Integrales complejas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

18 de noviembre de 2025

Agenda Integrales complejas

1. Integrales complejas
2. Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z \; z^{-1}$
3. Teorema integral de Cauchy
4. Teorema de Morera y Fórmula integral de Cauchy
5. Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy
6. Recapitulando

Integrales complejas

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z)$.

Integrales complejas

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \;\Rightarrow\; |z_j - z_{j-1}| \to 0 \;\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z)$.
- Es una integral de línea, ya que z tiene "dos dimensiones" $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$.

Integrales complejas

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z)$.
- Es una integral de línea, ya que z tiene "dos dimensiones" $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$.
- Con las siguientes propiedades
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ \left(f(z) + g(z)\right) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z g(z)$.

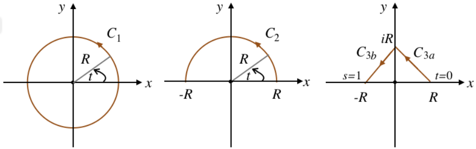
- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z)$.
- Es una integral de línea, ya que z tiene "dos dimensiones" $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$.
- Con las siguientes propiedades
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; (f(z) + g(z)) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z) + \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z g(z)$.
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; Kf(z) = K \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z)$ con K una constante real o compleja.

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z)$.
- Es una integral de línea, ya que z tiene “dos dimensiones” $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$.
- Con las siguientes propiedades
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ \left(f(z) + g(z)\right) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z g(z)$.
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ Kf(z) = K \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z)$ con K una constante real o compleja.
- $\int_{a}^{b} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{b}^{a} \mathrm{d}z\ f(z)$ y $\int_{a}^{b} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{a}^{m} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{m}^{b} \mathrm{d}z\ f(z)$

- Construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1})$ si $n \to \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \to 0 \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z)$.
- Es una integral de línea, ya que z tiene "dos dimensiones" $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y]\,[u(x,y) + iv(x,y)] =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$.
- Con las siguientes propiedades
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ \left(f(z) + g(z)\right) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z g(z)$.
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ Kf(z) = K \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z)$ con K una constante real o compleja.
- $\int_a^b \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_b^a \mathrm{d}z\ f(z)$ y $\int_a^b \mathrm{d}z\ f(z) = \int_a^m \mathrm{d}z\ f(z) + \int_m^b \mathrm{d}z\ f(z)$
- $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ |f(z)| \leq ML$, donde $M = \max |f(z)|$ y L la longitud de $\mathcal{C}$.
- Esta última propiedad permite establecer cotas a las integrales complejas sin evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demostración $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) \Rightarrow$
  $$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\zeta_j)|\ |\Delta z_j| \leq M \sum_{j=1}^{n} |\Delta z_j| \leq ML.$$

Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z\ z^{-1}$ 1/2

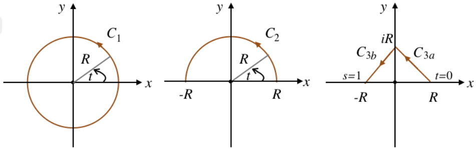
Evaluemos la integral de $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos



1. Un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R
$\oint \mathrm{d}z\ z^{-1} \equiv \oint \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i,$

Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z\ z^{-1}$ 1/2

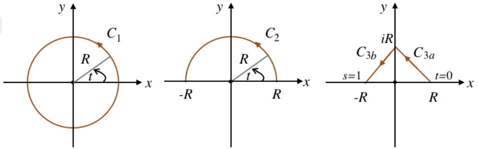
Evaluemos la integral de $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos



1. Un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R
$\oint \mathrm{d}z\ z^{-1} \equiv \oint \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i,$
2. Siguiendo una semicircunferencia desde $(R,0) \to (-R,0)$.
$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi i.$

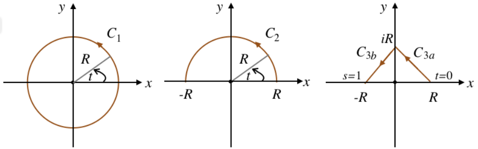
Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z\ z^{-1}$ 1/2

