Examen calificado sobre 20 ptos

Nombre:

1. Vuelve la totuma. Considere una semiesfera de masas M y radio R se encuentra sobre una superficie plana tal y como se muestra en la figura.

   a) Suponga que rueda sin deslizar y NO rota alrededor de su eje de simetría. ¿Cuáles son las cantidades conservadas del sistema? Justifique su respuesta. Si rota alrededor de su eje de simetría cuales serían ahora las cantidades conservadas (3ptos)

   R
   - La energía $\mathcal{E}$. El Lagrangeano del sistema $\mathcal{L} = T_{tras} + T_{rot} - V =$ no depende explícitamente del tiempo por lo tanto se conserva la energía $\mathcal{E} = T_{tras} + T_{rot} + V =$
   - La cantidad de movimiento angular $\mathbf{L}_z = I_z\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}}$. Si fijamos el sistema de laboratorio instantáneamente en el punto de contacto con el eje $\hat{\mathbf{z}}$ vertical hacia arriba y fijamos el sistema del centro de masa siguiendo los ejes de simetría de la semiesfera, con $\hat{\mathbf{x}}_3$
   - Si rota alrededor de su eje de simetría, tendría una cantidad conservada adicional $\mathbf{L}_3 = \mathbb{I}_3\dot{\psi}$.

   b) En término de los ángulos de Euler como se expresa la condición de rodar sin deslizar mas general para este sistema que no rota alrededor de sus eje de simetría (3ptos)

   R En general la condición de rodar sin deslizar tenemos $\dot{\mathbf{R}} = -\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$ y para este caso

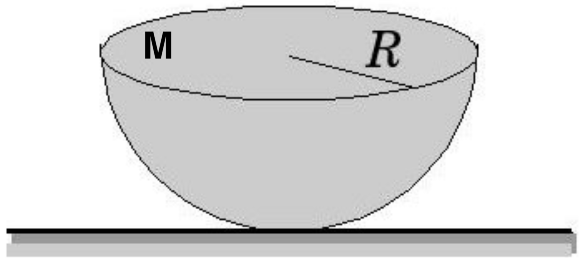
$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Omega}_2 & \tilde{\Omega}_3 \\ 0 & r_{cp2} & r_{cp3} \end{vmatrix} = (\tilde{\Omega}_2 r_{cp3} - \tilde{\Omega}_3 r_{cp2})\hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}_1 r_{cp3}\hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}_1 r_{cp2}\hat{\mathbf{x}}_3$$

   Con $\mathbf{r}_{cp} = -(R-a)\hat{\mathbf{x}}_3 - R\cos\theta\hat{\mathbf{x}}_3 - R\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}}_2 \equiv r_{cp2}\hat{\mathbf{x}}_2 + r_{cp3}\hat{\mathbf{x}}_3$, respecto al sistema centro de masa. Es decir $r_{cp2} = -R\operatorname{sen}\theta$ y $r_{cp3} = -((R-a) + R\cos\theta)$. Donde a es la distancia del centro de masa al borde de la semiesfera sobre el eje $\hat{\mathbf{x}}_3$
   Adicionalmente, en general, la velocidad angular $\tilde{\Omega}_i$, respecto al sistema centro de masa, es $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\theta}\,, \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\,, \quad \tilde{\Omega}_3 = \dot{\phi}\cos\theta$
   Entonces $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = -\operatorname{sen}\theta(R-a)\dot{\phi}\hat{\mathbf{x}}_1 - \dot{\theta}(R(1-\cos\theta) - a)\hat{\mathbf{x}}_2 - \dot{\theta}R\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}}_3$
   Proyectando tendremos
   $\dot{X}_{cm} = -\operatorname{sen}\theta(R-a)\dot{\phi}(\cos\phi) - \dot{\theta}(R(1-\cos\theta) - a)(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi) - \dot{\theta}R\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)$
   simplificando $\dot{X}_{\text{cm}} = -\operatorname{sen}\theta(R-a)\dot{\phi}\cos\phi - \dot{\theta}a\cos\theta\operatorname{sen}\phi$

   c) Considere el régimen de pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio. Suponga que NO rota alrededor de su eje de simetría y que tampoco precesa ($\dot{\psi} = \dot{\phi} = 0$). Encuentre la frecuencia de oscilacción y exprese las cantidades conservadas en términos de los parámetros del sistema. (2ptos)

