#### Dinámica Hamiltoniana

#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



13 de mayo de 2025

### Agenda



- 🚺 Entre Lagrange y Hamilton
  - La idea lagrangiana
  - La idea hamiltoniana
  - Velocidades generalizada y momentos conjugados
- El esquema Hamiltoniano
  - Del lagrangeano al hamiltoniano
  - La transformación de Legendre
  - El oscilador armónico
  - Partícula moviéndose en cono vertical
  - Partícula en un potencial central
- Simetrías y leyes de conservación
  - El Hamiltoniano y la Energía
  - Un ejemplo de la relación entre Hamiltoniano y la Energía total
- 4 Recapitulando
- Para la discusión



• La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t), i = 1, 2, ..., s$ , sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración  $(q_i, \dot{q}_i)$ .



- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ , i = 1, 2, ..., s, sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración  $(q_i, \dot{q}_i)$ .
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.



- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t), i = 1, 2, ..., s$ , sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración  $(q_i, \dot{q}_i)$ .
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las 2n condiciones iniciales: los valores de las coordenadas  $q_s$  y velocidades  $\dot{q}_s$  para un instante particular  $t_0$ .



- La formulación lagrangiana de la Mecánica describe el movimiento a partir de una función  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t), i = 1, 2, ..., s$ , sus coordenadas y velocidades generalizadas en el el espacio de configuración  $(q_i, \dot{q}_i)$ .
- En la formulación lagrangiana el movimiento de un sistema mecánico con n grados de libertad se rige por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.
- El movimiento del sistema se determina unívocamente al especificar las 2n condiciones iniciales: los valores de las coordenadas  $q_s$  y velocidades  $\dot{q}_s$  para un instante particular  $t_0$ .
- El movimiento se representa geométricamente mediante una trayectoria en el espacio de configuración n-dimensional descrito por las coordenadas generalizadas  $q_1, \ldots, q_n$



 La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase (p<sub>i</sub>, q<sub>i</sub>), en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas q<sub>i</sub> y de sus momentos conjugados p<sub>i</sub>.



- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase  $(p_i, q_i)$ , en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas  $q_i$  y de sus momentos conjugados  $p_i$ .
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de 2n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.



- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase  $(p_i, q_i)$ , en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas  $q_i$  y de sus momentos conjugados  $p_i$ .
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las *n* ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de 2*n* ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de 2n dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes  $q_i$  y  $p_i$ .



- La formulación hamiltoniana se desarrolla en el espacio de fase  $(p_i, q_i)$ , en términos del conjunto de sus coordenadas generalizadas  $q_i$  y de sus momentos conjugados  $p_i$ .
- La dinámica de hamiltoniana consiste en sustituir las n ecuaciones de Lagrange por un conjunto equivalente de 2n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- El movimiento se representa por una curva descrita en el espacio de fase, un espacio de 2n dimensiones cuyas coordenadas son las variables independientes  $q_i$  y  $p_i$ .
- La importancia del formalismo hamiltoniano radica en que proporciona un método potente, general y flexible para la investigación de elemento estructurales más profundos de la mecánica clásica. Por ello sirve de fundamento a la mecánica cuántica y a la mecánica estadística.



• No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de 2n ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables  $s_i = \dot{q}_i, i = 1, \ldots, n$ , tratando  $q_1, \ldots, q_n$  y  $s_1, \ldots, s_n$  como variables independientes.



- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de 2n ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables  $s_i = \dot{q}_i, i = 1, \ldots, n$ , tratando  $q_1, \ldots, q_n$  y  $s_1, \ldots, s_n$  como variables independientes.
- Es decir  $\dot{q}_i = s_i$ ,  $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para i = 1, ..., n, donde  $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$  es el Lagrangiano del sistema.



- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de 2n ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables  $s_i = \dot{q}_i, \ i = 1, \ldots, n$ , tratando  $q_1, \ldots, q_n$  y  $s_1, \ldots, s_n$  como variables independientes.
- Es decir  $\dot{q}_i = s_i$ ,  $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$  es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las  $q_i$  y  $s_i$  de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.



- No se trata de sustituir tivialmente las n ecuaciones de Lagrange por un sistema de 2n ecuaciones primer orden equivalente mediante un variables  $s_i = \dot{q}_i, i = 1, \ldots, n$ , tratando  $q_1, \ldots, q_n$  y  $s_1, \ldots, s_n$  como variables independientes.
- Es decir  $\dot{q}_i = s_i$ ,  $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\mathcal{L}(q_i, s_i, t)$  es el Lagrangiano del sistema.
- Estas ecuaciones, involucran a las  $q_i$  y  $s_i$  de forma muy asimétrica y no son especialmente útiles.
- Bajar el orden del sistema de ecuaciones dinámicas, se consigue describiendo la evolución del sistema mediante 2n, cantidades: las posiciones  $q_1, \ldots, q_n$  y los momentos conjugados  $p_1, \ldots, p_n$ , definidos por  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n$ .