Evaluemos la integral de $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos



1. Un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R
$\oint \mathrm{d}z\ z^{-1} \equiv \oint \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i,$
2. Siguiendo una semicircunferencia desde $(R, 0) \to (-R, 0)$.
$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi i.$
3. Siguiendo dos líneas rectas $(R, 0) \to (0, R) \to (-R, 0)$.
$\int_{z_1=(R,0)}^{z_3=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} \mathrm{d}z\ z^{-1} + \int_{z_2=(0,R)}^{z_3=(0,-R)} \mathrm{d}z\ z^{-1},$

Evaluemos la integral de $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos



1. Un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R
$\oint \mathrm{d}z\ z^{-1} \equiv \oint \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi i,$
2. Siguiendo una semicircunferencia desde $(R,0) \to (-R,0)$.
$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} \mathrm{d}(Re^{i\theta})\ R^{-1}e^{-i\theta} = i\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi i.$
3. Siguiendo dos líneas rectas $(R,0) \to (0,R) \to (-R,0)$.
$\int_{z_1=(R,0)}^{z_3=(-R,0)} \mathrm{d}z\ z^{-1} = \int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} \mathrm{d}z\ z^{-1} + \int_{z_2=(0,R)}^{z_3=(0,-R)} \mathrm{d}z\ z^{-1},$
4. Parametrizamos $z = z(t)$ para $(R,0) \to (0,R)$ y $z = z(s)$ cuando $(0,R) \to (-R,0)$ $\quad z = x + iy \equiv (1-t)R + itR$ con $0 \leq t \leq 1$
$z = x + iy \equiv -sR + i(1-s)R$ con $0 \leq s \leq 1$,

Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z \; z^{-1}$ 2/2

1. Con lo cual $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$,

Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z\, z^{-1}$ 2/2

1. Con lo cual $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$,
2. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)\mathrm{d}t}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2} + i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}$

1. Con lo cual $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$,
2. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)\mathrm{d}t}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2} + i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}$
3. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \frac{1}{2}\ln(1-2t+2t^2)\Big|_0^1 + i\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow$
   $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = 0 + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$,

1. Con lo cual $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$,
2. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)\mathrm{d}t}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2} + i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}$
3. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \frac{1}{2}\ln(1-2t+2t^2)\Big|_0^1 + i \arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow$

   $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = 0 + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$,
4. La segunda integral $(0,R) \to (-R,0)$ tendrá el mismo resultado. Entonces, $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i$

Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z\ z^{-1}$ 2/2

1. Con lo cual $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$,
2. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)\mathrm{d}t}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2} + i \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}$
3. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \frac{1}{2} \ln(1-2t+2t^2)\Big|_0^1 + i \arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow$

   $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = 0 + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$,
4. La segunda integral $(0, R) \to (-R, 0)$ tendrá el mismo resultado. Entonces, $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i$
5. ¡El mismo resultado que a través del arco de circunferencia!

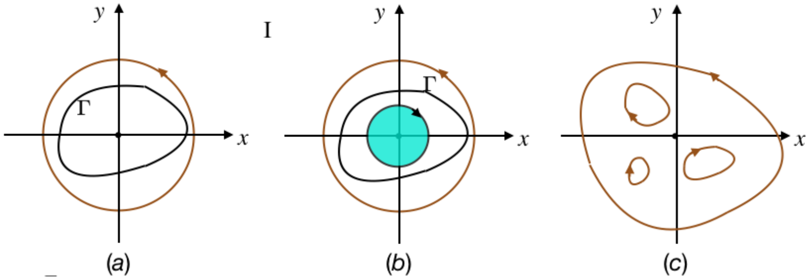
Ejemplo integral compleja: $\oint \mathrm{d}z\; z^{-1}$ 2/2

1. Con lo cual $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$,
2. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)\mathrm{d}t}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2} + i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}$
3. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \frac{1}{2}\ln(1-2t+2t^2)\Big|_0^1 + i\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow$

   $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = 0 + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$,
4. La segunda integral $(0,R) \to (-R,0)$ tendrá el mismo resultado. Entonces, $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i$
5. ¡El mismo resultado que a través del arco de circunferencia!
6. Si regresamos a $(R,0)$ a través de $(-R,0) \to (0,-R) \to (R,0)$ la integral cerrada se anula.