2. Considere un sistema cuyo Hamiltoniano sea

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2$$



a) Determine la trayectoria del sistema en el espacio de fase (x, y, p_x, p_y). Suponga que conoce las condiciones iniciales
$x = x(t = 0)$, $y = y(t = 0)$, $p_x = p_x(t = 0)$ y $p_y = p_y(t = 0)$ (3ptos)

R Este sistema representa un oscilador armónico anisótropo bidimensional, con oscilaciones independientes en las direcciones x y y. El sistema tiene dos grados de libertad independientes y el espacio de fases es de 4 dimensiones: (x, y, p_x, p_y).
Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -k_x x\,, \qquad \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \text{y} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -k_y y$$

Por lo tanto

$$\ddot{p}_x = -k_x \dot{x} = -k_x \frac{p_x}{m} \Rightarrow p_x(t) = -m\omega_x A_x \sin(\omega_x t + \phi_x) \Rightarrow x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \phi_x), \quad \text{con} \quad \omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}\,.$$

$$\ddot{p}_y = -k_y \dot{x} = -k_y \frac{p_y}{m} \Rightarrow p_y(t) = -m\omega_y A_y \sin(\omega_y t + \phi_y) \Rightarrow y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \phi_y), \quad \text{con} \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}\,.$$

Como el Hamiltoniano no depende explítiamente del tiempo la energía se conserva

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}k_x x^2}_{E_x} + \underbrace{\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k_y y^2}_{E_y} = E_x + E_y = E$$

Cada grado de libertad corresponde a un oscilador armónico, por lo que las trayectorias en el plano x-p_x y y-p_y son elipses:

$$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}k_x x^2 = E_x \quad \text{y} \quad \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k_y y^2 = E_y$$

donde los semiejes de las elipses dependen de las energías E_x y E_y, respectivamente. El semieje mayor en x : $\sqrt{\frac{2E_x}{k_x}}$, mientras que el semieje mayor en p_x : $\sqrt{2mE_x}$. Equivalentemente, para el subespacio $y - p_y$.
Dado que los movimientos x y y están desacoplados, la trayectoria completa en el espacio de fase es el *producto directo de dos elipses.* La trayectoria en $4D$ puede visualizarse

como un toro, donde las coordenadas angulares del toro son las fases ϕ_x y ϕ_y. Si las frecuencias ω_x y ω_y son conmensuradas ($\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{p}{q}$, con enteros p, q), la trayectoria es periódica y se cierra tras q ciclos de un oscilador y p ciclos del otro. Si las frecuencias son inconmensurables (no son número racionales), la trayectoria llena densamente el toroide.

b) Dada las siguientes cantidades comprobar cuáles corresponde a constantes de movimiento y, en el caso que no lo sean, mostrar cuales condiciones tendrían que cumplir el sistema para que lo fueran (3 ptos).

1) las energías $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}$ y $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_2 y^2}{2}$.

R Una cantidad $f(q,p)$ es constante si su derivada total se anula y eso se expresa en término de los paréntesis de Poisson como

$$\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dE_x}{dt} = \{E_x, \mathcal{H}\} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{dE_y}{dt} = \{E_y, \mathcal{H}\} = 0.$$

Como el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo tampoco lo harán $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_x x^2}{2}$ y $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k_y y^2}{2}$. Ahora bien, desarrollando el paréntesis de Poisson para E_x tendremos

$$\{E_x, \mathcal{H}\} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} - \frac{\partial E_x}{\partial p_x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = (k_x x)\frac{p_x}{m} - \frac{p_x}{m}(k_x x) = 0$$

Con lo cual es una constante de movimiento. Equivalentemente se comprueba para E_y. Tanto E_x como E_y son constantes de movimiento porque no hay término de acoplamiento explícito entre x y y en el Hamiltoniano, por lo que la energía en cada dirección se conserva por separado.