• La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables  $(q_i, \dot{q}_i)$  por  $(q_i, p_i)$  en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  por  $\mathcal{H}(q, p, t)$  como generador de la dinámica.



- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables  $(q_i, \dot{q}_i)$  por  $(q_i, p_i)$  en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  por  $\mathcal{H}(q, p, t)$  como generador de la dinámica.
- Definimos  $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  como la transformación de Legendre del lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ . En el lado derecho las velocidades se expresan como  $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$ .



- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables  $(q_i, \dot{q}_i)$  por  $(q_i, p_i)$  en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  por  $\mathcal{H}(q, p, t)$  como generador de la dinámica.
- Definimos  $\mathcal{H}(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_{i}p_{i} \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$  como la transformación de Legendre del lagrangiano  $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ . En el lado derecho las velocidades se expresan como  $\dot{q}_{i} = f_{i}(q,p,t)$ .
- Las ecuaciones dinámicas serán  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$



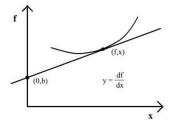
- La descripción hamiltoniana implica sustituir las variables  $(q_i, \dot{q}_i)$  por  $(q_i, p_i)$  en todas las magnitudes mecánicas y sustituir el Lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  por  $\mathcal{H}(q, p, t)$  como generador de la dinámica.
- Definimos  $\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_{i} p_{i} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  como la transformación de Legendre del lagrangiano  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ . En el lado derecho las velocidades se expresan como  $\dot{q}_{i} = f_{i}(q, p, t)$ .
- Las ecuaciones dinámicas serán  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i=1,\ldots,n$
- El planteamiento hamiltoniano de la dinámica implica los siguientes pasos:
  - Se fijan las coordenadas generalizadas y construye el lagrangeano a partir de las energías cinética y potencial
  - Se expresan la velocidades generalizadas en término de los momentos canónicos conjungados  $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$ .
  - Se construye el Hamiltoniano a partir de la transformación de Legendre del Lagrangeano

Dinámica Hamiltoniana

• Se plantean las ecuaciones dinámicas de Hamilton

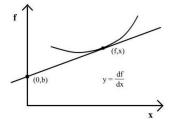


• Dada una función f(x), la transformación de Legendre permite encontrar otra función g(y) que contiene la misma información que f(x), usando como argumento la pendiente y = f'(x)





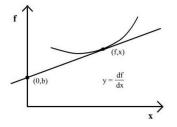
• Dada una función f(x), la transformación de Legendre permite encontrar otra función g(y) que contiene la misma información que f(x), usando como argumento la pendiente y = f'(x)



• Cada punto (f,x) en la curva f(x) define una línea recta que pasa por un punto (0,b) con pendiente y=f'(x).



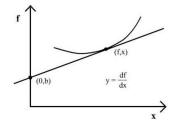
• Dada una función f(x), la transformación de Legendre permite encontrar otra función g(y) que contiene la misma información que f(x), usando como argumento la pendiente y = f'(x)



- Cada punto (f,x) en la curva f(x) define una línea recta que pasa por un punto (0,b) con pendiente y=f'(x).
- El conjunto de todas las rectas (y, b) describe las envolventes de la curva f(x) y contiene la misma información que f(x).



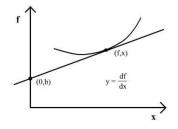
• Dada una función f(x), la transformación de Legendre permite encontrar otra función g(y) que contiene la misma información que f(x), usando como argumento la pendiente y = f'(x)



- Cada punto (f,x) en la curva f(x) define una línea recta que pasa por un punto (0,b) con pendiente y=f'(x).
- El conjunto de todas las rectas (y, b) describe las envolventes de la curva f(x) y contiene la misma información que f(x).
- Ambas descripciones (f,x) o de (y,b), son equivalentes.



• Dada una función f(x), la transformación de Legendre permite encontrar otra función g(y) que contiene la misma información que f(x), usando como argumento la pendiente y = f'(x)



- Cada punto (f,x) en la curva f(x) define una línea recta que pasa por un punto (0, b) con pendiente y = f'(x).
- El conjunto de todas las rectas (y, b) describe las envolventes de la curva f(x) y contiene la misma información que f(x).
- Ambas descripciones (f, x) o de (y, b), son equivalentes.
- https://youtu.be/vgLq90cOI\_M?si=bLGxc5GFEGesVJId



• La transformada de Legendre de una función f(x) se define como  $g(y) \equiv yx(y) - f(x(y))$ 



- La transformada de Legendre de una función f(x) se define como  $g(y) \equiv yx(y) f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a (-b, y) y, describen la misma curva que f(x).