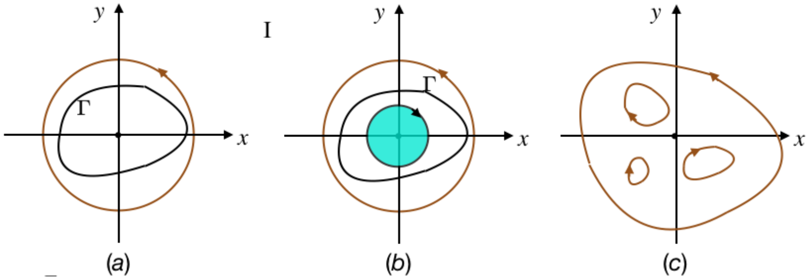
1. Con lo cual $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 \mathrm{d}s \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$,
2. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)\mathrm{d}t}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2} + i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-2t+2t^2}$
3. $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = \frac{1}{2}\ln(1-2t+2t^2)\Big|_0^1 + i\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \Rightarrow$
   $\int_0^1 \frac{(-1+i)\mathrm{d}t}{(1-t)+it} = 0 + \frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$,
4. La segunda integral $(0,R) \to (-R,0)$ tendrá el mismo resultado. Entonces, $\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i$
5. ¡El mismo resultado que a través del arco de circunferencia!
6. Si regresamos a $(R,0)$ a través de $(-R,0) \to (0,-R) \to (R,0)$ la integral cerrada se anula.
7. El valor de las integrales complejas, para algunas funciones, dependerán del camino seleccionado

Simple y Multiplemente Conexa



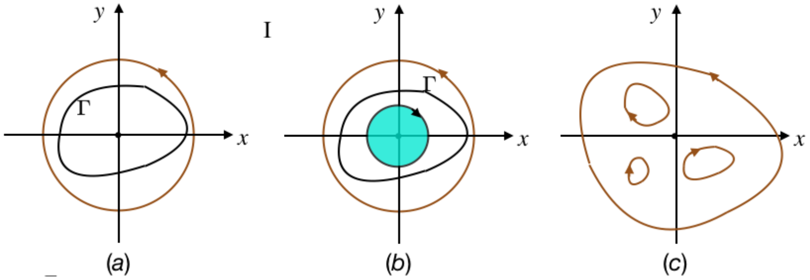
- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene "huecos"**.

Simple y Multiplemente Conexa



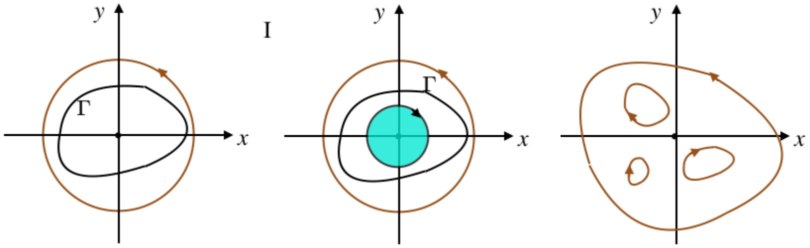
- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene "huecos"**.
- Una curva Γ puede ser reducida a un punto sin salir de la región $\mathcal{R}$.