2) la componente z de cantidad de movimiento angular $L_z = yp_x - xp_y$

R El momento angular $L_z = yp_x - xp_y$ es una constante de movimiento **sólo si el sistema es isótropo**, es decir $k_x = k_y$. Esta condición se cumple debido a la simetría rotacional del sistema. Si $k_x \neq k_y$, la anisotropía rompe la simetría, y L_z ya no se conserva. Esta conclusión se deriva de desarrollo del paréntesis de Poisson

$$\{L_z, \mathcal{H}\} = \sum_i \left(\frac{\partial L_z}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial L_z}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) \equiv \left(\frac{\partial L_z}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} + \frac{\partial L_z}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}\right) - \left(\frac{\partial L_z}{\partial p_x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial L_z}{\partial p_y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right).$$

Desarrollando las expresiones tendremos

$$\{L_z, \mathcal{H}\} = \underbrace{(-p_y)\frac{p_x}{m} + (p_x)\frac{p_y}{m}}_{=0} - \underbrace{(y)(k_x x) + (-x)(k_y y)}_{=(k_x - k_y)xy} \quad \Rightarrow \{L_z, \mathcal{H}\} = (k_x - k_y)xy = 0\,.$$

Que solo se cumple para el caso isótropo es decir $k_x = k_y$.

3) Cantidad conservada de cizalladura $K = \omega_x x\, \omega_y y + \frac{p_x p_y}{m^2}$. Con $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$, donde $i = x, y$

R Otra vez implementamos la constatación de que K sea constante vía los paréntesis de Poisson. Si $\{K,\mathcal{H}\}=0$ entonces K se conserva. Desarrollando

$$\{K,\mathcal{H}\}=\sum_i\left(\frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}-\frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}+\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}-\frac{\partial K}{\partial p_x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial p_y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}.$$

como para K

$$\frac{\partial K}{\partial x}=\omega_x\omega_y y,\quad \frac{\partial K}{\partial y}=\omega_x\omega_y x,\quad \frac{\partial K}{\partial p_x}=\frac{p_y}{m^2},\quad \text{y}\quad \frac{\partial K}{\partial p_y}=\frac{p_x}{m^2}.$$

y para $\mathcal{H}$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}=k_x x=m\omega_x^2 x,\quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}=k_y y=m\omega_y^2 y,\quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m},\quad \text{y}\quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}.$$

Tendremos

$$\{K,\mathcal{H}\}=(\omega_x\omega_y y)\frac{p_x}{m}+(\omega_x\omega_y x)\frac{p_y}{m}-\omega_x^2 x\frac{p_y}{m}-\omega_y^2 y\frac{p_x}{m}=\frac{1}{m}\left[yp_x(\omega_x\omega_y-\omega_y^2)+xp_y(\omega_x\omega_y-\omega_x^2)\right]$$

donde, claramente

$$\omega_x\omega_y-\omega_y^2=0\quad \text{y}\quad \omega_x\omega_y-\omega_x^2=0\qquad \Rightarrow \omega_x=\omega_y.$$

