Título presentación

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

15 de noviembre de 2024

Agenda

1. Hamiltoniano y Péndulo
   - El problema y las coordenadas
   - El Lagrangeano y el Hamiltoniano

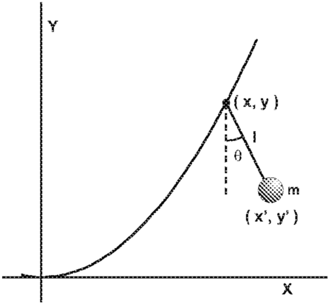
2. $\mathcal{H} = q + te^p$ y la transformación $Q = q + e^p, P = p$

3. $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2$

4. $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, q_3, \ldots, q_n, p_2, p_3, \ldots, p_n\right)$

Hamiltoniano y Péndulo

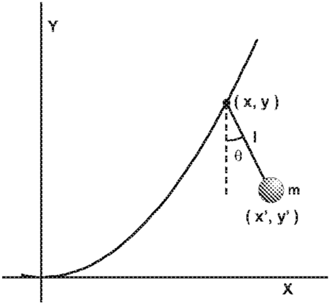
El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y',

Hamiltoniano y Péndulo

El punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parábola $y = ax^2$. Encontrar el Hamiltoniano.



- Sen las coordenadas del punto de sustentación del péndulo son x, y y las coordenadas de la masa x', y',
- Se tiene las siguientes relaciones:
  $x' = x + l\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad y' = y - l\cos\theta = ax^2 - l\cos\theta$
  $\dot{x}' = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta, \quad \dot{y}' = \dot{y} + l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = 2ax\dot{x} + l\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 \right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg \left(ax^2 - l\cos\theta \right)$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 4a^2x^2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\,\mathrm{sen}\,\theta)$

El Lagrangeano y el Hamiltoniano

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 \right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4axl\dot{x}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta \right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg\left(ax^2 - l\cos\theta \right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\,\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\,\theta)$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m}\frac{1}{(\text{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\,\theta}{(\text{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}\frac{1 + 4a^2x^2}{(\text{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml}\frac{\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\,\theta}{(\text{sen}\,\theta - 2ax\cos\theta)^2}$

- La energía cinética viene dada por: $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 \right) \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta + 4axl \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \right)$
- y la energía potencial por: $V = mgy' = mg \left(ax^2 - l\cos\theta \right)$
- A partir del lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$, obtenemos
  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + 4a^2x^2\right) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax \operatorname{sen}\theta)$
  $p_\theta = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}(\cos\theta + 2ax \operatorname{sen}\theta)$
- Despejando las velocidades $\dot{x} = \frac{p_x}{m} \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_\theta}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax \operatorname{sen}\theta}{(\operatorname{sen}\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
  $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \frac{1 + 4a^2x^2}{(\operatorname{sen}\theta - 2ax\cos\theta)^2} - \frac{p_x}{ml} \frac{\cos\theta + 2ax \operatorname{sen}\theta}{(\operatorname{sen}\theta - 2ax\cos\theta)^2}$
- Con lo cual $\mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{\theta}p_\theta - L$ se puede expresar
  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} \frac{1}{(\operatorname{sen}\theta - 2ax\cos\theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2ml^2} \frac{1 + 4a^2x^2}{(\operatorname{sen}\theta - 2ax\cos\theta)^2}$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0;$ y finalmente

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0$;
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$; y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = e^p$, $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$, y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1$, obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1$.

El hamiltoniano de un cierto sistema físico es: $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p, P = p$ es una transformación canónica. Seguidamente, encuentre la función generatriz de esta transformación. Finalmente, determine el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecuaciones de movimiento en las nuevas coordenadas.

.

Para determinar si la transformación es canónica, construimos el paréntesis de Poisson entre las coordenadas como $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$, entonces:

- $\{Q, Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} = (1)(e^p) - (e^p)(1) = 0;$
- $\{P, P\} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = (0)(1) - (1)(0) = 0$; y finalmente
- $\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$. Calculando cada una $\frac{\partial Q}{\partial q} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = e^p$, $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$, y $\frac{\partial P}{\partial p} = 1$, obtenemos $\{Q, P\} = (1)(1) - (e^p)(0) = 1$.
- Por lo tanto, como la tranformación cumple con $\{Q, Q\} = 0, \quad \{P, P\} = 0, \quad$ y $\quad \{Q, P\} = 1$. **Es canónica**

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

$\mathcal{H} = q + te^p$ y $Q = q + e^p \quad \& \quad P = p\,2/2$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad$ y $\quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$, $F_2(q, P) = qP + \int e^P \, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $\quad C = 0$

$\mathcal{H} = q + te^p$ y $Q = q + e^p$ & $P = p\,2/2$

Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo $p = P$ en $Q = q + e^P$, como $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$, $F_2(q, P) = qP + \int e^P \, dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$ y $C = 0$
- La función generadora es $F_2(q, P) = qP + e^P$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces
  $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces
  $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \operatorname{sen}\gamma t\cos\gamma t)\right]$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \operatorname{sen}\gamma t\cos\gamma t)\right]$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p'}{m}$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \operatorname{sen}\gamma t\cos\gamma t)\right]$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}' = p'\dot{q} - \mathcal{L}' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \operatorname{sen}\gamma t\cos\gamma t)\right]$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}' = p'\dot{q} - \mathcal{L}' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Como $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{q}} + \frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) = p' + \frac{\partial\Lambda}{\partial q}$

- El Lagrangeano será $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H}$. De la ecuación de movimiento $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t, \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} + A\cos\gamma t$
- Entonces $\mathcal{L} = \dot{q}p - \mathcal{H} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 + A\dot{q}\cos\gamma t + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t - A\gamma q \,\mathrm{sen}\,\gamma t$
- Queremos construir un lagrangeano de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d\Lambda}{dt}$
- $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}a\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}'} + \frac{d}{dt}\left[Aq\cos\gamma t + \frac{A^2}{4\gamma m}(\gamma t + \mathrm{sen}\,\gamma t\cos\gamma t)\right]$
- El nuevo momento $p' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p'}{m}$
- El nuevo Hamiltoniano $\mathcal{H}' = p'\dot{q} - \mathcal{L}' = \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Como $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = p' + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}$
- Por lo tanto $\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = p'\dot{q} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} - \mathcal{L}' - \frac{d\Lambda}{dt} = \mathcal{H}' + \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \mathcal{H}' - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, q_3, \ldots, q_n, p_2, p_3, \ldots, p_n\right)$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
  $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z\hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano
  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
  $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z\hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano
  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$
- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento $\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z\hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$
- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.
- Por lo tanto podemos escribir
$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta} + 2ma\cos\theta\right)}_{f(\theta, p_\theta)}$$

Sea un hamiltoniano de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(f\left(q_1, p_1\right), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n\right)$

- $f\left(q_1, p_1\right)$ es una constante del movimiento
  $$\{f, \mathcal{H}\} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} = 0$$
- Con el pontencial $V = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$, y $\vec{a} = a_z\hat{\mathbf{z}}$ construimos el hamiltoniano
  $$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} + \frac{a_z r\cos\theta}{r^3}$$
- ϕ es una coordenada cíclica y p_ϕ es una constante del movimiento.
- Por lo tanto podemos escribir
  $$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + 2ma\cos\theta\right)}_{f(\theta, p_\theta)}$$
- Es decir $f(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + 2ma\cos\theta\right)$ =cte