Simple y Multiplemente Conexa



- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene "huecos"**.
- Una curva Γ puede ser reducida a un punto sin salir de la región $\mathcal{R}$.
- Una región **Multiplemente conexa** es aquella que **tiene "huecos"**

Simple y Multiplemente Conexa



(a) (b) (c)

- Una región **simplemente conexa** es aquella que **no tiene "huecos"**.
- Una curva Γ puede ser reducida a un punto sin salir de la región $\mathcal{R}$.
- Una región **Multiplemente conexa** es aquella que **tiene "huecos"**
- Existen curvas que no se pueden reducir a puntos en la región

Teorema integral de Cauchy

Si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función integrando es holomorfa entre esos dos puntos, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,.$

Teorema integral de Cauchy

Si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función integrando es holomorfa entre esos dos puntos, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 0\,.$
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \; f(z) =$
$\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\,.$

Teorema integral de Cauchy

Si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función integrando es holomorfa entre esos dos puntos, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 0 \,.$
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \; f(z) =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left[u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y\right] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left[v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y\right] \,.$
- El Teorema de Stokes implica $\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \oint_{\mathcal{C}} (p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x) \,,$

Teorema integral de Cauchy

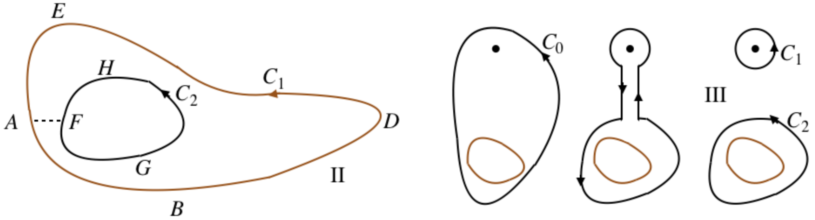
Si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función integrando es holomorfa entre esos dos puntos, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,.$
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]\,.$
- El Teorema de Stokes implica $\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \oint_{\mathcal{C}} (p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x)\,,$
- Si suponemos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, entonces tendremos que $\oint_{\mathcal{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i \oint_{\mathcal{C}} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y}\right) + i \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right) = 0\,,$

Teorema integral de Cauchy

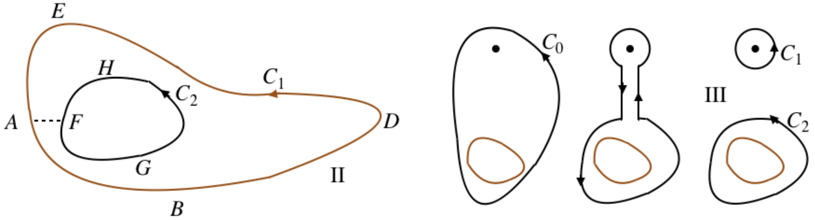
Si dos caminos de integración diferentes conectan dos puntos, y la función integrando es holomorfa entre esos dos puntos, entonces las integrales de la función a lo largo de ambos caminos serán iguales.

- si $f(z)$ es holomorfa en una región simplemente conexa, $\mathcal{R}$, en su contorno $\mathcal{C}$ y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado $\mathcal{C}$ se anula: $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z) = 0\,.$
- Si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) entonces $\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\; f(z) =$ $\int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left[u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y\right] + i \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \left[v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y\right]\,.$
- El Teorema de Stokes implica $\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\; \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\right) = \oint_{\mathcal{C}} (p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x)\,,$
- Si suponemos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, entonces tendremos que $\oint_{\mathcal{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i \oint_{\mathcal{C}} (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) =$ $\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\; \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y}\right) + i \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\; \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y}\right) = 0\,,$
- Las condiciones de Cauchy-Riemann anulan la integral de circulación.

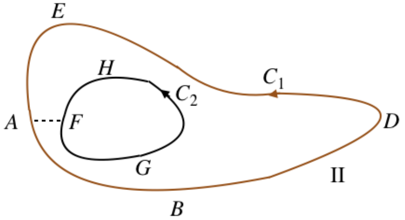


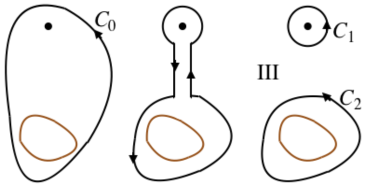
- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv \int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$

Observaciones y el Teorema de Morera



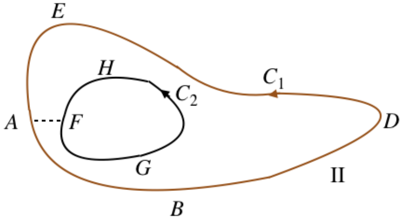
- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv$ $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$

