblioteca `EllipticF(z,k)` donde `z`= β es al argumento del seno y `k`= $\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ el parámetro (consulte la ayuda de MAPLE para más detalles).

Borrador Preliminar

Figura 7.21: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico Sobreamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3,5$) libre,para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

7.6.9. ¿Cuán buena es la aproximación lineal?

Utilizando la expansión en serie de la Integral Elíptica completa de primera especie (**??**) del péndulo físico, tendremos que se cumple

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\operatorname{sen}^2(\beta)}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}}F\left(\frac{\pi}{2}\backslash\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Más aún, dado que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O\left(\theta_{\text{máx}}^7\right)$$

y que

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

tendremos

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left[\frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O\left(\theta_{\text{máx}}^7\right)\right]^{2n} \\ &\approx T_0\left[1 + \frac{1}{16}\theta_{\text{máx}}^2 + \frac{11}{3072}\theta_{\text{máx}}^4\right]. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Figura 7.22: Físico Sobreamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3,5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediablemente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

Si realizamos un estimado de las correcciones al problema lineal que conlleva esta expansión veremos que aún para ángulos $\theta_{\text{máx}} = \pi/4$ las correcciones son del orden de un pírrico 4 con lo cual la aproximación lineal resulta bien razonable. Para ángulos $\theta_{\text{máx}} \gtrsim 1$ las correcciones comienzan a ser significativas y todo este esfuerzo de integración empieza a tener sentido.

La siguiente tabla da una idea más clara de este cambio en el período del péndulo y los errores relativos porcentuales respecto al período del péndulo físico linealizado $T_0 = 2\pi/\omega_0$, cuando se consideran distintos valores del ángulo máximo $\theta_{\text{máx}}$.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}83845$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{12}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{6}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{3}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{2\pi}{3}$
T	2,85066	2,88786	2,95191	3,04617	3,35034	3,89685
$\epsilon = 100\frac{\lvert T - T_0\rvert}{T}$	0,42821	1,71109	3,84368	6,81916	15,2786	37,1283

7.6.10. El péndulo físico: integración numérica

Tal y como indicamos en la primera sección de este proyecto, procedemos a convertir una ecuación de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Veamos:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0 \operatorname{sen}(\theta) \quad \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 \operatorname{sen}(\theta(t)) \end{cases}$$

con lo cual podemos adimensionalizar de varias formas, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Podemos hacer:

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_{\text{final}}} = \frac{t}{t_f}$$

Borrador Preliminar

Figura 7.23: Diagrama de Fase para el Péndulo Físico.

con lo que $0 \leq \tilde{t} \leq 1$. Entonces:

$$\frac{1}{t_f}\frac{\mathrm{d}\,(\cdot)}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \frac{\mathrm{d}\,(\cdot)}{\mathrm{d}t}\,,$$

y adicionalmente:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}\,, \quad \text{con:} \quad \varphi_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \neq 0.$$

De este modo el sistema queda escrito

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} = \varphi(t) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \varphi_0\ t_f\ \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \Lambda\ \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \\
\dot{\varphi} = -\omega_0 \mathrm{sen}\,(\theta(t)) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\frac{\omega_0^2 t_f}{\varphi_0}\mathrm{sen}\left(\theta(\tilde{t})\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\Gamma\ \mathrm{sen}\left(\theta(\tilde{t})\right)
\end{aligned}$$

Nótese que las cantidades $\tilde{\varphi}(\tilde{t}), \theta(\tilde{t}), \tilde{t}, \Gamma$ y Λ son adimensionales. Acto seguido procedemos a integrar numéricamente el sistema de ecuaciones[7].

La figura 7.24 ilustra la evolución del ángulo $\theta\,(t)$ vs t, con $0 \leq t \leq 10$ del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial:

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t) = \varphi(t) = 3.5,\ 3.9,\ 4.0,\ 4.1,\ 4.5.$$

Mientras que la figura 7.25 (y también la figura 7.23) representan la evolución del sistema en el espacio de fases $\theta\,(t)$ vs $\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t)$, las curvas cerradas en ésta gráfica corresponden a las curvas oscilantes de la figura 7.24. Dado que el sistema parte de $\theta_0 = \theta\,(t=0)$ y seleccionamos el nivel de energía potencial igual a cero allí, cada una de estas curvas representan un valor de la energía cinética inicial.

[7] En MAPLEV podemos integrar el sistema de dos maneras distintas. La primera haciendo uso del comando `dsolve({sysED,CI}, numeric, vars, options)` donde `sysED` es el sistema de ecuaciones diferenciales, CI sus condiciones iniciales. Si necesitáramos un análisis gráfico es mucho más útil el paquete DEtools.

Borrador Preliminar

Figura 7.24: Integración numérica ($\theta\left(\tilde{t}\right)$ vs $\tilde{t}$, con $0 \leq \tilde{t} \leq 10$) del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial: $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t) = 3{,}5, 3{,}9, 4, 4{,}1, 4{,}5$.

El caso

$$E_c = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_0^2 = mg2L\,,$$

corresponde a la "separatríz", vale decir, la órbita que separa las curvas cerradas de las abierta. Es claro que en este caso le móvil "subirá" y alcanzará un equilibrio inestable en la posición vertical.

En la figura 7.24 este caso viene ilustrado por la curva que se convierte en horizontal $0,25 \leq \tilde{t} \leq 0,5$, luego a partir de $\tilde{t} \approx 0,5$, la inexactitud del cálculo numérico genera perturbaciones que en teoría no debieran existir.

7.6.11. Ejemplos

7.6.12. Practicando con Maxima

7.6.13. Ejercicios

Borrador Preliminar

Figura 7.25: Digrama de Fase para el Péndulo Físico

Borrador preliminar

Capítulo 8

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Borrador Preliminar

8.1. Algunos comentarios iniciales

Cuando consideramos la evolución de sistemas con varios grados de libertad o con varias partículas, naturalmente arribamos al tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales. En estos sistemas encontramos varias variables dependientes de una sola variable independiente. El más natural de los ejemplos es el caso de un sistema de partículas que se mueve en el espacio bajo la acción de fuerzas externas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1\left(r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_1(t)}{\mathrm{d}t^2} \\
\mathbf{F}_2\left(r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_2(t)}{\mathrm{d}t^2} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\qquad \vdots \\
\mathbf{F}_n\left(r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_n(t)}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, es importante acotar de que existe la posibilidad de convertir una ecuación diferencial ordinaria de orden superior es un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales. Es decir, dada una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)}(x) = \mathrm{F}\left(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), , \cdots y'''(x), y''(x), y'(x), y(x), x\right)$$

si hacemos el siguiente cambio variable

$$u_n = y^{(n-1)}(x); \quad u_{n-1} = y^{(n-2)}(x); \quad \cdots \quad u_4 = y'''(x); \quad u_3 = y''(x); \quad u_2 = y'(x); \quad u_1 = y(x)$$

entonces construir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
u_n'(x) &= \mathrm{F}_n(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_3, u_2, u_1, x) \\
u_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) \\
&\vdots \\
u_3'(x) &= y'''(x) \\
u_2'(x) &= y''(x) \\
u_1'(x) &= y'(x)
\end{aligned}$$

que puede ser generalizado a:

$$\begin{aligned}
u_n'(x) &= \mathrm{F}_n(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\
u_{n-1}'(x) &= \mathrm{F}_{n-1}(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
u_2'(x) &= \mathrm{F}_2(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\
u_1'(x) &= \mathrm{F}_1(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, x)
\end{aligned}$$

Para garantizar que existe solución al problema de valores iniciales se debe imponer algunas restricciones sobre las funciones $\mathrm{F}_i(u_n, \cdots, u_3, u_2, u_1, t)$ para ello existen un par de teoremas que garantice esa solución

Borrador Preliminar

Teorema: Sean las funciones $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \cdots \mathrm{F}_n$ y sus derivadas:

$$\partial_1 \mathrm{F}_1, \partial_1 \mathrm{F}_2, \cdots \partial_1 \mathrm{F}_n, \cdots \partial_i \mathrm{F}_1, \partial_i \mathrm{F}_2, \cdots \partial_j \mathrm{F}_n \cdots \partial_n \mathrm{F}_1, \partial_n \mathrm{F}_2, \cdots \partial_n \mathrm{F}_n$$

continuas en una región R del espacio $(x, u_1, u_2, \cdots, u_n)$, que contiene al punto $\left(x_0, u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0\right)$ que caracteriza las condiciones iniciales. Entonces existe un intervalo $|x - x_0| < h$ en el cual existe una única solución: $u_1 = \phi_1(x), u_2 = \phi_2(x), \cdots, u_n = \phi_n(x)$.

Hemos denotado $\partial_j \mathrm{F}_i = \dfrac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial u_j}$ y $u_m^0 = u_m(x_0)$ las condiciones iniciales.

Teorema: Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{array}{rcl} u_1' & = & p_{11}(x)\ u_1 + p_{12}(x)\ u_2 + \cdots + p_{1n}(x)\ u_n + g_1(x) \\ u_2' & = & p_{21}(x)\ u_1 + p_{22}(x)\ u_2 + \cdots + p_{2n}(x)\ u_n + g_2(x) \\ & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ u_n' & = & p_{n1}(x)\ u_1 + p_{n2}(x)\ u_2 + \cdots + p_{nn}(x)\ u_n + g_n(x) \end{array} \tag{8.1}$$

Si $p_{11}(x), p_{12}(x), \cdots p_{1n}(x) \cdots p_{ij}(x) \cdots\ p_{nn}(x)$ y $g_1(x) \cdots g_n(x)$ son funciones continua en el intervalo $\alpha < x < \beta$ que contiene al punto $x = x_0$ entonces existe una única solución que satisface las condiciones iniciales $u_m^0 = u_m(x_0)$.

Por ejemplo: dada la siguiente ecuación diferencial de tercer orden, no lineal

$$y''' = 3xy' - y^2 y'', \qquad \text{con:} \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 2\,,$$

Por el hecho de ser no lineal, los métodos anteriormente vistos no pueden ser aplicados aquí. Pero podemos construir un sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a la ecuación anterior. Consideramos que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada y definamos las siguientes cantidades:

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & u_1(x) \\ y'(x) & = & u_1'(x) = u_2(x) \\ y''(x) & = & u_1''(x) = u_2'(x) = u_3(x) \\ y'''(x) & = & u_1'''(x) = u_2''(x) = u_3'(x) \end{array}$$

por lo tanto, la ecuación diferencial dada se puede escribir como:

$$y''' = 3xy' - y^2 y'' \quad \Rightarrow \quad u_3' = 3xu_2 - u_1^2 u_3\,,$$

ahora, el sistema de ecuaciones de primer orden equivalente a la ecuación diferencial problema es:

$$\begin{array}{l} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = u_3(x) \\ u_3'(x) = 3xu_2 - u_1^2 u_3 \end{array}$$

que debemos resolver para el conjunto de condiciones iniciales:

$$u_1(0) = y(0) = 1,\ u_2(0) = y'(0) = -1,\ u_3(0) = y''(0) = 2\,,$$

por lo tanto, la función $u_1(x)$ que satisface éste último sistema será la solución de la ecuación diferencial de nuestro problema. Es necesario entonces tener la capacidad de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y a este cometido nos dedicaremos a continuación.

Borrador Preliminar

8.1.1. Notación matricial

El sistema lineal antes mencionado, es decir, las ecuaciones (8.6), puede condensarse en la siguiente ecuación matricial

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{P}(x)\,\mathbf{u}(x) + \mathbf{g}(x)\ , \tag{8.2}$$

en la cual estamos representando

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{pmatrix};\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \cdots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \cdots & p_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \cdots & p_{nn}(x) \end{pmatrix};\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix};\ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

El sistema (8.2) será homogéneo si $\mathbf{g}(x) = 0$, en caso contrario será un sistema no homogéneo.

8.1.2. Sistemas lineales homogéneos

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, es decir, de la forma

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x)\,, \tag{8.3}$$

procedemos de manera análoga al caso de una sola ecuación con coeficientes constantes.

Se considera una solución de prueba de la forma: $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx}$, donde r y el vector constante $\boldsymbol{\xi}$ son elementos a determinar. Al sustituir esta solución en (8.3), obtenemos: $\boldsymbol{\xi} r e^{rx} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} e^{rx}$, con lo cual, el problema se reduce a la búsqueda de los autovalores y autovectores del sistema $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}$.

En forma de matrices, la ecuación (8.3) es:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = e^{rx} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

con a_{ij}, y ξ_i como constantes.

Por lo tanto:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\,\xi = \mathbf{0}\,,$$

en forma de matrices, esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

Es decir, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraico.

Por ejemplo, resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= 4y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

este sistema se puede representar de la siguiente forma

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \text{si} \quad \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

primero que todo se calculan los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = 3 \\ \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

para el autovalor $r_1 = 3$, (8.4) resulta en

$$-2\,\xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ 2\xi_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

similarmente, para el segundo autovalor $r_2 = -1$, se tiene

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ -2\xi_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, la solución general del sistema será

$$\mathbf{y} = C_1\ \mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\ \mathbf{y}^{(2)}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

Obviamente el wronskiano de esta solución

$$\mathrm{W}\left[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x)\right] = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{vmatrix} = -4e^{-2x} \neq 0$$

garantiza que las dos soluciones son linealmente independientes.

Para el caso de matrices hermíticas, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$, vale decir, que la matriz $\mathbf{A}$ coincide con su conjugada y traspuesta, $\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^T\right)^*$, todos los autovalores son reales y la solución general para un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es

$$\mathbf{y}(x) = C_1\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 x} + C_2\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 x} + \cdots + C_n\ \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n x}\,.$$

Para el caso particular de matrices simétricas (hermíticas reales) los autovalores $r_1, r_2, \cdots,\ r_n$ y los autovectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ resultan ser ambos reales.

Consideremos ahora el caso cuando la matrix $\mathbf{A}$ no es hermítica pero real. Entonces

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \ \Rightarrow\ \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx} \ \Rightarrow\ (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\,\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \begin{cases} r_1 = \lambda + i\mu \\ \\ r_2 = \lambda - i\mu \end{cases}$$

esto significa que $r_1 = r_2^*$ y que $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \left(\boldsymbol{\xi}^{(2)}\right)^*$, por lo cual $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores reales, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(x) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})\, e^{(\lambda + i\mu)x} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})\, e^{\lambda x}\left[\cos(\mu x) + i\ \mathrm{sen}(\mu x)\right] \\ &= e^{\lambda x}\left[\mathbf{a}\cos(\mu x) - \mathbf{b}\ \mathrm{sen}(\mu x)\right] + i e^{\lambda x}\left[\mathbf{a}\ \mathrm{sen}(\mu x) + \mathbf{b}\cos(\mu x)\right] \\ &= \mathbf{u}(x) + i\mathbf{v}(x)\ . \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Es posible que se nos presente la siguiente situación: por un lado, algunos de los autovalores de la matriz real, $\mathbf{A}$, son números complejos, $r_1 = \lambda + i\mu$ y $r_2 = \lambda - i\mu$, pero el resto de las raíces resultan ser números reales: $r_3, r_4, \cdots, r_n$. Por el otro lado, algunos de los autovectores son complejos: $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, pero el resto de autovectores no lo son: $\boldsymbol{\xi}^{(3)}, \boldsymbol{\xi}^{(4)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$.

En este caso, la solución general sera

$$\mathbf{y}(x) = C_1\mathbf{u}(x) + iC_2\mathbf{v}(x) + C_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{r_3x} + C_4\boldsymbol{\xi}^{(4)}e^{r_4x} + \cdots + C_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_nx}.$$

Queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= 5y_1(x) - 3y_2(x) \end{aligned}$$

En forma de matrices lo que tenemos es

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{y}$$

Si utilizamos la siguiente solución de prueba $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}e^{rx}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se calculan los autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} r_1 = -1 + i \\ r_2 = -1 - i \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$$

finalmente la solución general será

$$\mathbf{y}(x) = C_1\, e^{-x}\begin{pmatrix} \cos(x) \\ 2\cos(x) + \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix} + iC_2\, e^{-x}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(x) \\ -\cos(x) + 2\operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}.$$

En el caso que los autovalores de la matriz real, $\mathbf{A}$, estén repetidos k veces, es decir: $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = \rho$, y para los restantes $r_{k+1}, \ldots, r_n$ distintos, se debe considerar algunos puntos. Lo primero es notar que puede suceder que existan $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ autovectores linealmente independientes asociados al autovalor ρ de multiplicidad k. Entonces, el conjunto de vectores linealmente independientes siguientes: $\mathbf{y}^{(1)}(x) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho x}, \mathbf{y}^{(2)}(x) = \boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{\rho x}, \ldots, \mathbf{y}^{(k)}(x) = \boldsymbol{\xi}^{(k)}e^{\rho x}$ serán soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (8.3). Pero si la matrix $\mathbf{A}$ no es hermítica existirá un número menor de autovectores correspondientes al autovalor ρ de multiplicidad k y no será posible tener entonces las k soluciones necesarias del sistema (8.3). Por lo tanto, se necesitará construir las soluciones que falten de alguna manera.

Quizás sea conveniente detenerse en un ejemplo particular. Dado el sistema:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) + 3y_2(x), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{y}.$$

Borrador Preliminar

Si repetimos el procedimiento anterior, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calculamos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} r_1 = 2 \\ \\ r_2 = 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y podemos ver que la multiplicidad es 2 y sólo podemos obtener un único autovector asociado al autovalor $\rho = r_1 = r_2 = 2$. Con este autovector podemos construir una solución linealmente independiente:

$$\mathbf{y}^{(1)}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resulta natural intentar buscar una segunda solución que contenga los términos xe^{2x} y e^{2x}.

Propongamos entonces la siguiente solución de prueba

$$\mathbf{y}^{(2)}(x) = \boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \boldsymbol{\zeta}^{(2)} e^{2x},$$

donde $\boldsymbol{\zeta}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\zeta}^{(2)}$ son vectores constantes a determinar.

Al sustituir esta solución de prueba en nuestra ecuación problema, resulta:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)} + 2\boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right) e^{2x} &= \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \boldsymbol{\zeta}^{(2)} e^{2x}\right), \\ (2\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\boldsymbol{\zeta}^{(1)} x e^{2x} + \left(\boldsymbol{\zeta}^{(1)} + 2\boldsymbol{\zeta}^{(2)} - \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}^{(2)}\right) e^{2x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los términos xe^{2x} y e^{2x} en ésta última expresión tenemos el siguiente par de ecuaciones de autovalores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}^{(1)} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}^{(2)} &= \boldsymbol{\zeta}^{(1)} \end{aligned}$$

La primera ecuación es satisfecha si hacemos coincidir $\boldsymbol{\zeta}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}^{(1)}$, es decir, con el autovector correspondiente a $\rho = 2$ que calculamos anteriormente. Por otro lado, se tiene que

$$|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pero sin embargo, la segunda ecuación tiene solución

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1^{(2)} \\ \zeta_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como las filas son proporcionales, entonces resulta que:

$$-\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\zeta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Borrador Preliminar

donde κ es un valor arbitrario. Hemos construido así una segunda solución

$$\mathbf{y}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} xe^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} ,$$

notemos que el último término de la ecuación anterior es un múltiplo del único término de $\mathbf{y}^{(1)}(x)$, por lo tanto debe ser ignorado.

En resumen, las dos soluciones linealmente independientes son:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \\ \mathbf{y}^{(2)}(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} xe^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} , \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio demostrar que $W\left[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x)\right] \neq 0$.

La solución general, será entonces

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} xe^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} \right] .$$

8.1.3. Sistemas lineales inhomogéneos

Todo operador lineal hermítico $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} : V \to V$), con n autovectores distintos tiene una representación matricial diagonal $\hat{A}_{ij}{=}\lambda_i \delta_{ij}$. Mediante una transformación de similidaridad: $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$, donde $\mathbf{T}$ es una matriz unitaria: $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\dagger}$, se trasforma la base de $\mathbf{A}$ a la base donde $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal.

Este teorema es claro: a partir de que sí $\mathbf{A}$ tiene n autovalores distintos, tiene n autovectores linealmente independientes los cuales forman una base de V y en la cual la representación matricial de $\mathbf{A}$ es diagonal. Pero como siempre es posible pasar de $\mathbf{A}$ no diagonal a $\hat{\mathbf{A}}$ diagonal con los mismos autovalores mediante una transformación de similidaridad $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$, esto queda demostrado. Lo anterior puede formalizarse de la siguiente manera:

$$\langle v_i | \underbrace{\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}}_{\mathbf{1}} \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T}}_{\mathbf{1}} | v_j \rangle = \underbrace{\langle v_i | \mathbf{T}^{\dagger}}_{\langle u_i |} \underbrace{\mathbf{TAT}^{\dagger}}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\mathbf{T} | v_j \rangle}_{| u_j \rangle} = \langle u_i | \hat{\mathbf{A}} | u_j \rangle = \lambda_j \langle u_i | u_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij} .$$

Nos queda determinar la forma de la matriz unitaria de transformación $\mathbf{T}$. Para ello seleccionamos la base canónica $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_i\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$ como base de partida de $\mathbf{A}$:

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, |e_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

y $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_i\rangle, \ldots, |u_n\rangle\}$ la base de autovectores en la cual $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal. Por lo tanto $\mathbf{T}$ es la matriz de transformación de una base a la otra. Identificando columna a columna nos damos cuenta que las columnas de la matriz $\mathbf{T}$ son los autovectores de $\mathbf{A}$

$$|u_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} |e_j\rangle \;\Rightarrow\; \langle e_j | u_i \rangle = \langle e_j | \sum_{j=1}^{n} T_{ij} |e_j\rangle ,$$

Borrador Preliminar

esto es:

$$\langle e_j \,|u_i\rangle = T_{ij} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots & u_n^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & & u_n^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{T}^\dagger = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & & u_2^{(n)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n^{(1)} & u_n^{(1)} & & u_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\,,$$

donde hemos denotado $u_i^{(m)}$ la componente m del vector j-esimo en la base $|e_i\rangle$, con $i = 1, \ldots, n$.

Por lo tanto, si los n autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$ son distintos y conocidos, $\mathbf{A}$ se dice diagonalizable. Si $\mathbf{A}$ es hermítica, $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger$ es muy fácil construir la inversa de la matriz de transformación $\mathbf{T}$. Si los autovalores de $\mathbf{A}$ con degenerados, vale decir si el número de autovectores linealmente independientes es menor que n, entonces $\mathbf{A}$ no es diagonalizable y no existe una matriz de transformacion $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}$ no tiene inversa) tal que $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$.

Ocupemonos ahora del problema de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo de la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x)\ ,$$

con:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y^{(1)}(x) \\ y^{(2)}(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(x) \\ g^{(2)}(x) \\ \vdots \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante y diagonalizable, $\mathbf{g}(x)$ contínua en el intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$.

La solución de este problema pasa por encontrar los autovalores $\{\lambda_i\}$ y autovectores $\{|u_i\rangle\}$ de $\mathbf{A}$, construir a partir de ellos la matriz $\mathbf{T}$ y su hermítica conjugada $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger$, y a partir de ella hacer el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{T}\mathbf{z}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}' = \underbrace{\mathbf{T^{-1}A T}}_{\hat{\mathbf{A}}}\,\mathbf{z} + \mathbf{T^{-1}g}\,,$$

por lo tanto

$$\mathbf{z}' = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{h}\,,$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{h} = \mathbf{T^{-1}g}\,.$$

Entonces, lo que tenemos ahora es un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado:

$$z_i'(x) = \lambda_i z_i(x) + h_i(x)\ .$$

Por ejemplo, encontremos la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -2y_1(x) + y_2(x) + 2e^{-x} \\ y_2'(x) &= y_1(x) - 2y_2(x) + 3x\,. \end{aligned}$$

En notación matricial:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2e^{-x} \\ 3x \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)\,.$$

Borrador Preliminar

Donde los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1 = -3\,, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \lambda_2 = -1\,, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{y}_h(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}\,,$$

y donde $\mathbf{y}_h(x)$ es la solución general de la homogénea.

Como $\mathbf{A}$ es real y simétrica, construimos la matriz $\mathbf{T}$ facilmente con los autovectores normalizados. Esto es:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora cambiando variables $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ tendremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{z}' = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{h} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-x} - 3x \\ 2e^{-x} + 3x \end{pmatrix},$$

con lo cual podemos escribir el sistema desacoplado de ecuaciones lineales de primer orden

$$z_1' + 3z_1 = \sqrt{2}e^{-x} - \frac{3}{\sqrt{2}}x \quad \text{y} \quad z_2' + 3z_2 = \sqrt{2}e^{-x} + \frac{3}{\sqrt{2}}x\,.$$

Como ya sabemos, la solución es inmediata

$$z_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + C_1 e^{-3x} \quad \text{y} \quad z_2(x) = \sqrt{2}xe^{-x} + \frac{3}{\sqrt{2}}(x-1) + C_2 e^{-x}$$

y devolviendo el cambio de variables tenemos que

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ -z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2) &= \frac{C_1}{\sqrt{2}}e^{-3x} + \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x - \frac{4}{3} + xe^{-x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-z_1 + z_2) &= -\frac{C_1}{\sqrt{2}}e^{-3x} + \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + 2x - \frac{5}{3} + xe^{-x}\,. \end{aligned}$$

Si utilizamos unas nuevas constantes: $\mathcal{C}_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2}}$ y $\mathcal{C}_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2}}$, resulta que podemos escribir la solución de la forma:

$$\mathbf{y} = \mathcal{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} + \mathcal{C}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} xe^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De esta solución es fácil reconocer que los primeros dos términos se corresponden a la solución del sistema homogéneo y los restantes términos tienen que ver con una solución particular del sistema inhomogéneo.

8.1.4. Ejemplos

8.1.5. Practicando con Maxima

8.1.6. Ejercicios

1. Encuentre un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente para las siguientes ecuaciones

   a) $y'' - 3x^2yy' = 0$ *b)* $y''' - 2x(y')^2 + 3xy'' - xy = 0$

Borrador Preliminar

2. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de dos ecuaciones diferenciales

   a) $y_1' = 3y_1 - 2y_2\,, \quad y_2' = 2y_1 - 2y_2$

   b) $y_1' = y_1 - 2y_2\,, \quad y_2' = 3y_1 - 4y_2$

   c) $y_1' = 2y_1 - y_2\,, \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2$

   d) $y_1' = y_1 + y_2\,, \quad y_2' = 4y_1 - 2y_2$

3. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de tres ecuaciones diferenciales

   a) $y_1' = y_1 + y_2 + 2y_3\,, \quad y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3\,, \quad y_3' = 2y_1 + y_2 + y_3$

   b) $y_1' = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3\,, \quad y_2' = 2y_1 + 2y_3\,, \quad y_3' = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$

   c) $y_1' = y_1 + y_2 + y_3\,, \quad y_2' = 2y_1 + y_2 - y_3\,, \quad y_3' = -8y_1 - 5y_2 - 3y_3$

   d) $y_1' = y_1 - y_2 + 4y_3\,, \quad y_2' = 3y_1 + 2y_2 - y_3\,, \quad y_3' = 2y_1 + y_2 - y_3$

4. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

   a) $y_1' = 2y_1 - y_2 + e^x\,, \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2 + x$

   b) $y_1' = y_1 + \sqrt{3}y_2 + e^x\,, \quad y_2' = \sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}e^x$

   c) $y_1' = 2y_1 - 5y_2 - \cos(x)\,, \quad y_2' = y_1 - 2y_2 + \operatorname{sen}(x)$

   d) $y_1' = y_1 + y_2 + e^{-2x}\,, \quad y_2' = 4y_1 - 2y_2 - 2e^x$

8.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales y el uso de operadores

En clases anteriores resolvimos algunos sistemas de ecuaciones diferenciales sacándole provecho a la notación matricial. Sin embrago, algunos sistemas son tan simples que tienen un método casi directo para su resolución, como podemos ver a continuación:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2e^{2t} \\ \dot{y} &= \frac{x^2 - y}{t}\,. \quad t \neq 0\,. \end{aligned}$$

Rápidamente nos damos cuenta que la primera ecuación puede ser integrada de manera directa:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2e^{2t} \;\Rightarrow\; x(t) = e^{2t} + C_1$$

al sustituir este resultado en la segunda ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\left(e^{2t} + C_1\right)^2 - y}{t} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{t} = \frac{e^{4t} + 2C_1e^{2t} + C_1^2}{t}\,,$$

esta última ecuación es lineal en y, por lo tanto la sabemos resolver:

$$y(t) = \frac{\frac{1}{4}e^{4t} + C_1e^{2t} + C_1^2t + C_2}{t}\,, \quad t \neq 0\,.$$

Borrador Preliminar

Anteriormente vimos algunas ventajas que aparecen por el hecho de utilizar la notación de operadores para encontrar una solución de una ecuación diferencial lineal de orden n. Recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes se podía escribir de la siguiente manera:

$$P(\mathbf{D})y = Q(x)\,. \tag{8.5}$$

donde

$$P(\mathbf{D}) = a_0 + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 + \cdots + a_n\mathbf{D}^n\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

con: $a_2, a_1, a_2, \ldots, a_n$ constantes.

En el caso de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales podemos también hacer uso de esta notación:

$$\begin{array}{rcl} P_{11}(\mathbf{D})y_1 + P_{12}(\mathbf{D})y_2 + P_{13}(\mathbf{D})y_3 + \cdots + P_{1n}(\mathbf{D})y_n & = & Q_1\,(x) \\ P_{21}(\mathbf{D})y_1 + P_{22}(\mathbf{D})y_2 + P_{23}(\mathbf{D})y_3 + \cdots + P_{2n}(\mathbf{D})y_n & = & Q_2\,(x) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1}(\mathbf{D})y_1 + P_{n2}(\mathbf{D})y_2 + P_{n3}(\mathbf{D})y_3 + \cdots + P_{nn}(\mathbf{D})y_n & = & Q_n\,(x)\,. \end{array} \tag{8.6}$$

La solución del sistema (8.6) es el conjunto de funciones: $\{y_n(x)\}$, cada una de ellas definidas en un intervalo común I.

Por ejemplo, para el siguiente sistema se tiene

$$\begin{array}{rl} 2y_1'(x) + 3y_1(x) + 5y_2'(x) - y_2(x) & = e^x \\ y_1'(x) - y_1(x) + 3y_2'(x) + y_2(x) & = \operatorname{sen}(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} (2\mathbf{D}+3)y_1 + (5\mathbf{D}-1)y_2 & = e^x \\ (\mathbf{D}-3)y_1 + (3\mathbf{D}+1)y_2 & = \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

Notemos también que el sistema (8.6) es un caso más general a los estudiados anteriormente, que eran de la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{P}\,(x)\,\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}\,(x)\,.$$

Por cuestiones netamente didácticas nos detendremos en el caso $n = 2$, entendiendo que los resultados aquí obtenidos pueden extrapolarse para cualquier valor de n.

Cuando $n = 2$, tenemos entonces:

$$\begin{array}{rcl} P_{11}(\mathbf{D})y_1 + P_{12}(\mathbf{D})y_2 & = & Q_1\,(x) \\ P_{21}(\mathbf{D})y_1 + P_{22}(\mathbf{D})y_2 & = & Q_2\,(x)\,. \end{array} \tag{8.7}$$

Estos sistemas al resolverse para las funciones incógnitas deben contener un número apropiado de constantes y para tal fin existe un teorema que garantiza el número correcto de constantes que deben aparecer.

Teorema: El número de constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución del sistema (8.7) debe ser igual al orden de la siguiente expresión:

$$\Delta \equiv P_{11}(\mathbf{D})P_{22}(\mathbf{D}) - P_{12}(\mathbf{D})P_{21}(\mathbf{D}) \tag{8.8}$$

con: $\Delta \neq 0$.

Si se da el caso que $\Delta = 0$, se dice que el sistema es *degenerado*. Notemos además que (8.8) tiene la forma de un determinante.

Borrador Preliminar

- **Caso no degenerado:** $\Delta \neq 0$

  El sistema (8.7) puede ser tratado como un sistema de ecuaciones algebraico. Esto significa que podemos manipular las filas a nuestra conveniencia para obtener su solución o utilizar cualquier técnica para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas desarrollado en cursos anteriores.

  Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned} 2\dot{x} - x + \dot{y} + 4y &= 1 \\ \dot{x} - \dot{y} &= t - 1\,. \end{aligned}$$

  Tal vez sea conveniente adaptar el problema a nuestra notación, es decir, hacemos los siguientes cambios: $x(t) = y_1(x)$ y $y(t) = y_2(x)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 2y_1'(x) - y_1(x) + y_2'(x) + 4y_1(x) &= 1 \\ y_1'(x) - y_2'(x) &= x - 1\,. \end{aligned}$$

  En la notación del operador diferencial sería:

$$\begin{aligned} (2\mathbf{D} - 1)y_1 + (\mathbf{D} + 4)y_2 &= 1 \\ \mathbf{D}y_1 - \mathbf{D}y_2 &= x - 1\,. \end{aligned}$$

  Multipliquemos la primera ecuación por $\mathbf{D}$ y la segunda por $\mathbf{D} + 4$:

$$\begin{aligned} (2\mathbf{D}^2 - \mathbf{D})y_1 + (\mathbf{D}^2 + 4\mathbf{D})y_2 &= \mathbf{D}[1] \\ (\mathbf{D}^2 + 4\mathbf{D})y_1 - (\mathbf{D}^2 + 4\mathbf{D})y_2 &= (\mathbf{D} + 4)[x - 1]\,. \end{aligned}$$

  Luego las sumamos para obtener:

$$(3\mathbf{D}^2 + 3\mathbf{D})y_1 = 0 + \mathbf{D}[x - 1] + 4(x - 1) = 1 + 4x - 4 = 4x - 3\,,$$

  esto significa que debemos resolver la siguiente ecuación

$$3y_1'' + 3y_1' = 4x - 3\,,$$

  con la ayuda de algunos de los métodos anteriormente vistos se obtiene la respectiva solución:

$$y_1(x) = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x\,.$$

  Al sustituir $y_1(x)$ en la segunda ecuación del sistema resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\left[C_1 + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x\right] - \mathbf{D}y_2 &= x - 1 \\ -C_2e^{-x} + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} - \mathbf{D}y_2 &= x - 1 \\ -C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} - \mathbf{D}y_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

  por lo tanto:

$$y_2' = -C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = C_2e^{-x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + C_3\,.$$

Borrador Preliminar

Ahora podemos estudiar el tema del número de constantes que deben aparecer. Del teorema anterior vemos que el determinate

$$\Delta = (2\mathbf{D}-1)(-\mathbf{D}) - (\mathbf{D})(\mathbf{D}+4) = -3\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D}\,,$$

es de orden 2. Por lo tanto, según el teorema antes mencionado deben existir únicamente dos constantes. Esto significa que tenemos una constante demás. Podemos hallar una relación entre las constantes sustituyendo las dos soluciones encontradas en la primera ecuación del sistema, recordemos la la segunda ecuación ya fue utilizada para encontrar $y_2(x)$. Esto es:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{D}-1)\left[C_1 + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x\right] + (\mathbf{D}+4)\left[C_2e^{-x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + C_3\right] &= 1\\ -6 - C_1 + 4C_3 = 1 \;\Rightarrow\; C_3 &= \frac{C_1+7}{4}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución al sistema será:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= C_1 + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x\\ y_2(x) &= C_2e^{-x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{C_1+7}{4}\,.\end{aligned}$$

- **Caso degenerado:** $\Delta = 0$

Como puede suceder para los sistemas algebraicos el sistema de ecuaciones puede ser degenerado, es decir, podrá tener infinitas soluciones o no tener solución, por ejemplo, el sistema:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 5\\ 2x + 3y &= 7\,,\end{aligned}$$

no tiene solución. Y el sistema

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 0\\ 4x + 6y &= 0\,,\end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones. En ambos casos, el determinante conformado por los coeficientes de x y de y es cero. Notemos también que para el primer sistema, si despejamos y de la segunda ecuación

$$y = \frac{7-2x}{3}\,,$$

y la sustituimos en la primera resulta:

$$2x + 3\left[\frac{7-2x}{3}\right] = 5 \quad\Rightarrow\quad 7 = 5\,,$$

no existe solución cuando el sistema no se reduce a una igualdad.

Si hacemos lo mismo con el segundo sistema, despejamos y en una

$$y = -\frac{2x}{3}\,,$$

Borrador Preliminar

y la sustituimos en la otra

$$2x + 3\left[-\frac{2x}{3}\right] = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0\,.$$

Existen infinitas soluciones si el sistema se reduce a una igualdad del tipo $0 = 0$.

Con los sistemas de ecuaciones diferenciales pasa lo mismo. Veamos un par de ejemplos.

El sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{D}y_1 - \mathbf{D}y_2 &= x \\ \mathbf{D}y_1 - \mathbf{D}y_2 &= x^2\,. \end{aligned}$$

es degenerado porque $-\mathbf{D}^2 - (-\mathbf{D}^2) = 0$. Si despejamos $\mathbf{D}y_1$ de la segunda ecuación

$$\mathbf{D}y_1 = \mathbf{D}y_2 + x^2\,,$$

y sustituimos en la primera:

$$\mathbf{D}y_2 + x^2 - \mathbf{D}y_2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 = x\,.$$

este sistema no tiene solución.