Lo que significa que K se conserva **si y sólo si el sistema es isótropo**, lo que significa $\omega_x=\omega_y$, o equivalentemente $k_x=k_y$.
La cantidad $K=\omega^2 x\,y+\frac{p_xp_y}{m^2}$ está asociada a una simetría de cizalladura (*Shear Symmetry*) que suele corresponder al acoplamiento entre coordenadas espaciales o entre variables del espacio de fases. Describe cómo se comporta el sistema bajo transformaciones que estiran o sesgan la estructura del espacio de fases sin alterar la dinámica global. Una transformación de este tipo puede expresarse como

$$\tilde{x}=x+\lambda y,\quad \tilde{y}=y\quad \text{o también en el espacio de fase como } \tilde{p}_x=p_x+\lambda p_y,\quad \tilde{p}_y=p_y.$$

c) Considere ls siguientes a trasnformaciones $(x,y,p_x,p_y)\to(\theta_x,\theta_y,P_x,P_y)$.

$$x=\sqrt{\frac{2P_x}{m\omega_x}}\cos(\theta_x)\,,\quad p_x=-\sqrt{2mP_x\omega_x}\,\text{sen}(\theta_x)\,,\quad y=\sqrt{\frac{2P_y}{m\omega_y}}\cos(\theta_y)\quad \text{y}\quad p_y=-\sqrt{2mP_y\omega_y}\,\text{sen}(\theta_y)$$

1) Verifique si esa trasnformación es canónica

R Para que esa transformación sea canónica se debe cumplir que

$$\{\theta_i,\theta_j\}=0,\quad \{P_i,P_j\}=0,\quad \{\theta_i,P_j\}=\delta_{ij},$$

Dado que θ_x y θ_y dependen de variables distintas (es decir, $\theta_x=\theta_x(x,p_x)$, y $\theta_y=\theta_y(y,p_y)$, es evidente que $\{\theta_x,\theta_y\}=0$ y algo equivalente ocurre para $\{P_x,P_y\}=0$

Para el caso

$$\{\theta_x, P_x\} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}\frac{\partial P_x}{\partial p_x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial p_x}\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

invertimos la transformación

$$P_x = \frac{m\omega_x}{2}\left(x^2 + \frac{p_x^2}{m\omega_x}\right) \quad \text{y} \quad \theta_x = \arctan\left(-\frac{p_x}{m\omega_x x}\right).$$

derivando

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{p_x}{(m\omega_x x)^2 + p_x^2}, \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial p_x} = -\frac{m\omega_x x}{(m\omega_x x)^2 + p_x^2}, \quad \frac{\partial P_x}{\partial x} = m\omega_x x, \quad \frac{\partial P_x}{\partial p_x} = p_x.$$

Sustituyendo comprobamos que $\{\theta_x, P_x\} = 1$. Para el caso $\{\theta_y, P_y\} = 1$, el procedimiento y los cálculos son idénticos, cambiando x por y, mientras que para las cruzadas $\{\theta_x, P_y\} = \{\theta_y, P_x\} = 0$ el argumento corresponde a que las variables son funciones independientes.

2) Construya el nuevo Hamiltoniano y calcule la función generadora.

R la energía cinética transforma como:

$$T = \frac{1}{2m}(2mP_x\omega_x \sin^2(\theta_x)) + \frac{1}{2m}(2mP_y\omega_y \sin^2(\theta_y)) = \omega_x P_x \sin^2(\theta_x) + \omega_y P_y \sin^2(\theta_y).$$

mientras que la energía potencial lo hace como

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 = P_x\omega_x \cos^2(\theta_x) + P_y\omega_y \cos^2(\theta_y.$$

Entonces el Hamiltoniano queda como

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{T} + \tilde{V} = \left(P_x\omega_x \sin^2(\theta_x) + P_y\omega_y \sin^2(\theta_y)\right) + \left(P_x\omega_x \cos^2(\theta_x) + P_y\omega_y \cos^2(\theta_y)\right) = P_x\omega_x + P_y\omega_y$$

Este Hamiltoniano sólo depende de los momentos P_x y P_y, y es independiente de los ángulos θ_x y θ_y, lo que indica que el movimiento es separable y periódico en estas nuevas variables.