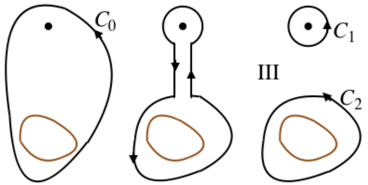




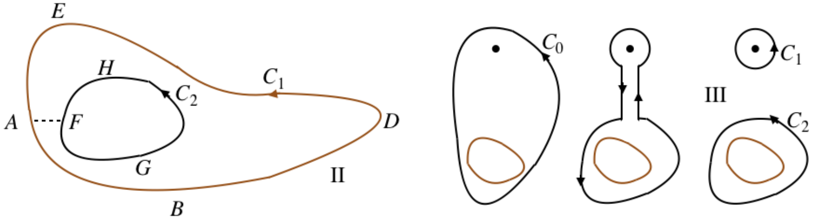
- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv \int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, para cualquier recorrido por las fronteras de una región, el valor de la integral permanecerá inalterado. $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$

Observaciones y el Teorema de Morera





- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv \int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, para cualquier recorrido por las fronteras de una región, el valor de la integral permanecerá inalterado. $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$
- Este resultado puede extenderse a regiones con n huecos $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\mathcal{C}_j} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$



- El Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} \mathrm{d}z\ f(z) \equiv \int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- como $\int_{AF} \mathrm{d}z\ f(z) = -\int_{FA} \mathrm{d}z\ f(z)$ entonces $\int_{ABDEA} \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{FGHF} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,,$
- Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$, para cualquier recorrido por las fronteras de una región, el valor de la integral permanecerá inalterado. $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$
- Este resultado puede extenderse a regiones con n huecos $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\mathcal{C}_j} \mathrm{d}z\ f(z)\,.$
- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**

- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**
  Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.

Teorema de Morera y Fórmula integral de Cauchy

- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**
  Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.
- **Fórmula integral de Cauchy**
  Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = f(z_0)\,.$

- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**
  Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.
- **Fórmula integral de Cauchy**
  Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = f(z_0)$.
- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces
  $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} \mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$.

- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**
  Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.
- **Fórmula integral de Cauchy**
  Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = f(z_0)$.
- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces
  $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} \mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$.
- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \to 0$ tendremos que
  $\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \to 0} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta = f(z_0)$.

- **Teorema de Morera, o teorema inverso de Cauchy**
  Si una función $f(z)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en $\mathcal{R}$.
- **Fórmula integral de Cauchy**
  Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ encerrada por un contorno $\mathcal{C}$ y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = f(z_0)$.
- $z - z_0 = re^{i\theta}$, entonces
  $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} \mathrm{d}\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$.
- Si hacemos $|z - z_0| \equiv r \rightarrow 0$ tendremos que
  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta = f(z_0)$.
- Es válida para todo z: $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}$.

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$.

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 1/2

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$.
- Claramente, $f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^2}$

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$.
- Claramente, $f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^2}$
- En general $f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 1/2

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$.
- Claramente, $f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}$
- En general $f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$
- $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2\zeta}\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta+1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1)$ con $f(z) = e^{2z} \Rightarrow I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$,
- El contorno $\mathcal{C}$ encerraba el punto $z = -1$, de otro modo la función $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ sería analítica y la integral se anula por el teorema de Cauchy.

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 1/2

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$.
- Claramente, $f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}$
- En general $f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$
- $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2\zeta}\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta+1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1)$ con $f(z) = e^{2z} \Rightarrow I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$,
- El contorno $\mathcal{C}$ encerraba el punto $z = -1$, de otro modo la función $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ sería analítica y la integral se anula por el teorema de Cauchy.
- $I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz$, para los entornos: $C\colon |z| = 3$ y $C\colon |z| = 1$.