Volvamos al caso no degenerado. Como hemos mencionado el hecho de usar los operadores hace que el sistema puede ser tratado de manera similar al de un sistema algebraico, y por lo tanto, podemos utilizar cualquiera de los métodos para la resolución de sistemas algebraicos.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} P_{11}(\mathbf{D})y_1 + P_{12}(\mathbf{D})y_2 + P_{13}(\mathbf{D})y_3 &= Q_1\,(x) \\ P_{21}(\mathbf{D})y_1 + P_{22}(\mathbf{D})y_2 + P_{23}(\mathbf{D})y_3 &= Q_2\,(x) \\ P_{31}(\mathbf{D})y_1 + P_{32}(\mathbf{D})y_2 + P_{33}(\mathbf{D})y_3 &= Q_3\,(x)\;. \end{aligned} \tag{8.9}$$

El determinante que podemos asociar a éste sistema es:

$$\begin{aligned} \Delta &= P_{11}(\mathbf{D})P_{22}(\mathbf{D})P_{33}(\mathbf{D}) + P_{21}(\mathbf{D})P_{32}(\mathbf{D})P_{13}(\mathbf{D}) + P_{12}(\mathbf{D})P_{23}(\mathbf{D})P_{13}(\mathbf{D}) \\ &- P_{31}(\mathbf{D})P_{22}(\mathbf{D})P_{13}(\mathbf{D}) - P_{32}(\mathbf{D})P_{23}(\mathbf{D})P_{11}(\mathbf{D}) - P_{21}(\mathbf{D})P_{12}(\mathbf{D})P_{33}(\mathbf{D}) \end{aligned}$$

La manera usual de resolver este sistema es eliminar algunas de las variables, digamos y_3, de manera que nos queda un sistema reducido a dos ecuaciones, digamos:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{11}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{12}(\mathbf{D})y_2 &= \tilde{Q}_1\,(x) \\ \tilde{P}_{21}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{22}(\mathbf{D})y_2 &= \tilde{Q}_2\,(x)\;, \end{aligned} \tag{8.10}$$

Si de éste sistema eliminamos y_2, entonces lo que queda es una solo ecuación

$$\hat{P}_{11}(\mathbf{D})y_1 = \hat{Q}_1\,(x)\;, \tag{8.11}$$

la cual podemos resolver para y_1. Al sustituir este valor en cualquiera de las ecuaciones (8.10) se obtiene y_2. Finalmente, la sustitución de y_1 y y_2 en cualquiera de las ecuaciones de (8.9) permite obtener y_3. El número de constantes quedará determinado por el oden de Δ.

Borrador Preliminar

Otra manera de proceder es manipular el sistema (8.9) de manera tal que se obtenga un sistema equivalente triangular, es decir, de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{11}(\mathbf{D})y_1 &= \tilde{Q}_1(x) \\ \tilde{P}_{21}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{22}(\mathbf{D})y_2 &= \tilde{Q}_2(x) \\ \tilde{P}_{31}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{32}(\mathbf{D})y_2 + \tilde{P}_{33}(\mathbf{D})y_3 &= \tilde{Q}_3(x)\,. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Aquí, las soluciones se van obteniendo desde la primera ecuación hasta la última. Es bueno resaltar el hecho de que las soluciones obtenidas utilizando un sistema equivalente triangular contienen el número correcto de constantes requerido por el sistema. Entonces, para obtener un sistema equivalente triangular procedemos de la siguiente manera: decidimos dejar una de las ecuaciones sin intervenir y manipulamos las otras dos, repetimos este procedimiento las veces que sean necesarias hasta obtener el sistema deseado.

Por ejemplo, resolvamos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} - 2x + y - z &= t \\ -x + 2\dot{y} + y + 2z &= 1 \\ 2x + 6y + \dot{z} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\mathbf{D}-2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ -y_1 + (2\mathbf{D}+1)y_2 + 2y_3 &= 1 \\ 2y_1 + 6y_2 + \mathbf{D}y_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

- Retenemos la primer ecuación del sistema.
- Creamos un nuevo sistema multiplicando la primera ecuación por 2 y sumándola con la segunda, para de esta manera eliminar y_3. Con el mismo fin, multiplicamos la primera por $\mathbf{D}$ y la sumamos con la tercera. Con esto obtenemos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}-2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ (\mathbf{D}-5)y_1 + (2\mathbf{D}+3)y_2 &= 2x+1 \\ (\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D} + 2)y_1 + (\mathbf{D}+6)y_2 &= 1 \end{aligned}$$

- Podemos retener la primera y tercera ecuación y cambiamos la segunda. Entonces multiplicamos la tercera por -2 y la sumamos con la segunda:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}-2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ (-2\mathbf{D}^2 + 6\mathbf{D} - 9)y_1 - 9y_2 &= 2x-1 \\ (\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D} + 2)y_1 + (\mathbf{D}+6)y_2 &= 1 \end{aligned}$$

- Retenemos la primera y segunda ecuación y cambiamos la tercera. Lo podemos hacer multiplicando la segunda por $(\mathbf{D}+6)/9$ y luego se suma con la tercera:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}-2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ (-2\mathbf{D}^2 + 6\mathbf{D} - 9)y_1 - 9y_2 &= 2x-1 \\ (-\mathbf{D}^3 + 3\mathbf{D}^2 + 9\mathbf{D} - 36)y_1 &= 12x+5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, ya se puede integrar la última ecuación:

$$y_1(x) = \frac{C_1}{3}\,e^{3\,x} - \frac{2C_2}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{37}{9}\,x + C_3\,.$$

Borrador Preliminar

Al sustituir $y_1(x)$ en la segunda ecuación resulta que simplemente queda despejar $y_2(x)$

$$\begin{aligned}(-2\mathbf{D}^2+6\mathbf{D}-9)\left[\frac{C_1}{3}\,e^{3\,x}-\frac{2C_2}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}+\frac{2}{3}x^2+\frac{37}{9}\,x+C_3\right]-9y_2 &= 2x-1\\ -3C_1e^{3\,x}+15C_2e^{-\frac{3}{2}x}-6\,x^2-29x+22-9C_3-9y_2 &= 2x-1\,,\end{aligned}$$

es decir:

$$y_2(x)=-\frac{C_1}{3}e^{3x}+\frac{5C_2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{2}{3}x^2-\frac{31}{9}\,x+\frac{23}{9}-C_3\,.$$

Queda por último sustituir $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en la primera ecuación y despejar $y_3(x)$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}-2)\left[\frac{C_1}{3}\,e^{3\,x}-\frac{2C_2}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}+\frac{2}{3}x^2+\frac{37}{9}\,x+C_3\right] &+\\ \left[-\frac{C_1}{3}e^{3x}+\frac{5C_2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{2}{3}x^2-\frac{31}{9}\,x+\frac{23}{9}-C_3\right]-y_3 &= x\\ 4C_2e^{-\frac{3}{2}x}-2\,x^2-\frac{31}{3}\,x+\frac{20}{3}-3C_3-y_3 &= x\,,\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y_3(x)=4C_2e^{-\frac{3}{2}x}-2\,x^2-\frac{34}{3}\,x+\frac{20}{3}-3C_3\,.$$

No es necesario investigar sobre el número de constantes, en todo caso, y solo por curiosidad se puede ver que el determinante del sistema, al igual que para el sistema triangular, es de orden 3:

$$\Delta=\begin{bmatrix}\mathbf{D}-2 & 1 & -1\\ -1 & 2\,\mathbf{D}+1 & 2\\ 2 & 6 & \mathbf{D}\end{bmatrix}=2\,\mathbf{D}^3-3\,\mathbf{D}^2-9\mathbf{D}+36\,.$$

8.2.1. Ejemplos

8.2.2. Practicando con Maxima

8.2.3. Ejercicios

1. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}+3)y_1+(\mathbf{D}+1)y_2 &= e^x\\ (\mathbf{D}+1)y_1+(\mathbf{D}-1)y_2 &= x\,.\end{aligned}$$

   En este caso Δ es de orden cero y no deben aparecer constantes arbitrarias.

2. Demuestre que el siguiente sistema es degenerado y tiene infinitas soluciones

$$\begin{aligned}\mathbf{D}y_1-\mathbf{D}y_2 &= x\\ 4\mathbf{D}y_1-4\mathbf{D}y_2 &= 4x\,.\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

8.3. Sistemas y la transformada de Laplace

A diferencia del método anterior, el método de transformadas de Laplace solo se puede aplicar si además del sistema se suministran el conjunto completo de condiciones iniciales. Esto significa que la solución particular obtenida ya satisface las condiciones iniciales y no necesitamos evaluar las constantes arbitrarias que puedan resultar.

Como en capítulos anteriores resolvimos algunas ecuaciones diferenciales utilizando transformadas de Laplace, podemos pasar directamente a un ejemplo para ver como se aplica el método cuando se tienen sistemas de ecuaciones diferenciales (¡No necesariamente de primer orden!).

Veamos el ejemplo de resolver el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 4x + \dot{y} &= 0 \\ -4\dot{x} + \ddot{y} + 2y &= 0 \quad \text{con:} \quad x(0) = 0\,, \dot{x}(0) = 1\,, y(0) = -1\,, \dot{y}(0) = 2\,. \end{aligned}$$

En este caso el sistema consiste de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero debe quedar claro que el método se puede extender para sistemas con un número mayor de ecuaciones.

Como vimos anteriormente, utilizando la notación de las transformadas de Laplace el sistema se puede escribir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[y_1''\right] - 4\mathcal{L}\left[y_1\right] + \mathcal{L}\left[y_2'\right] &= 0 \\ -4\mathcal{L}\left[y_1'\right] + \mathcal{L}\left[y_2''\right] + 2\mathcal{L}\left[y_2\right] &= 0 \end{aligned}$$

Donde también, hemos rebautizado las funciones de la siguiente manera: $y_1(x) = x(t)$ y $y_2(x) = y(t)$.

Revisando las notas de las clases correspondientes a las transformadas de Laplace, podemos ver que el sistema anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\left[y_1\right] - y_1'(0) - sy_1(0) - 4\mathcal{L}\left[y_1\right] + s\mathcal{L}\left[y_2\right] - y_2(0) &= 0 \\ -4s\mathcal{L}\left[y_1\right] + 4y_1(0) + s^2\mathcal{L}\left[y_2\right] - y_2'(0) - sy_2(0) + 2\mathcal{L}\left[y_2\right] &= 0 \end{aligned}$$

al sustituir los respectivos valores para las condiciones iniciales y factorizando, resulta:

$$\begin{aligned} (s^2 - 4)\mathcal{L}\left[y_1\right] + s\mathcal{L}\left[y_2\right] &= 0 \\ -4s\mathcal{L}\left[y_1\right] + (s^2 + 2)\mathcal{L}\left[y_2\right] - 2 + s &= 0 \end{aligned}$$

Este último sistema puede ser tratado como un sistema algebraico para $\mathcal{L}\left[y_1\right]$ y $\mathcal{L}\left[y_2\right]$. Si multiplicamos la primera por $4s$, la segunda por $s^2 - 4$ y luego las sumamos eliminamos $\mathcal{L}\left[y_1\right]$, resulta:

$$(s^4 + 2s^2 - 8)\mathcal{L}\left[y_2\right] = -s^3 + 2s^2 + 4s - 8\,,$$

despejando $\mathcal{L}\left[y_2\right]$:

$$\mathcal{L}\left[y_2\right] = \frac{-s^3 + 2s^2 + 4s - 8}{s^4 + 2s^2 - 8} = \frac{-s^3 + 2s^2 + 4s - 8}{(s^2 + 4)(s^2 - 2)} = \frac{1}{6}\left[\frac{1 + \sqrt{2}}{s + \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{s - \sqrt{2}} - \frac{8(s - 2)}{s^2 + 4}\right].$$

Ahora debemos buscar en nuestra tablita de transformadas de Laplace, para hallar las transformadas

Borrador Preliminar

inversas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}x}\right] &= \frac{1+\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} \\
\mathcal{L}\left[(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}x}\right] &= \frac{1-\sqrt{2}}{s-\sqrt{2}} \\
\mathcal{L}\left[-8\cos(2x)\right] &= -8\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right] \\
\mathcal{L}\left[8\ \mathrm{sen}(2x)\right] &= 8\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y_2(x) = \frac{1}{6}\left[(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}x} + (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}x} - 8\cos(2x) + 8\ \mathrm{sen}(2x)\right].$$

Para calcular $y_1(x)$, podemos sustituir $\mathcal{L}[y_2]$ en cualquiera de las ecuaciones (8.13) - (8.13) y resolver para $\mathcal{L}[y_1]$:

$$(s^2-4)\mathcal{L}[y_1] + s\mathcal{L}[y_2] = 0 \ \Rightarrow\ (s^2-4)\mathcal{L}[y_1] + s\left[\frac{-s^3+2s^2+4s-8}{(s^2+4)(s^2-2)}\right] = 0\,,$$

esto es:

$$\mathcal{L}[y_1] = \frac{s(s-2)}{(s^2+4)(s^2-2)} = -\frac{1}{12}\left[\frac{2-\sqrt{2}}{s-\sqrt{2}} + \frac{2+\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} - 4\left(\frac{s+2}{s^2+4}\right)\right].$$

Nuevamente buscando en las tablas de transformadas de Laplace, término por término, se llega finalmente al siguiente resulado:

$$y_1(x) = -\frac{1}{12}\left[(2-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}x} + (2+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}x} - 4\cos(2x) - 4\ \mathrm{sen}(2x)\right].$$

Ejercicios

1. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

   a) $\dot{x} = -x^2\,,\qquad \dot{y} = -y$

   b) $\dot{x} = 3e^{-t}\,,\qquad \dot{y} = x+y$

   c) $\dot{x} = 2t\,,\qquad \dot{y} = 3x+2t\,,\qquad \dot{z} = x+4y+t$

   d) $\dot{x} = 3x+2e^{3t}\,,\qquad \dot{x}+\dot{y}-3y = \mathrm{sen}(2t)$

   e) $\ddot{x}+4x = 3\ \mathrm{sen}(t)\,,\qquad \dot{x}-\ddot{y}+y = 2\cos(t)$

   f) $\ddot{x}-4x-2\dot{y}+y = t\,,\qquad 2\dot{x}+x+\ddot{y}+y = 0$

2. Verifique que los siguientes sistemas son degenerados. Encuentre las soluciones si existen

Borrador Preliminar

a) $\mathbf{D}x + 2\mathbf{D}y = e^t\,,$ $\qquad \mathbf{D}x + 2\mathbf{D}y = t$

b) $\mathbf{D}x - \mathbf{D}y = e^t\,,$ $\qquad 3\mathbf{D}x - 3\mathbf{D}y = 3e^t$

c) $(\mathbf{D}^2 - 1)x + (\mathbf{D}^2 - 1)y = 0\,,$ $\qquad (\mathbf{D}^2 + 4)x + (\mathbf{D}^2 + 4)y = 0$

d) $(\mathbf{D} - 2)x + (\mathbf{D} - 2)y = t\,,$ $\qquad (\mathbf{D} + 3)x + (\mathbf{D} + 3)y = t$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

a) $(\mathbf{D} - 1)x = 0\,,$ $\quad -x + (\mathbf{D} - 3)y = 0\,,$ $\quad -x + y + (\mathbf{D} - 2)z = 0$

b) $(\mathbf{D} - 1)x = 0\,,$ $\quad 3x + 2(\mathbf{D} + 1)y = 0\,,$ $\quad 2y + (2\mathbf{D} - 3)z = 0$

c) $(\mathbf{D} - 2)x = 0\,,$ $\quad -3x + (\mathbf{D} + 2)y = 0\,,$ $\quad -2y + (\mathbf{D} - 3)z = 0$

d) $\mathbf{D}x - y + z = 0\,,$ $\quad -x + (\mathbf{D} - 1)y = 0\,,$ $\quad -x + (\mathbf{D} - 1)z = 0$

4. Resuelva los siguientes sistemas utilizando transformadas de Laplace

a) $\dot{x} - y = t\,,$ $\quad x - \dot{y} = 1\,,$ $\quad x(0) = 2\,, y(0) = 2$

b) $3\dot{x} + 3x + 2y = e^t\,,$ $\quad 4x - 3\dot{y} + 3y = 3t\,,$ $\quad x(0) = 1\,, y(0) = -1$

c) $\dot{x} + \dot{y} - 4y = 1\,,$ $\quad x + \dot{y} - 3y = t^2\,,$ $\quad x(0) = 2\,, y(0) = -2$

d) $\ddot{x} - \dot{y} = 1 - t\,,$ $\quad \dot{x} + 2\dot{y} = 4e^t + x$ $\quad x(0) = 0\,, y(0) = 0\,, x'(0) = 1$

8.3.1. Ejemplos

8.3.2. Practicando con Maxima

8.3.3. Ejercicios

8.4. Análisis cualitativo de ecuaciones deferenciales ordinarias

Muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse por métodos analíticos, entonces es importante considerar qué información cualitativa de las soluciones se puede obtener sin llegar a resolver las ecuaciones. Para ello consideramos la idea de estabilidad de una solución, y algunos métodos geométricos.

Consideremos un sistema lineal homogéneo de segundo orden con coeficientes constantes el cual, puede ser escrito como

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbb{A}\mathbf{x}\,, \tag{8.13}$$

donde $\mathbb{A}$ es una matriz constante de 2×2 y $\mathbf{x}$ es un vector de 2×1. Como siempre buscamos soluciones de la forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, entonces por sustitución de $\mathbf{x}$ encontramos que

$$(\mathbb{A} - r\mathbb{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}\,. \tag{8.14}$$

Entonces, r debe será un autovalor y $\boldsymbol{\xi}$ un autovector correspondiente de la matriz de coeficientes $\mathbb{A}$. Los autovalores son las raíces del polinomio característico de $\det(\mathbb{A} - r\mathbb{I}) = 0$. Los puntos en los cuales el lado derecho de la ecuación $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se anulan corresponden a soluciones constantes, o de equilibrio y se denominan

Borrador Preliminar

puntos críticos. Si supondremos que $\mathbb{A}$ es no singular, vale decir $\det \mathbb{A} \neq 0$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es el único punto crítico del sistema.

Por ejemplo, consideremos una ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(t)}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} + 2\phi(t) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} - \psi(t) = 0 \\ \\ \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} - 3\psi(t) + 2\phi(t) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right),$$

donde hemos redefinido $\phi(t) = x_1(t)$, $\psi(t) = x_2(t)$ y, consecuentemente $\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = \psi(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_2(t)$. Este sistema es equivalente a la ecuación (8.13).

Los autovalores y autovectores para la matriz son

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \\ \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Con lo cual, como esperábamos la solución general será de la forma

$$\left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right) = C_1\boldsymbol{\xi}_1\mathrm{e}^t + C_2\boldsymbol{\xi}_2\mathrm{e}^{2t} \equiv C_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right)\mathrm{e}^t + C_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right)\mathrm{e}^{2t}$$

Entonces representaremos las soluciones en el espacio de fase x_1 vs x_2 o, como acostumbramos en Física, $\phi(t)$ vs $\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}$.

Para caracterizar la ecuación diferencial según el patrón geométrico que forman sus trayectorias, vamos a considerar varios casos , dependiendo de la naturaleza de los valores propios de $\mathbb{A}$. Presentamos un cuadro resumen de lo que discutiremos a continuación

Estabilidad y propiedades de los sistemas lineales $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbb{A}\mathbf{x}$ con $\det(\mathbb{A} - r\mathbb{I}) = 0$ y $\det \mathbb{A} \neq 0$

Autovalores	**Tipo de punto crítico**	**Estabilidad**
$r_1 > r_2 > 0$	Nodo	Inestable
$r_1 < r_2 < 0$	Nodo	asintóticamente estable
$r_2 < 0 < r_1$	Punto de ensilladura	Inestable
$r_1 = r_2 > 0$	Nodo, propio o impropio	Inestable
$r_1 = r_2 < 0$	Nodo, propio o impropio	asintóticamente estable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Punto espiral	
$\lambda > 0$		Inestable
$\lambda < 0$		asintóticamente estable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estable

8.4.1. Caso autovalores distintos y positivos: $r_1 > r_2 > 0$

La solución general la podemos escribir como

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{r_2 t}$$

donde r_1 y r_2 son ambas positivos o ambos negativos.

Si r_1 y r_2 son ambos positivos, y $0 < r_2 < r_1$, entonces las trayectorias tienen el mismo patrón que en la figura 9.1.1a, pero la dirección del movimiento se aleja, en lugar de acercarse, al punto crítico en el origen.

Borrador Preliminar

En este caso x_1 y x_2 crecen exponencialmente como funciones de t. De nuevo el punto crítico se llama nodo, o (a menudo) fuente nodal.

Un ejemplo de nodo aparece en el Ejemplo 2 de la Sección 7,5, y sus trayectorias se muestran en la Figura 7.5.4. Valores propios reales de signo contrario. La solución general de la Ec. (2) es

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2^t}$$

donde $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$. Supongamos que los vectores propios $\xi^(1)$ y $\xi^{(2)}$ son como se muestra en la figura 9.1.2a. Si la solución comienza en un punto inicial en la línea que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, entonces se deduce que $c_2 = 0$. En consecuencia, la solución permanece en la recta que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ para todo t, y como $r_1 > 0, ||mathbfx||rightarrow\infty$ a medida que $t \to \infty$. Si la solución comienza en un punto inicial en la línea que pasa por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, entonces la situación es similar, excepto que $\|||mathbfx| \to 0$ como $t \to \infty$ porque $r_2 < 0$. Las soluciones que parten de otros puntos iniciales siguen trayectorias como las que se muestran en la figura 9.1.2a. La exponencial positiva es el término dominante en la Ec. (7) para grandes t, por lo que finalmente todas estas soluciones se aproximan al infinito de forma asintótica a la recta determinada

Supongamos primero que $r_1 < r_2 < 0$, y que los vectores propios $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son como se muestra en la figura 9.1.1a. De la Ec. (5) se deduce que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ como $t \to \infty$ independientemente de los valores de c_1 y c_2; en otras palabras, todas las soluciones se acercan al punto crítico en el origen como $t \to \infty$. Si la solución comienza en un

Borrador Preliminar

Capítulo 9

Métodos de soluciones por series

Borrador Preliminar

9.1. Otra vez las series

Recordemos que una serie de la forma

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots \tag{9.1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, x_0$ son constantes y x una variable se denomina una serie de potencias. También vimos que una serie de potencias puede

- converger sólo para un valor de $x = x_0$
- converger absolutamente para valores de x en una vecindad de x_0, es decir: $|x - x_0| < \rho$.
- converger absolutamente para todos los valores de x.

Si la serie de potencias (9.1) converge en un intervalo I : $|x - x_0| < \rho$, donde ρ es una constante positiva, entonces (9.1) define una función $f(x)$ contínua para todo x de I. Lo inverso de esta última afirmación es una cuestión que tendríamos que preguntarnos, es decir: dada una función, definida en un intervalo I ¿existe una serie de potencias que la defina? En clases anteriores, vimos que si $f(x)$ es definida por una serie de potencias, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) \quad &+ \quad f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \\ \cdots \quad &+ \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \end{aligned} \tag{9.2}$$

con $|x - x_0| < \rho$. La serie (9.2) se conoce como la expansión de $f(x)$ en serie de Taylor. Si $x_0 = 0$, la serie se denomina de Maclaurin.

Estudiemos ahora la relación que existe entre series y las ecuaciones diferenciales.

Un Ejemplo conocido: Consideremos la bien conocida ecuación diferencial

$$y'' + y = 0\,,$$

se propone encontrar una solución entorno a $x = 0$, por lo tanto, si consideramos la siguiente función de prueba

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

entonces, al derivar:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,,$$

y sustituir en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k\right] x^k = 0\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Por lo tanto

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+a_k=0 \quad \Rightarrow \quad a_{k+2}=\frac{-a_k}{(k+2)(k+1)} \quad \text{con} \quad k=0,1,2,\ldots$$

se puede ver que:

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 1}; \quad a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 3}=\frac{-1}{4\cdot 3}\cdot\frac{(-a_0)}{2}=\frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{a_0}{4!}; \quad a_6=-\frac{a_4}{6\cdot 5}=-\frac{a_0}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=-\frac{a_0}{6!}\,.$$

Y en general

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0\,.$$

Similarmente, para los coeficientes impares se obtiene

$$a_3=-\frac{a_1}{3\cdot 2}; \quad a_5=-\frac{a_3}{5\cdot 4}=\frac{-1}{5\cdot 4}\cdot\frac{(-a_1)}{3\cdot 2}=\frac{a_1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{a_1}{5!}; \quad a_7=-\frac{a_5}{7\cdot 6}=-\frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=-\frac{a_1}{7!}\,,$$

de donde

$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1\,.$$

De este modo, la solución deseada queda como

$$\begin{aligned}
y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= a_0+a_1x+\frac{(-a_0)}{2!}x^2+\frac{(-a_1)}{3!}x^3+\frac{a_0}{4!}x^4+\frac{a_1}{5!}x^5+\frac{(-a_0)}{6!}x^6+\frac{(-a_1)}{7!}x^7+\cdots\\
&= a_0\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right]+a_1\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right]\\
&= a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=a_0\cos(x)+a_1\mathrm{sen}(x)\,.
\end{aligned}$$

Otro ejemplo, menos conocido pero importante: Considere la ecuación de Hermite[1] la cual aparece en la solución del oscilador armónico cuántico

$$y''-2xy'+\lambda y=0\,.$$

Para resolver esta ecuación alrededor del punto $x_0=0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad \Rightarrow \begin{cases} y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\end{cases}$$

entonces, sustituyendo en la ecuación de Hermite resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= 0\\
\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n &= 0\\
(2a_2+\lambda a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+\lambda a_n\right]x^n &= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

[1] **Charles Hermite**, (1822-1901). Matemático francés, especializado en el estudio de teoría de funciones, ofreció importantes aportaciones al álgebra, las funciones abelianas y la teoría de las formas cuadraticas.

Borrador Preliminar

igualando términos se puede encontrar una relación de recurrencia para los coeficientes:

$$a_0 = -\frac{2a_2}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)\,(n+1)}a_n\,, \qquad n \geq 1\,.$$

La solución tendrá entonces la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\,\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)\,(4-\lambda)\,\lambda}{6!}x^6 - \cdots\right] \\ &+ a_1\left[x + \frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)\,(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)\,(6-\lambda)\,(2-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots\right] \\ &= a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) \end{aligned}$$

Nótese que para valores pares de λ una u otra serie se corta y genera polinomios de la forma:

λ	Ecuación de Hermite	Polinomio asociado
0	$y'' - 2xy' = 0$	$y_0(x) = 1$
2	$y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y_1(x) = x$
4	$y'' - 2xy' + 4y = 0$	$y_0(x) = 1 - 2x^2$
6	$y'' - 2xy' + 6y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3$
8	$y'' - 2xy' + 8y = 0$	$y_0(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$

Los polinomios de Hermite también pueden ser obtenidos a partir de la fórmula de Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.3}$$

o a través de una relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,.$$

Podemos ver la relación entre los polinomios de Hermite y las soluciones

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) = 1 = H_0(x) \\ \lambda = 2 \quad &\Rightarrow \quad y_1(x) = x = \frac{1}{2}H_1(x) \\ \lambda = 4 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) = 1 - 2x^2 = -\frac{1}{2}H_2(x) \\ \lambda = 6 \quad &\Rightarrow \quad y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3 = -\frac{1}{12}H_3(x) \\ \lambda = 8 \quad &\Rightarrow \quad y_0(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 = \frac{1}{12}H_4(x) \end{aligned}$$

Las ecuaciones antes mencionadas eran ecuaciones homogéneas. En el caso que la ecuación diferencial a resolver por series sea una ecuación inhomogéna, se procederá del mismo modo como se propuso en el caso de que los coeficientes de la ecuación diferencial fueran constantes. Esto es, se resuelve por series la homogénea y luego se propone una solución particular, en forma de serie de potencias, la cual se iguala con la expansión, también en series de potencias, del término inhomogéneo.

Como ejemplo, antes de proceder a casos más generales resolvamos la ecuación de Airy[2], pero inhomogéna, los cálculos se dejan como ejercicio para el estudiante. A pesar de su simplicidad, esta ecuación admite sólo soluciones en forma de serie.

[2] **George Biddell Airy** (1801-1892) Matemático y Astrónomo Inglés con contribuciones importantes en la solución de ecuaciones diferenciales y su utilización en Astronomía. Mejoró significativamente las estimaciones teóricas de la órbita de Venus y la Luna. Realizó estudios matemáticos de la formación del arcoiris y la densidad de la tierra.

Borrador Preliminar

La ecuación homogénea de Airy es la siguiente:

$$y'' - xy = 0$$

Compruebe, siguiendo el procedimiento arriba expuesto, que para una posible ecuación inhomogénea de Airy

$$y'' - xy = e^x$$

se tiene como solución la siguiente serie de potencias

$$y(x) = y(0)\left[1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right] + y'(0)\left[x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots\right] + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

Nótese que los dos primeros términos corresponden a la solución de la ecuación homogénea y el último representa la serie que anula el término inhomogéneo. Hemos hecho patente la dependencia de las constantes de integracón de las condiciones iniciales.

9.1.1. Método de Diferenciaciones Sucesiva

En general, dada la ecuación diferencial inhomogénea

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_n(x)y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)} = \mathcal{F}(x)\,. \tag{9.4}$$

Si los coeficientes $a_0(x)\cdots a_n(x)$ son funciones analíticas en $x = x_0$ (se pueden expresar como una serie de Taylor de $(x - x_0)$ que converge al valor de la función con un radio de convergencia de $|x - x_0| < \rho$), entonces, la ecuación diferencial (9.4) tendrá como solución única, $y = y(x)$, de la ecuación homogéna, una serie de potencias que satisface las n condiciones iniciales:

$$y(x_0) = C_1\,; \quad y'(x_0) = C_2\,; \quad y''(x_0) = C_3\,; \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$$

Adicionalmente, se expandirá en Taylor la función inhomogénea, esto es:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}^{(i)}(x_0)\frac{(x - x_0)^i}{i!}\,,$$

y se propondrá una solución particular de la inhomogénea, también en términos de una serie

$$y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\,.$$

Otra forma de hacerlo es proceder directamente y conservar el término inhomogéneo y a partir de la ecuación completa encontrar los coeficientes de la expansión por Taylor alrededor del punto en el cual se disponga de las condiciones iniciales. La solución en series de Taylor será

$$y_h(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \cdots\,.$$

Por ejemplo, resolver por series la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - (x + 1)\, y' + x^2 y = x\,; \quad \text{con} \quad y(0) = 1\,, \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

Borrador Preliminar

Los coeficientes de la expansión se obtienen de los valores de las derivadas en $x_0 = 0$, los cuales salen de las condiciones iniciales y de la ecuación diferencial, esto es

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = (0) + (0+1)\, y'(0) - 0^2 y(0) = 1$$

y de las derivadas de la ecuación diferencial hasta el orden que consideremos conveniente

$$\begin{aligned} y'''(x) &= y'(x) + (x+1)\, y''(x) - 2x\ y(x) - x^2 y'(x) + 1 \\ y'''(0) &= y'(0) + (0+1)\, y''(0) - 2(0)\ y(0) - 0^2 y'(0) + 1 \\ y'''(0) &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

finalmente, la solución es entonces:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots .$$

Esta solución contiene las dos soluciones (la homogénea y la particular de la inhomogénea) sumadas.

9.1.2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

En general, para encontrar la solución a la ecuación antes mencionada:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)\,,$$

se expanden por series de potencias cada uno de los coeficientes $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, la función $\mathcal{F}(x)$ y se propone la siguiente solución de prueba

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (x - x_0)^n$$

luego de bastante transpiración se despejan los coeficientes: $c_0 \cdots c_n \cdots$.

Consideremos a misma ecuación del ejemplo anterior.

$$y'' - (x+1)\, y' + x^2 y = x\,; \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

Como $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{cases}$$

y al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= x \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} &= x \end{aligned}$$

si hacemos $n - 2 = l$ en el primer término, $n - 1 = k$ en el tercero y $n + 2 = m$ en el cuarto, tenemos

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)\,(l+1)\, c_{l+2} x^l - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

Borrador Preliminar

nótese que en el segundo término se puede comenzar la serie en cero y no pasa nada. Al renombrar nuevamente los índices y factorizar se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}-nc_n-(n+1)c_{n+1}\right]x^n+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n \quad = \quad x$$

por lo tanto

$$\begin{array}{lcl} n=0 & \Rightarrow & 2c_2-c_1=0 \\ n=1 & \Rightarrow & 3\cdot 2\ c_3-c_1-2\ c_2=1 \end{array}$$

y la relación de recurrencia para $n\geq 2$ es la siguiente

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}-nc_n-(n+1)c_{n+1}-c_{n-2}=0$$

con la cual se obtienen todos los demás coeficientes.

9.1.3. Ejemplos

1. Si la ecuación a resolver es ahora

$$y''+\operatorname{sen}(x)y'+e^xy=0$$

se expanden los coeficientes

$$y''+\left[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right]y'+\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\cdots\right]y=0$$

se propone una solución en términos de series de potencias

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2} \end{cases}$$

por lo cual, al sustituir en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\left[x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right]\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right]\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

acomodando términos se puede ver que

$$(2c_2+c_0)+(6c_3+2c_1+c_0)\,x+(12c_4+3c_2+c_1+c_0/2)\,x^2+(20c_5+4c_3+c_2+c_1/3+c_0/6)\,x^3+\cdots=0$$

Por lo tanto, al igualar coeficientes resulta:

$$\begin{array}{rcccl} 2c_2+c_0 & = & 0 & \Rightarrow & c_2=-c_0/2 \\ 6c_3+2c_1+c_0 & = & 0 & \Rightarrow & c_3=-c_1/3-c_0/6 \\ 12c_4+3c_2+c_1+c_0 & = & 0 & \Rightarrow & c_4=c_0/12-c_1/12 \\ 20c_5+4c_3+c_2+c_1+c_0 & = & 0 & \Rightarrow & c_5=c_0/20+c_1/20 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Por lo tanto, la solución se puede escribir de la siguiente manera

$$y(x)=c_0\left[1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{20}x^5+\cdots\right]+c_1\left[x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{20}x^5+\cdots\right].$$

Borrador Preliminar

9.1.4. Practicando con Maxima

9.1.5. Ejercicios

1. Dado $|x| < 1$ y la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}\, y = e^{2x}\,; \quad \text{con} \quad y(0) = 1\,, \quad \text{y} \quad y'(0) = 1\,,$$

compruebe que tiene como solución general por series

$$y(x) = y(0)\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \cdots\right] + y'(0)x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots$$

y al incorporar los valores de las condiciones iniciales se obtiene

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{4}{315}x^7 - \frac{79}{10\,080}x^8 + \cdots$$

2. Utilice el método de los coeficientes indeterminados para resolver

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}\, y = \mathrm{e}^{2x}; \qquad \textit{con} \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

3. Encuentre los términos hasta orden k de la solución particular de cada uno de las siguientes ecuaciones diferenciales. Utilice ambos métodos: diferenciaciones sucesivas y coeficientes indeterminados.

   a) $y' - xy + x^3 = 0\,, \qquad y(0) = 2\,, \quad k = 5$

   b) $x^2y'' = x + 1\,, \qquad y(1) = 0\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad k = 4$

   c) $xy'' + x^2y' - 2y = 0\,, \qquad y(1) = 0\,, \quad y'(0) = -1\,, \quad k = 4$

   d) $y'' + 3xy' + e^xy = 2x\,, \qquad y(1) = 0\,, \quad y'(1) = 1/2\,, \quad k = 5$

   e) $(1-x)y''' - 2xy' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -1\,, \quad y''(0) = 2\,, \quad k = 6$

9.2. Los Puntos y las Estrategias

Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)\, y = 0 \quad \Rightarrow y'' + \frac{Q\,(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}\, y = 0$$

entonces debemos aclarar algunos aspectos:

Puntos ordinarios Un punto ordinario $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ sean analíticas en ese punto, o lo que es igual a

$$\lim_{x\to x_0} p(x) \equiv \lim_{x\to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = L_1\,, \quad \text{con } L_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x\to x_0} q(x) \equiv \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = L_2\,, \quad \text{con } L_2 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x)$ y $q(x)$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto $x = x_0$, es decir, que sean analíticas.

Borrador Preliminar

Puntos singulares regulares Un punto $x = x_0$ se llamará un punto singular regular si

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x) &\equiv \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = L_3\,, \quad \text{con } L_3 \text{ finito}\\ \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x) &\equiv \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} = L_4\,, \quad \text{con } L_4 \text{ finito}\end{aligned}$$

O también, lo que es lo mismo, que: $p(x)(x-x_0)$ y $q(x)\,(x-x_0)^2$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto.

Puntos singulares irregulares Ninguna de las anteriores.

Por ejemplo, Dada la siguiente ecuación:

$$(x-1)y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = 0 \qquad \text{(a)}$$

Si dividimos por $(x-1)$, resulta:

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2y}{x-1} = 0 \quad \text{(b)}$$

entonces:

$$p(x) = \frac{1}{x(x-1)} \quad \text{y} \quad q(x) = -\frac{2}{x-1}$$

los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares de (b). Investiguemos si son puntos singulares regulares:

- Para el punto $x = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(x-0)\,p(x) &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x(x-1)}\right] = -1\\ \lim_{x\to 0}(x-0)^2\,q(x) &= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{2x^2}{x-1}\right] = 0\end{aligned}$$

  por lo tanto, $p(x)$ y $q(x)$ tienen una espansión en Taylor alrededor de $x = 0$ y el punto representa una singularidad regular.

- Para el punto $x = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x-1)\,p(x) &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{x(x-1)}\right] = 1\\ \lim_{x\to 1}(x-1)^2\,q(x) &= \lim_{x\to 1}\left[-\frac{2(x-1)^2}{x-1}\right] = 0\end{aligned}$$

  Por la misma razón del caso anterior, el punto $x = 1$ también resulta ser una singularidad regular.

9.2.1. Ecuaciones e intervalos en puntos ordinarios

Puntos ordinarios y la ecuación de Legendre

La ecuación de Legendre[3]

$$(1-x^2)\;y'' - 2x\;y' + \lambda(\lambda+1)\;y = 0 \tag{9.5}$$

[3] **Adrien Marie Legendre** (1752-1833). Matemático francés, encuadrado en la escuela de París, que surgió luego de la revolución de 1789. Realizó una teoría general de las funciones elípticas y divulgó numerosos trabajos de investigadores jóvenes en el campo del análisis matemático.

Borrador Preliminar

tiene puntos regulares en $x \neq \pm 1$ y puntos singulares regulares en $x = \pm 1$. Pero es analítica en $x \in (-1, 1)$, por lo tanto, todos los x son ordinarios si $x \in (-1, 1)$. En ese intervalo se propone una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

al sustituir esta solución en la ecuación diferencial, resulta

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n \; a_n x^{n-1} + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

multiplicando y acomodando

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \; a_n x^n + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

expandiendo

$$2a_2 + \lambda(\lambda+1) a_0 \left[(\lambda+2)(\lambda-1) a_1 + (3 \cdot 2) a_3 \right] x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n) a_n \right] x^n = 0$$

donde hemos utilizado

$$-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda+1) = (\lambda+n+1)(\lambda-n)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2} \; a_0 \\
a_4 &= \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} \; a_0 \\
a_{2n} &= (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!} \; a_0
\end{aligned}$$

y las potencias impares serán

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} \; a_1 \\
a_5 &= \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} \; a_1 \\
a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\lambda+2n)(\lambda+2n-2)\cdots(\lambda+2)(\lambda-1)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!} \; a_1
\end{aligned}$$

La solución general se puede escribir de la siguiente manera

$$y(x) = a_0 \; y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

con

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2} \; x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} \; x^4 + \cdots \\
y_1(x) &= x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} \; x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} \; x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

si $\lambda = 2n$ una de las series se corta y la solución es un polinomio de potencias pares, si $\lambda = 2n+1$ la otra se corta en uno de potencias impares.

