

Dos Problemas Sólidos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



30 de octubre de 2024

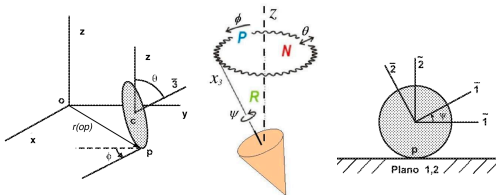
1 Moneda que rueda sin deslizar

- Ligaduras
- El Lagrangeano

2 Sección

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

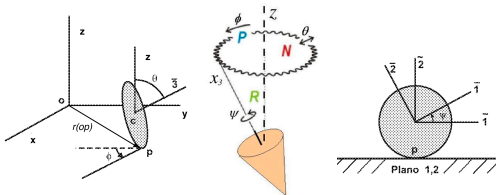
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

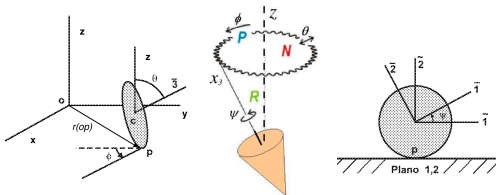
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

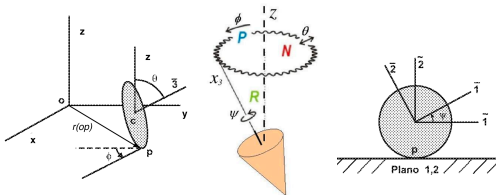
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\vec{r}(op) = \vec{R} + \vec{r}(cp) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(op)_p = 0 = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp)$

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos

$$\vec{r}(cp) = -a\mathbf{x}_2, \text{ y } \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\Omega_3 \mathbf{x}_1 - \Omega_1 \mathbf{x}_3)$$

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos

$$\vec{r}(cp) = -a\mathbf{x}_2, \text{ y } \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\Omega_3 \mathbf{x}_1 - \Omega_1 \mathbf{x}_3)$$

- Respecto al sistema centro de masa $\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$
 $\Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$ y $\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- Proyectamos la ecuación $0 = \vec{R} + \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp)$ al sistema S , $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$
tendremos $\dot{x} + a(\Omega_3 \mathbf{i} \cdot \mathbf{x}_1 - \Omega_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{x}_3) = 0$
 $\dot{y} + a(\Omega_3 \mathbf{j} \cdot \mathbf{x}_1 - \Omega_1 \mathbf{j} \cdot \mathbf{x}_3) = 0$
 $\dot{z} + a(\Omega_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \Omega_1 \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_3) = 0$

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[I_1(c)(\Omega_1)^2 + I_2(c)(\Omega_2)^2 + I_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[l_1(c)(\Omega_1)^2 + l_2(c)(\Omega_2)^2 + l_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right]$
- Donde $l_1 = l_2 = Ma^2/4$ y $l_3 = Ma^2/2$.

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[l_1(c)(\Omega_1)^2 + l_2(c)(\Omega_2)^2 + l_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right]$
- Donde $l_1 = l_2 = Ma^2/4$ y $l_3 = Ma^2/2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mga \sin \theta$

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[I_1(c)(\Omega_1)^2 + I_2(c)(\Omega_2)^2 + I_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right]$

- Donde $I_1 = I_2 = Ma^2/4$ y $I_3 = Ma^2/2$.

- Por su parte, la energía potencial $V = mga \sin \theta$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V$, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right] - mga \sin \theta$