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 1/2

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$.
- Claramente, $f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}$
- En general $f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$
- $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2\zeta}\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta+1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1)$ con $f(z) = e^{2z}$ $\Rightarrow$ $I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$,
- El contorno $\mathcal{C}$ encerraba el punto $z = -1$, de otro modo la función $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ sería analítica y la integral se anula por el teorema de Cauchy.
- $I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz$, para los entornos: $C\colon |z| = 3$ y $C\colon |z| = 1$.
- $|z| = 3$ contiene al punto $z_0 = 2$, e implica $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz = e^2$.

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 1/2

- Se generaliza para las derivadas: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\ \mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$.
- Claramente, $f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}$
- En general $f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] \mathrm{d}\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$
- $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2\zeta}\ \mathrm{d}\zeta}{(\zeta+1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1)$ con $f(z) = e^{2z} \Rightarrow I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$,
- El contorno $\mathcal{C}$ encerraba el punto $z = -1$, de otro modo la función $\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$ sería analítica y la integral se anula por el teorema de Cauchy.
- $I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz$, para los entornos: $C \colon |z| = 3$ y $C \colon |z| = 1$.
- $|z| = 3$ contiene al punto $z_0 = 2$, e implica $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z-2} dz = e^2$.
- Para $|z| = 1$, el punto $z_0 = 2$ no está contenido, $f(z)$ es analítica y la integral se anula

- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz$. Para: $C_1 : |z - i| = 2$ y $C_2 : |z| = 3$.

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 2/2

- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz$. Para: $C_1 : |z - i| = 2$ y $C_2 : |z| = 3$.
- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz$.

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 2/2

- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz$. Para: $C_1 : |z - i| = 2$ y $C_2 : |z| = 3$.
- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz$.
- Para $|z - i| = 2$, tendremos $I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$.

- $I=\int_C \frac{1}{z^2+4}dz$. Para: $C_1 : |z-i|=2$ y $C_2 : |z|=3$.
- $I=\int_C \frac{1}{z^2+4}dz=\int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)}dz$.
- Para $|z-i|=2$, tendremos $I=\int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}dz=2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right)=\frac{\pi}{2}$.
- El contorno $|z|=3$ contiene a los puntos $2i$ y $-2i$.

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 2/2

- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz$. Para: $C_1 : |z - i| = 2$ y $C_2 : |z| = 3$.
- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz$.
- Para $|z - i| = 2$, tendremos $I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- El contorno $|z| = 3$ contiene a los puntos $2i$ y $-2i$.
- Podemos trazar dos contornos de radio ϵ alrededor de cada punto:

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz$. Para: $C_1 : |z-i| = 2$ y $C_2 : |z| = 3$.
- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz$.
- Para $|z-i| = 2$, tendremos $I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- El contorno $|z| = 3$ contiene a los puntos $2i$ y $-2i$.
- Podemos trazar dos contornos de radio ϵ alrededor de cada punto:
- $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz$

- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz$. Para: $C_1 : |z-i| = 2$ y $C_2 : |z| = 3$.
- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz$.
- Para $|z-i| = 2$, tendremos $I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- El contorno $|z| = 3$ contiene a los puntos $2i$ y $-2i$.
- Podemos trazar dos contornos de radio ϵ alrededor de cada punto:
- $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz$
- $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{C_{(2i)}} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i} dz$

Ejemplo de uso Fórmula integral de Cauchy 2/2

- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz$. Para: $C_1 : |z - i| = 2$ y $C_2 : |z| = 3$.
- $I = \int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz$.
- Para $|z - i| = 2$, tendremos $I = \int_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- El contorno $|z| = 3$ contiene a los puntos $2i$ y $-2i$.
- Podemos trazar dos contornos de radio ϵ alrededor de cada punto:
- $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z^2+4} dz$
- $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{C_{(2i)}} \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i} dz$
- $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{z+2i}\right]_{z=2i} + 2\pi i \left[\frac{1}{z-2i}\right]_{z=-2i}$
- $\int_C \frac{1}{z^2+4} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{4i}\right] + 2\pi i \left[-\frac{1}{4i}\right] = 0$

Recapitulando

En presentación consideramos

1.