Podemos ver la relación entre los polinomios de Legendre que analizamos en la sección 4.2 y las soluciones por series que planteamos aquí:

$$\begin{array}{lclcl}
\lambda = 0 & \Rightarrow & y_0(x) & = & 1 = P_0(x) \\
\lambda = 1 & \Rightarrow & y_1(x) & = & x = P_1(x) \\
\lambda = 2 & \Rightarrow & y_0(x) & = & 1 - 3x^2 = -2P_2(x) \\
\lambda = 3 & \Rightarrow & y_1(x) & = & x - \dfrac{5}{3}x^3 = -\dfrac{2}{3}P_3(x) \\
\lambda = 4 & \Rightarrow & y_0(x) & = & 1 - 10x^2 + \dfrac{35}{3}x^4 = \dfrac{8}{3}P_4(x)\,.
\end{array}$$

Puntos ordinarios y la ecuación de Legendre asociada

Considere ahora la siguiente ecuación diferencial muy parecida a la ecuación de Legendre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0\,. \tag{9.6}$$

En apariencia esta ecuación tienen dos polos $x = \pm 1$, sin embargo demostraremos que si $\lambda = l(l+1)$ con $-l \leq m \leq l$, tendrá una solución acotada que incluye a esos puntos.

Claramente, para el caso $m = 0$, se tiene que la ecuación (9.6) a la ecuación de Legendre (9.5) o también a la ecuación (4.1) que discutimos en la sección 4.2.

Si hacemos explícito que los polinomios de Legendre son solución de la ecuación (9.5) tendremos

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2P_l(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x} + l(l+1)P_l(x) = 0\,. \tag{9.7}$$

Si derivamos $m-$veces los términos de esa ecuación tendremos

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_l\right] = \left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^{m+2}}{\mathrm{d}x^{m+2}}P_l - 2mx\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}P_l - m(m-1)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l$$
$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_l\right] = 2x\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}P_l + 2m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l\,.$$

Podemos entonces escribir la ecuación (9.7) derivada $m-$veces como

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^{m+2}P_l}{\mathrm{d}x^{m+2}} - 2x(m+1)\frac{\mathrm{d}^{m+1}P_l}{\mathrm{d}x^{m+1}} + [l(l+1) - m(m+1)]\frac{\mathrm{d}^mP_l}{\mathrm{d}x^m} = 0\,,$$

y con el siguiente cambio de variable obtenemos

$$u(x) = \frac{\mathrm{d}^mP_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \quad \Rightarrow \left(1-x^2\right)u(x)'' - 2x(m+1)u(x)' + [l(l+1) - m(m+1)]u(x) = 0\,.$$

Un segundo cambio de variable[4] nos conduce a la ecuación diferencial asociada de Legendre (4.6)

$$u(x) = \left(1-x^2\right)^{-m/2}y(x) \quad \Rightarrow \left(1-x^2\right)y(x)'' - 2xy(x)' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0\,,$$

[4]Dejamos al lector comprobar que este cambio conduce a esta nueva ecuación diferencial

Borrador Preliminar

que presentamos en su momento en la sección 4.3.1.

Por lo tanto, hemos demostrado que la ecuación de Legendre la ecuación de Legendre (9.5) conduce a la ecuación asociada de Legendre (4.6), para $\lambda = l(l+1)$ y $-l \leq m \leq l$.

Realmente, este tipo de soluciones también está relacionada con el método de Frobenious que presentaremos en las secciones venideras.

9.2.2. Ejemplos

9.2.3. Practicando con Maxima

9.2.4. Ejercicios

1. Muestre que los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares irregulares de la siguiente ecuación:

$$(x-1)^2 y'' + \frac{1}{x^2} y' + 2y = 0\,.$$

2. Obtenga los términos hasta orden k en potencias de $(x - x_0)$ de la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

   a) $y'' - xy' + 2y = 0\,,$ $\quad x_0 = 0\,,\quad k = 7$

   b) $2(x^2+8)y'' + 2xy' + (x+2)y = 0\,,$ $\quad x_0 = 0\,,\quad k = 4$

   c) $xy'' + x^2 y' - 2y = 0\,,$ $\quad x_0 = 1\,,\quad k = 4$

   d) $y'' - xy' - y = \operatorname{sen}(x)\,,$ $\quad x_0 = 0\,,\quad k = 5$

9.3. El Método de Frobenius

9.3.1. Descripción General

Para la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias alrededor de puntos singulares regulares se utiliza el método de Frobenius[5]. Dada una ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + F_1(x)y' + F_2(x)\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)} y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}\, y = 0\,, \tag{9.8}$$

donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ tienen singularidades regulares en $x = x_0$ y por lo tanto $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas alrededor de ese punto. Entonces, la propuesta de solución será una serie de Frobenius

$$y(x) = (x-x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n\ , \tag{9.9}$$

donde n es entero positivo, pero m puede ser entero positivo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Taylor) o entero negativo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Laurent), o un racional. Por lo cual

[5] **Ferdinand Georg Frobenius** (1849-1917) Matemático Alemán famoso por sus contribuciones en Teoría de Grupos y métodos para resolver ecuaciones diferenciales.

Borrador Preliminar

una serie de Frobenius incluye a las serie de Taylor y Laurent. Para hacer las cosas más simples supongamos, sin perder generalidad, $x_0 = 0$. Además, como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas entonces

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{9.10}$$

por lo tanto, la ecuación (9.8) queda

$$y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2}\ y = 0 \quad \Rightarrow x^2 y'' + x\ f_1(x)\ y' + f_2(x)\ y = 0 \tag{9.11}$$

o también:

$$x^2 y'' + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) y' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) y = 0\,.$$

Propondremos entonces la serie de Frobenius como solución de prueba:

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} y'(x) &= m x^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) + x^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n x^{n-1} \right) \\ y''(x) &= m(m-1) x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) + 2m x^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) + x^m \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right)\,, \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x^2 \left[m(m-1) x^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2m x^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x^m \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right] + \\ x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left[m x^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^m \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\,, \end{aligned}$$

acomodando algunos términos:

$$\begin{aligned} m(m-1) x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2m x^m \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + x^m \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left[m x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^m \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\,, \end{aligned}$$

podemos ahora sacar como factor común a x^m,

$$\begin{aligned} x^m \Bigg[m(m-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2m \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left[m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] + \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Bigg] = 0\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Expandiendo estas series y factorizando para los términos de igual potencia:

$$\begin{aligned}
&\{a_0[m(m-1)+b_0m+c_0]\}\,x^m + \\
&\{a_1[m(m+1)+b_0(m+1)+c_0]+a_0\,[b_1m+c_1]\}\,x^{m+1} + \\
&\{a_2[(m+2)(m+1)+b_0(m+2)+c_0]+a_1\,[b_1(m+1)+c_1]+a_0\,[b_2m+c_2]\}\,x^{m+2} + \\
&\{a_3[(m+3)\,(m+2)+b_0\,(m+3)+c_0]+a_2\,[b_1(m+2)+c_1]+a_1\,[b_2(m+1)+c_2]+a_0\,[b_3m+c_3]\}\,x^{m+3} + \\
&\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&+\cdots+\{a_n[(m+n)(m+n-1)+b_0(m+n)+c_0]+a_{n-1}\,[b_1(m+n-1)+c_1]+ \\
&a_{n-2}\,[b_2\,(m+n-2)+c_2]+ \\
&a_{n-3}\,[b_3\,(m+n-3)+c_3]+ \\
&+\cdots+a_1\,[b_{n-1}(m+1)+c_{n-1}]+ \\
&a_0\,[b_nm+c_n]\}\,x^{m+n}=0
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Consideremos el coeficiente de a_0 que aparece en la primera línea, lo denotaremos por $\mu(m)$

$$\mu(m)=m(m-1)+b_0m+c_0\,,$$

podemos notar que para el coeficiente de a_1 en la segunda línea tenemos

$$\mu(m+1)=m(m+1)+b_0(m+1)+c_0\,,$$

de manera que:

$$\begin{array}{lcl}
\text{para: } a_2 & \Rightarrow & \mu(m+2)=(m+2)(m+1)+b_0(m+2)+c_0 \\
\text{para: } a_3 & \Rightarrow & \mu(m+3)=(m+3)\,(m+2)+b_0\,(m+3)+c_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\text{para: } a_n & \Rightarrow & \mu(m+n)=(m+n)(m+n-1)+b_0(m+n)+c_0\,.
\end{array}$$

Esto nos permite reacomodar aún más nuestros cálculos

$$a_0\mu(m)x^m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\;\mu(m+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\;\;[(m+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}]\right]x^{m+n}=0\,. \tag{9.13}$$

Como es de esperarse, este polinomio se anula si los coeficientes de $x^m,\ldots,x^{m+i}$ se anulan.

La primera de las ecuaciones que surge es lo que llamaremos la ecuación indicadora o índice

$$a_0\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \mu(m)=m(m-1)+b_0m+c_0=0\,, \tag{9.14}$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en m.

Al anular el coeficiente de x^{m+n}

$$a_n\mu(m+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\;\;[(m+k)b_{n-k}+c_{n-k}]=0\,, \tag{9.15}$$

obtendremos la relación de recurrencia para la serie de Frobenius, correspondientes a cada raíz de la ecuación indicadora (9.14), es decir, los coeficientes a_n dependerán de m y de los coeficientes que le preceden: $\{a_{n-1}\}$.

Dado que la ecuación indicadora es un polinomio de segundo grado para m, entonces de allí se derivan dos raíces: m_1 y m_2 (consideraremos siempre que $m_1\geq m_2$). Dependiendo de como sean estas raíces distinguiremos tres casos:

Borrador Preliminar

1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero. La solución general será

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \\ y_2(x) = x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

2. $m_1 = m_2 = m$. Para este caso solución general será

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = x^{m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \\ y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$, con N entero positivo. Finalmente, para este caso tendremos

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \\ y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Como veremos a continuación, las raíces determinan fuertemente el comportamiento de las soluciones en la vecindad de la singularidad. También podemos ver que los dos términos que aparecen en (9.15) no tienen por qué ser necesariamente diferentes a cero simultáneamente.

Estudiemos estos casos con un poco más de detalle:

9.3.2. Caso 1: $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero.

En ese caso es claro que al resolver la ecuación indicadora y sustituir m_1 en (9.15), se van despejando todos los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ en términos de a_0. Notemos que siempre se cumplirá, en (9.15), que $\mu(m_1+n) \neq 0$. Igualmente al sustituir m_2 encontramos la otra solución y ambas son linealmente independientes.

La solución general será

$$y(x) = C_1 \; x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + C_2 \; x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,, \quad x > 0 \,,$$

para $x < 0$, debemos reemplazar x^{m_1} por $|x|^{m_1}$ y x^{m_2} por $|x|^{m_2}$ en la solución anterior.

Por ejemplo, encontremos la solución en términos de series de Frobenius de la siguiente ecuación

$$x^2 \; y'' + x \left(x + \frac{1}{2}\right) y' - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \; y = 0 \,.$$

Al dividir por x^2 identificamos que $x = 0$ es un punto singular regular.

$$y'' + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{2}\right) y' - \frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) y = 0 \,.$$

Proponemos por lo tanto una serie de Frobenius: $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Necesitamos ahora hacer algunas identificaciones fundamentales de esta última ecuación

$$f_1(x) = \frac{1}{2} + x \,, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2} - x^2 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{2} \,, \quad b_1 = 1 \\ \\ c_0 = -\frac{1}{2} \,, \quad c_1 = 0 \,, \quad c_2 = -1 \,, \end{array}\right.$$

Borrador Preliminar

el resto de los coeficientes son: $b_2 = b_3 = \cdots = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = 0$.

En cuanto a la ecuación indicadora tenemos lo siguiente:

$$\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \quad \Rightarrow m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Las dos raíces son diferentes y su diferencia no es un entero: $1 - (-1/2) = 3/2$.

Ahora podemos ir directamente al coeficiente de x^{m+n} en (9.12) pues sabemos los valores de todos los coeficientes $\{b_i\}$ y $\{c_i\}$. Por lo tanto:

$$a_n \left[(m+n)(m+n-1) + \frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}\right] + a_{n-1}(m+n-1) - a_{n-2} = 0$$
$$a_n \left[m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right] + a_{n-1}(m+n-1) - a_{n-2} = 0$$

Con lo cual la relación de recurrencia general será

$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}(m+n-1)}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}\,, \qquad \text{para } n \geq 2\,,$$

dependiendo del valor de m tendremos una relación de recurrencia diferente.

- Para $m = 1$. En este caso se obtiene:

$$a_n = \frac{2\left(a_{n-2} - n a_{n-1}\right)}{2n^2 + 3n} \qquad \text{para } n \geq 2\,.$$

Note que podemos encontrar a_1 a partir del coeficiente de x^{m+1} en la ecuación (9.12):

$$a_1 \left[1(1+1) + \frac{1}{2}(1+1) - \frac{1}{2}\right] + a_0\,[1+0] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -\frac{2}{5}a_0$$

con lo cual

$$\begin{array}{llll}
n = 2 & \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{7}\left(a_0 - 2a_1\right) = \frac{1}{7}\left(a_0 + \frac{4}{5}a_0\right) = \frac{9}{35}a_0 & \Rightarrow & a_2 = \frac{9}{35}a_0 \\
n = 3 & \Rightarrow \quad a_3 = \frac{2}{27}\left(a_1 - 3a_2\right) = \frac{2}{27}\left(-\frac{2}{5}a_0 - \frac{27}{35}a_0\right) = -\frac{82}{945}a_0 & \Rightarrow & a_3 = -\frac{82}{945}a_0 \\
n = 4 & \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{22}\left(a_2 - 4a_3\right) = \frac{1}{22}\left(\frac{9}{35}a_0 + \frac{328}{945}a_0\right) = \frac{571}{20790}a_0 & \Rightarrow & a_4 = \frac{571}{20790}a_0 \\
\vdots & & & \vdots
\end{array}$$

Así la primera solución será

$$y_1(x) = a_0\; x\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \cdots\right).$$

- Para $m = -\frac{1}{2}$. En este caso, la relación de recurrencia es:

$$a_n = \frac{2\left(a_{n-2} - \left(n - \frac{3}{2}\right)a_{n-1}\right)}{2n^2 - 3n} \qquad \text{para } n \geq 2\,,$$

Borrador Preliminar

nuevamente, a_1 se obtiene del coeficiente de x^{m+1} en la ecuación (9.12):

$$a_1\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]+a_0\left[-\frac{1}{2}\right]=0 \quad \Rightarrow a_1=-a_0\,,$$

por lo tanto:

$$\begin{array}{llll}
n=2 & \Rightarrow & a_2=a_0-\frac{1}{2}a_1=a_0+\frac{1}{2}a_0=\frac{3}{2}a_0 & \Rightarrow \quad a_2=\frac{3}{2}a_0 \\
n=3 & \Rightarrow & a_3=\frac{2}{9}\left(a_1-\frac{3}{2}a_2\right)=\frac{2}{9}\left(-a_0-\frac{9}{4}a_0\right)=-\frac{13}{18}a_0 & \Rightarrow \quad a_3=-\frac{13}{18}a_0 \\
n=4 & \Rightarrow & a_4=\frac{1}{10}\left(a_2-\frac{5}{2}a_3\right)=\frac{1}{10}\left(\frac{3}{2}a_0+\frac{65}{36}a_0\right)=\frac{119}{360}a_0 & \Rightarrow \quad a_4=\frac{119}{360}a_0 \\
\vdots & & & \vdots
\end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x)=C_1x\left[1-\frac{2}{5}x+\frac{9}{35}x^2-\frac{82}{945}x^3+\frac{571}{20790}x^4+\cdots\right]+\frac{C_2}{x^{\frac{1}{2}}}\left[1-x+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{18}x^3+\frac{119}{360}x^4+\cdots\right].$$

Nótese que esta solución vale para $0<x<\infty$. Por cuanto para $x<0$, la segunda solución se hace imaginaria pero se puede resolver haciendo $C_2=i\ C_3$.

9.3.3. Caso 2: $m_1=m_2=m$

La solución general será

$$y(x)=C_1\ x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+C_2\left[\left(x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\ln(x)+x^{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right],\quad x>0\,,$$

otra vez para $x<0$, debemos reemplazar x^m por $|x|^m$ en la solución anterior.

A continuación demostraremos por qué esa es la solución para este caso. Pongamos nuevamente nuestra atención en la ecuación (9.11):

$$x^2\ y''+x\ f_1(x)y'+f_2(x)y=0\,,$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas en $x=0$. Reacomodemos esta última ecuación de la forma

$$x^2\ y''+x\ f_1(x)y'+f_2(x)\ y=\left\{x^2\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\ f_1(x)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+f_2(x)\right\}y\equiv\mathbf{L}\,[y]=0\,,$$

donde $\mathbf{L}\,\{\bullet\}$ está concebido como un operador lineal.

Recordamos que si $y(x)=x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, entonces

$$\mathbf{L}\,[y]\equiv a_0\mu\,(m)\,x^m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\mu(m+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}]\right]x^{m+n}\,,$$

si anulamos los coeficientes de x^{m+n} entonces

$$a_n\mu(m+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}]=0 \quad\Leftrightarrow\quad a_n=-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}]}{\mu(m+n)}\,,$$

Borrador Preliminar

considerando que $\mu(m+n) \neq 0$.

Por lo tanto, para los a_n seleccionados (que anulen el coeficiente x^{m+n}) y tomando el caso cuando las raíces están repetidas, es decir, $m_1 = m_2 = m$ se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{L}\left[y\right](m,x) = a_0 \mu\left(m\right) x^m = a_0 \left(m - m_1\right)^2 \; x^m \,.$$

Nótese que estamos considerando $\mathbf{L}\left[y\right](m,x)$ como una función de m y x. Por lo cual, al evaluar para la raíz $m = m_1$ resulta

$$\mathbf{L}\left[y\right](m,x)|_{m=m_1} = a_0 \left(m - m_1\right)^2 \; x^m \Big|_{m=m_1} = 0 \,.$$

Veamos algo más interesante, intentemos derivar respecto a la constante m

$$\begin{aligned}
\partial_m \left[\mathbf{L}\left[y\right]\right] &= \partial_m \left[\left\{x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x \; f_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + f_2(x)\right\} y\right] = \left\{x^2 \; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x \; f_1(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + f_2(x)\right\} \partial_m y \\
\mathbf{L}\left[\partial_m y\right] &= \partial_m \left[a_0 \left(m - m_1\right)^2 \; x^m\right] = a_0 \left[\left(m - m_1\right)^2 \; x^m \ln(x) + 2\left(m - m_1\right) \; x^m\right] ,
\end{aligned}$$

comprobamos que también se anula cuando evaluamos en $m = m_1$

$$\mathbf{L}\left[\partial_m y\right]_{m=m_1} = a_0 \left[\left(m - m_1\right)^2 \; x^m \ln x + 2\left(m - m_1\right) \; x^m\right]_{m=m_1} = 0 \,,$$

por lo tanto también es solución. Con lo cual una segunda solución puede construirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \partial_m y|_{m=m_1} = \partial_m \left[x^m \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m\right) x^n\right]\right]_{m=m_1} \\
&= x^{m_1} \ln(x) \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m_1\right) x^n\right] + x^{m_1} \sum_{n=1}^{\infty} \partial_m \left[a_n(m_1)\right] x^n \\
&= y_1(x) \ln(x) + x^{m_1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n(m_1) x^n \,,
\end{aligned}$$

donde hemos denotado $\partial_m \left[a_n(m_1)\right] = B_n(m_1)$.

La solución general tendrá la forma

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 x^m \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m\right) x^n\right] + C_2 \; \left[x^m \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m\right) x^n\right] \ln(x) + x^m \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(m\right) x^n\right] , \\
&= x^m \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m\right) x^n\right] \left[C_1 + C_2 \ln(x)\right] + C_2 \; x^m \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(m\right) x^n \,, \quad x > 0 \,.
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos demostrado la solución

Veamos el siguiente ejemplo: analicemos un caso particular de la ecuación de Bessel[6]

$$x^2 \; y'' + x \; y' + \left(x^2 + \nu^2\right) \; y = 0 \,.$$

[6] **Fredrich Wilhel Bessel** (1784-1846). Astrónomo y matemático alemán. Aportó notables contribuciones a la astronomía posicional, la geodesia y la mecánica celeste. Particularmente, se dedicó a aumentar la exactitud de las mediciones de la posición y el movimiento de los astros. La precisión de sus mediciones hizo posible que determinara pequeñas irregularidades en los movimientos de Urano lo condujo a predecir la existencia de Neptuno. Análogos razonamientos lo llevaron a especular sobre la presencia de estrellas compañeras en Sirio y Procyon. A partir de datos registrados en el siglo XVII, calculó la órbita del cometa Halley

Borrador Preliminar

Esta ecuación viene parametrizada por ν y dependiendo de su valor tendremos varias familias de soluciones que analizaremos en detalle en la sección 9.4.

Para ejemplificar este caso, $m_1 = m_2 = m$, consideremos el caso $\nu = 0$:

$$x^2\, y'' + x\, y' + x^2\, y = 0 \quad \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}\, y' + \frac{x^2}{x^2} y = 0\,.$$

Podemos ver que:

$$f_1(x) = 1\,, \quad f_2(x) = x^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ \\ c_0 = 0\,, \quad c_1 = 0\,, \quad c_2 = 1 \end{cases}$$

el resto de los coeficientes son cero. De la ecuación indicadora vemos lo siguiente:

$$\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \quad \Rightarrow m(m-1) + m = 0 \quad \Rightarrow m^2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ \\ m_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la relación de recurrencia se obtiene del coeficiente de x^{m+n} de (9.12)

$$a_n\left[(m+n)(m+n-1) + (m+n)\right] + a_{n-2} = 0 \quad \Rightarrow a_n(m) = -\frac{a_{n-2}}{(m+n)(m+n-1) + (m+n)}$$

tomando $m = 0$, se tiene:

$$a_n(0) = -\frac{a_{n-2}}{n^2} \quad \text{para } n \geq 2\,.$$

Otra vez, al anular el coeficiente para x^{m+1} (ecuación (9.12)) se obtiene:

$$a_1[0\,(0+1) + (0+1) + 0] + a_0\,[0+0] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0\,.$$

Con lo cual, es claro que se anulan todos los coeficientes impares, y así

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n)^2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{4} a_0 && \Rightarrow \quad a_2 = -\tfrac{1}{4} a_0 \\
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{(2\cdot 2)^2} a_2 = \frac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2} a_0 && \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2} a_0 \\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_6 = -\frac{1}{(2\cdot 3)^2} a_4 = -\frac{1}{(2\cdot 3)^2}\left[\frac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2} a_0\right] && \Rightarrow \quad a_6 = \frac{-1}{(2\cdot 3)^2\, 2^3} a_0 \\
&\vdots && \vdots \\
n = n \quad &\Rightarrow \quad a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2} a_0 && \Rightarrow \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2} a_0
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

La primera de las soluciones será

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \right] = a_0 J_0(x)\,,$$

donde $J_0(x)$ se conoce como la función de Bessel de primera especie de orden cero.

Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye

$$y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \quad \text{en la ecuación: } x^2y'' + xy' + x^2y = 0\,,$$

para ello se requieren sus derivadas

$$y_2' = J_0'\ln(x) + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\,, \quad y_2'' = J_0''\ln(x) + 2\frac{J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^{n-2}\,,$$

entonces, al sustituir en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} x^2\left[J_0''\ln(x) + 2\frac{J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^{n-2}\right] + x\left[J_0'\ln(x) + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\right] \quad + \\ x^2\left[J_0\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right] &= 0 \\ \left[\underbrace{x^2J_0'' + xJ_0' + x^2J_0}_{=0}\right]\ln(x) + 2xJ_0' + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2} &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$B_1x + 2^2B_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left(B_n n^2 + B_{n-2}\right)x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\,.$$

Es claro que para los coeficientes impares se obtiene $B_1 = B_3 = B_5 = \cdots = B_{2n+1}\cdots = 0$, ya que

$$B_1x + 2^2B_2x^2 + \left(3^2B_3 + B_1\right)x^3 + \left(4^2B_4 + B_2\right)x^4 + \left(5^2B_5 + B_3\right)x^5 + \cdots = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2n}{2^{2n}\,(n!)^2}x^{2n}\,,$$

mientras que para las potencias pares tendremos la relación de recurrencia

$$B_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}\left[\frac{(-1)^{n+1}\;n}{2^{2(n-1)}\,(n!)^2} - B_{2n-2}\right]\,,$$

Borrador Preliminar

Figura 9.1: Comportamiento de las funciones de Bessel de orden cero. De primera especie $J_0(x)$ y de segunda especie $Y_0(x)$

como se puede ver:

$$
\begin{aligned}
B_2 &= 2\frac{1}{2^2\,(1!)^2} \\
B_4 &= \frac{1}{(2\cdot 2)^2}\left[-\frac{4}{2^2\,(2!)^2} - 2\frac{1}{2^2\,(1!)^2}\right] = -\frac{1}{4^2 2^2}\left[1+\frac{1}{2}\right] \\
B_6 &= \frac{1}{(6)^2}\left[\frac{3}{2^4\,(3!)^2} - B_4\right] = \frac{1}{6^2}\left[\frac{3}{2^4\,(3!)^2} + \frac{1}{4^2 2^2}\left[1+\frac{1}{2}\right]\right] = \frac{1}{6^2 4^2 2^2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right] \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
B_{2k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}\,(k!)^2}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-2}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right] = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}\,(k!)^2}S_k\,.
\end{aligned}
$$

Así la segunda solución puede tomar la forma de

$$
y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}S_n\ x^{2n}\,.
$$

La solución general se podrá escribir como:

$$
y(x) = C_1 J_0(x) + C_2\ \left[J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}S_n\ x^{2n}\right]\,.
$$

Borrador Preliminar

Es costumbre en Física reacomodar la segunda solución de la siguiente manera

$$y_2(x) \equiv Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left[\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right] J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} S_n \; x^{2n}\right],$$

donde γ se conoce como la constante de Euler-Mascheroni[7] y tiene de valor

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \ln(n)\right) \cong 0{,}5772\,,$$

de manera que finalmente:

$$y(x) = C_1 \; J_0(x) + C_2 \; Y_0(x) \; .$$

Nótese que tanto la función de Bessel de orden cero, de primera especie, $J_0(x)$, como la función de Bessel de orden cero, de segunda especie, $Y_0(x)$, tienen un comportamiento oscilatorio cuando $x \to \infty$. Además $J_0(0) = 1$, mientras que $Y_0(x)$ se comporta como $\frac{2}{\pi}\ln(x)$ cuando $x \to 0$.

9.3.4. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$, con N entero

. Una vez mas la solución general será

$$y(x) = C_1 \; x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + C_2 \left[\left(x^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \ln(x) + x^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right], \quad x > 0\,,$$

otra vez para $x < 0$, debemos reemplazar x^m por $|x|^m$ en la solución anterior.

En general, para este caso: $m_1 - m_2 = N \Rightarrow m_1 = N + m_2$, con $m_1 > m_2$. Notemos que podemos escribir las dos raíces como: m y $m+N$. Entonces, como $m+N$ es una raíz satisface también la ecuación indicadora:

$$\mu\,(m+N) = (m+N)\,(m+N-1) + b_0(m+N) + c_0 = 0\,,$$

esto significa que $\mu(m+N) = 0$ anula al coeficiente del término a_N para $n = N$ del coeficiente x^{m+N}, ecuación (9.12), como se puede ver a continuación

$$\begin{aligned} a_n[(m+n)(m+n-1) + b_0(m+n) + c_0] + a_{n-1}\,[b_1(m+n-1) + c_1] \quad &+ \\ a_{n-2}\,[b_2\,(m+n-2) + c_2] \quad &+ \\ a_{n-3}\,[b_3\,(m+n-3) + c_3] \quad &+ \\ + \cdots + a_1\,[b_{n-1}(m+1) + c_{n-1}] \quad &+ \\ a_0\,[b_n m + c_n] \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

cuando $n = N$, se tiene

$$a_n[(m+n)(m+n-1) + b_0(m+n) + c_0] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \;\; [(m+N-k)\,b_{n-k} + c_{n-k}] = 0\,.$$

Esto trae como consecuencia que se derivan dos casos:

[7] **Lorenzo Mascheroni** (1750-1800) Monje Italiano, nacido en Bergamo, Lombardo-Veneto. Profesor de algebra y geometría en la Universidad de Pavia y luego rector de la misma. Además de poeta, se destacó por sus contribuciones al cálculo y a la mecánica.

Borrador Preliminar

1.- $\mu(m+N)=0 \ \wedge \ \sum_{k=0}^{N-1} a_k \ [(m+N-k)\, b_{n-k}+c_{n-k}]=0.$

En este caso, la solución en serie de Frobenius, partiendo de la raíz mayor de la ecuación indicadora, $m+N$, quedará en términos de a_0 y no será linealmente independiente a la solución provista por la raíz menor, por consiguiente la solución proveniente de esta raíz menor, m, será la solución general:

$$y(x)=a_0|x|^m\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(m)\,x^n\right]+a_N|x|^m\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(m+n)x^n\,. \tag{9.16}$$

Un ejemplo: la ecuación de Bessel, de orden fraccionario, puede ilustrar este caso, resolvámosla

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0\,.$$

Veamos entonces que

$$f_1(x)=1\,,\quad f_2(x)=-\frac{1}{4}+x^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} b_0=1 \\ \\ c_0=-\frac{1}{4}\,,\quad c_1=0\,,\quad c_2=1 \end{cases}$$

el resto de los coeficientes son iguales a cero. En cuanto a la ecuación indicadora tenemos lo siguiente:

$$\mu(m)=m(m-1)+b_0m+c_0=0 \quad \Rightarrow m(m-1)+m-\frac{1}{4}=m^2-\frac{1}{4}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} m_1=\frac{1}{2} \\ \\ m_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Las dos raíces son diferentes y su diferencia es un entero: $N=1/2-(-1/2)=1$. La raíz más pequeña es $m=-1/2$

Vayamos al coeficiente de x^{m+1} en (9.12):

$$\begin{aligned} a_1\left[m(m+1)+b_0(m+1)+c_0\right]+a_0\left[b_1m+c_1\right] &= 0 \\ a_1\left[m(m+1)+(m+1)-\frac{1}{4}\right]+a_0\left[0m+0\right] &= 0 \\ a_1\left[m^2+2m+\frac{3}{4}\right]+a_0\left[0\right] &= 0\,. \end{aligned}$$

Para la raíz más pequeña, que es $m=-1/2$, tendremos

$$\begin{aligned} a_1\left[\frac{1}{4}-1+\frac{3}{4}\right]+a_0\left[0\right] &= 0 \\ a_1\left[0\right]+a_0\left[0\right] &= 0\,, \end{aligned}$$

el coeficiente de a_1 es cero y el del otro coeficiente también es cero. Con lo cual cualquier valor de a_1 y a_0 estarán permitidos.

La relación de recurrencia proviene de anular el coeficiente de x^{m+n}, para $m=-1/2$. Vale decir

$$\begin{aligned} a_n\left[\left(-\frac{1}{2}+n\right)\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)+\left(-\frac{1}{2}+n\right)-\frac{1}{4}\right]+a_{n-1}\left[0\left(-\frac{1}{2}+n-1\right)+0\right]+ \\ a_{n-2}\left[0\left(-\frac{1}{2}+n-2\right)+1\right]=0 \\ a_n\left[\left(-\frac{1}{2}+n\right)\left(-\frac{3}{2}+n\right)+\left(-\frac{1}{2}+n\right)-\frac{1}{4}\right]+a_{n-1}\left[0\right]+a_{n-2}\left[1\right]=0 \\ a_n\left[n^2-n\right]+a_{n-2}=0\,. \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

La relación de recurrencia será entonces:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2 - n} \qquad \text{con } n \geq 2\,.$$

Los coeficientes serán

$$\begin{array}{llll}
n = 2 \Rightarrow & a_2 = -\dfrac{1}{2}a_0 & n = 3 \Rightarrow & a_3 = -\dfrac{1}{6}a_1 \\[2ex]
n = 4 \Rightarrow & a_4 = -\dfrac{1}{12}a_2 = \dfrac{1}{24}a_0 & n = 5 \Rightarrow & a_5 = -\dfrac{1}{20}a_3 = \dfrac{1}{120}a_1 \\[2ex]
n = 6 \Rightarrow & a_4 = -\dfrac{1}{30}a_4 = -\dfrac{1}{720}a_0 & n = 7 \Rightarrow & a_7 = -\dfrac{1}{42}a_5 = -\dfrac{1}{5040}a_1 \\[2ex]
\vdots & & & \vdots
\end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = a_0\ x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right) + a_1\ x^{-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\right),$$

que es equivalente a:

$$y(x) = a_0\ x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right) + a_1\ x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \cdots\right).$$

2.- $\mu\,(m+N) = 0\ \wedge\ \sum_{k=0}^{N-1} a_k\ \left[(m+N-k)\,b_{n-k} + c_{n-k}\right] \neq 0.$

En este caso la raíz mayor de la ecuación indicadora $m_1 = m + N$ determinará una de las soluciones.

Veamos el siguiente ejemplo: analicemos la siguiente ecuación diferencial

$$x^2 y'' - x\,(2-x)\,y' + \left(2 + x^2\right) y = 0\,.$$

Ahora

$$f_1(x) = -2 + x\,, \quad f_2(x) = 2 + x^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} b_0 = -2\,, \quad b_1 = 1 \\[2ex] c_0 = 2\,, \quad c_1 = 0\,, \quad c_2 = 1\,, \end{cases}$$

el resto de los coeficientes son iguales a cero.

Una vez más, la expansión en serie de Frobenius de $y(x)$ nos lleva a una ecuación indicadora que debemos resolver

$$\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \quad \Rightarrow m(m-1) - 2m + 2 = m^2 - 3m + 2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\[2ex] m_2 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto $N = 1$.

Veamos nuevamente al coeficiente de x^{m+1} en (9.12)

$$\begin{aligned}
a_1\left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0\left[b_1 m + c_1\right] &= 0 \\
a_1\left[m(m+1) - 2(m+1) + 2\right] + a_0\left[m + 0\right] &= 0 \\
a_1\left[m^2 - m\right] + a_0\left[m\right] &= 0\,.
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Para la raíz más pequeña, que es $m = 1$, tendremos

$$a_1\,[0] + a_0\,[1] = 0\,,$$

lo cual no conduce a nada por cuanto $a_0 = 0$, mientras que, para $m = 2$ se obtiene

$$a_1\,[2] + a_0\,[2] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -a_0\,.$$

La relación de recurrencia proviene de anular el coeficiente de x^{m+n}, para $m = 2$:

$$\begin{aligned} a_n[(2+n)(2+n-1) - 2(2+n) + 2] + a_{n-1}[(2+n-1)+0] + a_{n-2}[0(2+n-2)+1] &= 0 \\ a_n\,[(2+n)(1+n) - 2n - 2] + a_{n-1}[1+n] + a_{n-2}[1] &= 0 \\ a_n[n^2+n] + a_{n-1}[1+n] + a_{n-2}[1] &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$a_n[n^2+n] = -a_{n-1}[1+n] - a_{n-2}\,, \quad \text{para } n \geq 2\,,$$

los coeficientes serán

$$\begin{aligned} n = 2 \Rightarrow \quad & 6a_2 = -3a_1 - a_0 = 3a_0 - a_0 && \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{3}a_0 \\ n = 3 \Rightarrow \quad & 12a_3 = -4a_2 - a_1 = -\frac{4}{3}a_0 + a_0 && \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{36}a_0 \\ \vdots \quad & && \vdots \end{aligned}$$

Por lo cual para $m = 2$ tendremos

$$y_1(x) = x^2\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \cdots\right)\,,$$

y la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\,., \tag{9.17}$$

para que finalmente la solución general puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(x) = \quad & C_1\,x^2\left(1 - x + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{36}x^3 - \tfrac{7}{720}x^4 + \tfrac{31}{10800}x^5 + \ldots\right) + \\ & + C_2\,\left[x^2\ln(x)\left(-1 + x - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{36}x^3 + \tfrac{7}{720}x^4 + \ldots\right)\right. \\ & \left. + x\left(1 - x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{19}{36}x^3 - \tfrac{53}{432}x^4 - \tfrac{1}{675}x^5 + \ldots\right)\right]\,. \end{aligned}$$

que queda como ejercicio para el lector

9.3.5. Ejemplos

9.3.6. Practicando con Maxima

9.3.7. Ejercicios

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$2x^2\;y'' - x\;y' - (x+1)\;\;y = 0\,.$$

Borrador Preliminar

2. Verifique que el origen es una singularidad regular y encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial
$$x^2\ y'' + x\ y' + \left(x^2 - 1\right)\ y = 0\,.$$

3. Verifique que el origen es una singularidad regular de cada una de las ecuaciones siguientes. Como las raíces de la ecuación indicadora no difieren por un entero y encuentre las dos soluciones linealmente independientes

   a) $x^2y'' + x(x + \frac{1}{2})y' + xy = 0$
   b) $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$
   c) $2xy'' + (x + 1)y' + 3y = 0$
   d) $2x^2y'' - xy' + (1 - x^2)y = 0$

4. Verifique que el origen es una singularidad regular de cada una de las ecuaciones siguientes. Como las raíces de la ecuación indicadora difieren por un entero encuentre las dos soluciones linealmente independientes

   a) $x^2y'' - x^2y' + (x^2 - 2)y = 0$
   b) $x^2y'' + (1 + x^3)xy' - y = 0$
   c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$

5. Verifique que el origen es una singularidad regular de cada una de las ecuaciones siguientes. Como las raíces de la ecuación indicadora se repiten encuentre al menos una de las soluciones

   a) $x^2y'' - 3y' + 4(x + 1)y = 0$
   b) $xy'' + (1 - x)y' + \frac{1}{2}y = 0$

9.4. Revisitando a Bessel

En esta sección vamos a considerar en detalle la ecuación de Bessel es
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0; \qquad k \in \Re\,, \tag{9.18}$$
obviamente $x = 0$ es una singularidad regular, por lo tanto el método de Frobenius que describimos en la sección 9.3 nos permite reescribir la ecuación
$$x^2y'' + xf_1(x)y' + f_2(x)y = 0\,,$$
y procedemos a identificar los términos de las series que representan a las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$
$$f_1(x) = 1 \quad \Rightarrow b_0 = 1 \quad \wedge \quad f_2 = -k^2 + x^2 \quad \Rightarrow c_0 = -k^2\,, \quad c_1 = 0\,, \quad c_2 = 1\,,$$
los demás coeficientes b's y c's se anulan.