Para calcular la función generadora proponemos $F_2(x, y, P_x, P_y)$, entonces las ecuaciones que corresponden a esta función son

$$p_x = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad \text{y} \quad \theta_x = \frac{\partial F_2}{\partial P_x}, \quad \theta_y = \frac{\partial F_2}{\partial P_y}$$

Una vez procedemos para el caso de uno de los movimientos armónicos. Entonces

$$p_x = \frac{\partial F_{2x}}{\partial x} \quad \Rightarrow F_{2x} = \int p_x\, dx + f(P_x) = -\sqrt{2mP_x\omega_x}\int \sin(\theta_x)\, dx + f(P_x) \quad \Rightarrow$$

Con lo cual

$$F_{2x}(x, P_x) = \int \left(-\sqrt{2mP_x\omega_x}\sin(\theta_x)\right)\left(-\sqrt{\frac{2P_x}{m\omega_x}}\sin(\theta_x)\, d\theta_x\right) + f(P_x) = P_x \int \sin^2(\theta_x) d\theta_x + f(P_x)$$

porque hemos recordado que

$$x = \sqrt{\frac{2P_x}{m\omega_x}}\cos(\theta_x) \quad \Rightarrow dx = -\sqrt{\frac{2P_x}{m\omega_x}}\sin(\theta_x)\,d\theta_x$$

Continuando

$$\theta_x = \frac{\partial F_{2x}}{\partial P_x} = \int \sin^2(\theta_x)d\theta_x + \frac{\partial f(P_x)}{\partial P_x} \quad \Rightarrow \theta_x = \frac{\theta_x}{2} - \frac{\sin(2\theta_x)}{4} + \frac{\partial f(P_x)}{\partial P_x}$$

Entonces

$$f(P_x) = P_x\left(\frac{\theta_x}{2} + \frac{\sin(2\theta_x)}{4}\right) \quad \Rightarrow F_{2x}(x, P_x) = P_x\theta_x \quad \Rightarrow F_2(x, y, P_x, P_y) = P_x\theta_x + P_y\theta_y$$

La dependencia en x y y entra a partir de las funciones θ_x y θ_y

Es importante aclarar que $P_x = 2\pi\frac{mA_x^2\omega_x}{2}$, y $P_y = 2\pi\frac{mA_y^2\omega_y}{2}$ son constantes de movimiento. Siendo A_x y A_y las amplitudes de oscilación del movimiento. (3ptos)

d) Integre la ecuación de Hamilton Jacobi para el oscilador armónico anisótropo (3ptos).

R La ecuación de Hamilton-Jacobi es:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(k_x x^2 + k_y y^2\right) = 0$$

Si suponemos una solución separable de la forma $S(x, y, t) = W(x, y) - Et$ donde $W(x, y)$ es una función de las coordenadas independiente del tiempo y E es la energía del sistema. Entonces

$$-E + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(k_x x^2 + k_y y^2\right) = 0$$

agrupando

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) = E - \frac{1}{2}\left(k_x x^2 + k_y y^2\right)$$

Volvemos a proponer separabilidad $W(x, y) = W_x(x) + W_y(y)$ y tendremos

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW_x}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}k_x x^2 = E_x \quad \text{y} \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_y}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 = E_y$$

En cada una de las direcciones podemos integrar

$$\frac{dW_x}{dx} = \sqrt{2m\left(E_x - \frac{1}{2}k_x x^2\right)} \quad \Rightarrow W_x(x) = \int\sqrt{2m\left(E_x - \frac{1}{2}k_x x^2\right)}\,dx$$

$$\frac{dW_y}{dy} = \sqrt{2m\left(E_y - \frac{1}{2}k_y y^2\right)} \quad \Rightarrow W_y(y) = \int\sqrt{2m\left(E_y - \frac{1}{2}k_y y^2\right)}\,dx$$

La solución general será

$$S(x, y, t) = W_x(x) + W_y(y) - Et$$

donde $W_x(x)$ and $W_y(y)$ son las integrales que dependen de E_x and E_y, respectivamente.