La ecuación indicadora 9.14 y sus raíces quedan como
$$m(m-1) + m - k^2 = 0 \quad \Rightarrow m^2 = k^2 \quad \Rightarrow m_{1,2} = \pm k\,.$$

Borrador Preliminar

9.4.1. Frobenius y la Ecuación de Bessel

Claramente los valores de k describen todos los casos posibles del métodos de Frobenius que discutimos en la sección 9.3. Vale decir

$$\begin{cases} m_1 - m_2 \neq \text{entero} \Rightarrow \ k \neq \text{entero} \\ m_1 = m_2 = m \Rightarrow \ k = 0 \\ m_1 - m_2 = \text{entero} \Rightarrow \ k = \text{entero} \end{cases}$$

Caso 1: $m_1 - m_2 \neq$ entero $\quad \Rightarrow \quad k \neq$ entero.

La solución general será de la forma

$$y(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x)\,,$$

donde

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}\,,$$

la *Función de Bessel, de orden k de primera especie*, y

$$J_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \qquad \text{para } x > 0$$

Para $x < 0$ se debe reemplazar x^{-k} por $|x|^{-k}$.

Nótese que esta última expresión también es válida para k semi-entero, i.e. $k = n + \frac{1}{2}$.

Borrador Preliminar

Finalmente, hemos definido $\Gamma(z)$ como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv (z-1)! \equiv \prod (z-1) \qquad \operatorname{Re} z > 0$$
$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{z\,(z+1)\,(z+2)\cdots(z+n)} n^z$$
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\,,$$

donde n es un entero positivo y $\gamma = 0{,}577215664901\cdots$ la constante de Euler-Mascheroni. La función $\Gamma(z)$ será considerada en detalle en la sección 10.1.

Caso 2: $m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad k = 0$. Este caso fue descrito en la sección 9.3.3 y puede consultarlo.

Caso 3: $m_1 - m_2 =$ entero $\quad \Rightarrow \quad k =$ entero.

La solución general será de la forma

$$K_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{k+n} + C J_n(x) \ln(x)\,.$$

Procediendo de forma equivalente a la situación anterior tenemos que la solución general podrá expresarse (luego de una laboriosa faena) como

$$K_k(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{2k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left[H_n + H_{n+k}\right]}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + J_k(x)\ln(x)\,.$$

Y finalmente la *Función de Bessel de orden k de segunda especie* o *Función de Neumann*

$$Y_k(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{\pi k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left[H_n + H_{n+k}\right]}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + \frac{2}{\pi} J_k(x)\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right]\,.$$

En ambos casos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Más aún

$$Y_k(x) = \frac{2}{\pi} J_k(x)\ \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}\left[\psi(n+1) + \psi(n+k+1)\right]\,,$$

donde $\psi(n) = \dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$ es la función Digamma con

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,, \quad \psi(1) = -\gamma\,.$$

Borrador Preliminar

Las funciones especiales Digamma y Poligamma serán consideradas en detalle en la sección 10.2.

También es costumbre definir la función de Bessel de segunda especie en términos de las de primera especie

$$N_k(x) = Y_k(x) = \frac{J_k(x)\cos(k\pi) - J_{-k}(x)}{\operatorname{sen}(k\pi)}\,.$$

Nótese que para $k = N$ entero, aparentemente no esta definida. Pero, aplicando la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned} N_N(x) &= \left.\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[J_k(x)\cos(k\pi) - J_{-k}(x)\right]}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\operatorname{sen}(k\pi)\right]}\right|_{k=N} \\ &= \left.\frac{-\pi J_n(x)\operatorname{sen}(n\pi) + \left\{\cos(n\pi)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_k(x) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_{-k}(x)\right\}}{\pi\cos(n\pi)}\right|_{k=N} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_k(x) - (-1)^n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_{-k}(x)\right]_{k=N}\,. \end{aligned}$$

De este modo, la soluciones generales para la ecuación de Bessel, se expresan según el caso en

$$\begin{aligned} Z_k(x) &= C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x); \qquad k \neq \text{entero} \\ \tilde{Z}_k(x) &= C_1 J_k(x) + C_2 Y_k(x); \qquad k = 0 \quad \vee \quad \text{entero} \end{aligned}$$

La funciones $Z_k(x)$ y $\tilde{Z}_k(x)$ se denominan *Funciones Cilíndricas de orden k.*

9.4.2. Otras formas de la ecuación de Bessel

Haciendo los cambios de variables correspondientes llegamos a

$$u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}u'(x) + \left[\left(\beta\nu\ x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - k^2\nu^2}{x^2}\right]u(x) = 0\,,$$

donde

$$u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})\,,$$

o también

$$u''(x) + \alpha x^{\nu}\ u(x) = 0\,,$$

con

$$u(x) = \sqrt{x}\,Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}\,x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)\,.$$

9.4.3. Relaciones de recurrencia:

Las funciones de Bessel tienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} xJ_{k+1}(x) - 2k\ J_k(x) + xJ_{k-1}(x) &= 0 \\ J_{k+1}(x) + 2J_k'(x) - J_{k-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Para demostrar estas relaciones partimos por demostrar lo siguiente:

$$\left[x^k J_k(x)\right]' = x^k J_{k-1}(x) \quad \wedge \quad \left[x^{-k} J_k(x)\right]' = -x^{-k} J_{k+1}(x)\,.$$

De la expresión para $J_k(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k}\right]' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2\,(n+k)\, x^{2n+2k-1}}{2^{2n+k}\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k+1)} \\ &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+(k-1)}}{2^{2n+(k-1)}\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k)} \\ &= x^k J_{k-1}(x)\,.\end{aligned}$$

Unos cambios apropiados nos llevan a demostrar las segunda de las relaciones y al desarrollar las derivadas

$$\begin{aligned}\left[x^k J_k(x)\right]' &= kx^{k-1} J_k(x) + x^k J_k'(x) = x^k J_{k-1}(x) \\ \left[x^{-k} J_k(x)\right]' &= -kx^{-k-1} J_k(x) + x^{-k} J_k'(x) = -x^{-k} J_{k+1}(x)\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}kJ_k(x) + xJ_k'(x) &= xJ_{k-1}(x) \\ -kJ_k(x) + xJ_k'(x) &= -xJ_{k+1}(x)\,.\end{aligned}$$

Al sumar y restar miembro a miembro obtenemos las relaciones de recurrencia. Es obvia la importancia que adquieren $J_1(x)$ y $J_0(x)$ para generar el resto de las funciones de Bessel.

Borrador Preliminar

9.4.4. Funciones de Bessel y las funciones elementales

Las funciones de Bessel de orden semientero, $k = \frac{1}{2}$ se expresa como

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

pero como

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2}\right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n},$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\ n!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} x^{2n} \\ &= \frac{x}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left\{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right\} = \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\mathrm{sen}(x). \end{aligned}$$

Finalmente, y otra vez invocando a las propiedades de la función Gamma: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{sen}(x).$$

Equivalentemente se puede demostrar que

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x),$$

y ahora utilizando las relaciones de recurrencia tendremos que

$$J_{3/2}(x) = -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x}J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} - \cos(x)\right].$$

Así mismo

$$J_{5/2}(x) = -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x}J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{3\mathrm{sen}(x)}{x^2} - \frac{3\cos(x)}{x} - \mathrm{sen}(x)\right].$$

En general

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n}\left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right) \quad n = 1, 2, 3, \cdots \\ J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n}\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \quad n = -1, -2, -3, \cdots \end{aligned}$$

Las funciones de Bessel de orden semientero son las únicas funciones de Bessel que pueden ser expresadas en términos de funciones elementales.

Borrador Preliminar

9.4.5. Reflexión

Las funciones de Bessel cumplen con

$$J_{-k}(x) = (-1)^k \, J_k(x) \, .$$

Para el caso $k = N$ entero positivo la Función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \;\; (n+N)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+N}$$

Si $k = -N$, un entero negativo, los primeros N términos de la serie anterior se anulan ya que $\Gamma(n) \to \infty$ para $n = -1, -2, -3, \cdots$ y la serie se arma como

$$J_{-N}(x) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \;\; (n-N)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+N} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+N}}{(l+N)! \; l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+N}$$

$$J_{-N}(x) = (-1)^N \, J_N(x) \, .$$

9.4.6. Función generatriz

La función generatriz para las Funciones de Bessel es

$$\mathcal{B}(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \, ,$$

desarrollando las dos series para las exponenciales

$$e^{\frac{xt}{2}} = 1 + \frac{x}{2} t + \frac{x}{2^2 2!} t^2 + \cdots + \frac{x^n}{2^n n!} t^n + \cdots$$

$$e^{\frac{x}{2t}} = 1 - \frac{x}{2} t^{-1} + \frac{x}{2^2 2!} t^{-2} + \cdots + \frac{(-1)^n \, x^n}{2^n n!} t^{-n} + \cdots$$

Por lo tanto multiplicando ambas series

$$\mathcal{B}(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} t^n \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^n}{2^n n!} t^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \; t^n$$

9.4.7. Representación integral para las funciones de Bessel

En la expresión anterior para la función generatriz se realiza el siguiente cambio de variable $t = e^{i\theta}$ de este modo

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = e^{ix\mathrm{sen}(\theta)} = \cos\left(x\mathrm{sen}(\theta)\right) + i\mathrm{sen}\left(x\mathrm{sen}(\theta)\right) \, ,$$

y por lo tanto

$$\cos\left(x\mathrm{sen}(\theta)\right) + i\mathrm{sen}\left(x\mathrm{sen}(\theta)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \;\; \left[\cos\left(n\theta\right) + i\mathrm{sen}\left(n\theta\right)\right] \, ,$$

igualando partes reales e imaginarias y recordando que $J_{-m}(x) = (-1)^m \, J_m(x)$, para anular los términos impares en la serie de la parte real y los pares en la de la parte imaginaria, podemos escribir

$$\cos\left(x\mathrm{sen}(\theta)\right) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos\left(2n\theta\right)$$

$$\mathrm{sen}\left(x\mathrm{sen}(\theta)\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \mathrm{sen}\left(\left[2n+1\right]\theta\right) \, .$$

Borrador Preliminar

Multiplicando miembro a miembro en la primera de ellas por $\cos(2k\theta)$ (y por $\cos([2k+1]\,\theta)$) y la segunda por $\operatorname{sen}([2k+1]\,\theta)$ (y por $\operatorname{sen}(2k\theta)$). Integrando (en $0 \leq \theta \leq \pi$), también miembro a miembro y término por término en las series, se obtienen

$$\begin{aligned}
J_{2n}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\operatorname{sen}(\theta))\cos(2n\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\operatorname{sen}(\theta))\cos([2n+1]\,\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
J_{2n+1}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}([2n+1]\,\theta)\ \mathrm{d}\theta \\
0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(x\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}(2n\theta)\ \mathrm{d}\theta\,.
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro primera con cuarta y segunda con tercera tendremos la expresión integral para las funciones de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\cos(n\theta) - x\operatorname{sen}(\theta))\ \mathrm{d}\theta\,,$$

ya que todos sabemos que

$$\cos(n\theta - x\operatorname{sen}(\theta)) = \cos(2n\theta)\cos(x\operatorname{sen}(\theta)) + \operatorname{sen}(2n\theta)\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}(\theta))\ .$$

9.4.8. Ortogonalidad de las funciones de Bessel

Haciendo el caso particular de $\alpha = 0$ y $\nu = 1$ en la primera de las expresiones equivalentes para la ecuación de Bessel, tendremos

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left[\beta^2 - \frac{k^2}{x^2}\right]u(x) = 0\,, \quad \text{donde } u(x) = J_k(\beta x)\,,$$

multiplicando por x la ecuación diferencial puede ser reescrita como

$$[xJ_k'(\beta x)]' + \left[\beta^2 x - \frac{k^2}{x}\right]J_k(\beta x) = 0\,,$$

suponiendo k real y positivo, planteamos la ecuación para dos índices diferentes β_1 y β_2 por lo tanto quedan como

$$\begin{aligned}
[xJ_k'(\beta_1 x)]' + \left[\beta_1^2 x - \frac{k^2}{x}\right]J_k(\beta_1 x) &= 0 \\
[xJ_k'(\beta_2 x)]' + \left[\beta_2^2 x - \frac{k^2}{x}\right]J_k(\beta_2 x) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Multiplicando apropiadamente por $J_k(\beta_1 x)$ y $J_k(\beta_2 x)$, Integrando y restando miembro a miembro tendremos que

$$\begin{aligned}
(\beta_2^2 - \beta_1^2)\int_0^1 xJ_k(\beta_1 x)J_k(\beta_2 x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left\{J_k(\beta_2 x)\,[xJ_k'(\beta_1 x)]' - J_k(\beta_1 x)\,[xJ_k'(\beta_2 x)]'\right\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [J_k(\beta_2 x)xJ_k'(\beta_1 x) - J_k(\beta_1 x)xJ_k'(\beta_2 x)]'\,\mathrm{d}x \\
&= J_k(\beta_2 x)xJ_k'(\beta_1 x) - J_k(\beta_1 x)xJ_k'(\beta_2 x)\big|_{x=0}^{x=1}
\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

para β_i las raíces de las funciones de Bessel, i.e. $J_k(\beta_i) = 0$ podemos deducir que las funciones de Bessel son ortogonales

$$\left(\beta_i^2 - \beta_j^2\right) \int_0^1 x J_k(\beta_i x) J_k(\beta_j x) \mathrm{d}x \propto \delta_{ij} \,.$$

Más aún, partiendo de la ecuación de Bessel original se puede llegar a

$$|J_k(\beta x)|^2 = \frac{1}{2}\left[J_k'(\beta)\right]^2 + \frac{\beta^2 - k^2}{2\beta^2}\left[J_k(\beta)\right]^2 \,.$$

9.4.9. Ejemplos

9.4.10. Practicando con Maxima

9.4.11. Ejercicios

1. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda x y = 0 \,,$$

y demuestre que con el siguiente cambio de variable $y(x) = x^{1/2} f(x)$, la ecuación se reduce a la ecuación de Bessel y que tiene solución finita para $x = 0$, de la forma $y(x) = x^{1/2} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda x^3}\right)$.

2. Considere ahora la ecuación diferencial

$$xy'' - 2y' + yx = 0 \,.$$

Muestre que las dos raíces de la ecuación indicadora difieren en un entero y que las soluciones son

$$y_1(z) = 3a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$y_2(z) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1) z^{2n}}{(2n)!}$$

3. Encuentre las soluciones en serie para la ecuación $y^{prime\prime}(x) - 2xy^{prime}(x) - 2y(x) = 0$. Identifique una de las series como $y_1(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ (lo puede comprobar por sustitución directa). Luego proponga $y_2(x) = f(x)y_1(x)$ y resuelva la ecuación resultante para $f(x)$, y encuentre una forma explícita para $y_2(x)$ y deduzca que

$$\int_0^x e^{-v^2} dv = e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2(2n+1)!}(2x)^{2n+1}.$$

Borrador Preliminar

Capítulo 10

Funciones Especiales

Borrador Preliminar

10.1. Función Gamma

Es la generalización del factorial $n!$ el cual sólo está definido para enteros, mientras que $\Gamma(z)$ está definida para toda variable compleja z con parte real positiva.

$\Gamma(z)$ se define indistintamente como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv (z-1)! \equiv \prod (z-1) \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{z\,(z+1)\,(z+2)\cdots(z+n)} n^z$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\,,$$

donde n es un entero positivo y

$$\gamma = 0{,}577215664901\cdots$$

se conoce como la constante de Euler-Mascheroni:

También es frecuente encontrar $\Gamma(z)$ con algunas variantes cosméticas:

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} \mathrm{d}t = k^z \int_0^\infty e^{-kt} t^{z-1} \mathrm{d}t\,.$$

Para probar la equivalencia de las dos primeras definiciones inventamos las siguiente función de dos variables

$$F(z,n) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{Re}\, z > 0\,,$$

y como es conocido que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}\,,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = F(z,\infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv \Gamma(z)\,.$$

Con lo cual queda demostrada la primera de propuestas de Euler.

Para construir la segunda partimos de la misma función $F(z,n)$ y un cambio estratégico de variable $u = \frac{t}{n}$.

$$F(z,n) = n^z \int_0^n (1-u)^n\, u^{z-1} \mathrm{d}u \qquad \mathrm{Re}\, z > 0\,.$$

Un par de integraciones por partes nos llevan a comprobar

$$\begin{aligned} F(z,n) &= n^z \left\{ (1-u)^n \left.\frac{u^z}{z}\right|_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\, u^z \mathrm{d}u \right\} \\ &= n^z \left\{ (1-u)^{n-2}\, u^{z+1} \left.\frac{n(n-1)}{z(z+1)}\right|_0^1 + \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-2}\, u^{z+1} \mathrm{d}u \right\}\,, \end{aligned}$$

que el primer término se anula siempre.

Borrador Preliminar

Repitiendo el proceso n veces

$$\begin{aligned} F(z,n) &= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n-1)} \right\} \int_0^1 u^{z+n-1}\mathrm{d}u \\ &= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)} \right\}, \end{aligned}$$

una vez más, haciendo

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = F(z,\infty) = \lim_{n\to\infty} n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)} \right\} \equiv \Gamma(z)\,.$$

Se completa la equivalencia para la primera y segunda definiciones de Euler.

En particular, de la primera de las definiciones se tiene por integración directa

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\,, \end{aligned}$$

mientras que de la segunda, si $z = n = 1, 2, 3, \cdots$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\,. \end{aligned}$$

Finalmente la tercera de las definiciones de la función $\Gamma(z)$ viene expresada en término de un producto infinito (Weierstrass). Este puede demostrarse partiendo de la segunda definición de Euler

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{m}{m+z}\right) n^z = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1} n^z\,, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right) e^{-z\ln n}\,.$$

Ahora bien, multiplicando y dividiendo por

$$\prod_{m=1}^{n} e^{z/m} = e^{z\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)}\,,$$

nos queda

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left\{\lim_{n\to\infty} e^{z\left(\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)-\ln n\right)}\right\}\left\{\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}\right\}.$$

Donde la serie exponente del primero de los términos converge a un valor constante y cual ha quedado bautizado como la constante de *Euler-Mascheroni*

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}-\ln n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)-\ln n\right\} \\ \gamma &= 0{,}577215664901532860606511 2\cdots \end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Con lo cual queda demostrada la tercera de las propuestas para expresar la Función Gamma

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} .$$

Es fácil comprobar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\,\Gamma(z) \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}\mathrm{d}x}{(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \\ 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) . \end{aligned}$$

La primera de ellas (la relación de recurrencia) es trivial y se obtiene integrando por partes la definición integral de Euler.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^z\mathrm{d}t = ze^{-t}t^{z-1}\Big|_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = z\Gamma(z) .$$

El primer sumando de la integración por partes se anula siempre. Esta propiedad es válida $\forall z$ con $z \neq 0, -1, -2, \cdots$.

La segunda de las propiedades (fórmula de reflexión) se comprueba también partiendo de definición integral de Euler con el siguiente cambio de variable $t = u^2$.

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}u^{2z-1}\mathrm{d}u\; 2\int_0^{\infty} e^{-v^2}v^{1-2z}\mathrm{d}v \\ &= 4\iint_0^{\infty} e^{-\left(u^2+v^2\right)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v , \end{aligned}$$

si ahora hacemos $u = \rho\cos\varphi$ y $v = \rho\,\operatorname{sen}\varphi$, la integral anterior queda como

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4\int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \cot^{2z-1}(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cot^{2z-1}(\varphi)\mathrm{d}\varphi .$$

Finalmente, si

$$\varphi = \operatorname{arccot}(\sqrt{x}); \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{-\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}\,(1+x)} ,$$

nos queda

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}\mathrm{d}x}{(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} .$$

Es inmediato volver a comprobar

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} .$$

Del mismo modo, si utilizamos además la relación de recurrencia encontramos

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z\operatorname{sen}(\pi z)} ,$$

Borrador Preliminar

La *fórmula de duplicación*, y puede comprobarse partiendo de la definición del límite de Euler, así

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2z\right)}=\sqrt{\pi}\,.$$

Hay que hacer notar que en el numerador sustituimos directamente las expresiones para del límite de Euler y en la del denominador, adicionalmente sustituimos n por $2n$

$$\Gamma\left(2z\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{2z\left(2z+1\right)\cdots\left(2z+n\right)}n^{2z}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2n}{2z\left(2z+1\right)\cdots\left(2z+2n\right)}\left(2n\right)^{2z}\,,$$

por lo cual se tiene la siguiente expresión dentro del argumento del límite

$$\frac{2^{2z-1}\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{z\left(z+1\right)\left(z+2\right)\cdots\left(z+n\right)}n^{z}\right)\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(z+\frac{1}{2}+n\right)}n^{z+\frac{1}{2}}\right)}{\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2n}{2z\left(2z+1\right)\left(2z+2\right)\cdots\left(2z+2n\right)}\left(2n\right)^{2z}\right)}\,,$$

la cual se reacomoda como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2z-1}\left(n!\right)^{2}2z\left(2z+1\right)\left(2z+2\right)\cdots\left(2z+2n\right)}{\left(2n\right)!\;z\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+1\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z+2\right)\cdots\left(z+\frac{1}{2}+n\right)\left(z+n\right)}\cdot\frac{n^{2z+\frac{1}{2}}}{\left(2n\right)^{2z}}\,,$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+1\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z+2\right)\cdots\left(z+\frac{n}{2}\right)\left(2^{n-1}\right)}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+1\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z+2\right)\cdots\left(z+\frac{1}{2}+n\right)\left(z+n\right)}\cdot\frac{2^{2z-1}\left(n!\right)^{2}}{\left(2n\right)!}\cdot\frac{n^{z+\frac{1}{2}}}{2^{2z}n^{2z}}\,.$$

Entonces

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2z\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^{n-2}\right)\left(n!\right)^{2}\sqrt{n}}{\left(2n\right)!}\,,$$

por lo cual se deduce que el valor de lado izquierdo de la ecuación es independiente del valor de z por lo tanto es el mismo valor para cualquier z y lo evaluamos para $z=\frac{1}{2}$

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2z\right)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,,$$

con lo cual queda comprobada la fórmula de duplicación.

Otras propiedades que van quedar como curiosidad y sin demostración son:

$$\Gamma\left(nz\right)=\left(2\pi\right)^{(1-n)/2}n^{nz-\frac{1}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\left(z+\frac{k}{n}\right)\,,$$

$$\binom{z}{w}=\frac{z!}{w!(z-w)!}=\frac{\Gamma\left(z+1\right)}{\Gamma\left(w+1\right)\Gamma\left(z-w+1\right)}\,.$$

A partir de $\Gamma(z)$ se definen otras funciones especiales.

Borrador Preliminar

10.1.1. Ejemplos

10.1.2. Practicando con Maxima

10.1.3. Ejercicios

10.2. La Funciones Digamma y Poligamma

Para evitar tratar con derivadas de los factoriales es costumbre trabajar con sus derivadas logarítmicas. A partir de la segunda definición

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) = z! &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ \ln(z!) &= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\ln(n!) + z\ln(n) - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n)\right],\end{aligned}$$

ahora derivando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(z!) \equiv \mathbf{F}(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln(n) - \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} - \cdots - \frac{1}{(z+n)}\right],$$

y finalmente acomodando, para llegar a la definición más conocida

$$\mathbf{F}(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z+n)} - \frac{1}{n}\right).$$

También se le conoce como función ψ (Psi)

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(\Gamma(z)) \equiv \mathbf{F}(z-1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln((z-1)!),$$

con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}\psi(z+1) &= \frac{1}{z} + \psi(z), \\ \psi(z-1) - \psi(z) &= \pi\cot(\pi z), \\ \psi(z) + \psi\left(z+\frac{1}{2}\right) + 2\ln(2) &= 2\psi(2z),\end{aligned}$$

.

De donde se pueden deducir

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = \gamma.$$

La función $\psi(z)$ puede ser expresada en términos de integrales definidas, para ello notamos que

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t,$$

y sustituyendo la identidad de Frullani

$$\ln(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

Borrador Preliminar

tendremos

$$\begin{aligned}\Gamma'(z) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\int_0^\infty \left(e^{-x}-e^{-xt}\right)e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}e^{-x}\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\int_0^\infty e^{-t(x+1)}t^{z-1}\mathrm{d}t = \Gamma(z)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\left[e^{-x}-(x+1)^{-z}\right],\end{aligned}$$

ya que $\Gamma(z) = k^z\int_0^\infty e^{-kt}t^{z-1}\mathrm{d}t$ y por lo tanto

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}\left[e^{-x}-(x+1)^{-z}\right].$$

También daremos (sin demostración) otras expresiones

$$\psi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t\,,$$

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^{z-1}}{1-x}\mathrm{d}x\,.$$

La Función Poligamma se obtiene derivando en forma repetida la Función Digamma

$$\psi^{(m)}(z+1) = \mathbf{F}^{(m)}(z) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\mathbf{F}(z) = (-1)^{m+1}m!\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(z+n)^{m+1}} \qquad m = 1,2,3\cdots$$

y cuya serie puede ser expresada en términos de la función Zeta de Riemman

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^m}\,,$$

como

$$\mathbf{F}^{(m)}(0) = (-1)^{m+1}m!\zeta(m+1)\,,$$

de esta forma es posible desarrollar en serie de Maclaurin

$$\ln(n!) = -\gamma + \frac{z^2}{2}\zeta(2) - \frac{z^3}{3}\zeta(3) + \cdots + (-1)^n\frac{z^n}{n}\zeta(n) + \cdots.$$

10.2.1. Ejemplos

10.2.2. Practicando con Maxima

10.2.3. Ejercicios

10.3. La aproximación de Stirling

El comportamiento asintótico de las funciones especiales será tratado en una clase aparte. Pero la importancia de la Aproximación de Stirling obliga a que se trate en este punto.

Supongamos que consideramos el caso $z \equiv x \in \Re$. Por lo cual estamos interesados en el caso $x \gg 1$. Partimos de

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^x\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t+x\ln t}\mathrm{d}t\,,$$

Borrador Preliminar

haciendo $t = xu$ tenemos que

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{-x(u-\ln(u))} \mathrm{d}u\,.$$

Ahora bien, el integrando tendrá su máximo en $u = 1$ donde la exponencial tiene su mínimo y es entorno a ese punto que desarrollará en series de Taylor

$$u - \ln(u) = 1 + \frac{1}{2}(u-1)^2 - \frac{1}{3}(u-1)^3 + \frac{1}{4}(u-1)^4 + \cdots$$

por lo cual

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{-x(u-\ln(u))} \mathrm{d}u \approx x^x \int_0^\infty \mathrm{d}u\; e^{-x\left(1+\frac{1}{2}(u-1)^2 - \frac{1}{3}(u-1)^3 + \cdots\right)} \mathrm{d}u\,.$$

Otro cambio de variable $v = \sqrt{x}\,(u-1)$ nos lleva

$$\Gamma(x) \approx \frac{x^x e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{x}}^\infty \mathrm{d}v e^{-\frac{1}{2}v^2} \exp\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right).$$

Para valores $x \gg 1$ se expande, en series de Taylor los exponenciales que contengan términos $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned}\Gamma(x) \approx \frac{x^x e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}v e^{-\frac{1}{2}v^2} \Bigg\{ 1 + \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right)^3 + \cdots \Bigg\}\,.\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando que

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}v e^{-\frac{1}{2}v^2} v^n = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & n = 0 \\ \sqrt{2\pi}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n-1) & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}$$

e integrando término a término, tendremos que

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} x^x e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288\,x^2} + \cdots \right\}.$$

10.4. La función Beta

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\,x > 0 \;\wedge\; \mathrm{Re}\,y > 0$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Borrador Preliminar

10.5. La función integral de probabilidad

La función Integral de probabilidad para una variable compleja arbitraria z como

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \,.$$

Obviamente $\Phi(0) = 0$ y $\Phi(\infty) = 1$.

A partir de esta función se define la **Función Error y su complemento**

$$\begin{aligned} \mathrm{erf}(z) &= \int_0^z e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z) \,, \\ \mathrm{erfc}(z) &= \int_z^z e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \Phi(z) \,.\right] \end{aligned}$$

La función Gamma incompleta $\gamma\,(z, \alpha)$ y la función Gamma complementaria $\Gamma\,(z, \alpha)$

$$\begin{aligned} \gamma\,(z, \alpha) &= \int_0^\alpha e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \,, \\ \Gamma\,(z, \alpha) &= \int_\alpha^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \,, \end{aligned}$$

las cuales claramente cumplen con

$$\gamma\,(z, \alpha) + \Gamma\,(z, \alpha) = \Gamma\,(z) \;,$$

y en resumen

$$\begin{aligned} \gamma\,(z+1, \alpha) &= z\gamma\,(z, \alpha) - \alpha^z \mathrm{e}^{-\alpha} \\ \Gamma\,(z+1, \alpha) &= z\Gamma\,(z, \alpha) + \alpha^z \mathrm{e}^{-\alpha} \,. \end{aligned}$$

10.5.1. Ejemplos

10.5.2. Practicando con Maxima

10.5.3. Ejercicios

Borrador Preliminar

Capítulo 11

El problema de Sturm-Liuoville

Borrador Preliminar

11.1. Cálculo Operacional

Toda ecuación diferencial puede ser descrita de la siguiente forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x) \quad \Rightarrow \mathbb{D}F(x) = f(x)\,, \tag{11.1}$$

donde $\mathbb{D}\,(\bullet)$ es un operador diferencial lineal, tal y como los estudiamos en su momento. De esta forma

$$\mathbb{D}\,(Ax^n + Bx^m) = A\mathbb{D}\,(x^n) + B\mathbb{D}\,(x^m) = nAx^{n-1} + mBx^{m-1}\,, \tag{11.2}$$

y en muchos aspectos ese operador diferencial $\mathbb{D}\,(\bullet)$ puede ser tratado como un número más.

De esta forma una ecuación diferencial homogénea puede ser descrita en forma de operadores cómo

$$a\;y'' + b\;y' + c\;y = 0 \quad \Rightarrow \mathbb{O}|y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(a\;\mathbb{D}^2 + b\;\mathbb{D} + c\right)|y\rangle = 0\,, \tag{11.3}$$

y consecuentemente

$$(\mathbb{D} - r_1)\,(\mathbb{D} - r_2)\,|y\rangle = 0 \quad \text{con } r_1 \text{ y } r_1 \quad \text{raices de } a\,r^2 + b\,r + c = 0\,, \tag{11.4}$$

con soluciones, como era de esperarse de la forma

$$\begin{array}{lcl} r_1 = r_2 = r & \text{reales} & \Rightarrow y(x) = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{r\,x} \\ r_1 \neq r_2 & \text{reales} & \Rightarrow y(x) = A\,\mathrm{e}^{r_1\,x} + B\,\mathrm{e}^{r_2\,x} \\ r_1 = r_2^* & \text{complejas } r_1 = \alpha + i\,\beta & \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^{\alpha\,x}\,(A\cos(\beta\,x) + B\,\mathrm{sen}(\beta\,x)) \end{array} \tag{11.5}$$

Esta notación también se presta para algunas curiosidades. Para una ecuación diferencial genérica con coeficientes constantes se tiene

$$y'' - 3\;y' + 2\;y = x^2 \quad \Rightarrow \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right)y = x^2 \quad \Rightarrow (\mathbb{D} - 1)\,(\mathbb{D} - 2)\,y = x^2\,. \tag{11.6}$$

más aún

$$y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)\,(\mathbb{D} - 2)} \quad \Rightarrow y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 2)} - \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)}\,, \tag{11.7}$$

por lo cual expandiendo

$$\frac{1}{\mathbb{D} - 1} = \frac{-1}{1 - \mathbb{D}} = -1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \cdots \tag{11.8}$$

$$\frac{1}{\mathbb{D} - 2} = \frac{-1}{2}\frac{1}{1 - \frac{\mathbb{D}}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \cdots \tag{11.9}$$

de donde

$$y = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \cdots\right)x^2 - \left(-1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \cdots\right)x^2\,, \tag{11.10}$$

por lo tanto tendremos la solución particular de la ecuación $y'' - 3\;y' + 2\;y = x^2$

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(-x^2 - 2x - 2\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\,. \tag{11.11}$$

Las operaciones que se usaron arriba están relacionadas muy estrechamente con las propiedades de la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t\,. \tag{11.12}$$

Borrador Preliminar

En el mismo espíritu anterior podemos asociar una ecuación diferencial de segundo orden a un operador diferencial

$$\underbrace{\left(P(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+R(x)\right)}_{\mathbb{L}}u(x)=0 \quad \Rightarrow \left(P(x)\mathbb{D}^2+Q(x)\mathbb{D}+R(x)\right)|u\rangle=0 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{L}|u\rangle=0\,. \tag{11.13}$$

Donde las funciones $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ son funciones reales, definidas en el intervalo $[a,b]$ y que cumplen con las siguientes exigencias

- $P''(x)$, $Q'(x)$ y $R(x)$ existen y son contínuas en $[a,b]$, y
- $P(x)$ no contiene ceros en (a,b).

11.2. Operadores diferenciales de segundo orden

Consideremos el espacio de Hilbert de funciones continuas en $[a,b]$, en el cual representaremos a esas funciones como $|u\rangle$ y los operadores lineales actúan en ese espacio de Hilbert de la forma acostumbrada $\mathbb{L}|u\rangle=|\tilde{u}\rangle$. Entonces, a través de la definición del producto interno podemos construir

$$\langle v\,|\tilde{u}\rangle=\langle\tilde{u}\,|v\rangle^* \Leftrightarrow \langle v|\,\mathbb{L}|u\rangle=\langle u|\,\mathbb{L}^\dagger|v\rangle^*\,. \tag{11.14}$$

Sabemos que, los operadores hermíticos (o autoadjuntos: $\mathbb{L}=\mathbb{L}^\dagger$) tendrán autovalores $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n\}$ reales y los correspondientes autovectores $\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,|w_3\rangle,\cdots,|w_n\rangle\}$ serán ortogonales, $\langle w^i\,|w_j\rangle\propto\delta^i_j$.

El hecho que construyamos una ecuación de autovalores con $\mathbb{L}$ de la forma expresada en (11.13) implica una ecuación de la forma

$$\mathbb{L}|v_i\rangle=\lambda_i\,|v_i\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \left(P(x)\mathbb{D}^2+Q(x)\mathbb{D}+R(x)\right)|v_i\rangle=\lambda_i\,|v_i\rangle\,. \tag{11.15}$$

Con lo cual estaríamos resolviendo una familia de ecuaciones diferenciales homogéneas del tipo

$$P(x)\frac{\mathrm{d}^2y_i(x)}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x}+(R(x)-\lambda_i)\,y_i(x)=0\,, \tag{11.16}$$

parametrizadas por el parámetro λ_i. Más aún, con esta estrategia podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma

$$P(x)\frac{\mathrm{d}^2y_i(x)}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x}+(R(x)-\lambda_i w(x))\,y_i(x)=0\,, \tag{11.17}$$

si consideramos productos internos generalizados con funciones peso $w(x)$ de la forma

$$\langle g\,|f\rangle=\int_a^b \mathrm{d}x\;w(x)\,g^*(x)f(x)\,. \tag{11.18}$$

Varios son los ejemplos de esta forma general de abordar las ecuaciones diferenciales como un problema de autovalores. Entre ellos podemos mencionar:

- El oscilador armónico:

$$\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}_{\mathbb{L}}y(x)=-\omega^2y(x)\,. \tag{11.19}$$

Borrador Preliminar

- La ecuación de Legendre:

$$\underbrace{\left((1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2x\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)}_{\mathbb{L}} P_n(x) = -n(n+1)\ P_n(x)\,. \tag{11.20}$$

En general toda las familias de polinomios ortogonales, $p_n(x)$ con producto interno definido como

$$\langle \mathbf{p}^m\ |\mathbf{p}_n\rangle = \int_a^b w(x)p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x = h_n\delta_{m\,n}\,,$$

con $w(x) > 0$ una función peso en $a \leq x \leq b$.

Esto es:

$$\underbrace{\left(P(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + Q(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)}_{\mathbb{L}} p_n(x) = -\alpha_n p_n(x) = 0\,. \tag{11.21}$$

Donde las expresiones para $P(x)$, $Q(x)$ y α_n se encuentran especificadas en la Tabla (11.1)

Polinomio	$P(x)$	$Q(x)$	α_n
P_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1-x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1-x$	n
L_n^α	x	$1-x+\alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

Cuadro 11.1: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales. Con P_n Legendre, T_n Tchebychev 1E; U_n Tchebychev 2E; H_n Hermite; L_n Laguerre; $L_n^\alpha(x)$ Laguerre G; $P_n^{\alpha\beta}(x)$ Jacobi

- La ecuación de Bessel

$$\underbrace{\left(x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2\right)}_{\mathbb{L}} J_k(x) = k^2 J_k(x); \quad k \in \mathbb{R}\,. \tag{11.22}$$

11.3. Operadores diferenciales autoadjuntos

Es claro que las funciones $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ tendrán algunas restricciones adicionales a las expresadas arriba, de tal forma que se garantice que el operador $\mathbb{L}$ sea autoadjunto (hermítico).

Para encontrar esas restricciones a los coeficientes, partimos de la definición de producto interno en un espacio de funciones. En general, vimos que, para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ una posible definición de producto interno es

$$\langle g\ |f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ g^*(x)f(x) \quad \Rightarrow \langle g|\,\mathbb{L}|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\ g^*(x)\ \mathbb{L}f(x)\,, \tag{11.23}$$

Borrador Preliminar

es decir

$$\langle g|\,\mathbb{L}|f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, R(x) f(x)\,. \tag{11.24}$$

Integrando por partes la primera y segunda integral tendremos

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, P(x)\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left(P(x)\, g^*(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x)\frac{\mathrm{d}(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_a^b + \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}^2(P(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x^2}\,, \tag{11.25}$$

y

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, g^*(x)\, Q(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)\, Q(x)\, g^*(x)|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}(Q(x)\, g^*(x))}{\mathrm{d}x}\,. \tag{11.26}$$

Con lo cual podremos escribir:

$$\begin{aligned}\langle g|\,\mathbb{L}|f\rangle \quad = \quad & \int_a^b \mathrm{d}x f(x) \underbrace{\left(P(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(2\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(R(x) - \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)\right)}_{\mathbb{L}^\dagger} g^*(x) \\ & + \left(f(x)\left(Q(x) - \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}\right) g^*(x) + P(x)\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\right)\Bigg|_a^b\,,\end{aligned} \tag{11.27}$$

donde hemos identificado por $\mathbb{L}^\dagger$ al operador adjunto de $\mathbb{L}$. Ahora bien, si queremos que $\mathbb{L}$ sea autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces se debe cumplir que

$$2\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x} - Q(x) = Q(x) \quad \text{y} \quad -\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 P(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0\,, \tag{11.28}$$

y ambas se satisfacen idénticamente si

$$Q(x) = \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{11.29}$$

Estas restricciones sobre $P(x)$ y $Q(x)$ son aparentes, porque siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto a partir de cualquier operador diferencial de segundo orden. En efecto, como $P(x)$ únicamente puede tener raíces en los extremos del intervalo $[a, b]$, siempre podremos definir

$$h(x) = \frac{1}{P(x)}\exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) \quad \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases} \tag{11.30}$$

con lo cual se cumple inmediatamente la condición (11.29), a saber

$$\frac{\mathrm{d}\bar{P}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \frac{Q(x)}{P(x)}\exp\left(\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{Q(x)}{P(x)}\right) = \bar{Q}(x)\,, \tag{11.31}$$

y entonces $h(x)\mathbb{L}$ siempre será auto adjunto.

Entonces, al utilizar (11.29) en (11.13) es fácil convencerse que todo operador autoadjunto puede ser escrito como

$$\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\,. \tag{11.32}$$

Borrador Preliminar

Adicionalmente, la ecuación general (11.27) quedaría escrita como:

$$\langle g|\,\mathbb{L}|f\rangle = \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\,\mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f|\mathbb{L}^\dagger|g\rangle^*} + P(x)\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}g^*(x) - \frac{\mathrm{d}g^*(x)}{\mathrm{d}x}f(x)\right)\Bigg|_a^b . \tag{11.33}$$

Claramente, si $\mathbb{L}$ es autoadjunto y $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta, el segundo término se debe anular, y allí habrán de incidir las condiciones de borde que se impongan al problema.

11.4. El Sistema Sturm-Liouville

Evidentemente, si consideramos que $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta (que puede ser representada por un operador lineal de segundo orden autoadjunto $\mathbb{L}$), entonces la ecuación de autovalores

$$\mathbb{L}|u_i\rangle = -\lambda_i|u_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)\right)u_i(x) = -\lambda_i\, w(x)u_i(x)\,, \tag{11.34}$$

donde, λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ es la función peso descrita en (11.18). Claramente esta ecuación (11.34) debe ser complementada con las condiciones de frontera

$$P(x)u_j^*(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_a^b = 0 \quad \forall\, i,j\,. \tag{11.35}$$

Las ecuaciones (11.34) y (11.35) constituyen el Sistema Sturm-Liouville y también se le refiere como el problema de Sturm-Liouville.

Se distinguen tres posibles situaciones con las condiciones de frontera:

1. **Condiciones Regulares:** Para este caso se especifican los valores de una combinación de las funciones y las derivadas:

   $$\beta_1\, u_i(x) + \gamma_1\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_1 \quad \text{y} \quad \beta_2\, u_i(x) + \gamma_2\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x} = C_2\,,$$

   en los extremos $x = a$ y $x = b$.

   Estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones. Claramente de ésta pueden derivarse cuatro tipos de condiciones de frontera

   a) **Condiciones Regulares Puras:** Para este caso se especifican los valores para la combinación lineal completa, con $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$.

   b) **Condiciones de Dirichlet:** Para este caso se especifican los valores de la función $u_i(x)$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

   c) **Condiciones de Neumann:** Para este caso se especifican los valores de las derivadas $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

   d) **Condiciones Mixtas:** Cuando se especifican los valores de un tipo de condiciones de frontera en un extremo y otro en el otro. Esto es para $\beta_1 = \gamma_2 = 0$ o $\gamma_1 = \beta_2 = 0$.

2. **Condiciones Periódicas:** Para este caso el valor de la función y su derivada es el mismo en los extremos $u_i(a) = u_i(b)$ y $\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_a = \frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_b$. Otra vez, estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones.

Borrador Preliminar

3. **Condiciones Singulares:** Para este caso encontramos valores singulares para las funciones y sus derivadas.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos. Vamos a analizar el caso muy simple de la ecuación diferencial tipo oscilador armónico libre. Esto es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y(x) = 0\,, \tag{11.36}$$

y veremos como cambia cuando se tienen en cuenta distintos tipos de condiciones de frontera.

- **Condición Regular con**

$$y(0) = 0 \;\wedge\; \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$$

Este caso corresponde una condición de frontera regular con $\gamma_1 = \beta_2 = 0$ y, en principio, tendrá soluciones distintas para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda < 0$

$\lambda = 0$ La solución será de la forma $y(x) = C_1 x + C_2$ como $y(0) = 0$ tendremos que $C_2 = 0$ y como $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$. Con lo cual la única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor de la ecuación (11.36).

$\lambda < 0$ Podemos re-escribirla con $\lambda = -\mu^2$. Entonces la solución general para (11.36) tendrá la forma $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu\, x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu\, x}$.
Las condiciones de frontera imponen

$$0 = C_1 + C_2 \qquad \wedge \qquad 0 = \mu\left(C_1 \mathrm{e}^{\mu\,\pi} + -C_2 \mathrm{e}^{-\mu\,\pi}\right)\,,$$

y otra vez, tendremos como única solución $0 = C_1 = C_2$ y λ no será un autovalor de la ecuación (11.36).

$\lambda > 0$ Para éste caso usamos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu\, x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$ y

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = C_2 \mu \cos(\mu\pi) = 0 \quad \Rightarrow \mu_n = \pm\frac{2n+1}{2} \quad \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Es decir, tendremos infinitos auto valores asociados con infinitas autofunciones $y_i(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$ para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.
En primer lugar, es importante señalar que, por ser $\mathbb{L}$ un operador hermítico sus autovalores son reales y cumplen $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \cdots$, es decir, son crecientes para índices crecientes de las autofunciones. En segundo lugar que las infinitas autofunciones forman una base ortogonal y, por lo tanto la suma de todas esas soluciones, también será solución de (11.36), con las condiciones de frontera: $y(0) = 0 \;\wedge\; \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0$ y $\lambda > 0$ puede ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,. \tag{11.37}$$

Esta hecho nos permitirá resolver el problema inhomogéneo, $\mathbb{L}|u\rangle = |f\rangle$, y será analizado en detalle más adelante.

Borrador Preliminar

Figura 11.1: Las posibles soluciones $\mu = -\tanh(\mu\,\pi)$, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu > 0$ para el intervalo $[0, 2]$ se muestra claramente en la figura. Para $\mu > 0$ no existe solución, pero para $\mu < 0$, se encuentra numéricamente que $\mu \approx -0{,}9962$

- **Condición Regular con**

$$y(0) = 0 \;\wedge\; y(\pi) + \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pi} = 0\,.$$

Para este caso tendremos una condición de frontera regular con $\gamma_1 = 0$ y, en principio, tendrá soluciones distintas para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda < 0$.

$\lambda = 0$ Se cumplen las mismas situaciones que el caso anterior y se demuestra que sólo es posible la solución trivial $y(x) = 0$.

$\lambda < 0$ Una vez más hacemos $\lambda = -\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu\,x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu\,x}$. Las condiciones de frontera imponen:

$$C_1 = -C_2 \qquad \wedge \qquad 0 = \left(C_1 \mathrm{e}^{\mu\,\pi} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu\,\pi}\right) + \mu\left(C_1 \mathrm{e}^{\mu\,\pi} - C_2 \mathrm{e}^{-\mu\,\pi}\right)\,,$$

con lo cual

$$\mu = -\frac{(\mathrm{e}^{\mu\,\pi} - \mathrm{e}^{-\mu\,\pi})}{(\mathrm{e}^{\mu\,\pi} + \mathrm{e}^{-\mu\,\pi})} \equiv -\tanh(\mu\,\pi)\,.$$

Esta ecuación trascendente se tiene que resolver numéricamente. Si $\mu > 0$ no existirá solución para $\mu = -\tanh(\mu\,\pi)$. Esto se ilustra claramente en la figura 11.1. No hay punto de corte entre las dos funciones. Por lo tanto volvemos al caso de la solución trivial $y(x) = 0$. Si $\mu < 0$ entonces, al resolver numéricamente, encontramos que $\mu \approx -0{,}9962$, con lo cual $\lambda \approx -0{,}9924$ y consecuentemente $y(x) \;\approx\; C_1\left(\mathrm{e}^{-0{,}9962\,x} - \mathrm{e}^{0{,}9962\,x}\right)$.

$\lambda > 0$ En este caso una vez más hacemos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu\,x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu\,x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$ y, para este caso

$$y(\pi) = 0 = C_2\left(\operatorname{sen}(\mu\,\pi) + \mu\cos(\mu\,\pi)\right) \quad \Rightarrow \mu = -\tan(\mu\,\pi)\,.$$

Otra vez, la ecuación trascendente $\mu = -\tan(\mu\,\pi)$, se tiene que resolver numéricamente. No obstante, procedemos a analizar una posible representación gráfica que se muestra en la Figura

Borrador Preliminar

Figura 11.2: Las posibles soluciones de $\mu = -\tan(\mu\,\pi)$, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu > 0$ para el intervalo $[0, 4]$ se muestra claramente en la figura. Tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ existen infinitas soluciones.

11.2. Claramente, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ existen infinitas soluciones. Si resolvemos numéricamente para el caso $\mu > 0$ encontramos que:

$$\mu_1 \approx 0{,}7876,\ \mu_2 \approx 1{,}6716,\ \mu_3 \approx 2{,}6162\cdots \quad \Rightarrow \lambda_1 \approx 0{,}6204,\ \lambda_2 \approx 2{,}7943,\ \lambda_3 \approx 6{,}8446\cdots$$

Del mismo modo, para $\mu < 0$ se obtiene:

$$\tilde{\mu}_1 \approx -1{,}2901,\ \tilde{\mu}_2 \approx -2{,}3731,\ \tilde{\mu}_3 \approx -3{,}4092\cdots \quad \Rightarrow \tilde{\lambda}_1 \approx 1{,}6644,\ \tilde{\lambda}_2 \approx 5{,}6314,\ \tilde{\lambda}_3 \approx 11{,}6225\cdots$$

Por lo tanto la solución, se podrá escribir,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(\mu_n x) - \operatorname{sen}(|\tilde{\mu}_n| x)\ . \tag{11.38}$$

- **Condiciones Periódicas**

  Paras las condiciones de frontera periódicas tendremos: $y(0) = y(L)$ y $\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}$.

  Una vez más se distinguen tres escenarios.

$\lambda = 0$ En este caso, la solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$ y las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \quad \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \quad \Rightarrow C_1 = 0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_2 = C_2\,.$$

Por lo tanto, para $\lambda = 0$, la solución (11.36) con condiciones de borde periódicas, será $y(x) = C_2$

$\lambda < 0$ Una vez más, $\lambda = -\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu\,x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu\,x}$. Las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \quad \Rightarrow C_1\left(1 - \mathrm{e}^{\mu\,L}\right) = C_2\left(\mathrm{e}^{-\mu\,L} - 1\right)\ ,$$

y

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_1\left(1 - \mathrm{e}^{\mu\,L}\right) = -C_2\left(\mathrm{e}^{-\mu\,L} - 1\right)\ .$$

Por lo tanto, $C_1 = C_2 = 0$, y obtenemos la solución trivial $y(x) = 0$ para valores de $\lambda < 0$.

Borrador Preliminar

$\lambda > 0$ Al igual que en lo casos anteriores hacemos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu\, x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu\, x)$. Las condiciones de frontera imponen:

$$y(0) = y(L) \quad \Rightarrow C_1\,(1 - \cos(\mu\, L)) = C_2 \operatorname{sen}(\mu\, L)\,,$$

y

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} \quad \Rightarrow C_2\,(1 - \cos(\mu\, L)) = -C_1 \operatorname{sen}(\mu\, L)\,,$$

con lo cual, al resolver para C_2 se obtiene

$$2C_1\,(1 - \cos(\mu\, L)) = 0 \quad \Rightarrow \cos(\mu\, L) = 1 \quad \Rightarrow \mu_n = \pm\frac{2n\pi}{L} \quad \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

por lo cual, para cada autovalor λ_n tendremos asociadas dos autofunciones: $y_1(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$ y $y_2(x) = \operatorname{sen}(\frac{2n\pi}{L}x)$.

- **Condiciones Singular**

Aquí se presentan uno o más infinitos en el intervalo de validez $x \in [a, b]$. En esta sección analizaremos únicamente el caso para el cual los puntos singulares estén en los extremos $x = a$ y $x = b$. En este caso, la ecuación (11.34), vale decir

$$\mathbb{L}|u_i\rangle = -\lambda_i w(x)|u_i\rangle \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}u_i(x)}{\mathrm{d}x}\right) + (R(x) + \lambda_i\, w(x))\, u_i(x) = 0\,, \tag{11.39}$$

tendremos $P(a) = 0$ o $P(b) = 0$ o ambos.

La aparición de polos en el intervalo de validez de las ecuaciones diferenciales fue lo que motivó el uso del método de Frobenius que se discutió en la sección 9.3.

Particularmente, la ecuación de Bessel (9.18) en la sección 9.4 representa este caso. Tal y como discutimos en esas secciones, si incluimos $x = 0$ en el intervalo de validez de la ecuación ésta presenta un polo en uno de los extremos del intervalo. Es decir, en la ecuación de Bessel escrita en forma autoadjunta:

$$x^2y'' + xy' + \left(k^2x^2 - n^2\right) y = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + \left(k^2x - \frac{n^2}{x}\right) y(x) = 0\,, \tag{11.40}$$

identificamos: $P(x) = x$, $R(x) = -\frac{n^2}{x}$, $\lambda = k^2$ y finalmente $w(x) = x$. Tal y como mostramos en (9.4) la solución general de esta ecuación es:

$$y(x) = C_1\, J_n(k\,x) + C_2\, Y_n(k\,x) \quad \text{con } y(a = 0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0 \quad \Rightarrow y(x) = C_1\, J_n(k\,x)\,. \tag{11.41}$$

La condición de borde $y(a = 0) = 0$ impone que $C_2 = 0$ porque $Y_n(k\,x \to 0) \to \infty$.

Si adicionalmente, imponemos $y(b) = 0$, entonces se cumplirá que $J_n(k\,a) = 0$ por lo cual $k\,a = k_{J_n\,\nu}$, donde $k_{J_n\,\nu}$ con $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ son las raíces de las funciones de Bessel $J_n(x)$, tal y como se expresan en la Tabla 11.2. Entonces, al igual que en los casos anteriores tendremos

$$\lambda_{J_n\,\nu} = \frac{k^2_{J_n\,\nu}}{a^2} \quad \Rightarrow y_{n\,\nu}(x) = C_1\, J_n\left(\frac{k_{n\,\nu}}{a}\,x\right)\,. \tag{11.42}$$

De esta forma se tendrán las funciones asociadas con los autovalores y los ceros de la función de Bessel reescalarán el argumento de la función. Este caso lo analizaremos con mas detalles en la próxima sección

Borrador Preliminar

ν	$k_{J_0\,\nu}$	$k_{J_1\,\nu}$	$k_{J_3\,\nu}$	$k_{Y_0\,\nu}$	$k_{Y_1\,\nu}$	$k_{Y_2\,\nu}$
1	2.404825558	3.831705970	5.135622302	0.8935769663	2.197141326	3.384241767
2	5.520078110	7.015586670	8.417244140	3.957678419	5.429681041	6.793807513
3	8.653727913	10.17346814	11.61984117	7.086051060	8.596005868	10.02347798
4	11.79153444	13.32369194	14.79595178	10.22234504	11.74915483	13.20998671
5	14.93091771	16.47063005	17.95981949	13.36109747	14.89744213	16.37896656
6	18.07106397	19.61585851	21.11699705	16.50092244	18.04340228	19.53903999
7	21.21163663	22.76008438	24.27011231	19.64130970	21.18806893	22.69395594
8	24.35247153	25.90367209	27.42057355	22.78202805	24.33194257	25.84561372
9	27.49347913	29.04682854	30.56920450	25.92295765	27.47529498	28.99508040
10	30.63460647	32.18967991	33.71651951	29.06403025	30.61828649	32.14300226

Cuadro 11.2: Los ceros de las funciones de Bessel $J_n(x)$ y de la función de Newmann $Y_n(x)$. La notación se hace engorrosa y eliminaremos la etiqueta J o Y cuando sea evidente que los cero corresponden a cada una de esas funciones.

11.5. Funciones de Bessel y el problema de Sturm-Liouville

En esta sección desarrollaremos un poco mas el último punto de las condiciones singulares. En particular derivaremos unas condiciones de ortogonalidad y norma para la funciones de Bessel que posteriormente utilizaremos en la sección 12.3.5.

11.5.1. La serie de Fourier-Bessel

Para ello consideremos, una vez mas la ecuación (11.40) que es la ecuación de Bessel en su forma autoadjunta. Como en la sección anterior, incorporemos además las condiciones de frontera en $x = c$ de tal forma que construimos el problema de Sturm-Liouville definido en el intervalo de $0 \le x \le c$. La condición de frontera general será $Ay(c) + By'(c) = 0$, donde A y B son dos constantes arbitrarias. Si $B = 0$, se conoce como condición de Dirichlet. Si $A = 0$, se conoce como condición de Neumann.

Una vez mas, el problema también requiere que la solución sea regular (acotada) en $x = 0$ y esto excluye la función de Neumann como solución. Sólo estarán permitidos aquellos valores de λ que satisfagan la ecuación

$$AJ_n(\lambda c) - B\frac{\mathrm{d}J_n(\lambda x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=c} = 0\,. \tag{11.43}$$

Con lo cual como las funciones de Bessel son oscilatorias, existe un número infinito de λ que satisfacen esta ecuación. Estos valores de λ son los autovalores del problema.

Hemos mostrado que los autovalores $\lambda_{J_n\,\nu} = \frac{k^2_{J_n\,\nu}}{a^2}$ corresponden a las autofunciones $J_n(\lambda_{n\,\nu})$. Estas funciones propias forman un conjunto completo y son ortogonales entre sí con un producto interno definido en la sección 9.4.8 y que ahora refraseamos como

$$\int_0^c J_n(\lambda_{ni}\,x)J_n(\lambda_{nk}\,x)\,x\;\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{para} \quad \lambda_{n\,i} \neq \lambda_{n\,k}\,.$$

Por lo tanto, cualquier función $f(x)$ bien comportada en el intervalo $0 \le x \le c$ se puede expresar como una combinación lineal de estas funciones

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_n(\lambda_{nj}\,x)\,, \qquad \text{donde los coeficientes son } a_j = \frac{1}{\int_0^c \left[J_n(\lambda_{nj}\,x)\right]^2 x\;\mathrm{d}x}\int_0^c f(x)J_n(\lambda_{nj}\,x)\,x\;\mathrm{d}x.$$

Borrador Preliminar

A esa combinación lineal se conoce como la expansión de la función $f(x)$ en una serie de Fourier Bessel. Es la representación de una función como una combinación lineal de muchas versiones ortogonales de una misma función de Bessel.

11.5.2. La norma de las funciones de Fourier-Bessel

Nos queda por determinar la norma de las funciones de Fourier-Bessel

$$\beta_{nj}^2 = \int_0^c \left[J_n\left(\lambda_{nj}x\right)\right]^2 x \, \mathrm{d}x \,,$$

que requerimos para calcular los coeficientes de la expansión de $f(x)$.

Para ello partimos, una vez mas de la ecuación de Bessel en su forma autoadjunta (11.40) y la multiplicamos por $2x\left(\frac{\mathrm{d}J_n(\lambda x)}{\mathrm{d}x}\right)$.

$$2x\frac{\mathrm{d}J_n(\lambda x)}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}J_n(\lambda x)}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\lambda^2 x-\frac{n^2}{x}\right)J_n(\lambda x)\right\}=0\,.$$

Ecuación que puede ser re-escrita como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\lambda x)\right)^2+\left(\lambda^2x^2-n^2\right)J_n(\lambda x)2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\lambda x)=0\,,$$

y también como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\lambda x)\right)^2+\left(\lambda^2x^2-n^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_n(\lambda x)\right)^2=0.$$

Más aún, note que

$$\lambda^2x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_n(\lambda x)\right)^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lambda^2x^2\left(J_n(\lambda x)\right)^2\right]-2\lambda^2x\left(J_n(\lambda x)\right)^2\,,$$

con lo cual llegamos a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\lambda x)\right)^2+\lambda^2x^2\left(J_n(\lambda x)\right)^2-n^2\left(J_n(\lambda x)\right)^2\right]=2\lambda^2x\left(J_n(\lambda x)\right)^2\,. \tag{11.44}$$

Ahora bien, de la relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel que presentamos en la sección 9.4.3, construimos la siguiente relación que luego elevamos al cuadrado:

$$x\frac{\mathrm{d}J_n(\lambda x)}{\mathrm{d}x}=nJ_n(\lambda x)-\lambda xJ_{n+1}(\lambda x)\quad\Rightarrow\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_n(\lambda x)\right)^2=n^2J_n^2(\lambda x)-2n\lambda xJ_n(\lambda x)J_{n+1}(\lambda x)+\lambda^2x^2J_{n+1}^2(\lambda x)\,.$$

Si la sustituimos en la ecuación (11.44) tendremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lambda^2x^2J_{n+1}^2(\lambda x)+\lambda^2x^2J_n^2(\lambda x)-2n\,\lambda\,x\,J_n(\lambda x)\,J_{n+1}(\lambda x)\right]=2\lambda^2x\left(J_n(\lambda x)\right)^2\,,$$

que luego integramos miembro a miembro

$$\left[\lambda^2x^2J_{n+1}^2(\lambda x)+\lambda^2x^2J_n^2(\lambda x)-2n\lambda xJ_n(\lambda x)J_{n+1}(\lambda x)\right]_0^c=2\lambda^2\int_0^c x\left(J_n(\lambda x)\right)^2\,\mathrm{d}x$$

Borrador Preliminar

y equivalentemente la expresión para la norma

$$\beta^2 = \int_0^c x\left(J_n(\lambda x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{c^2}{2}\left[J_{n+1}^2(\lambda c) + J_n^2(\lambda c)\right] - \frac{nc}{\lambda} J_n(\lambda c) J_{n+1}(\lambda c) \tag{11.45}$$

En este punto de las condiciones de frontera (11.43) se desprenden dos casos:

B = 0 Tendremos que $J_n(\lambda c) \equiv J_n(\lambda_{nj} c) = 0$, con lo cual la norma de las funciones de Bessel (11.45) se reduce a:

$$\beta_{nj}^2 = \int_0^c x\left(J_n\left(\lambda_{nj} x\right)\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} c^2 J_{n+1}^2\left(\lambda_{nj} c\right) .$$

B ≠ 0 Despejamos de las condiciones de frontera (11.43) y obtenemos

$$\frac{A}{B} J_n(\lambda c) = \left.\frac{\mathrm{d}J_n(\lambda x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=c} \quad \Rightarrow J_{n+1}(\lambda c) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{n}{c} - \frac{A}{B}\right) J_n(\lambda c) .$$

Donde hemos utilizado, otra vez, las relaciones de recurrencia $\left.\frac{\mathrm{d}J_n(\lambda x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=c} = \frac{n}{c} J_n(\lambda c) - \lambda J_{n+1}(\lambda c)$, evaluada en $x = c$.

Si sustituimos este resultado en la ecuación (11.45) obtendremos

$$\int_0^c x\left(J_n(\lambda x)\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{c^2}{2} J_n^2(\lambda c)\left[1 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{n}{c} - \frac{A}{B}\right)^2\right] - \frac{nc}{\lambda^2}\left(\frac{n}{c} - \frac{A}{B}\right) J_n^2(\lambda c) = \frac{1}{2\lambda^2} J_n^2(\lambda c)\left[(\lambda c)^2 - n^2 + \left(\frac{Ac}{B}\right)^2\right] .$$

Que se cumple para todo λ, particular para cuando $\lambda = \lambda j$, son los ceros de las funciones de Bessel

$$\beta_{nj}^2 = \int_0^c x\left(J_n\left(\lambda_j x\right)\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\lambda_j^2} J_n^2(\lambda_j c)\left[(\lambda_j c)^2 - n^2 + \left(\frac{Ac}{B}\right)^2\right] .$$

11.6. Función de Green

En esta sección estudiaremos estrategias para resolver la ecuación diferencial lineal inhomogénea $\mathbb{L}y(x) = f(x)$. La técnica que utilizaremos será la función de Green, que es un Kernel integral que representa el operador inverso $\mathbb{L}^{-1}$ que resuelva la ecuación diferencial.

11.6.1. La estrategia de la función de Green

Como dijimos, queremos resolver una ecuación diferencial inhomogenea con condiciones de frontera definida en el rango $a \leq x \leq b$. En término de operadores esto es $\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle$ y la estrategia será encontrar el operador inverso de tal forma que la solución la podamos expresar, formalmente, como $|y\rangle = \mathbb{L}^{-1}|f\rangle$. Entonces, construiremos la función de Green como un operador diferencial inverso, $\mathbb{L}^{-1} = \mathbb{G}$, que cumpla con $\mathbb{L}\mathbb{G}_{x,t} = \delta(x-t)$. De esta manera la solución que buscamos será de la forma $y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\mathrm{d}t$. La función de Green $\mathbb{G}_{x,t} \leftrightarrow G(x,t)$, es un *Kernel* que resuelve la ecuación diferencial inhomogenea de la forma

$$\mathbb{L}y(x) = f(x) \quad \Rightarrow \mathbb{L}y(x) = \mathbb{L}\int_a^b G(x,t) f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbb{L}\, G(x,t) f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \delta(x-t) f(t)\mathrm{d}t = f(x) .$$

La función de Green contiene la información de la solución de la ecuación homogénea incorporando la restricción de las condiciones de frontera. La solución general se construye utilizando la función de Green operando sobre la parte inhomogénea de la ecuación diferencial.

Borrador Preliminar

Entonces dada una ecuación diferencial inhomogénea en forma autoadjunta

$$\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)\,,$$

definida en el rango $a \leq x \leq b$ y sujeta a condiciones de frontera $\alpha_1\, y(x)|_{x=a} + \beta_1 \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} = C_1$ y $\alpha_2\, y(x)|_{x=b} + \beta_2 \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=b} = C_2$, la solución de la ecuación mediante funciones de Green sigue estos pasos:

1. Se resuelve el problema de autovalores del operador diferencial $\mathbb{L}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$.
2. Se construye la función de Green con las autofunciones normalizadas $|\hat{u}_i\rangle$ y los autovalores correspondientes de la forma
$$G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)\,.$$
3. Se utiliza $G(\xi, x)$ como *Kernel* para construir la solución general de la ecuación inhomogénea de la forma
$$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\; G(\xi, x)w(\xi)f(\xi)$$

En las próximas secciones demostraremos los detalles de este procedimiento y luego lo ejemplificaremos con casos concretos.

11.6.2. Función de Green y el problema de frontera inhomogéneo

Consideremos ahora la solución de caso inhomogéneo

$$\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)\,. \tag{11.46}$$

Claramente, la solución del caso homogéneo será

$$\mathbb{L}|u_i\rangle = -\lambda_i|u_i\rangle \quad \Rightarrow |y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} C^i|u_i\rangle\,, \tag{11.47}$$

donde $\{|u_i\rangle\}$ son las autofunciones de $\mathbb{L}$. Por lo tanto podemos expresar (11.46) de la forma

$$|f\rangle = \mathbb{L}|y\rangle \quad \Rightarrow |f\rangle = \mathbb{L}\left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i|u_i\rangle\right) = \sum_{i=0}^{\infty} C^i\mathbb{L}|u_i\rangle = -\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i|u_i\rangle\,, \tag{11.48}$$

para finalmente proyectar (11.46) a lo largo de las mismas autofunciones $|u_i\rangle$ y dado que las funciones $\{|u_i\rangle\}$ son ortogonales, obtenemos los coeficientes C^i

$$\langle u^j\,|f\rangle = -\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i \underbrace{\langle u^j\,|u_i\rangle}_{\delta_{i\,j}} \quad \Rightarrow C^j = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\langle u^j\,|f\rangle}{\langle u^j\,|u_j\rangle} \;\Leftrightarrow\; C^j = \frac{\int_a^b \mathrm{d}x\; u_j^*(x)\,w(x)f(x)}{\int_a^b \mathrm{d}x\; u_j^*(x)\,w(x)u_j(x)}\,. \tag{11.49}$$

Por lo tanto,

$$|y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i}\frac{\langle u^i\,|f\rangle}{\langle u^i\,|u_i\rangle}\right)|u_i\rangle \;\Leftrightarrow\; y(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{\int_a^b \mathrm{d}\xi\; u_i^*(\xi)\,w(\xi)f(\xi)}{\int_a^b \mathrm{d}\zeta\; u_i^*(\zeta)\,w(\zeta)u_i(\zeta)}\right)u_i(x)\,. \tag{11.50}$$

Borrador Preliminar

Siempre se puede normalizar las autofunciones y con ello se simplifica la expresión anterior

$$\langle \hat{u}^i \,|\hat{u}_i\rangle = 1 \;\Leftrightarrow\; \int_a^b \mathrm{d}\zeta\; \hat{u}_i^*(\zeta)\, w(\zeta)\hat{u}_i(\zeta) = 1 \quad \Rightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\left(\int_a^b \mathrm{d}\xi\; \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi)\right)\hat{u}_i(x)\,, \tag{11.51}$$

donde

$$|\hat{u}_i\rangle = \frac{|u_i\rangle}{\sqrt{\langle u^i\,|u_i\rangle}} \;\Leftrightarrow\; \hat{u}_i(x) = \frac{u_i}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{d}\zeta\; u_i^*(\zeta)\, w(\zeta) u_i(\zeta)}}\,. \tag{11.52}$$

De este modo, tendremos

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\left(\int_a^b \mathrm{d}\xi\; \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi)\right)\hat{u}_i(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\; \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)\right)}_{G(x,\xi)} w(\xi) f(\xi)\,. \tag{11.53}$$

Por lo tanto, la solución al problema de Sturm-Liouville se puede expresar en términos de la función de Green como

$$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\; G(\xi, x) w(\xi) f(\xi)\,, \quad \text{con:}\;\; G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)\,. \tag{11.54}$$

11.6.3. Generalizando el problema inhomogéneo y la Función de Green

Inspirados en el nuestra motivación inicial, (11.46), podemos extenderla para considerar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(\mathbb{L} + \lambda)\,|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + (R(x) + \lambda\, w(x))\, y(x) = f(x)\,, \tag{11.55}$$

donde $y(x)$ estará sometida a algunas de las condiciones de frontera expresadas en 11.4.

Una vez más resolvemos el problema de autovalores para encontrar las autofunciones en las cuales expandiremos todas las funciones involucradas en el problema. Esto es, en general y siguiendo el esquema presentado en (11.47)

$$\mathbb{L}|\hat{u}_i\rangle = -\lambda_i|\hat{u}_i\rangle \quad \Rightarrow |f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} F^i|\hat{u}_i\rangle \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \langle \hat{u}^i\,|f\rangle|\hat{u}_i\rangle\,, \tag{11.56}$$

donde hemos supuesto que las autofunciones fueron normalizadas, $\langle \hat{u}^j\,|\hat{u}_i\rangle = \delta_i^j$. Con lo cual

$$(\mathbb{L} + \lambda)\,|y\rangle = |f\rangle \quad \Rightarrow (\mathbb{L} + \lambda)\left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i|\hat{u}_i\rangle\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \hat{u}^i\,|f\rangle|\hat{u}_i\rangle \quad \Rightarrow C^i\,(\lambda_i + \lambda) - \langle \hat{u}^i\,|f\rangle = 0\,, \tag{11.57}$$

y se sigue que

$$C^i = \frac{\langle \hat{u}^i\,|f\rangle}{(\lambda_i + \lambda)} \quad \Rightarrow |y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\langle \hat{u}^i\,|f\rangle}{(\lambda_i + \lambda)}\right)|\hat{u}_i\rangle \;\Leftrightarrow\; y(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\int_a^b \mathrm{d}\xi\, \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi)}{\lambda_i + \lambda}\right)\hat{u}_i(x)\,, \tag{11.58}$$

intercambiando sumatorias e integrales tendremos

$$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\, w(\xi) f(\xi) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)}{\lambda_i + \lambda} \quad \Rightarrow G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)}{\lambda_i + \lambda}\,. \tag{11.59}$$

Borrador Preliminar

Podemos identificar claramente la función de Green. Nótese que para el caso $\lambda_i + \lambda = 0$, es decir si λ en (11.55) coincide con alguno de los autovalores del operador $\mathbb{L}$, la función de Green se hace infinita y este esquema presenta dificultades para su aplicación.

11.6.4. Distribuciones y funciones de Green

Como dijimos arriba dada una ecuación diferencial, ordinaria inhomogénea escrita en la forma autoadjunta

$$\mathbb{L}y(x) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)y(x) = f(x),$$

definida en el rango $a \leq x \leq b$ y con condiciones de contorno en dos puntos $x = a$ and $x = b$. Entonces

$$\mathbb{L}y(x) = f(x) \quad \Rightarrow y(x) = \mathbb{L}^{-1}f(x) \equiv \mathbb{G}f(x) \quad \Rightarrow y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Con esta visión, podemos asociar a la función de Green como el operador diferencial inverso, $\mathbb{L}^{-1} = \mathbb{G}$ y por lo tanto, nos permite obtener, formalmente la solución de la ecuación diferencial inhomogénea. Dicho de otra manera

$$\mathbb{L}\mathbb{G} \equiv \mathbb{L}G(x,t) = \delta(x-t)$$

podemos definir la acción de $\mathbb{L}$ sobre la función de Green como , de tal forma que la solución $y(x)$, al problema de valores de frontera, como hemos dicho es $y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t$. Esta afirmación es fácilmente comprobable si aplicamos $\mathbb{L}$ a ambos miembros, i.e.

$$\mathbb{L}y(x) = f(x) \quad \Rightarrow \mathbb{L}y(x) = \mathbb{L}\int_a^b G(x,t)f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbb{L}\,G(x,t)f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \delta(x-t)f(t)\mathrm{d}t = f(x)\,.$$

11.7. Ejemplos

1. Considere el operador diferencial $\mathbb{L}$ definido por

$$\mathbb{L}y(x) = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^x\right]y(x).$$

   a) Resuelva el problema de autovalores $\mathbb{L}y_n(x) = \lambda_n \mathrm{e}^x y_n(x) \quad 0 < x < 1$, con las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y , $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}y(x) = 0$ para x=1.

   b) Encuentre la solución y_n sin normalización, y también una función de peso $\rho(x)$ respecto a la cual las y_n son ortogonales para distinos n. A partir de esta definición de producto interno calcule la norma de los y_n.

   c) Haciendo una expansión en término de las autofunciones, resuelva la ecuación

$$\mathbb{L}y(x) = -\mathrm{e}^{x/2}, \quad 0 < x < 1\,,$$

   con las mismas condiciones de contorno que antes expuestas.

R La ecuación de autovalores puede ser re-escrita como

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x y(x) = \lambda \mathrm{e}^x y(x) \quad \Leftrightarrow \mathrm{e}^x y''(x) + \mathrm{e}^x y'(x) + \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^x y(x) = 0\,,$$

Borrador Preliminar

con lo cual la ecuación característica nos queda

$$m^2 + m + \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\lambda}\,,$$

y la solución será

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-x/2}\cos\sqrt{\lambda}x + B\mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x\,.$$

La condición $y(0) = 0$ implica que $A = 0$, mientras que en $x = 1$, la otra condición de contorno impone

$$-\frac{1}{2}B\mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}B\mathrm{e}^{-x/2}\cos\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{2}B\mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x = 0\,.$$

Es decir, $\cos\sqrt{\lambda} = 0$ y por lo tanto $\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2$ para n entero, positivo.

a) Sin normalizar la autofunción será

$$y_n(x) = B_n\mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\,.$$

La expresión del producto interno $\langle f|g\rangle$ tienen que tener una función peso, $\rho(x)$ que nos garantice la ortogonalidad de estas autofunciones. Con esa definición podremos encontrar la norma correspondiente. Por inspección, dada la forma general de las autofunciones, $\rho(x) = \mathrm{e}\mathrm{e}^x$, para que se cumpla siempre que $B = \sqrt{2}$. Veamos:

$$I_{nm} = \int_0^1 \rho(x)y_n(x)y_m^*(x)\mathrm{d}x = B_nB_m\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]\mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]\mathrm{d}x\,,$$

con lo cual

$$I_{nm} = \int_0^1 \rho(x)y_n(x)y_m^*(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ \frac{1}{2}B_n^2 & \text{for } m = n. \end{cases}$$

b) Escribimos solución como combinación lineal $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$ de tal forma que la ecuación se exprese como

$$-\mathrm{e}^{x/2} = \mathbb{L}y(x) = \mathbb{L}\sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[\lambda_n\rho(x)y_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2\mathrm{e}^x\sqrt{2}\mathrm{e}^{-x/2}\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]$$

y finalmente

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2\sqrt{2}\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]\,.$$

Ahora bien, después de multiplicar ambos lados por $\operatorname{sen}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]$, e integrar de 0 a 1 , obtenemos

$$-\int_0^1 \operatorname{sen}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]\mathrm{d}x = a_m\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2\sqrt{2}\right)\int_0^1 \operatorname{sen}^2\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]\mathrm{d}x\,,$$

con lo cual

$$\frac{a_m}{2} = \frac{-1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2\sqrt{2}}\int_0^1 \operatorname{sen}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2\sqrt{2}}\left.\frac{\cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}\right|_0^1 \Rightarrow a_m = -\frac{\sqrt{2}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^3\pi^3}$$

Borrador Preliminar

Finalmente, sustituyendo este resultado en la expansión y recordando que $B_n = \sqrt{2}$, obtendremos

$$y(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3 \pi^3} \mathrm{e}^{-x/2} \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

2. Considere el siguiente operador diferencial $\mathbb{L}$,

$$\mathbb{L}y = x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y, \quad \text{para } 1 \le x \le e, \quad \Rightarrow \mathbb{L}y_n(x) = \lambda_n y_n(x) \quad \text{con } y(0) = y(\mathrm{e}) = 1\,.$$

Encuentre entonces la solución a la ecuación $\mathbb{L}y = x^{-1/2}$, de la forma $\sum a_n y_n(x)$, que cumpla con las condiciones de frontera.

R Iniciamos con el cambio de variable $x = \mathrm{e}^t$ con lo cual $y(x) = v(t)$, las condiciones de frontera se convierten en $v(0) = v(1) = 0$, las derivadas en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-t}\frac{d}{dt}$ y, finalmente la ecuación de autovalores puede ser reescrita como

$$\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + 2\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{4}v = \lambda v, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{4} - \lambda\right) = 0\,.$$

El polinomio característico para la ecuación diferencial en la función $v(t)$, nos queda como

$$m^2 + m + \left(\frac{1}{4} - \lambda\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda},$$

con la cual tendremos una solución de la forma $v(t) = \mathrm{e}^{-t/2}\left(A\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}\right)$ y como $v(0) = v(1) = 0$, se impone $\lambda < 0$ y obtenemos

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{-\lambda}t\right) \text{ con } \sqrt{-\lambda} = n\pi, \text{ i.e. } \lambda = -n^2\pi^2, \text{ para } n \text{ entero}\,.$$

Por lo tanto

$$v_n(t) = A_n \mathrm{e}^{-t/2}\operatorname{sen}(n\pi t) \quad \Leftrightarrow \quad y_n(x) = \frac{A_n}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}(n\pi \ln x)\,.$$

Finalmente, podemos despejar el coeficiente A_n de la condición de normalización como

$$1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{A_n^2}{x}\operatorname{sen}^2(n\pi \ln x)dx = \int_0^1 A_n^2 \operatorname{sen}^2(n\pi t)dt = \frac{1}{2}A_n^2 \quad \Rightarrow \quad A_n = \sqrt{2}.$$

Entonces, para resolver

$$\mathbb{L}y = x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

suponemos $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$, y expandimos la parte inhomogénea de la ecuación diferencial, i.e. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en término de las autofonciones $y_n(x)$, así

$$\mathbb{L}y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(-n^2\pi^2\right) y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -n^2\pi^2 a_n \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}(n\pi \ln x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Otra vez, al invocar la ortogonalidad, multiplicamos por $y_m(x)$ e integramos miembro a miembro

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2a_n}{x}\operatorname{sen}(n\pi \ln x)\operatorname{sen}(m\pi \ln x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{n^2\pi^2}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(m\pi \ln x)}{x}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow a_m = -\frac{\sqrt{2}}{m^2\pi^2}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\operatorname{sen}(m\pi \ln x)}{x}\mathrm{d}x\,.$$

Borrador Preliminar

con lo cual

$$a_m = -\frac{\sqrt{2}}{m^2\pi^2}\left[\frac{-\cos(m\pi\ln x)}{m\pi}\right]_1^{\mathrm{e}} = \left\{\begin{array}{ll} -\frac{2\sqrt{2}}{m^3\pi^3} & \text{para } m \text{ impar} \\ 0 & \text{para } m \text{ par} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow y(x) = -\frac{4}{\pi^3}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2p+1)\pi\ln x]}{(2p+1)^3\sqrt{x}}\,.$$

3. Consideremos el problema de valores de frontera para la ecuación diferencial del oscilador armónico forzado

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \cos(\bar{\omega}\,t)\,, \quad \text{con: } x(0) = x(\pi) = 0 \quad \text{donde } \ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

y encuentre la solución mas general en término de las funciones de Green

R Esta es una ecuación diferencial lineal, de segundo orden, inhomogenea y la hemos resuelto en nuestros cursos básicos de ecuaciones diferenciales. Aquí la integraremos construyendo la función de Green correspondiente y obtendremos los mismos resultados que con los métodos convencionales.

Resolvemos primero, la ecuación homogénea, vale decir el problema de autovalores

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \lambda\, x(t) \quad \Rightarrow x(t) = A\cos\left(t\sqrt{\omega^2-\lambda}\right) + B\,\operatorname{sen}\left(t\sqrt{\omega^2-\lambda}\right).$$

Las condiciones de frontera imponen

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow A = 0 \quad \text{y} \quad x(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\omega^2-\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \sqrt{\omega^2-\lambda} = n \quad \text{con } n = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

Las autofunciones tendrán la forma de $x_n(t) = A_n\operatorname{sen}(nt)$ y al normalizarlas tendremos

$$x_n(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\operatorname{sen}(nt)\,.$$

De este modo la función de Green y la solución quedan como:

$$G(\tau,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\tau)\operatorname{sen}(nt)}{\omega^2-n^2} \quad \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\tau\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\tau)\operatorname{sen}(nt)}{\omega^2-n^2}\right)\cos(\bar{\omega}\,\tau)\,, \tag{11.60}$$

con lo cual

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nt)}{\omega^2-n^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\tau\,\operatorname{sen}(n\tau)\,\cos(\bar{\omega}\,\tau) \quad \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\bar{\omega}\,(1\pm\cos(\bar{\omega}\pi))}{\bar{\omega}^2-\omega^2+\lambda}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(nt)}{\omega^2-n^2}\,,$$

la cual constituye la solución más general para la ecuación del oscilador armónico forzado.

4. Encuentre la función de Green para el mismo oscilador del problema anterior considerando dos casos particulares para la función $f(x)$. La ecuación diferencial será

$$y'' + \frac{1}{4}y = f(x) \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen}(2x) \\ f(x) = \frac{x}{2} \end{array}\right. \qquad \text{para las condiciones de frontera } y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Una vez mas la idea será abordar este problema expresando la parte inhomogenea de la ecuación $f(x)$ con combinación lineal de las autofunciones del problema de autovalores imponiendo las condiciones de frontera. Entonces

$$y''(x) + \frac{1}{4}y(x) = \lambda y(x) \quad \Rightarrow y(x) = A\operatorname{sen}\left[\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\right)x\right] + B\cos\left[\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\right)x\right].$$

Borrador Preliminar

Como las condiciones de borde imponen $y(0) = y(\pi) = 0$, es inmediato convencerse que $B = 0$ y $\operatorname{sen}\left[\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\right)\pi\right] = 0$. Por lo tanto $\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda} = n$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y las autofunciones que satisfacen las condiciones de frontera serán $y_n(x) = A_n \operatorname{sen} nx$, para n entero positivo.

Los coeficientes A_n se obtienen como lo hemos hecho para las series de Fourier

$$\int_0^\pi A_n^2 \operatorname{sen}^2(nx)\mathrm{d}x = 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}.$$

De la ecuación (11.54) se obtiene

$$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\ G(\xi,x)w(\xi)f(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad G(\xi,x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x) \quad \Rightarrow G(x,z) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nz}{\frac{1}{4}-n^2}.$$

Para el caso $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, la solución será

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nz}{\frac{1}{4}-n^2}\right)\operatorname{sen} 2z\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{\frac{1}{4}-n^2}\int_0^\pi \operatorname{sen} nz \operatorname{sen} 2z\,\mathrm{d}z \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 2z\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente,

$$y(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\frac{15}{4}}\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{15}\operatorname{sen} 2x$$

Para el caso $f(x) = \frac{x}{2}$, la solución será

$$y(x) = \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nz}{\frac{1}{4}-n^2}\right)\frac{z}{2}\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{\frac{1}{4}-n^2}\int_0^\pi z \operatorname{sen} nz\,\mathrm{d}z.$$

Para evaluar la última integral integramos por partes

$$\int_0^\pi z\operatorname{sen} nz\,\mathrm{d}z = \left[-\frac{z\cos nz}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nz}{n}\,\mathrm{d}z = \frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \left[\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}\right]_0^\pi = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

Con lo cual, la solución mas general para el caso

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n\left(\frac{1}{4}-n^2\right)},$$

11.8. Ejercicios

1. Muestre que las siguientes ecuaciones

   a) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ Hermite ;

   b) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right)y = 0$, Bessel;

   c) $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$, Laguerre;

   d) $\left(1-x^2\right)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$, Chebyshev

Borrador Preliminar

pueden ser escritas en la forma autoadjunta $[p(x)y']' + q(x)y = 0$.

2. Consideremos el siguiente problema de valores de frontera:

$$y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

   a) Haga el siguiente cambio de variable $y = s(x)u(x)$ y determine la función $s(x)$ imponiendo que para la ecuación diferencial que resulta para $u(x)$ no aparece el término para $u'(x)$

   b) Resuelva el problema de valores de frontera para $u(x)$, encontrando los autovalores y autofunciones correspondientes

   c) Resuelva el problema original sin realizar el cambio de variable

3. Muestre que el siguiente operador diferencial, definido $0 \leq x \leq 1$, sujeto a las condiciones de borde $y(0) = 0, y'(1) = 0$, tiene la siguiente función de Green asociada

$$\mathbb{L}|y\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \Rightarrow G(x,t) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < t \\ t, & t < x \leq 1 \end{cases}$$

4. Encuentre las funciones de Green para los siguientes operadores diferenciales

   a) $\mathbb{L}y(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x)$ con $y(0) = 0$ y $y'(1) = 0$

   b) $\mathbb{L}y(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} - y(x), \quad y(x)$ finita en $-\infty < x < \infty$

5. Encuentre la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - k^2u(x) = f(x),$$

   definida en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Encuentre la expresión para la solución general mediante funciones de Green y para una función arbitraria $f(x)$. Resuelva para dos conjuntos distintos de condiciones de frontera. Primero, considere el caso $u(0) = u(1) = 0$ y luego $u(0) = u(1) + 3u'(1) = 0$

Borrador Preliminar

Capítulo 12

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Borrador Preliminar

Una ecuación diferencial parcial involucra una o más derivadas parciales de una función de desconocida. En Física hay muchos problemas que podemos representar mediante ecuaciones diferenciales parciales, por eso gran parte de los cursos de Física Matemática tienen que ver con métodos de solución a este tipo de ecuaciones. Existen numerosas tipos distintos de soluciones a estas ecuaciones. Sin embargo, una solución única de una ecuación diferencial parcial correspondiente a un problema físico dado puede obtenerse normalmente mediante el uso de condiciones de contorno y/o iniciales. En la práctica, las condiciones de contorno suelen servir para elegir una forma particular de la solución. El campo de las ecuaciones diferenciales parciales es muy amplio debido a que hay muchos problemas que no están relacionados físicamente, pero que pueden describirse mediante la misma ecuación diferencial parcial o una muy similar.. Vamos a centrar nuestra atención en las ecuaciones que surgen con más frecuencia en la física, a saber

- La ecuación de onda
$$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}$$
- La ecuación de difusión
$$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,,$$
- La ecuación de Laplace
$$\nabla^2 u(\mathbf{r},t) = 0\,,$$

Claramente, al haber planteado el operados de Laplace en términos vectoriales, cada una de esas ecuaciones se podrá expresar en varios sistemas de coordenadas.

En este capítulo nos concentraremos en discutir las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, pero, igualmente, podremos tener ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

12.1. La clasificación y ecuaciones conocidas

La ecuación diferencial parcial, lineal, de segundo orden más general tiene la forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=R(x,y) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} R(x,y)=B=D=E=F=0 \begin{cases} \textbf{Ecuación de Onda} \\ \textbf{Ecuación de Laplace} \end{cases} \\ R(x,y)=B=C=F=(D\vee E)=0 \ \textbf{Ecuación de Difusión} \\ R(x,y)=B=(D\vee E)=0 \ \textbf{Ecuación del Telegrafista} \end{cases}$$

donde los donde los coeficientes, A, B, C, D y E son constantes. Hemos además indicado los casos particulares con los cuales retomamos las ecuaciones diferenciales parciales más conocidas.

Primeramente, consideraremos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, esto es $D = E = F = 0$, entonces nos quedan ecuaciones del tipo

$$A\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=R(x,y)\,,$$

donde el término $R(x,y)$, representa la parte inhomogénea de la ecuación diferencial.

Borrador Preliminar

Si suponemos que $R(x,y)=0$, es decir consideramos sólo ecuaciones diferenciales homogéneas y proponemos una forma de la función solución

$$u(x,y)=f(\underbrace{x+\lambda y}_{p}) \quad \Rightarrow A\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \underbrace{\left(A+B\lambda+C\lambda^2\right)}_{=0}\frac{\mathrm{d}^2 f(p)}{\mathrm{d}p^2}=0\,,$$

ya que

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x}=\frac{\partial f(p)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f(p)}{\partial y}=\frac{\partial f(p)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(p)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f(p)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 f(p)}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\,.$$

Con lo cual podemos expresar la solución mas general como

$$\Rightarrow \lambda_\pm=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2C} \quad \Rightarrow u(x,y)=f(x+\lambda_+ y)+g(x+\lambda_- y)\,.$$

A partir de esta sustitución y los tres casos posibles para la solución heredamos de las cónicas esta nomenclatura dependiendo de los valores de la cantidad subradical:

- **Hiperbólicas** con $B^2>4AC$, como la ecuación de onda, con $A=1$, $B=0$ y $C=-1/v^2$, con lo cual $\lambda_\pm=\pm v$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2}=0 \quad \Rightarrow u(x,y)=f(x+v\,t)+f(x-v\,t)\,.$$
- **Parabólica** con $B^2=4AC$, donde la ecuación de difusión
$$\nabla^2 u(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial t}\,,$$
es el ejemplo mas emblemático. Claramente la solución para esta ecuación la podemos escribir como
$$u(x,y)=f\left(x+\left(\frac{B}{2C}\right)y\right)+h(x,y)\,f\left(x+\left(\frac{B}{2C}\right)y\right)\,,$$
la más simple será
$$u(x,y)=f\left(x+\left(\frac{B}{2C}\right)y\right)+x\,f\left(x+\left(\frac{B}{2C}\right)y\right)\,.$$
- finalmente, **Elíptica** cuando $B^2<4AC$, como en el caso de la ecuación de Laplace donde $A=1$, $B=0$ y $C=1$, con lo cual $\lambda_\pm=\pm i$, vale decir
$$\nabla^2 u(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 \Rightarrow u(x,y)=f(x+iy)+f(x-iy)\,.$$
La ecuación de Poisson $\nabla^2 u(x,y)=R(x,y)$, será una ecuación diferencial parcial elíptica, inhomogénea.

Ejemplos

1.
2.
3.

Borrador Preliminar

Figura 12.1: Consideremos un segmento de cuerda Δs

Ejercicios

1.

2.

3.

12.2. Coordenadas cartesianas: Un mundo cuadriculado

Muchos problemas físicos pueden formularse en términos de ecuaciones diferenciales parciales que satisfacen ciertas condiciones de contorno. Cuando las condiciones de frontera son líneas rectas o planos mutuamente perpendiculares, el sistema de coordenadas cartesianas es muy conveniente. La ecuación diferencial parcial se reduce a ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la separación de variables y podemos reconocer las soluciones de estas ecuaciones diferenciales ordinarias. Trasladamos la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un problema de autovalores y autofunciones moldeado por las condiciones de contorno.

En esta sección vamos a considerar las expresiones en una y dos dimensiones de las ecuaciones de onda, difusión y Laplace en coordenadas cartesianas. Vamos a explorar como cambian esas soluciones cuando modificamos las condiciones de frontera

12.2.1. La ecuación de Onda

La ecuación de onda,

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}\,,$$

es hiperbólica y describe las vibraciones de una cuerda (o una membrana elástica). La función $u\mathbf{r}, t)$ representa la amplitud de la oscilación y $\mathbf{r}$ la posición donde medimos la amplitud para un tiempo t dado.

En las secciones que siguen presentaremos las deducciones sucintas para los casos de una y dos dimensiones, considerando la descripción del fenómeno en coordenadas cartesianas.

La deducción para el caso 1D

Consideremos un segmento Δs de la cuerda entre x y $x + \Delta x$, sometido a dos tensiones T_1 y T_2, tal y como se muestra en la figura 12.1. Las tensiones T_1 y T_2 son tangentes a la curva en los puntos P y Q

Borrador Preliminar

respectivamente. Como no hay movimiento horizontal de la cuerda, la componente x de la fuerza horizontal total ejercida sobre el segmento se anula, y la componente vertical genera el movimiento a través de una fuerza neta ΔF. De forma y manera que, si suponemos que la cuerda tiene una densidad lineal de masa ρ, su masa será $\rho\,\Delta s$

$$T_2\cos\theta_2 = T_1\cos\theta_1 \quad \text{y, para la componente vertical } \Delta F = T_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2 - T_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = \rho\Delta s\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,.$$

Es decir hemos escrito la segunda Ley de Newton como $\Delta F = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$.

Si suponemmos que la amplitud de la cuerda es muy pequeña:

- Tensiones $T_1 \approx T_2 \approx T$, o mejor $T_1\cos\theta_2 \approx T$ y $T_2\cos\theta_1 \approx T$,
- y $\Delta s \approx \Delta x$, con lo cual $\Delta m = \rho\Delta s \approx \rho\Delta x$

Con lo cual podremos escribir

$$\frac{\Delta F}{T} = \frac{T_2\,\mathrm{sen}\,\theta_2}{T_2\cos\theta_2} - \frac{T_1\,\mathrm{sen}\,\theta_1}{T_1\cos\theta_1} = \frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\theta_2 - \tan\theta_1 = \frac{\rho}{T}\Delta x\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,.$$

Ahora bien de nuestros cursos de cálculo sabemos que la derivada es la pendiente de la recta tangente a un punto por lo cual

$$\tan\theta_1 \approx \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_x \quad \text{y} \quad \tan\theta_2 \approx \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_x}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Con lo cual, finalmente en el límite $\Delta x \to 0$, obtenemos la ecuación de onda para una cuerda vibrante,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,,$$

donde hemos identificado, velocidad de propagación de la onda $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Método de separación de variables 1D

El movimiento de la cuerda se describe mediante la ecuación de onda y uno termina resolviendo dos ecuaciones diferenciales, una que debe satisfacer condiciones de contorno y otra condiciones iniciales.

Uno de los método mas poderosos, y ciertamente clásico, para resolver ecuaciones diferenciales parciales sujetas a valore de frontera es el método de separación de variables. Este esquem reduce una ecuación diferencial parcial a ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque no todos los problemas pueden ser resueltos por este método y hay otros métodos, generalmente la separación de variables es el primer método que uno debe probar.

Supongamos una cuerda vibrante con los extremos fijos. La ecuación de onda en 1D se escribe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad u_{xx} = \frac{1}{v^2}u_{tt}\,. \quad \text{Entonces proponemos } u(x,t) = X(x)\tau(t)\,,$$

y al sustituir esta propuesta en la ecuación de onda obtenemos

$$\tau(t)X''(x) = \frac{1}{v^2}X(x)\ddot{T}(t) \quad \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{\tau(t)}\,,$$

Borrador Preliminar

donde estamos denotamos $\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} = X''$ y $\frac{\mathrm{d}^2 \tau(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{T}$.

Como es evidente, pudimos aislar las dependencias en x y t a ambos lados del signo de igualdad. Esa separación de variables nos lleva convencernos que si cada lado de la igualdad varía independientemente, la única posibilidad es que los lados, por separado sean igual una misma constante:

$$\frac{X''}{X} = \kappa = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} \quad \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = \kappa X(x) \\ \\ \ddot{T}(t) = v^2 \kappa \tau(t) \end{cases}$$

Es decir, transformamos la solución de una ecuación diferencial parcial en la solución de dos ecuaciones diferenciales ordinarias ambas representadas como un problemas de autovalores, sujetas a condiciones iniciales o de frontera.

La constante, κ que vincula ambas ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser positiva, nula o negativa. Esa condición dependerá de que las soluciones, $X(x)$ y $\tau(t)$ satisfagan las condiciones de frontera o iniciales del problema.

Para este caso, como estamos suponiendo los extremos fijos, las condiciones de frontera para esta ecuación la podremos escribir $u(0,t) = X(0)\tau(t) = u(L,t) = X(L)\tau(t) = 0$, es decir, $X(0) = X(L) = 0$. Entonces

- Si $\kappa > 0 \quad \Rightarrow \kappa = \mu^2$, y tendremos una solución de la forma $X(x) = (A_1 \exp(\mu\, x) + A_2 \exp(-\mu\, x))$ y las condiciones de frontera imponen la solución trivial $A_1 = A_2 = 0$

$$X(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad \text{y} \quad X(L) = A_1 \exp(\mu\, L) + A_2 \exp(-\mu\, L) = 0 \quad \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$$

- Si $\kappa = 0$, tendremos como solución $X(x) = A_1 x + A_2$, otra vez las condiciones de frontera $X(0) = X(L) = 0$, nos conducen irremediablemente a la solución trivial $A_1 = A_2 = 0$.

- Finalmente, si $\kappa < 0 \quad \Rightarrow \kappa = -\mu^2$, las solución general será $X(x) = A_1 \cos(\mu\, x) + A_2 \operatorname{sen}(\mu\, x)$ y, afortunadamente, en este caso las condiciones de frontera $X(0) = X(L) = 0$ nos conducen a

$$X(0) = A_1 = 0 \quad \text{y} \quad X(L) = A_2 \operatorname{sen}(\mu\, x) = 0 \quad \Rightarrow \mu = n\pi \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots$$

  con lo cual, necesariamente $\kappa < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ y obtendremos como solución

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) .$$

Ahora la ecuación para $\tau(t)$ nos queda como

$$\ddot{T}(t) = -\left(\frac{n\pi\, v}{L}\right)^2 \tau(t) \quad \Rightarrow T_n(t) = \left(\tilde{D}_1 \cos(\omega_n t) + \tilde{D}_2 \operatorname{sen}(\omega_n t)\right)$$

con $\omega_n = \left(\frac{n\pi\, v}{L}\right)$. Nuestra solución general $u(x,t)$ se va perfilando como

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\tilde{D}_1 \cos(\omega_n\, t) + \tilde{D}_2 \operatorname{sen}(\omega_n\, t)\right) \quad \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tilde{D}_{1n} \cos(\omega_n t) + \tilde{D}_{2n} \operatorname{sen}(\omega_n t)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) ,$$

donde los coeficientes constantes $\tilde{D}_1$ y $\tilde{D}_2$ se determinarán de las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$. Es importante notar que hemos utilizado el hecho que la ecuación de onda es una ecuación

Borrador Preliminar

diferencial lineal y que la solución general es la combinación general de cada solución correspondiente a cada autovalor

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) \quad \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{D}_{1n}\cos(\omega_n t) + \tilde{D}_{2n}\text{sen}(\omega_n t)\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) .$$

Para determinar los coeficientes constantes $\tilde{D}_1$ y $\tilde{D}_2$ identificamos las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = g(x)$. Por simplicidad y para enfocarnos el proceso de despeje de los coeficientes de Fourier, supongamos que la cuerda tiene una una forma inicial $u(x,0) = f(x)$, pero que parte del reposo, i.e. $u_t(x,0) = 0$. De esta última condición encontramos que $\tilde{D}_2 = 0$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{D}_{1n}\cos(\omega_n t) + \tilde{D}_{2n}\text{sen}(\omega_n t)\right)\Big|_{t=0} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_{2n}\omega_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \tilde{D}_{2n} = 0\,,$$

y nuestra solución se decanta en

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_{1n}\cos(\omega_n t)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) .$$

La otra condición inicial nos permite despejar los coeficientes $\tilde{D}_{1n}$ aprovechando la ortogonalidad de las funciones base $\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Si para $t = 0$, la cuerda tiene una forma descrita por una función $f(x)$ entonces podemos despejar la expresión particular para los coeficientes $\tilde{D}_{1n}$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_{1n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \Rightarrow \tilde{D}_{1n} = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) .$$

Finalmente la expresión para la solución de la ecuación de onda que cumpla con las condiciones de frontera e iniciales se transforma en

$$u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}\varkappa\, f(\varkappa)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\varkappa\right)\right]\cos(\omega_n t)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{12.1}$$

otra vez, con $\omega_n = \left(\frac{n\pi\, v}{L}\right)$

Ejemplos

1. **Ondas Estacionarias:** Una onda estacionaria es aquella perturbación oscilatoria en la cual ciertos puntos –denominados nodos– permanecen inmóviles. Una onda estacionaria se forma por la interferencia de dos ondas de la misma naturaleza con igual amplitud, longitud de onda y frecuencia que avanzan en sentido opuesto a través de un medio.

   Consideremos el siguiente de una cuerda de guitarra de longitud L, que tiene ambos extremos fijos, se estira con una forma $u(x,0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)$. ¿Cuál será el movimiento posterior de la cuerda si se suelta del reposo?

R Seguimos el procedimiento anterior

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = X(x)\tau(t) \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\mu^2 = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} \quad \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = -\mu^2 X(x) \\ \ddot{T}(t) = -v^2\mu^2\tau(t) \end{cases}$$

Borrador Preliminar

Figura 12.2: Onda estacionaria $u_2(x,t) = \mathcal{A}_2(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi\,v}{L}t\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ y distintas ondas estacionarias $u_n(x,t)$, para $n = 1, 2, 3$ y 4. En cada uno de los casos son evidentes los nodos de las ondas estacionarias.

Al imponer la condición de extremos fijos y que parte del reposo tendremos

$$\left.\begin{array}{l} X(0) = X(L) = 0 \\ \\ \dot{T}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) .$$

La forma inicial de la cuerda se ve reflejada cuando calculamos los coeficientes a_n a partir de las propiedades de ortogonalidad de la base de funciones trigonométricas. De esta forma, como caso particular en la ecuación (12.1) obtenemos

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}\varkappa\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L}\varkappa\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\varkappa\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \cos\left(\frac{\pi\,v}{L}t\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) ,$$

es decir, sobrevive un único coeficiente a_1 y todos los demás se anulan. Podemos reinterpretar la solución de la forma

$$u(x,t) = \mathcal{A}(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi\,v}{L}t\right)}_{\mathcal{A}(t)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) ,$$

donde la oscilación a lo largo de la cuerda viene modulada por una amplitud variable con el tiempo. Si la forma inicial de la cuerda hubiera sido $u(x,0) = \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ la solución de que obtendremos será

$$u_2(x,t) = \mathcal{A}_2(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi\,v}{L}t\right)}_{\mathcal{A}_2(t)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right) ,$$

Borrador Preliminar

ahora sobrevive el coeficiente $a_2 \neq 0$ y los demás se hacen cero. En este caso también es claro que la cuerda mantiene una amplitud nula $u_2(0,t) = u_2(L/2,t) = u_2(L,t) = 0$ para los puntos $x = 0$, $x = L/2$ y $x = 0$. Esos puntos que no oscilan se denominan nodos, tal y como mostramos en la figura 12.2.

Para una forma inicial cualquiera $f(x)$ presente en la ecuación (12.1) tendremos una variedad de coeficientes no nulos $a_n \neq 0$ que generan el espectro de potencias que caracteriza $f(x)$.

Siguiendo ese procedimiento, podemos construir un conjunto de ondas estacionarios con $n-1$ nodos de la forma

$$u_n(x,t) = \mathcal{A}_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi\,v}{L}t\right)}_{\mathcal{A}_n(t)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,,$$

que representa el enésimo *modo normal* de estas oscilaciones que representamos en la figura 12.2. En este punto es importante recordar que, en general todos los modos normales son solución de la ecuación de onda y, por lo tanto

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(x,t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi\,v}{L}t\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,. \tag{12.2}$$

La dependencia temporal, $\mathcal{A}_n(t)$ de cada modo normal de oscilación también es una función periódica

$$\mathcal{A}_n(t) = \cos\left(\frac{n\pi\,v}{L}t\right) = \cos\left(\frac{n\pi\,v}{L}(t+P_n)\right) \quad \Rightarrow \frac{n\pi\,v}{L}P_n = 2\pi \quad \Rightarrow P_n = \frac{2L}{n\pi\,v} \quad \Rightarrow \nu_n = \frac{1}{P_n} = n\,\underbrace{\frac{\pi\,v}{2L}}_{\nu_1}\,.$$

Donde reconocemos ν_1 como la frecuencia fundamental en el desarrollo en series de Fourier que presentamos en la ecuación (12.1) y el resto de los armónicos serán $\nu_n = n\,\nu_1$. La frecuencia fundamental ν_1 queda determinada por los parámetros básicos del sistema físico: L, ρ, y T. La forma inicial de la cuerda, i.e. $u(x,0) = f(x)$, la distribución inicial de velocidades $u_t(x,0) = g(x)$ (o ambos), no van a afectar el valor del armónico fundamental. Estas condiciones iniciales repercuten en el resto de los armónicos afectando al *timbre* del instrumento, es decir, a la mezcla global de frecuencias más que a la frecuencia fundamental. Finalmente, las angulares serán las de siempre: $\omega_n = 2\pi\nu_n$

Por otro lado, la ubicación de los nodos que ilustramos en la figura 12.2 la podemos entender cuando analizamos la oscilación en término de la longitud de onda. Esto es, para $t = \tau$ la solución será periódica en una longitud de onda

$$u_n(x+\lambda_n,\tau) = u_n(x,\tau) \quad \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi\,v}{L}\tau\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}(x+\lambda_n)\right) = \cos\left(\frac{n\pi\,v}{L}\tau\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \Rightarrow \frac{n\pi}{L}\lambda_n = 2\pi\,,$$

con lo cual tendremos que las longitudes de ondas serán $L = n\lambda_n/2$, es decir, para $n = 1$, $L = \lambda/2$, los nodos están en los extremos; para $n = 2$, $\lambda = L$ y tendremos un nodo; para $n = 3$, $\lambda = 2L/3$, con dos nodos. Como ilustramos en la figura 12.2 para cada n, tendremos $n-1$ nodos y la distancia entre ellos será media longitud de onda.

2. **Ondas Viajeras:** Las soluciones tipo onda viajera serán de la forma $u(x,t) = f(x+ct) + f(x-ct)$. Este tipo de soluciones surgió de manera natural en la sección 12.1 y ahora las exploraremos en detalle.

   Como lo mostramos en la figura 12.3, este tipo de funciones $u(x,t) = f(x \pm ct)$ describe perturbación que se desplaza hacia la derecha, con velocidad $v = c$ y hacia la izquierda con $v = -c$. Podemos ahora re escribir

$$u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi\,v}{L}t\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(k_n x + \omega_n t) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(k_n x - \omega_n t) \equiv \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(k_n(x+vt)) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(k_n(x-vt))\,.$$

Borrador Preliminar

Figura 12.3: Onda viajera. La curva sólida muestra cómo es la función $f(x-ct)$ para $t=0$, la curva punteada muestra cómo será la función en un momento posterior. Claramente, la perturbación se ha desplazado una distancia $x = ct$

Donde hemos utilizado trigonometría elemental[1] y un par de definiciones convenientes

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \quad \text{y} \quad \frac{\omega_n}{k_n} = \nu_n \lambda_n = v\,.$$

Es importante mencionar que esta asociación nos permite conectar dos criterios para resolver ecuaciones diferenciales parciales. El primero, imponer separabilidad de la solución, i.e. $u(x,t) = X(x)\tau(t)$ y el segundo exigir una funcionalidad particular $u(x,t) = f(x \pm vt)$. Es evidente que ambas propuestas o exigencias serán equivalentes.

Ahora bien, de las ecuaciones (12.1) o su equivalente (12.2) podemos escribir la solución general como la suma de dos ondas viajeras

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+vt) + \frac{1}{2}f(x-vt) \equiv \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\operatorname{sen} k_n(x+vt) + \operatorname{sen} k_n(x-vt)\right]\,,$$

donde la forma inicial de la onda es $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} k_n x$.

3. **Ecuación de onda inhomogénea: una cuerda vibrante pesada.** Consideremos el caso más simple para una ecuación de onda inhomogénea

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{g}{v^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{con condiciones de frontera} \quad \begin{cases} u(0,t) = u(L) = 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) \text{ y } u_t(x,0) = 0\,. \end{cases} \tag{12.3}$$

Como en los casos anteriores representa una cuerda vibrante, de longitud L, sujeta en ambos extremos, a la cual se le perturba inicialmente, con una forma $u(x,0) = f(x)$ y parte del reposo. La diferencia con los casos anteriores es que ahora la cuerda pesa y por eso aparece el término $-\frac{g}{v^2}$.

Este tipo de ecuaciones de onda se conocen como inhomogéneas y, en general tendrán la forma familiar de la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \nabla^2 u(x,y) = \rho(x,y)\,,$$

[1] La relación trigonométrica elemental: $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$

Borrador Preliminar

y por eso el término inhomogéno, $\rho(x,y)$, se le conoce como la fuente.

Proponer directamente una separación de variables $u(x,t) = X(x)\tau(t)$ para el caso de la ecuación de onda inhomogénea (12.3) no funcionará. Requerimos proceder como lo hicimos con las ecuaciones diferenciales ordinarias inhomogéneas. Necesitamos proponer un solución de la homogénea y añadirle una solución particular que resuelva la parte inhomogénea, que en este caso es muy simple. Esto es proponemos una solución de la forma

$$u(x,t) = \mathcal{U}(x,t) + \phi(x) \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{g}{v^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}(x,t)}{\partial t^2}\,,$$

con las condiciones de frontera $\begin{cases} u(0,t) = \mathcal{U}(0,t) + \phi(0) = \mathcal{U}(L,t) + \phi(L) = 0; \\ u(x,0) = \mathcal{U}(x,0) + \phi(x) = f(x), \quad \text{y} \quad u_t(x,0) = \mathcal{U}_t(x,0) = 0\,. \end{cases}$

Ajustamos la función adicional para que nos satisfaga la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{g}{v^2} = 0 \quad \text{con } \phi(0) = 0, \text{ y } \phi(L) = 0, \quad \text{que tiene por solución } \phi(x) = \frac{g}{2v^2}\left(x^2 - Lx\right)\,.$$

Nuestro problema se reduce a resolver

$$\frac{\mathcal{U}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{con} \begin{cases} \mathcal{U}(0,t) = 0, \quad \mathcal{U}(L,t) = 0 \\ \mathcal{U}(x,0) = f(x) - \phi(x), \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_t(x,0) = 0\,, \end{cases}$$

donde únicamente ha cambiado la forma inicial de la cuerda: $\mathcal{U}(x,0) = f(x) - \phi(x)$. Entonces la solución se puede expresar como lo hicimos anteriormente

$$\mathcal{U}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{donde} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x') - \frac{g}{2v^2}(x'^2 - Lx')\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)\mathrm{d}x'\,.$$

Finalmente la solución general será

$$u(x,t) = \frac{g}{2v^2}(x^2 - Lx) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L \left[f(\tilde{x}) - \frac{g}{2v^2}(\tilde{x}^2 - L\tilde{x})\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\tilde{x}\right)\,\mathrm{d}\tilde{x}\right\} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

4. **La ecuación de onda inhomogénea: una cuerda vibrante exitada.** Supongamos ahora que la cuerda fija a ambos extremos ambos extremos está exitada por una fuerza externa periódica $F(t) = F_1\cos(\omega t)$. Imagine el caso del viento que mueve un puente o un cuerda fija en ambos extremos. En este caso, la cuerda satisface la ecuación diferencial parcial inhomogénea

$$v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F_0\cos(\omega_0 t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{con condiciones de frontera} \begin{cases} u(0,t) = u(L) = 0 \\ \\ u(x,0) = 0 \text{ y } u_t(x,0) = 0\,. \end{cases}$$

Nótese que, $F_0 = F_1/\rho$ y que para este caso estamos suponiendo que la cuerda inicialmente está horizontal, en reposo. Esto lo hacemos por simplicidad pero el método que sigue es totalmente general.

Una vez mas separamos nuestra posible solución $u(x,t) = \phi(x,t) + \mathcal{U}(x,t)$. en una parte de la homogénea y otra que dará cuenta de compensar el término inhomogéneo. La ecuación de onda podrá ser escrita

Borrador Preliminar

como

$$v^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}+v^2\frac{\partial^2\mathcal{U}(x,t)}{\partial x^2}+F_0\cos(\omega_0 t)=\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\mathcal{U}(x,t)}{\partial t^2}\quad\text{con}\begin{cases}u(0,t)=\phi(0,t)+\mathcal{U}(0,t)=0\,,\\ u(L,t)=\phi(L,t)+\mathcal{U}(L,t)=0\,,\\ u(x,0)=\phi(x,0)+\mathcal{U}(x,0)=0\quad\text{y}\\ u_t(x,0)=\phi_t(x,0)+\mathcal{U}_t(x,0)=0\,.\end{cases}$$

Ahora imponemos que

$$v^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}+F_0\cos(\omega_0 t)=\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}\quad\text{con}\begin{cases}\phi(0,t)=0,\quad\phi(L,t)=0\,,\\ \phi(x,0)=X(x),\quad\text{y}\quad\phi_t(x,0)=0\,.\end{cases}$$

Para resolver esta ecuación proponemos el siguiente esquema de separación de variables

$$\phi(x,t)=X(x)\cos(\omega_0 t)\quad\Rightarrow v^2X''(x)\cos(\omega_0 t)+F_0\cos(\omega_0 t)=-\omega_0^2X(x)\cos(\omega_0 t)\,,$$

por lo tanto

$$\Rightarrow X''(x)=-\frac{\omega_0^2}{v^2}X(t)-\frac{F_0}{v^2}\quad\Rightarrow X(x)=A\cos\left(\frac{\omega_0 x}{v}\right)+B\,\text{sen}\left(\frac{\omega_0 x}{v}\right)-\frac{F_0}{\omega_0^2}\,.$$

Las condiciones de frontera me permitirán despejar los coeficientes A y B:

$$X(0)=X(L)=0\quad\Rightarrow X(0)=A-\frac{F_0}{\omega_0^2}=0,\quad\text{entonces}\quad A=\frac{F_0}{\omega_0^2}\,.$$

y

$$X(L)=\frac{F_0}{\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0 L}{v}\right)+B\,\text{sen}\left(\frac{\omega_0 L}{v}\right)-\frac{F_0}{\omega_0^2}=0\quad\Rightarrow B=\frac{F_0}{\omega_0^2}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{\omega_0 L}{v}\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega L}{v}\right)}\,.$$

Para el caso $\omega_0=n\pi v/L$ para n par tendremos $B=0$.
Finalmente, la solución particular de la inhomogénea la podremos escribir como

$$\phi(x,t)=\left[\frac{F_0}{\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0 x}{v}\right)+\frac{F_0}{\omega_0^2}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{\omega_0 L}{v}\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega_0 L}{v}\right)}\,\text{sen}\left(\frac{\omega_0 x}{v}\right)-\frac{F_0}{\omega_0^2},\right]\cos(\omega_0 t)\,.$$

Así las cosas, tendremos la otra ecuación diferencial para la solución de la homogénea

$$v^2\frac{\partial^2\mathcal{U}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\mathcal{U}(x,t)}{\partial t^2}\quad\text{con}\begin{cases}\mathcal{U}(0,t)=0,\quad\mathcal{U}(L,t)=0\\ \mathcal{U}(x,0)=-X(x),\quad\text{y}\quad\mathcal{U}_t(x,0)=0\,.\end{cases}$$

Esta ecuación es la que solucionamos en el ejemplo anterior, por lo tanto

$$\mathcal{U}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\quad\text{donde}\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L X(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\tilde{x}\right)\mathrm{d}x'\,.$$

Borrador Preliminar

Finalmente la solución general será

$$u(x,t) = X(x)\cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L X(\tilde{x})\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\tilde{x}\right)\ \mathrm{d}\tilde{x}\right\}\cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ ,$$

donde, como habíamos dicho anteriormente

$$X(x) = \left[\frac{F_0}{\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0 x}{v}\right) + \frac{F_0}{\omega_0^2}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{\omega_0 L}{v}\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega_0 L}{v}\right)}\text{sen}\left(\frac{\omega_0 x}{v}\right) - \frac{F_0}{\omega_0^2},\right]\ .$$

Ejercicios

1. Resuelva la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

para las siguientes condiciones

a) $u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad$ y $\quad u(x,0)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{L}{2}, \\ L-x & \frac{L}{2}\le x\le L. \end{cases}\ ,\quad u_t(x,0)=0$

b) $u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad$ y $\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{L}{2}, \\ L-x & \frac{L}{2}\le x\le L. \end{cases}$

2.

3.

4.

12.2.2. La ecuación de difusión

Deducción Ecuación de difusión

Para deducir la ecuación del calor partimos de nuestra intuición física

- El calor fluye en dirección en la cual la temperatura disminuye
- La velocidad del flujo de calor es proporcional al área y al gradiente de temperatura perpendicular al área. La constante de proporcionalidad es la conductividad térmica κ.
- La cantidad de calor que gana o pierde un cuerpo al cambiar su temperatura es proporcional a su masa y al cambio de temperatura. La constante de proporcionalidad se denomina calor específico C_e.

Con estas suposición en mente, consideremos una función temperatura $T(x,y,z,t)$. Además imaginemos un diferencial de volumen en coordenadas cartesianas como se ilustra en la figura 12.4. La cantidad de calor ΔQ necesaria para producir un cambio de temperatura ΔT en un volumen V de un material con densidad ρ será

$$\Delta Q = C_e\Delta m\Delta T = C_e\rho\Delta x\Delta y\Delta z\Delta T\ . \tag{12.4}$$

Por otro lado, la velocidad entrante a la que el calor fluye a través de una de las caras del cubo ABCD es

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = -k\left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_y\Delta x\Delta z\ .$$

Borrador Preliminar

Figura 12.4: Consideremos un diferencial de volumen en coordenadas cartesianas y denotamos como ΔQ_1 flujo de calor a través de la tapa ABCD en el intervalo de tiempo Δt. Equivalentemente, ΔQ_2 corresponde al flujo de calor por la cara $EFGH$,

Obsérvese que $\frac{\partial T}{\partial y}$ positivo significa que la temperatura está aumentando en la dirección y positiva y que el calor está fluyendo en la dirección de y negativa, por lo que el calor está actuando desde fuera de la caja hacia adentro, de ahí el signo negativo en la ecuación. El subíndice y en la expresión $\left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_y$ significa que el gradiente está evaluado en la superficie perpendicular al eje y, a una distancia de y unidades del origen. Por lo tanto, el calor que fluye en la caja a través de la tapa ABCD en el intervalo de tiempo Δt es

$$\Delta Q_1 = -\kappa \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_y \Delta x \Delta z \Delta t\,, \quad \Leftrightarrow \quad \Delta Q_2 = \kappa \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_y \Delta x \Delta z \Delta t\,,$$

donde ΔQ_2 corresponde al flujo de calor por la cara $EFGH$, tal y como se muestra en la figura 12.4

De forma y manera que

$$\Delta Q_2 + \Delta Q_1 = \kappa \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t - \kappa \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_y \Delta x \Delta z \Delta t = \kappa \left\{ \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{y+\Delta y} - \left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]_y \right\} \Delta x \Delta z \Delta t = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Delta y \Delta x \Delta z \Delta t\,.$$

Se puede demostrar de la misma manera que el calor que fluye en la a través de las superficies superior $BFGC$ e inferior $AEHD$ en el intervalo de tiempo Δt viene dado por

$$\Delta Q_3 + \Delta Q_4 = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Delta z \Delta x \Delta y \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \Delta Q_5 + \Delta Q_6 = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t\,,$$

Donde hemos completado las otras dos caras que faltaban.

Finalmente, el flujo de calor total entrante en el cubo diferencial es

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 + \Delta Q_5 + \Delta Q_6 = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t\,.$$

Borrador Preliminar

Figura 12.5: Consideremos una placa cuadrada que reposa en el plano $x-y$, delimitada por $x=0$, $x=a$, $y=0$ y $y=b$.

Por lo tanto la cantidad de calor que fluye dentro del cubo diferencial será igual al que calculamos en la ecuación (12.4) y obtenemos

$$\Delta Q = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t = c\rho\Delta x\Delta y\Delta z\Delta T \quad \Rightarrow \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

Con lo cual, finalmente,

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \equiv \nabla^2 T = \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{con } \kappa^2 = \frac{k}{c\rho}\,.$$

Esta es la ecuación de difusión, difiere de la ecuación de onda en que la derivada temporal de primer orden y modela no sólo la propagación del calor, sino también la difusión de la materia.

Separación de variables y condiciones de frontera

Analizaremos directamente el caso bidimensional, vale decir calentaremos una placa cuadrada que reposa en el plano $x-y$, delimitada por $x=0$, $x=a$, $y=0$ y $y=b$, tal y como se ilustra en la figura 12.5. Las condiciones de borde serán las siguientes: mantendremos los bordes a una temperatura constante e igual a cero por simplicidad y calentaremos la placa de tal forma que tendremos una distribución de temperatura inicial $T(x,y,0)=f(x,y)$. Entonces nuestro problema lo podremos formular como

$$\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} \quad \Leftarrow \begin{cases} T(0,y,t)=0, \quad T(a,y,t)=0 \\ T(x,0,t)=0, \quad T(x,b,t)=0 \\ T(x,y,0)=f(x,y). \end{cases}$$

Volvemos a suponer una separación de variables del tipo $T(x,y,t)=X(x)Y(y)\tau(t)$, y obtenemos

$$X''(x)Y(y)\tau(t)+X(x)Y''(y)\tau(t) = \frac{1}{\kappa^2}X(x)Y(y)\dot{\tau}(t) \quad \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{\kappa^2}\frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)}\,.$$

Borrador Preliminar

Note que estamos representando las derivadas respecto a las variables espaciales con primas $'$ y un punto para las derivadas temporales. Adicionalmente, hemos dividido la ecuación de la izquierda entre $X(x)Y(y)\tau(t)$ para obtener la ecuación de la derecha.

Seguidamente hacemos dos separaciones de variables consecutivas, y obtenemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \frac{1}{\kappa^2}\frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad \Rightarrow \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2 = \frac{1}{\kappa^2}\frac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} + \lambda^2 \,.$$

Tendremos que resolver tres ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x)\,, \quad Y''(y) = -\mu^2 Y(y) \quad \text{y} \quad \dot{\tau}(t) = -(\mu^2+\lambda^2)\kappa^2\tau(t) \equiv \alpha^2\tau(t)$$

- La primera ecuación con las condiciones de frontera tenemos

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \quad \text{con } X(0) = X(a) = 0 \quad \Rightarrow X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) .$$

- La segunda ecuación con las condiciones de frontera tenemos

$$Y''(y) = -\mu^2 Y(y) \quad \text{con } Y(0) = Y(b) = 0 \quad \Rightarrow Y_m(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) .$$

- Finalmente la ecuación para la evolución temporal será

$$\dot{\tau}(t) = -\left(\lambda^2+\mu^2\right)\kappa^2\tau(t) \quad \text{tendrá por solución } \tau_{n,m}(t) = \exp\left\{-\left[\left(\frac{n\pi\kappa}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi\kappa}{b}\right)^2\right]t\right\} .$$

La solución general tendrá la forma acostumbrada

$$T_{n,m}(x,y,t) = X_n(x)Y_m(y)\tau_{n,m}(t) \Rightarrow T(xy,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp\left\{-\left[\left(\frac{n\pi\kappa}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi\kappa}{b}\right)^2\right]t\right\} .$$

Ahora aplicamos las condiciones iniciales, la distribución inicial de temperaturas

$$T(x,y,0) = f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) .$$

Primero, si definimos

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \Rightarrow f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) .$$

Con lo cual, expresamos los coeficientes en término de una serie de Fourier de dos variables

$$c_{nm} = \frac{2}{a}\int_0^a g_m(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Borrador Preliminar

12.2.3. La ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace corresponde a la tercera categoría que en nuestra clasificación. Es una ecuación elíptica que solo difiere de un signo con la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \equiv \nabla^2 u(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla \phi(x,y) = -\nabla^2 \phi(x,y) = 0\,,$$

donde, como siempre, hemos supuesto que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ deriva de un potencial $\mathbf{E} = -\nabla\phi(x,y)$.

El laplaciano puede considerarse como la segunda derivada para una función de varias variables. De hecho, si

- $\nabla^2 u(x,y) = 0$, implica que el valor promedio de $u(x,y)$ en un círculo pequeño es igual al valor de $u(x_c, y_c)$ en su centro;
- $\nabla^2 u(x,y) > 0$, significa que la superficie es cóncavada hacia arriba, y el valor de $u(x_c, y_c)$ es menor que el valor promedio en cualquier otro punto del círculo;
- finalmente, si $\nabla^2 u(x,y) < 0$ quiere decir que la superficie está concavada hacia abajo, y $u(x_c, y_c)$ es mayor que el promedio de sus vecinos.

La ecuación de Laplace $\nabla^2 u(x,y) = 0$, describe el estado estacionario de $u(x,y)$ donde la tasa de cambio respecto al tiempo es cero. Por ejemplo, si $u(x,y)$ es la temperatura, $T = T(x,y)$, implica que la temperatura en un punto no cambiará y será igual a la media de los puntos circundantes.

Separación de Variables

La estrategia será la misma que para la ecuación de onda, tendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y proponemos} \;\; u(x,y) = X(x)Y(y) \quad \Rightarrow X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0\,,$$

con lo cual

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = -\lambda^2 X(x) \\ \\ Y''(y) = \lambda^2 Y(y)\,. \end{cases}$$

Vamos a considerar como condiciones de frontera

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0\,, \quad u(a,y) = X(a)Y(y) = 0\,, \quad u(x,0) = X(x)Y(0) = 0\,, \quad \text{y} \quad u(x,b) = X(x)Y(b) = f(x)\,.$$

Esto es, que uno de los lados, $y = b$, se mantiene con una distribución de temperatura $T(x,b) = f(x)$.

Como anteriormente, la solución a la primera ecuación con las condiciones de frontera es

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x) \quad \text{con } X(0) = X(a) = 0 \quad \Rightarrow X_n(x) = \operatorname{sen}(\lambda_n x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,.$$

Mientras que la novedad está en la segunda ecuación diferencial

$$Y(y) = C\cosh(\lambda y) + D\operatorname{senh}(\lambda y)\,, \quad \text{con} \quad u(x,0) = 0 \quad \Rightarrow Y_n(y) = \operatorname{senh}(\lambda_n y) = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\,.$$

Borrador Preliminar

La solución general será la combinación lineal de $X_n(x)Y_n(y)$ y entonces podemos cumplir con la cuarta condición de borde $u(x,b) = f(x)$,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \Rightarrow u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)\,.$$

Donde, claramente ahora los coeficientes de Fourier, $c_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$, vienen modulados. Entonces podemos despejar los coeficientes c_n como

$$c_n = \frac{2}{L \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, \mathrm{d}x\,,$$

para que finalmente tengamos el resultado general para esta ecuación, que no es otra cosa que la distribución de temperaturas para un caso estático

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L}\int_0^L f(\tilde{x}) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\tilde{x}\right)\, \mathrm{d}\tilde{x}\right) \left[\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right]^{-1} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,.$$

Evidentemente, la solución del problema más general en el que la temperatura en los distintos lados de la placa viene está prescrita por funciones no nulas, puede obtenerse superponiendo cuatro soluciones análogas a la obtenida aquí.

12.3. Coordenadas curvilineas: Entre lo cilíndrico y esférico

En la sección anterior exploramos las posibles soluciones de las ecuaciones de derivadas parciales cuando las expresamos en coordenadas cartesianas. En la mayoría de los problemas considerados interviene el Laplaciano y dependiendo de los problemas específicos, hay que resolver la ecuación de Laplace o la de Helmholtz. En muchos otros problemas físicos tendremos fronteras circulares, cilíndricas o esféricas. En estos casos, es mucho más sencillo utilizar coordenadas polares, cilíndricas o esféricas. Las ecuaciones diferenciales parciales expresadas en estas coordenadas son más complicadas. Las partes radiales y angulares pueden separarse, pero las ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan el fenómeno en coordenadas angulares son diferentes a sus correspondientes en coordenadas radiales. Algunas son ecuaciones diferenciales con coeficientes variables que no pueden resolverse en términos de funciones elementales. En general, las soluciones para los problemas con simetría cilíndrica son expresables en términos de series de Fourier-Bessel, y para los de simetría esférica, en series de Fourier-Legendre. Pero la condición de contorno es la que determina cómo deben reunirse estas soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias para resolver un problema particular. Dos ecuaciones diferenciales parciales idénticas con condiciones de contorno ligeramente diferentes pueden conducir a resultados completamente distintos.

12.3.1. El Laplaciano en coordenadas curvilíneas

Evidentemente, el significado del laplaciano que discutimos anteriormente no cambiará, independientemente del sistema de coordenadas que elijamos para expresarlo. Muchos problemas en dos y tres dimensiones se expresan más naturalmente en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, ya sea por las condiciones de contorno o porque queremos aprovechar la simetría del problema.

Como un inicio de esta sección, en la figura esquematizamos los parámetros de los distintos sistemas presentamos las expresiones para el Laplaciano en coordenadas polares, cilíndricas, y en esféricas:

Borrador Preliminar

Figura 12.6: Representación gráfica de las variables que representan los sistemas coordenados. **(a)** Polares, **(b)** cilíndricas y **(c)** esféricas

- polares
$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$
- cilíndricas
$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$
- esféricas
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

12.3.2. La ecuación de Laplace en coordenadas polares

Supongamos que queremos encontrar la solución de una ecuación bidimensional de Laplace con un comportamiento prescrito sobre una circunferencia de radio $\rho = \rho_0$, tal que $u(\rho_0, \varphi) = f(\varphi)$.

Naturalmente tenemos que escribir la ecuación en coordenadas polares

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho,\varphi)\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(\rho,\varphi) = 0\,.$$

Igual que en el caso de coordenadas cartesianas, proponemos una separación de variables de la forma $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, simplificamos dividiendo por $R(\rho)\Phi(\varphi)$ y obtenemos una separación de variables similar a la que obtuvimos en los casos de coordendas cartesianas

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0\,.$$

Con lo cual obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{R(\rho)}\left(\rho^2\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right) = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} \quad\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{R(\rho)}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) = \lambda\\[2ex] \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\lambda\,,\end{cases}$$

Borrador Preliminar

donde λ es la constante de separación de variables.

Por la simetría cilíndrica (ρ,φ) y $(\rho,\varphi{+}2\pi)$ son el mismo punto, $\Phi(\varphi)$ es periódica. Esto es $\Phi(\ \varphi+2\pi\ )\ =\ \Phi(\varphi)$ y, necesariamente $\lambda=n^2$, con $n=1,2,3,\cdots$, con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_n(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-n^2\Phi_n(\varphi)\quad\Rightarrow\Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\operatorname{sen}(n\varphi)\,.$$

La ecuación en la variable radial será una ecuación diferencial de Euler:

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R_n(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}R_n(\rho)}{\mathrm{d}\rho}=n^2R_n(\rho)\quad\text{con el cambio de variables }\rho=\mathrm{e}^x,\text{ de tal modo que }x=\ln\rho\text{ y }\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1}{\rho}\,,$$

tendremos

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}R_n(\rho)}{\mathrm{d}\rho}&=\tfrac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}x}\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho}=\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}x},\\ \tfrac{\mathrm{d}^2R_n(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}&=\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}x}\right)=-\tfrac{1}{\rho^2}\tfrac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}x}+\tfrac{1}{\rho^2}\tfrac{\mathrm{d}^2R_n}{\mathrm{d}x^2},\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\rho^2\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2R_n}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}x}\right)+\rho\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}x}-n^2R_n=0\,.$$

Que se reduce y tiene como solución funciones potencias de ρ,

$$\frac{\mathrm{d}^2R_n}{\mathrm{d}x^2}-n^2R_n=0\quad\Rightarrow R_n(x)=\left\{\begin{array}{l}C_n\mathrm{e}^{nx}+D_n\mathrm{e}^{-nx}\text{ para }n\neq0,\\ C_0+D_0x\text{ para }n=0.\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ R_n(\rho)=\left\{\begin{array}{l}C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\text{ para }n\neq0,\\ C_0+D_0\ln\rho\text{ para }n=0.\end{array}\right.$$

Note que las soluciones las hemos particularizado para los casos $n=0$ y $n>0$, porque corresponden a dos tipos muy distintos de ecuaciones diferenciales.

Armando la solución $u_n(\rho,\varphi)=R_n(\rho)\Phi_n(\varphi)$ para cada n y claramente $u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}e_nu_n(\rho,\varphi)$. Es decir

$$u(\rho,\varphi)=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n\rho^n+b_n\rho^{-n}\right)\cos(n\varphi)+\left(c_n\rho^n+d_n\rho^{-n}\right)\operatorname{sen}(n\varphi)\right]\,.$$

Independientemente de la condición de frontera, $u(\rho_0,\varphi)=f(\varphi)$, vamos a resolver nuestra ecuación en una región que contiene el origen $\rho\to0$. Entonces nos convencemos rápidamente que b_0, b_n y d_n tienen que anularse, porque sólo nos interesan las soluciones acotadas y $\ln\rho$ y ρ^{-n} tienden a infinito cuando $\rho\to0$. Nuestra solución que incluya el origen de coordenadas se convierte en

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n\left[A_n\cos(n\varphi)+B_n\operatorname{sen}(n\varphi)\right]\,,\ \text{donde }A_n\text{ y }B_n\text{ serán coeficientes de Fourier.}$$

Al imponer las condiciones de frontera en $\rho=\rho_0$ obtenemos

$$f(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\varphi)+B_n\operatorname{sen}(n\varphi)\right]$$

si ahora sustituimos las expresiones para los coeficientes de Fourier tendremos

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi)=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tilde\varphi)\,\mathrm{d}\tilde\varphi+\sum_{n=1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tilde\varphi)\cos(n\tilde\varphi)\,\mathrm{d}\tilde\varphi\right]\cos(n\varphi)+\\&+\sum_{n=1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tilde\varphi)\operatorname{sen}(n\tilde\varphi)\,\mathrm{d}\tilde\varphi\right]\operatorname{sen}(n\varphi)\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tilde\varphi)\left\{1+2\sum_{n=1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n\left[\cos(n\tilde\varphi)\cos(n\varphi)+\operatorname{sen}(n\tilde\varphi)\operatorname{sen}n\varphi\right]\right\}\mathrm{d}\tilde\varphi.\end{aligned}$$

Borrador Preliminar

Figura 12.7: Representación gráfica de las variables para el resultado de la *Integral de Poisson*

Acto seguido recordamos la expresión de un número complejo en su forma polar, $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y una conocida relación trigonométrica,

$$\cos(n\tilde{\varphi})\cos(n\varphi) + \mathrm{sen}\,(n\tilde{\varphi})\,\mathrm{sen}\,(n\varphi) = \cos(n(\tilde{\varphi}-\varphi)) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{in(\tilde{\varphi}-\varphi)}\right],$$

donde Re indica que tomamos la parte real de esa expresión compleja.

Siguiendo como veníamos, hacemos el desarrollo

$$\sum_{n=1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n\left[\cos(n\tilde{\varphi})\cos(n\varphi) + \mathrm{sen}\,(n\tilde{\varphi})\,\mathrm{sen}\,(n\varphi)\right] = \mathrm{Re}\sum_{n=1}\left[\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}\right]^n,$$

es decir tenemos una serie de potencias de números complejos:

$$\sum_{n=1}\left[\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}\right]^n - 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z} \qquad \text{que converge para } |z| < 1\,.$$

Nótese que la serie de números complejos genéricos, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, comienza con $n = 0$, mientras nuestra serie parte de $n = 1$. Por eso el término -1 aparece en la expresión mas hacia la izquierda.

Entonces, como $\rho/\rho_0 < 1$ podemos simplificar nuestra sumatoria como

$$\sum_{n=1}\left[\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}\right]^n = \frac{1}{1-\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}} - 1 = \frac{\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}}{1-\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}} = \frac{\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}}{1-\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}}\cdot\frac{1-\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{-i(\tilde{\varphi}-\varphi)}}{1-\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{-i(\tilde{\varphi}-\varphi)}},$$

es decir

$$\sum_{n=1}\left[\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}\right]^n = \frac{\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)} - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}{1 - 2\frac{\rho}{\rho_0}\cos(\tilde{\varphi}-\varphi) + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2} \quad\Rightarrow \mathrm{Re}\sum_{n=1}\left[\frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{e}^{i(\tilde{\varphi}-\varphi)}\right]^n = \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\cos(\tilde{\varphi}-\varphi) - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\cos(\tilde{\varphi}-\varphi) + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\,.$$

Borrador Preliminar

Finalmente obtenemos

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde{\varphi})\left\{1+2\frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}{1-2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\right\}\mathrm{d}\tilde{\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde{\varphi})\left\{\frac{\rho_0^2-\rho^2}{\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)+\rho^2}\right\}\mathrm{d}\tilde{\varphi}\,.$$

Si ahora consideramos la figura 12.7 donde representamos la distancia entre los puntos (ρ,φ) y (ρ_0,φ) como $d^2=\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)+\rho^2$ tal

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tilde{\varphi})\left\{\frac{\rho_0^2-\rho^2}{\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\tilde{\varphi}-\varphi)+\rho^2}\right\}\mathrm{d}\tilde{\varphi}=\frac{\rho_0^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\tilde{\varphi})}{d^2}\,\mathrm{d}\tilde{\varphi}\,.$$

Por lo tanto el valor de $u(\rho,\varphi)$ en todos los puntos del interior de un círculo de radio ρ_0 es la suma ponderada de los valores de la función $f(\tilde{\varphi})$ evaluada en la circunferencia del círculo. El peso de esa suma viene dado por $(\rho_0^2-\rho^2)/d^2$. Si aumentamos los valores en la frontera de $f(\tilde{\varphi})$, aunque sea parcialemente en un pequeño arco de la circunferencia, necesariamente aumentarán valores de $u(\rho,\varphi)$ en todos los puntos interiores. Esto está de acuerdo con el hecho de que el sistema físico descrito por la ecuación de Laplace está en estado estacionario. Un aumento o disminución en la frontera requiere que la región interior se reajuste para que el sistema vuelva a estar en equilibrio.

12.3.3. La ecuación de Helmholtz en coordenadas polares

Consideremos la ecuación de Laplace tridimensional en coordenadas cartesianas. Proponemos entonces una estrategia de separación de variables distinta a la que hemos venido utilizando,

$$\nabla^2 u(x,y,z)=\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}=0 \quad \Leftarrow u(x,y,z)=F(x,y)Z(z)\,,$$

obtendremos

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}+k^2F(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 F(x,y)+k^2F(x,y)=0 \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}z^2}=-k^2Z(z)\,.$$

Las ecuaciones de la derecha se conocen como las ecuaciones de Helmholtz. Un gran número de problemas matemáticos de ingeniería y física pueden modelarse resolviendo esta ecuación. Como hemos visto, si suponemos una dependencia temporal $\mathrm{e}^{i\omega t}$ en la ecuación de onda, la parte espacial se convierte en una ecuación de Helmholtz. Del mismo modo, con una dependencia temporal $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ la parte espacial de la ecuación de difusión también viene dada por la ecuación de Helmholtz.

La ecuación de Helmholtz es separable en mas de una decena de sistemas de coordenadas curvilíneas y como un ejemplo de la metodología vamos integrarla en coordenadas cilíndricas.

Consideremos la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u+k^2u=0 \quad \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho,\varphi)\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(\rho,\varphi)+k^2u(\rho,\varphi)=0\,,$$

y al proponer el mismo cambio de variable que hemos utilizado en el caso anterior tendremos $u(\rho,\varphi)\;=\;R(\rho)\Phi(\varphi)$,

$$u(\rho,\varphi)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_n(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-n^2\Phi_n(\varphi) & \text{con la solución } \Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\operatorname{sen} n\varphi,\\[2ex] \rho^2\dfrac{\mathrm{d}^2R_n(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\dfrac{\mathrm{d}R_n(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+\left(k^2\rho^2-n^2\right)R_n(\rho)=0, & \text{con la solución } R_n(\rho)=C_nJ_n(k\rho)+D_nN_n(k\rho)\,.\end{cases}$$

Borrador Preliminar

Donde $J_n(k\rho)$ y $N_n(k\rho)$ son las funciones de Bessel y Neumann de orden n, respectivamente. Recordemos que si $\rho \to 0 \Rightarrow N_n(k\rho) \to -\infty$. Por lo tanto, para que las soluciones que sean finitas en el origen, debemos imponer $D_n = 0$ y la solución general de la ecuación vendrá dada por la combinación lineal

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, J_n(k\rho)\,(A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi)\ .$$

12.3.4. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

El laplaciano, $\nabla^2 V = 0$ en coordenadas cilíndricas toma la forma

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] V(\rho,\varphi,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{u(\rho,\varphi)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] u(\rho,\varphi) = -\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z)\,.$$

Donde hemos supuesto, $V(\rho,\varphi,z) = u(\rho,\varphi)Z(z)$, como estrategia para la separación de variables. De este modo tendremos, como de costumbre,

$$\frac{1}{u(\rho,\varphi)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] u(\rho,\varphi) = \lambda = -\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z)$$

Observamos que después de separar $Z(z)$, la ecuación restante para $u(\rho,\varphi)$ es una ecuación de Helmholtz en coordenadas polares que discutimos previamente en la sección 12.3.3. La diferencia sutil es que en este caso, la constante de separación λ puede ser positiva $+k^2$ o negativa $-k^2$, dependiendo de las condiciones de contorno.

12.3.5. La ecuación de onda en coordenadas cilíndricas

Imaginemos una membrana, circular, elástica, dispuesta sobre el plano $x - y$ y cuyo centro coincide con el origen de coordenadas. La membrana tendrá un borde fijo en $\rho = \rho_0$ y representaremos como $z(x,y)$ la amplitud (la altura sobre el plano $x - y$) de la oscilación de esa membrana. Entonces esa amplitud vendrá gobernada por una ecuación de onda bidimensional que presentamos en coordenadas cilíndricas como

$$\nabla^2 z(\rho,\varphi,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z(\rho,\varphi,t)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial\varphi^2}\right] = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial t^2}\,.$$

Las condiciones iniciales y de frontera las podemos expresar como

$$z(\rho,\varphi,0) = f(\rho,\varphi), \qquad \left.\frac{\partial z(\rho,\varphi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad z(\rho_0,\varphi,t) = 0\,,$$

respectivamente.

Imponemos una estrategia de separación de variables del tipo Helmholtz: $z(\rho,\varphi,t) = u(\rho,\varphi)T(t)$, esto es

$$z(\rho,\varphi,t) = u(\rho,\varphi)T(t) \quad \Rightarrow \begin{cases} T''(t) = -k^2 v^2 T(t) \\ \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}u(\rho,\varphi)\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u(\rho,\varphi) + k^2 u(\rho,\varphi) = 0\,. \end{cases}$$

Note que hemos supuesto, al igual que para el caso de la cuerda vibrante, que la constante de separación de las variables es siempre negativa, $\lambda = -k^2$. Una vez mas, la ecuación para la parte temporal es oscilatoria y

Borrador Preliminar

para la parte espacial corresponde a una ecuación de Bessel. Por lo tanto la solución para la "parte espacial" la podremos expresar como,

$$u_n(\rho,\varphi) = J_n(k\rho)\left(A_n\cos(n\varphi) + B_n \operatorname{sen}(n\varphi)\right).$$

Nos toca ahora imponer las condiciones de frontera $z(\rho_0,\varphi,t) = 0$, debemos tener $u(\rho_0,\varphi) = 0$, esto implica que $J_n(k\rho_0) = 0$, con lo cual los $k_{nj}\rho_0$ serán los ceros de las funciones de Bessel de orden n y que presentamos en la tabla 11.2.

Para satisfacer la condición de borde en las variables temporales

$$\frac{\partial}{\partial t}z(\rho,\varphi,t)\bigg|_{t=0} = u(\rho,\varphi)\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = 0 \text{ en } T(t) = c_1\cos(k_{nj}\,\alpha\,t) + c_2\operatorname{sen}(k_{nj}\,\alpha\,t) \quad \Rightarrow c_2 = 0\,.$$

Al reconstruir la solución general tendremos

$$z(\rho,\varphi,t) = \sum_{n=0}\sum_{j=1}\left(a_{nj}\cos(n\varphi) + b_{nj}\operatorname{sen}(n\varphi)\right)J_n(k_{nj}\rho)\cos(k_{nj}\,\alpha\,t),$$

donde los coeficientes a_{nj} y b_{nj}, serán determinados por la otra condición inicial

$$z(\rho,\varphi,0) = \sum_{n=0}\sum_{j=1}J_n\left(k_{nj}\rho\right)\left(a_{nj}\cos n\varphi + b_{nj}\operatorname{sen} n\varphi\right) = f(\rho,\varphi) \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=0}\left\{F_n(\rho)\cos n\varphi + G_n(\rho)\operatorname{sen} n\varphi\right\} = f(\rho,\varphi)\,.$$

Donde hemos definido

$$F_n(\rho) = \sum_{j=1}a_{nj}J_n\left(k_{nj}\rho\right)\,, \quad \text{y} \quad G_n(\rho) = \sum_{j=1}b_{nj}J_n\left(k_{nj}\rho\right)\,,$$

y las podemos despejar como coeficientes de Fourier de la forma

$$F_0(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)\mathrm{d}\varphi\,, \quad F_n(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)\cos(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \quad \text{y} \quad G_n(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

Si devolvemos el cambio tenemos

$$\begin{aligned}
F_0(\rho) &= \sum_{j=1}a_{0j}\,J_0\left(k_{0j}\rho\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)\mathrm{d}\varphi\,,\\
F_n(\rho) &= \sum_{j=1}a_{nj}\,J_n\left(k_{nj}\rho\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)\cos(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \quad n = 1,2,\ldots\\
G_n(\rho) &= \sum_{j=1}b_{nj}\,J_n\left(k_{nj}\rho\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)\operatorname{sen}(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \quad n = 1,2,\ldots\,.
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que en este caso, para un n fijo, las series de arriba expresan las funciones $F_0(\rho)$, $F_n(\rho)$ y $G_n(\rho)$ se expresan como combinaciones lineales para UNA misma función de Bessel con el argumento "escalado" con los ceros de la función, k_{nj}. Son las series de Fourier Bessel que discutimos en la sección 11.5.1.

Recordando la propiedades de ortogonalidad de las funciones de Bessel que discutimos en la sección 9.4.8 podemos despejar los coeficientes multiplicando a ambos miembros de las ecuaciones por $\rho J_n\left(k_{ni}\rho\right)$ e integrando entre 0 y ρ_0.

$$\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho J_n(k_{ni}\rho)\sum_{j=1}a_{nj}J_n(k_{nj}\rho) = \int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\,\rho J_n(k_{ni}\rho)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho,\varphi)\cos(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)\,, \text{ para } n = 1,2,\ldots\,,$$

Borrador Preliminar

con lo cual, en la sumatoria del lado izquierdo sobrevive único término, $i = j$,

$$a_{ni}\int_0^{\rho_0}\rho J_n^2(k_{ni}\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{\pi}\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\rho J_n(k_{ni}\rho)f(\rho,\varphi)\,\cos(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,,\ \text{con}\ \int_0^{\rho_0}\rho J_n^2(k_{ni}\rho)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\rho_0^2 J_{n+1}^2(k_{ni}\rho_0)$$

tendremos, finalmente

$$a_{ni} = \frac{2}{\pi\rho_0^2 J_{n+1}^2(k_{ni}\rho_0)}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\rho\, J_n(k_{ni}\rho)f(\rho,\varphi)\,\cos(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,\quad n = 1,2,\ldots$$

y

$$b_{ni} = \frac{2}{\pi\rho_0^2 J_{n+1}^2(k_{ni}\rho_0)}\int_0^{\rho_0}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\rho J_n(k_{ni}\rho)f(\rho,\varphi)\,\mathrm{sen}\,(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,\quad n = 1,2,\ldots\,.$$

mientras que para $n = 0$

$$a_{0i} = \frac{2}{2\pi c^2 J_1^2\,(k_{0i}c)}\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi}\rho J_0\,(k_{0i}\rho)\,f(\rho,\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\,.$$

Podemos rearmar la solución como

$$z(\rho,\varphi,t) = \sum_{n=0}\sum_{i=1} z_{nj} = \sum_{n=0}\sum_{i=1} J_n(k_{ni}\rho)\ [a_{ni}\ \cos(n\varphi) + b_{ni}\,\mathrm{sen}\,(n\varphi)]\cos(k_{ni}\,\alpha\,t)\,.$$

Es importante recalcar el significado físico de los términos $z_{nj}(\rho,\varphi,t)$, que se conocen como los modos normales de oscilación. Estos modos de oscilación vibran con una frecuencia $\omega = k_{ni}\,\alpha$. Si inicialmente la forma, $f(\rho,\varphi)$, de la membrana coincide con uno de esos modos, permanecerá en él. Entonces si

$$z(\rho,\varphi,0) = f(\rho,\varphi) = A\,J_2(k_{21}\,\rho)\cos 2\varphi\,,\quad \Rightarrow z(\rho,\varphi,t) = a_{21}\,J_2(k_{21}\,\rho)\cos 2\varphi\,cos(k_{21}\,\alpha\,t)\,,$$

porque todos los coeficientes se han anulado excepto el $a_{21} = A$.

12.3.6. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

El laplaciano $\nabla^2 F = 0$ en coordenadas esféricas tiene la forma de

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial F(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 F(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0\,,$$

y si suponemos una separación de variable de la forma $F(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, tendremos

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right].$$

Hemos rearreglado del lado izquierdo una función r, y el lado derecho una función de θ y φ. Continuando como siempre,

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) = \lambda = -\frac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}\right].$$

Multiplicando por $\mathrm{sen}^2\theta$ y re-arreglando el lado derecho continuamos con la separación de variables

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda\,\mathrm{sen}^2\theta = \mu = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi)\,.$$

Consideremos uno por uno las ecuaciones que han surgido de la separación de variables.

Borrador Preliminar

La parte $\Phi(\varphi)$ de la ecuación de Laplace La ecuación en para $\Phi(\varphi)$ implica

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi) = -\mu\Phi(\varphi) \quad \Rightarrow \Phi(\varphi) = \exp[\pm \mathrm{i}\sqrt{\mu}\varphi] \quad \Rightarrow \Phi(\varphi) = c_1 \cos\sqrt{\mu}\varphi + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\mu}\varphi\,,$$

y como $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ es periódica, necesariamente $\mu = m^2$, con $m = 1, 2, 3, \ldots$, entero.

La parte $\Theta(\theta)$ de la ecuación de Laplace. La ecuación en para $\Theta(\theta)$ con $\mu = m^2$ se convierte en

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right) + \lambda \operatorname{sen}^2\theta = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y(x) = 0\,. \tag{12.5}$$

Donde hicimos el siguiente cambio de variable, $\Theta(\theta) = y(x)$, con sus correspondientes consecuencias

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2 \Leftarrow \quad x = \cos\theta \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x} = -\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x},$$

Reconocemos la ecuación (12.5) del lado derecho (luego del cambio de variable), como la ecuación asociada de Legendre para $\lambda = l(l+1)$ y, adicionalmente $-l \le m \le l$. Eso lo mostramos en la sección 9.2.1 y además nos convencimos que la solución será $y(x) = P_l^{|m|}(x)$, los polinomios asociados de Legendre cuyas propiedades discutimos en la sección 4.3.1.

Por lo tanto, podemos afirmar que los armónicos esféricos, que discutimos en la sección 4.3.5, son solución de la parte angular de la ecuación de Laplace

$$\Theta(\theta) = P_l^{|m|}(\cos\theta) \quad \Rightarrow Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\underbrace{P_l^m(\cos\theta)}_{\propto\Theta(\theta)}\underbrace{e^{\pm im\varphi}}_{\propto\Phi(\varphi)} \propto \Theta(\theta)\Phi(\varphi)\,.$$

La parte radial $R(r)$ de la ecuación de Laplace. Hemos determinado, y acotado los valores de las constantes de separación: $\mu = m^2$ y $\lambda = l(l+1)$ con $-l \le m \le l$. Entonces la parte radial de la Ecuación de Laplace es una ecuación de Euler Cauchy de la forma

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R(r) + 2r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r) = l(l+1)R(r)\,, \text{ si proponemos } R(r) = r^m \Rightarrow m^2 + m = l(l+1) \begin{cases} R(r) = r^l \\ \\ R(r) = \dfrac{1}{r^{l+1}}\,. \end{cases}$$

Con lo cual la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es

$$F(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{-l}^{l}\left(a_{lm}r^l + b_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}\right)Y_l^m(\theta,\varphi) \equiv \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{-l}^{l}\left(\tilde{a}_{lm}r^l + \tilde{b}_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}\,.$$

Borrador Preliminar

Capítulo 13

Apéndice

Borrador Preliminar

13.1. Introducción a los CAS

Los sistemas algebraicos computacionales o sistemas de álgebra computacional (CAS: *Computer Algebra System*) son sistemas o calculadoras avanzadas, que permiten realizar operaciones de manera simbólica. Esto significa que el computador puede efectuar operaciones con ecuaciones y fórmulas simbólicamente, es decir, $a + b = c$ se interpreta como la suma de variables y no como la suma de números previamente asignados.

Estos sistemas permiten operar de manera exacta con símbolos que representan objetos matemáticos tales como:

- Números (Enteros, racionales, reales, complejos...)
- Polinómios, Funciones Racionales, Sistemas de Ecuaciones.
- Grupos, Anillos, Algebras . . .

A diferencia de los sistemas tradicionales de computación numérica:

- FORTRAN, Basic, C, C++, Java => Precisión fija (Punto Flotante)

Otra característica principal radica en el hecho de que son interactivos (interpretados o ejecutados al momento de proveer una instrucción), es decir, trabajan de la forma:

```
Input : solve(problema);

Output : respuesta
```

Los CAS se pueden clasificar en dos grandes grupos:[1]

- Sistemas de Propósito Especial (Creados para hacer cálculos en un área específica): FORM, GAP, CAMAL, SHEEP, STENSOR, LiE, KANT.
- Sistemas de Propósito General (¡Especies de navajas suizas!): Axiom, Derive, Reduce, Maple, MatLab, Mathematica, Maxima, MuPAD. Recientemente, lenguajes como Python comienzan a incorporar bibliotecas que permiten generar formas de cálculo simbólico[2] que ofrecen una perspectiva interesante para integrar ambientes algebráicos-numéricos-visuales.

Los CAS modernos de propósito general son ambientes completamente integrados de computación para la investigación y la educación conformados por:

- Interfaz gráfica (worksheet) o ambiente interactivo:
- Procesador de texto, de fórmulas y de gráficas.
- Con salidas en Latex, RTF, HTML, FORTRAN y C; o hyperlinks a otros documentos.
- Manuales en línea.
- Enlaces a otros programas y bibliotecas
- Capacidades para cálculo numérico
- Capacidades para visualización, con salidas gráficas en diferentes formatos: PostScript, GIF,JPG, . . .
- Pensado para usuarios no especializados en computación

Borrador Preliminar

Figura 13.1: Ventana gráfica de vxMaxima

La principal ventaja de estos programas radica en la enorme capacidad para realizar cálculos algebraicos largos y tediosos. Por ejemplo, se puede demostrar que la función:

$$f = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 x^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^2 x^2} + n^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = 0$$

y la realización de éste cálculo le puede tomar a un PC estándar un tiempo de CPU relativamente corto:

```
tiempo de cpu =  1,065 seg
```

Un ejemplo de un CAS es **Maxima** que básicamente consta de una hoja de trabajo (worksheet) que es una interfaz tipo procesador de textos. Las hojas de trabajo constan de dos modos básicos de funcionamiento: el modo texto y el modo cálculo. **Maxima** opera en la celda de cálculos de la manera siguiente:

```
Input (Instrucción de entrada)
Output (respuesta del programa)
```

[1] Una comparación de los diferentes CAS puede verse en: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems

[2] http://docs.sympy.org/

Borrador Preliminar

Existe la posibilidad de introducir textos de la misma manera que en un procesador de textos estándar y de generar gráficas en 2D y 3D a través de los respectivos comandos.

La interacción con la hoja de trabajo se hace a través de lo que denominamos la celda del Input, que aparece señalado por un aviso de espera o PROMPT

```
[ -->
```

El código fuente de **Maxima**, código de software libre, puede ser compilado sobre diferentes sistemas operativos: Windows, Linux, MacOS X y Android, y puede obtenerse en: http://sourceforge.net/projects/wxmaxima o en http://andrejv.github.io/wxmaxima, con la respectiva documentación.

Utilizaremos la versión gráfica **wxMaxima** para los fines pedagógicos del desarrollo de estas notas. También existe una versión que funciona sólo en modo texto para ser ejecutada en una consola o terminal.

En la Figura 13.1 se puede apreciar el despliegue de una hoja de cálculo con algunos instrucciones sencillas, notemos que cada instrucción (en azul) termina con un punto y coma, de esta manera se le dice al programa la finalización del comando a ejecutar. Luego de escribir la instrucción y presionar la tecla Enter ↰ el Output aparecerá a continuación en color negro.

13.2. Maxima: Sintaxis básica

Es necesario familiarizarse con los comandos básicos del programa, para ello iremos desarrollando algunos cálculos sencillos a manera de conocer la filosofía de cómo funciona **Maxima**, y durante el transcurso de este curso iremos haciendo un despliegue de las aplicaciones del programa para cálculos más específicos.

```
(%i1) 3!+3^5;
```

(%o1) 249

Veamos ahora la diferencia entre el igual = y los dos puntos :

```
(%i2) a=b+c;
```

(%o2) c+b

```
(%i3) a;
```

(%o3) a

```
(%i4) a:b+c;
```

(%o4) c+b

```
(%i5) a;
```

(%o5) c+b

Al usar "="no asignamos a la variable lo que está del lado derecho mientras que con ":"si le asignamos el objeto a la nueva variable.

Los cálculos se pueden hacer tanto con números enteros como en Punto Flotante:

```
(%i6) 15+5^(50);
```

(%o6) 888178419700125232338905334472656 40

Borrador Preliminar

```
(%i7) 15.0+5^(50);
```

(%o7) $8{,}881784197001253 \times 10^{34}$

Pero el énfasis radica en los cálculos exactos:

```
(%i8) cos(%pi/12)^2 + log(2/3+5)/7;
```

(%o8) $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\log\left(\frac{17}{3}\right)}{7}$

y si queremos el valor numérico podemos escribir

```
(%i9) float(%);
```

(%o9) 1,180812852661949

Aquí hemos hecho uso de varios símbolos nuevos. Las constantes matemáticas en **Maxima** se escriben de la siguiente manera:

- La unidad imaginaria i: $\%i$
- El número π: $\%pi$.
- El símbolo ∞: inf.
- El número e: $\%e$.

En cuanto a los logaritmos:

- $e^x = \exp(x)$.
- log(x): la función logaritmo en base e
- log(x)/log(b) el logaritmo de x en base b.

Para las funciones trigonométricas es lo estándar: sin(x), asin(x), cos(x), acos(x), tan(x), atan(x), csc(x), sec(x), cot(x).

También hemos utilizado % para introducir la última salida en la siguiente instrucción, veamos nuevamente como funciona, pero ahora pondremos al final del comando el símbolo $ en lugar de ; para decirle al programa que ejecute la instrucción sin escribir la salida.

```
(%i10)3^12$
(%i11)%;
```

(%o11) 531441

Veamos otro ejemplo:

```
(%i12)alpha;
```

(%o12) α

```
(%i13)%+sqrt(beta);
```

Borrador Preliminar

(%o13) $\sqrt{\beta}+\alpha$

```
(%i14)%o12+2*gamma^2;
```

(%o14) $2\,\gamma^2+\alpha$

Es importante tener cuidado a la hora de poner los paréntesis en las expresiones:

```
(%i15)1+2*3^2;
```

(%o15) 19

```
(%i16)(1+2)*3^2;
```

(%o16) 27

El volumen de un cilindro $V=\pi(\text{radio})^2\times\text{altura}$

```
(%i17)radio:5$
(%i18)altura:50$
(%i19)area:%pi*radio^2;
```

(%o19) $25\,\pi$

```
(%i20)volumen:area*altura;
```

(%o20) $1250\,\pi$

Para limpiar la memoria del programa de todas las variables utilizadas se puede usar el comando **kill(all)** (Existen otras opciones que veremos más adelante). Esta es una manera de reiniciar la hoja de trabajo.

```
(%i21)volumen;
```

(%o21) $1250\,\pi$

```
(%i22)kill(all);
```

(%o22) *done*

```
(%i23)volumen;
```

(%o23) *volumen*

13.2.1. Cálculos elementales

Se puede definir, evaluar y derivar funciones abstractas utilizando := como se muestra a continuación

```
(%i1) f(x,y):=exp(x^2+y^2)/(x-y);
```

(%o1) $f(x,y):=\dfrac{exp\left(y^2+x^2\right)}{x-y}$

```
(%i2) f(2,3);
```

(%o2) $-e^{13}$

Borrador Preliminar

```
(%i3) %,numer;
```

(%o3) $-442413{,}3920089205$

```
(%i4) f(alpha^(1/2),beta^(1/2));
```

(%o4) $\dfrac{e^{\beta+\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$

Derivando respecto a x y y;

```
(%i5) diff(f(x,y),x) + diff(f(x,y),y);
```

(%o5) $\dfrac{2\,y\,e^{y^2+x^2}}{x-y}+\dfrac{2\,x\,e^{y^2+x^2}}{x-y}$

Aquí es bueno acotar que una expresión NO es una función:

```
(%i6) f(x):=3*sin(x+1)+2*sqrt(x);
```

(%o6) $f(x):=3\,\sin(x+1)+2\,\sqrt{x}$

```
(%i7) F:3*sin(x+1)+2*sqrt(x);
```

(%o7) $3\,\sin(x+1)+2\,\sqrt{x}$

```
(%i8) f(8); F(8);
```

(%o8) $3\,\sin 9+2^{\frac{5}{2}}$
(%o9) $\left(3\,\sin(x+1)+2\,\sqrt{x}\right)(8)$

Por lo tanto, F es únicamente una expresión que no puede ser evaluada como la función f. Pero se le puede dar la vuelta para evaluarla con **ev()**

```
(%i10)ev(F,x=8);
```

(%o10) $3\,\sin 9+2^{\frac{5}{2}}$

Consideremos los siguientes cálculos básicos:

```
(%i11)kill(all)$
(%i1) sigma(x):=2*x/sqrt(x^2+1);
```

(%o1) $\sigma(x):=\dfrac{2\,x}{\sqrt{x^2+1}}$

La primera derivada:

```
(%i2) diff(sigma(x),x);
```

(%o2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{2\,x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

La cuarta derivada:

Borrador Preliminar

```
(%i3) diff(sigma(x),x,4);
```

(%o3) $\frac{90\,x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}-\frac{300\,x^3}{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}+\frac{210\,x^5}{(x^2+1)^{\frac{9}{2}}}$

Si queremos reutilizar la derivada para definir una nueva función, en este caso la función derivada, lo podemos hacer utilizando dos apóstrofos ” (No es la doble comilla)

```
(%i4) dsigma(x):='' %o2;
```

(%o4) $dsigma\,(x):=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{2\,x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

```
(%i5) dsigma(2);
```

(%o5) $\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$

```
(%i6) integrate(sigma(x),x);
```

(%o6) $2\,\sqrt{x^2+1}$

La misma integral, pero definida para x entre 0 y 1.

```
(%i7) integrate(sigma(x),x,0,1);
```

(%o7) $2\,\left(\sqrt{2}-1\right)$

Límites:

```
(%i8) limit(sigma(x),x,1/2);
```

(%o8) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

```
(%i9) limit(sigma(x),x,inf);
```

(%o9) 2

Sumatorias:

```
(%i10)sum(sigma(i),i,0,6);
```

(%o10) $\frac{12}{\sqrt{37}}+\frac{10}{\sqrt{26}}+\frac{8}{\sqrt{17}}+\frac{6}{\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\sqrt{2}$

Podemos calcular series de Taylor, digamos, alrededor de $x=1$ y hasta orden 4.

```
(%i11)taylor(sigma(x),x,1,4);
```

(%o11) $\frac{-1}{128}\left(5\,2^{\frac{1}{2}}\right)\,(x-1)^4+\frac{1}{16}\,\left(3\,2^{\frac{1}{2}}\right)\,(x-1)^3+\frac{-1}{8}\,\left(3\,2^{\frac{1}{2}}\right)\,(x-1)^2+\frac{1}{2}\,2^{\frac{1}{2}}\,(x-1)+2^{\frac{1}{2}}+\cdots$

Al rededor de $x=0$ es más simple todo:

Borrador Preliminar

```
(%i12)taylor(sigma(x),x,0,6);
```

(%o12) $\frac{3}{4}\,x^5+(-1)\,x^3+2\,x+\cdots$

Y por supuesto, también podemos hacer una gráfica de la función. Para ello utilizaremos el comando **wxplot2d** que nos generará un gráfico embebido dentro de la misma hoja de trabajo.

```
(%i13)wxplot2d(sigma(x),[x,-10,10]);
```

(%o13)

Los cálculos anteriores se pueden repetir para que queden de una manera más elegante usando una camilla, esto hará que no se efectúe la evaluación de las operaciones.

```
(%i14)'diff(sigma(x),x)=diff(sigma(x),x);
```

(%o14) $\frac{d}{d\,x}\left(\frac{2\,x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{2\,x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

```
(%i15)'integrate(sigma(x),x,0,1)=integrate(sigma(x),x,0,1);
```

(%o15) $2\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$

```
(%i16)'limit(sigma(x),x,inf)=limit(sigma(x),x,inf);
```

(%o16) $2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=2$

```
(%i17)'sum(sigma(i),i,0,6)=sum(sigma(i),i,0,6);
```

(%o17) $2\sum_{i=0}^{6}\frac{i}{\sqrt{i^2+1}}=\frac{12}{\sqrt{37}}+\frac{10}{\sqrt{26}}+\frac{8}{\sqrt{17}}+\frac{6}{\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{5}}+\sqrt{2}$

Borrador para revisar

Anteriormente mencionamos que uno de las ventajas de los programas de manipulación simbólica es la gran capacidad de llevar a cabo cálculos largos y tediosos, veamos entonces como se hace para demostrar que la función antes mencionada:

```
(%i18)f(x,y,z):=sin(n*z*sqrt(x^2+y^2+z^2)/sqrt(y^2+z^2))/sqrt(x^2+y^2+z^2);
```

(%o18) $f(x,y,z) := \dfrac{\sin\left(\frac{n\,z\,\sqrt{z^2+y^2+x^2}}{\sqrt{z^2+y^2}}\right)}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$

es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 x^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^2 x^2} + n^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] = 0$$

```
(%i19)diff(f(x,y,z),x,4)+diff(diff(f(x,y,z),x,2),y,2)+diff(diff(f(x,y,z),x,2),z,
      2)+n^2*(diff(f(x,y,z),x,2)+diff(f(x,y,z),y,2));
```

(%o19) « Expression too long to display! »

Aquí **Maxima** no hace un despliegue en la pantalla de los cálculos porque la expresión matemática es muy larga. Existen opciones para que muestre en pantalla los que nos interese que iremos viendo más adelante.

Necesitamos entonces decirle al programa que la expresión anterior sea simplificada, es decir, que minimice la expresión a su valor más simple. Para simplificar expresiones que contienen radicales, exponenciales o logaritmos es conveniente utilizar el comando **ratsimp**. También existe la opción **fullratsimp**

```
(%i20)ratsimp(%);
```

(%o20) 0

En la mayoría de los casos **Maxima** no factoriza ni desarrolla automáticamente las expresiones, por lo tanto, debemos indicarle al programa que haga las respectivas simplificaciones. Veamos un ejemplo con polinomios:

```
(%i21)kill(all)$
(%i1) p:(x+2)*(x-1);
```

(%o1) $(x-1)\,(x+2)$

```
(%i2) q:(x-3)^2;
```

(%o2) $(x-3)^2$

```
(%i3) p-q;
```

(%o3) $(x-1)\,(x+2)-(x-3)^2$

```
(%i4) expand(p-q);
```

(%o4) $7\,x-11$

Borrador Preliminar

```
(%i5) expand(p/q);
```

(%o5) $\dfrac{x^2}{x^2-6\,x+9}+\dfrac{x}{x^2-6\,x+9}-\dfrac{2}{x^2-6\,x+9}$

Si queremos dividir usando fracciones simples podemos hacer lo siguiente:

```
(%i6) partfrac(p/q,x);
```

(%o6) $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{10}{(x-3)^2}+1$

Las funciones **logexpand** y **radexpand** permiten controlar si queremos simplificar logaritmos y radicales cuando contienen productos. Veamos:

```
(%i7) log(x*y);
```

(%o7) $\log(x\,y)$

```
(%i8) sqrt(x*y);
```

(%o8) $\sqrt{x\,y}$

```
(%i9) sqrt(x^2);
```

(%o9) $|x|$

```
(%i10)radexpand:all$ logexpand:all$
(%i11)log(x*y); sqrt(x*y); sqrt(x^2);
```

(%o11) $\log y+\log x$
(%o12) $\sqrt{x}\,\sqrt{y}$
(%o13) x

Lo inverso a la expansión de expresiones es la factorización:

```
(%i14)factor(200);
```

(%o14) $2^3\,5^2$

```
(%i15)factor(x^2+x-2);
```

(%o15) $(x-1)\,(x+2)$

```
(%i16)p:x^3-1;
```

(%o16) x^3-1

```
(%i17)factor(%);
```

(%o17) $(x-1)\,\left(x^2+x+1\right)$

La evaluación de expresiones se realiza de la manera siguiente

Borrador Preliminar

```
(%i18)ev(p,x=8);
```

(%o18) 511

O también

```
(%i19)p,x=%pi;
```

(%o19) $\pi^3 - 1$

```
(%i20)ev(x+(x+y)^2-3*(x+y)^3,x+y=t);
```

(%o20) $x - 3\,t^3 + t^2$

Para finalizar con esta guía rápida de **Maxima** veamos el uso de uno de los comandos más comunes de estos programas, y que tiene que ver con la solución de ecuaciones.

```
(%i21)ecu:3*x^2+2*x+x^3-x^2=2*x^2;
```

(%o21) $x^3 + 2\,x^2 + 2\,x = 2\,x^2$

```
(%i22)sol:solve(ecu,x);
```

(%o22) $\left[x = -\sqrt{2}\,\%i, x = \sqrt{2}\,\%i, x = 0\right]$

Recordemos que $\%i$ es la notación para el imaginario i.
Si necesitamos aislar una de las soluciones usamos el comando **rhs** (de right-hand side):

```
(%i23)rhs(part(sol,1)); rhs(part(sol,2));
```

(%o23) $-\sqrt{2}\,\%i$
(%o24) $\sqrt{2}\,\%i$

Para un sistema de ecuaciones, digamos, dos ecuaciones con dos incógnitas:

```
(%i25)ecu1:x^2+y^2=1;
```

(%o25) $y^2 + x^2 = 1$

```
(%i26)ecu2:(x-2)^2+(y-1)^2=4;
```

(%o26) $(y-1)^2 + (x-2)^2 = 4$

```
(%i27)solve([ecu1,ecu2],[x,y]);
```

(%o27) $\left[\left[x = \frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}\right], [x = 0, y = 1]\right]$

Cuando el sistema no tiene solución **Maxima** responde de la siguiente manera

```
(%i28)solve([x+y=0,x+y=1],[x,y]);
```

Borrador Preliminar

(%o28) [ ]

En el caso de un sistema que tiene más incógnitas que ecuaciones el programa utiliza los símbolos $\%r_1$, $\%r_2$... para indicar los parámetros arbitrarios

```
(%i29)solve([x+y+z=9,x-y=2*z],[x,y,z]);
```

(%o29) $\left[\left[x=\frac{\%r_1+9}{2}, y=-\frac{3\,\%r_1-9}{2}, z=\%r_1\right]\right]$

En lugar de **solve** se puede recurrir a un comando diferente que hace lo mismo, pero que es más eficiente desde el punto de vista de los recursos usados por el computador, el comando es **linsolve** para ecuaciones lineales.

```
(%i30)ecus:[x+y+z+w=1,x-y+z-w=-2,x+y-w=0];
```

(%o30) $[z+y+x+w=1, z-y+x-w=-2, y+x-w=0]$

```
(%i31)linsolve(ecus,[x,y,z]);
```

(%o31) $\left[x=\frac{4\,w-3}{2}, y=-\frac{2\,w-3}{2}, z=1-2\,w\right]$

En el caso de polinómios de orden superior el resultado estará dado de forma aproximada:

```
(%i32)ec:x^7+x^5-x^3+x-2;
```

(%o32) $x^7+x^5-x^3+x-2$

```
(%i33)allroots(ec);
```

```
[ x=0.766414088337633 %i+0.5507199727230275 ,
  x=0.5507199727230275-0.766414088337633 %i ,
  x=0.4922671445862202 %i - 0.9637112977011089 ,
  x=-0.4922671445862202 %i -0.9637112977011089 ,
  x=1.381985877916414 %i -0.08700867502191806 ,
  x=-1.381985877916414 %i -0.08700867502191806 ,
  x=0.9999999999999988 ]
```

```
(%i34)realroots(ec);
```

(%o34) $[x=1]$

Otro tipo de ecuaciones a resolver son las ecuaciones diferenciales. Veamos como funciona con la ecuaciones diferenciales ordinarias

```
(%i35)ecd:(2*x+1)*'diff(y,x)+y*(x-1)=0;
```

(%o35) $(2\,x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+(x-1)\,y=0$

```
(%i36)ode2(ecd,y,x);
```

Borrador Preliminar

(%o36) $y = \%c\, e^{\frac{3\log(2x+1)}{4} - \frac{x}{2}}$

Por ser una ecuación diferencial de primer orden debe aparecer una constante en la solución. La constante aquí es denotada por "$\%c$".

```
(%i37)ecd2:'diff(y,x,2)-3*'diff(y,x)+2*y=x;
```

(%o37) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y - 3\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 2\,y = x$

```
(%i38)ode2(ecd2,y,x);
```

(%o38) $y = \%k_1\, e^{2\,x} + \%k_2\, e^{x} + \frac{2\,x+3}{4}$

Para el caso de que se tengan condiciones iniciales utilizamos **ic2** para indicar las condiciones

```
(%i39)ic2(%o38,x=0,y=0,diff(y,x)=1);
```

(%o39) $y = \frac{5\,e^{2\,x}}{4} - 2\,e^{x} + \frac{2\,x+3}{4}$

Y para valores de contorno **bc2**

```
(%i40)bc2(%o38,x=0,y=0,x=1,y=0);
```

(%o40) $y = \frac{(3\,e-5)\;e^{2\,x}}{4\,e^2-4\,e} - \frac{\left(3\,e^2-5\right)\;e^{x}}{4\,e^2-4\,e} + \frac{2\,x+3}{4}$

Existe el comando **desolve** para resolver también ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales utilizando transformadas de Laplace. Trabaja de manera parecida a **ode2** pero se necesita especificar la dependencia de las funciones con las variables independientes.

```
(%i41)ecd3:'diff(y(x),x,2)-y(x)=2*x;
```

(%o41) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x) - y(x) = 2\,x$

```
(%i42)desolve(ecd3,[y(x)]);
```

(%o42) $y(x) = \frac{e^{x}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\big|_{x=0} + y(0) + 2\right)}{2} - \frac{e^{-x}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\big|_{x=0} - y(0) + 2\right)}{2} - 2\,x$

Si tenemos condiciones iniciales en $x = 0$ entonces podemos escribir:

```
(%i43)atvalue(y(x),x=0,1); atvalue(diff(y(x),x),x=0,2);
```

(%o43) 1
(%o44) 2

```
(%i45)desolve(ecd3,[y(x)]);
```

(%o45) $y(x) = \frac{5\,e^{x}}{2} - \frac{3\,e^{-x}}{2} - 2\,x$

Si **desolve** no encuentra una solución, entonces devuelve "false".

Borrador Preliminar

Veamos un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales

```
(%i46)ecd_1: 'diff(f(x),x)='diff(g(x),x)+sin(x);
```

(%o46) $\frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}\,g\left(x\right)+\sin x$

```
(%i47)ecd_2: 'diff(g(x),x,2)='diff(f(x),x)-cos(x);
```

(%o47) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,g\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}\,f\left(x\right)-\cos x$

```
(%i48)atvalue('diff(g(x),x),x=0,a)$ atvalue(f(x),x=0,b)$ atvalue(g(x),x=0,c)$
```

```
(%i51)desolve([ecd_1, ecd_2], [f(x),g(x)]);
```

(%o51) $[f\left(x\right)=a\,e^{x}+b-a,g\left(x\right)=\cos x+a\,e^{x}+c-a-1]$

```
(%i52)kill(all)$
```

Operaciones básicas con matrices:

```
(%i1) A:matrix([1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);B:matrix([9,8,7],[6,5,4],[3,2,1]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

(%o2) $\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$

```
(%i3) A+B;
```

(%o3) $\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}$

El producto ordinario de matrices:

```
(%i4) A.B;
```

(%o4) $\begin{pmatrix}30&24&18\\84&69&54\\138&114&90\end{pmatrix}$

El producto elemento a elemento

```
(%i5) A*B;
```

(%o5) $\begin{pmatrix}9&16&21\\24&25&24\\21&16&9\end{pmatrix}$

El cociente elemento a elemento

```
(%i6) A/B;
```

Borrador Preliminar

(%o6) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & 4 & 9 \end{pmatrix}$

El producto por un escalar:

```
(%i7) n*A;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} n & 2\,n & 3\,n \\ 4\,n & 5\,n & 6\,n \\ 7\,n & 8\,n & 9\,n \end{pmatrix}$

Podemos generar matrices de muchas maneras

```
(%i8) a[i,j]:=i^2 + j^2$
(%i9) A:genmatrix(a,4,4);
```

(%o9) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 \\ 5 & 8 & 13 & 20 \\ 10 & 13 & 18 & 25 \\ 17 & 20 & 25 & 32 \end{pmatrix}$

También de manera interactiva:

```
(%i10)n:3$
(%i11)M:entermatrix(n,n)$
```

```
Is the matrix  1. Diagonal  2. Symmetric  3. Antisymmetric  4. General
Answer 1, 2, 3 or 4 : 1;
Row 1 Column 1: (x+y)^n$
Row 2 Column 2: (x-y)^(n+1)$
Row 3 Column 3: (x.y)^(n-1)$
Matrix entered.
```

```
(%i12)M;
```

(%o12) $\begin{pmatrix} (y+x)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (x-y)^4 & 0 \\ 0 & 0 & (x\cdot y)^2 \end{pmatrix}$

La matriz identidad de tamaño n x n usamos el comando **ident(n)**, como mostramos a continuación

```
(%i13)ident(4);
```

(%o13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Borrador Preliminar

13.2.2. Bibliotecas

No todos los comandos están disponibles en la memoria cuando el programa es iniciado. Sólo los comandos estándar son cargados automáticamente. Pero podemos contar con funciones adicionales para trabajar cargando al programa los diferentes paquetes, módulos o librerías que dispone **Maxima**. Por ejemplo, el paquete **vect** nos permite introducir vectores y operar con ellos.

El paquete **vect** debe entonces ser previamente cargado y se hace de la manera siguiente:

```
(%i1) load(vect)$
```

Las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y multiplicación por escalares de vectores las podemos ver a continuación, pero primero debemos saber como introducir los vectores al programa.

Por ejemplo, para los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, tenemos:

```
(%i2) a:[2,4,6];
```

(%o2) $[2, 4, 6]$

```
(%i3) b:[5,7,9];
```

(%o3) $[5, 7, 9]$

```
(%i4) c:[1,3,0];
```

(%o4) $[1, 3, 0]$

```
(%i5) a+b+c;
```

(%o5) $[8, 14, 15]$

```
(%i6) 3*a+5*b-c;
```

(%o6) $[30, 44, 63]$

Si queremos calcular el módulo de los vectores podemos hacerlo definiendo una función: la función módulo, como mostramos a continuación:

```
(%i7) modulo(a):=sqrt(a.a);
```

(%o7) $\text{modulo}(a) := \sqrt{a.a}$

```
(%i8) modulo(a); modulo(b); modulo(c);
```

(%o8) $2\sqrt{14}$
(%o9) $\sqrt{155}$
(%10) $\sqrt{10}$

Para el producto escalar usamos un punto

```
(%i11)a.b;
```

(%11) 92

Mientras que para el producto vectorial debemos usar la tilde $\sim$ y escribir lo siguiente

Borrador Preliminar

Figura 13.2: Curvas integrales para $y' = -x + e^{-y}$

```
(%i12)express(a~b);
```

(%o12) $[-6, 12, -6]$

```
(%i13)express(b~a);
```

(%o13) $[6, -12, 6]$

De manera que el producto triple lo podemos calcular asi:

```
(%i14)c.(express(a~b));
```

(%o14) 30

Otra librería que podemos explorar es **plotdf** que nos permite realizar gráficos del tipo $y' = f(x, y)$ y hacernos una idea de cómo es la solución de ésta ecuación diferencial.

```
(%i1) load(plotdf)$
```

La librería **plotdf** nos permite estudiar los campos de direcciones y las curvas integrales a través del estudio de las pendientes. Veamos la siguiente ecuación diferencial

$$y' = -x + e^{-y}$$

su solución, de manera gráfica, es decir los campos de direcciones lo podemos obtener escribiendo el siguiente

Borrador Preliminar

Figura 13.3: Curva integrales para $y' = -x + e^{-y}$ y que pasa por el punto $(2, 3)$

comando.

```
(%i2) plotdf(-x+exp(-y));
```

La gráfica que resulta puede verse en la Figura 13.2 y cada curva integral (curvas en rojo) se obtiene haciendo un "click"sobre un punto de la gráfica, esto generará la curva integral que pasa por ese punto.

Por otra parte, existen varias opciones para el comando **plotdf**. Supongamos que queremos la trayectoria que pase por el punto específico $(2, 3)$. Para tal fin escribimos

```
(%i3) plotdf(-x+exp(-y),[trajectory_at,2,3]);
```

Y la gráfica obtenida puede verse en la Figura 13.3.

También nos podemos encontrar con que la ecuación diferencial depende de algún parámetro, digamos κ. Por ejemplo

$$y' = -x + \kappa e^{-y}$$

y nos gustaría obtener una gráfica para algún valor del parámetro en partícular, digamos $\kappa = -0{,}5$. Entonces podemos escribir

```
(%i4) plotdf(-x+exp(-kappa*y),[parameters,"kappa=-0.5"]);
```

O, si queremos recorrer, en una misma figura, los diferentes valores del parámetro usamos la opción **sliders**, como se muestra a continuación

Borrador Preliminar

Figura 13.4: Curva integrales para $y' = -x + \kappa e^{-y}$ y para diferentes valores de κ.

```
(%i5) plotdf(-x+exp(-kappa*y),[parameters,"kappa=-0.5"],[sliders,"kappa=-3:3"]);
```

La gráfica que se obtiene se muestra en la Figura 13.4, y como se puede ver, en la parte inferior aparece un botón deslizante y el valor del parámetro κ. Al deslizar el botón, estaremos cambiando el valor del parámetro que en este caso variará entre -3 y 3, podremos apreciar entonces como los campos de direcciones y las curvas integrales seleccionadas cambian.

Borrador Preliminar

13.2.3. Maxima en modo texto

Es posible utilizar **Maxima** en un computador que funcione bajo alguno de los diferentes versiones de sistemas operativos tipo UNIX, como por ejemplo Linux, esto lo podemos hacer cuando no queremos utilizar el ambiente gráfico. Podemos recurrir al ambiente de texto escribiendo el comando **maxima** en un terminal de nuestro computador, esto hará que entremos en un ambiente de cálculo que funcionará exclusivamente en modo texto y aparecerá, luego de una bienvenida, el aviso de espera o prompt. Para finalizar una sesión en **Maxima** se utiliza el comando **quit()**.

Esta posibilidad que ofrece el programa es muy conveniente a la hora de realizar grandes cálculos ya que podemos dejar el proceso en modo "background" y utilizar el computador en otra actividad.

Al entrar en este modo al programa tendremos un mensaje como el que se muestra a continuación y donde aprovecharemos de hacer un par de cálculos a modo de ejemplo.

```
Obatala%maxima
Maxima 5.36.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 1.2.10
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) integrate( tan(x), x );
(%o1)                              log(sec(x))
(%i2) float(sqrt(%pi));
(%o2)                           1.772453850905516
(%i3) quit();
```

Sobre UNIX podemos utilizar los archivos de entradas y salidas estándar para leer e imprimir información en el terminal: <, >, |.

```
Obatala% maxima < archimax.txt
```

Con esta instrucción **Maxima** ejecutará todos los comandos que se encuentran en el archivo de texto archimax.txt e irá mostrando los resultados en pantalla

En la siguiente instrucción **Maxima** ejecutará todos los comandos que se encuentran en el archivo de texto archimax.txt pero escribirá los resultados en el archivo de salida llamado archimax.out

```
Obatala% maxima < archimax.txt > archimax.out
```

También se puede hacer que todos los comandos del archivo sean ejecutados para luego ser enviados al terminal pero paginados.

```
Obatala% maxima < archimax.txt | more
```

Maxima puede ser detenido temporalmente con el comando "Control Z" de manera que para poner procesos en "background" se procede de la manera usual:

```
Obatala% maxima  < archimax.txt > archimax.out
^Z
Suspended
Obatala%> bg
[2] maxima  < archimax.txt > archimax.out &

Obatala%
```

Borrador Preliminar

O si lo preferimos, y de manera equivalente, podemos escribir la instrucción pero ponemos al final &

```
Obatala% maxima  < archimax.txt > archimax.out &
[1] 5114
```

13.2.4. Invocando la ayuda

El ambiente **wxMaxima** permite acceder al manual de ayuda fácilmente visible en la barra de herramientas, parte superior de la ventana. Pero también si conocemos el comando podemos escribir, por ejemplo:

```
(%i1) describe(diff);

 0: diff  (Functions and Variables for Differentiation)
 1: diff <1>  (Functions and Variables for Differentiation)
 2: diff <2>  (Functions and Variables for itensor)
Enter space-separated numbers, 'all' or 'none':
```

Al seleccionar una de las opciones, por ejemplo si escribimos 1 después de los dos puntos, aparecerá la descripción completa del comando:

```
 -- Function: diff
          diff (<expr>, <x_1>, <n_1>, ..., <x_m>, <n_m>)
          diff (<expr>, <x>, <n>)
          diff (<expr>, <x>)
          diff (<expr>)
     Returns the derivative or differential of <expr> with respect to
     some or all variables in <expr>.
     'diff (<expr>, <x>, <n>)' returns the <n>'th derivative of <expr>
     with respect to <x>.
     'diff (<expr>, <x_1>, <n_1>, ..., <x_m>, <n_m>)' returns the mixed
     partial derivative of <expr> with respect to <x_1>, ..., <x_m>.  It
     is equivalent to 'diff (... (diff (<expr>, <x_m>, <n_m>) ...),
     <x_1>, <n_1>)'.
     'diff (<expr>, <x>)' returns the first derivative of <expr> with
     respect to the variable <x>.
     'diff (<expr>)' returns the total differential of <expr>, that is,
     the sum of the derivatives of <expr> with respect to each its
     variables times the differential 'del' of each variable.  No
     further simplification of 'del' is offered.
     The noun form of 'diff' is required in some contexts, such as
     stating a differential equation.  In these cases, 'diff' may be
     quoted (as ''diff') to yield the noun form instead of carrying out
     the differentiation.....

     There are also some inexact matches for `diff'.
     Try `?? diff' to see them.
```

También podemos utilizar:

```
(%i2) apropos("diff");
```

Borrador Preliminar

```
[covdiff,diff,maxtaydiff,pdiff_diff_var_names,pdiff_prime_limit...]
```

O pedirle al programa algunos ejemplos

```
(%i3) example(diff);
```

```
(%i4) kill(f,g,h,x,y)
(%o4) done
(%i5) diff(sin(x)+x^3+2*x^2,x)
(%o5) cos(x)+3*x^2+4*x
(%i6) diff(sin(x)*cos(x),x)
(%o6) cos(x)^2-sin(x)^2
(%i7) diff(sin(x)*cos(x),x,2)
(%o7) -4*cos(x)*sin(x)
```

.
.
.

Las ayudas completas de **Maxima** se pueden consultar en: http://maxima.sourceforge.net/es/

13.2.5. Ejercicios

1. Calcule:
   a) los 70 primeros decimales del número e
   b) el arco coseno hiperbólico de 1
   c) la expansión de $\sin(2\arctan(x))$
2. Para la siguiente función
$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^2-1}}$$
   Calcule
   a) $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x^2}$
   b)
$$\int f(x)dx\,, \qquad \int_2^4 f(x)dx$$
   c)
$$\lim_{x\to\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,, \qquad \lim_{x\to 0} f(x)$$
   d) Haga un gráfico de $f(x)$ para valores de $x \in [-5, 5]$.
3. Encuentre las raíces de
$$p = x^7 + x^5 + 2x + x$$
4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial
$$x\frac{dy(x)}{dx} = y(x)\ln(xy(x)) - y(x);$$
   y haga una gráfica del campo de direcciones que muestre algunas curvas integrales.

Borrador Preliminar

5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{d^2t} - \left(1 - y(t)^2\right)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0\,, \quad \text{con:}\;\; y(0) = 0\,,\;\; \frac{dy(t)}{dt} = -0{,}1$$

6. Realice los ejercicios de la sección **??** con la ayuda de la librería **vect** de **Maxima**.

7. En un archivo de texto escriba las siguientes instrucciones que tienen que ver con operaciones de números complejos:

```
z_1=1+2%i;
z_2=3+4%i;
z_1+z_2;
z_1*z_2;
expand(%);
z_1/z_2;
rectform(%);
polarform(%);
```

guarde el archivo con el nombre pruebamax.txt y en un terminal de su computador, y en el mismo directorio donde está el archivo escriba:

```
localhost%  maxima < pruebamax.txt > pruebamax.out &
```

y verifique que en el archivo pruebamax.out se haya realizado los cálculos.

Borrador Preliminar

Bibliografía

[James Brown, Ruel Churchill 1999] James Brown and Ruel Churchill (1999) **Complex Variables and Applications.** (*McGraw-Hill Education; 9th Edición*)

[Konrad Knopp 1996] Konrad Knopp (1996) **Theory of Functions.** (*Dover Publications*)

[Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning.** (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.

[Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)

[1] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)

[Cushing 1975] Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences** (*John Wiley & Sons, New York*)

[Hamming 1973] Hamming R.W. (1973) **Numerical Methods For Scientist and Engineers, 2nd ed.** (Dover, New York.)

[Hassani 1991] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*)

[Lebedev 1972] Lebedev, N.N. (1972) **Special Functions & Their Applications** (*Dover Publications, New York*)

[math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** http://www.math-atlas.org/welcome.html

[Richards 2002] Richards, D. (2002) **Advanced Mathematical Methods with MAPLE** (*Cambridge University Press Cambridge*)

[Riley Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press Cambridge*)

[Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** http://mathworld.wolfram.com/

Borrador Preliminar