- La transformada de Legendre de una función f(x) se define como  $g(y) \equiv yx(y) f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a (-b, y) y, describen la misma curva que f(x).
- Si tenemos una función de s variables  $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ , existen s derivadas  $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$  para  $i = 1, 2, \ldots, s$ .



- La transformada de Legendre de una función f(x) se define como  $g(y) \equiv yx(y) f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a (-b, y) y, describen la misma curva que f(x).
- Si tenemos una función de s variables  $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ , existen s derivadas  $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$  para  $i = 1, 2, \ldots, s$ .
- y la transformada de Legendre de  $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$  será  $g(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{i=1}^s x_i y_i f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ , con  $x_i = x_i (y_1, y_2, \ldots, y_s)$



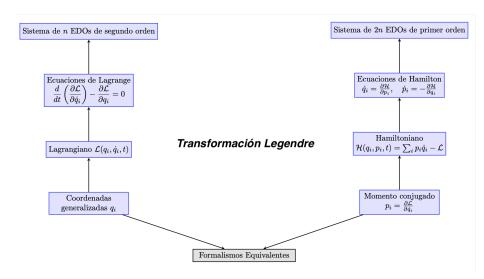
- La transformada de Legendre de una función f(x) se define como  $g(y) \equiv yx(y) f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a (-b, y) y, describen la misma curva que f(x).
- Si tenemos una función de s variables  $f(x_1, x_2, ..., x_s)$ , existen s derivadas  $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, ..., x_s)$  para i = 1, 2, ..., s.
- y la transformada de Legendre de  $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$  será  $g(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{i=1}^s x_i y_i f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ , con  $x_i = x_i (y_1, y_2, \ldots, y_s)$
- Variables termodinámicas conjugadas: (Presión-Volumen);
   (Temperatura-Entropía); (Potencial Químico-Número de partículas).



- La transformada de Legendre de una función f(x) se define como  $g(y) \equiv yx(y) f(x(y))$
- Matemáticamente, los puntos (g, y) corresponden a (-b, y) y, describen la misma curva que f(x).
- Si tenemos una función de s variables  $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ , existen s derivadas  $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$  para  $i = 1, 2, \ldots, s$ .
- y la transformada de Legendre de  $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$  será  $g(y_1, y_2, \ldots, y_s) = \sum_{i=1}^s x_i y_i f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ , con  $x_i = x_i (y_1, y_2, \ldots, y_s)$
- Variables termodinámicas conjugadas: (Presión-Volumen);
   (Temperatura-Entropía); (Potencial Químico-Número de partículas).
- Potenciales termodinámicos: entalpía  $\mathcal{H}(S,p)=U+pV$ ; Energía libre de Helmholtz F(T,V)=U-TS; y Energía libre de Gibbs G(T,p)=H-TS=U+pV-TS

### Formalismos Equivalentes







• El Lagrangiano es  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$ 



- ullet El Lagrangiano es  $\mathcal{L}=T-V=rac{1}{2}m\dot{q}^2-rac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado:  $p = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$



- El Lagrangiano es  $\mathcal{L}=T-V=rac{1}{2}m\dot{q}^2-rac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado:  $p=rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}=m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}=rac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q,p)=p\dot{q}-\mathcal{L}=p\dot{q}-\frac{1}{2}m\dot{q}^2+\frac{1}{2}kq^2$ , es decir  $\mathcal{H}(q,p)=p\frac{p}{m}-\frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2+\frac{1}{2}kq^2=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2$



- El Lagrangiano es  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado:  $p=rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}=m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}=rac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} \mathcal{L} = p\dot{q} \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$ , es decir  $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son  $\dot{q}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}=\frac{p}{m}$  y  $\dot{p}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}=-kq$



- El Lagrangiano es  $\mathcal{L}=T-V=rac{1}{2}m\dot{q}^2-rac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado:  $p=rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}=m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}=rac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} \mathcal{L} = p\dot{q} \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$ , es decir  $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son  $\dot{q}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}=\frac{p}{m}$  y  $\dot{p}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}=-kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange  $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$

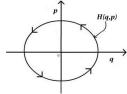


- El Lagrangiano es  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado:  $p=rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}=m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}=rac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} \mathcal{L} = p\dot{q} \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$ , es decir  $\mathcal{H}(q,p) = p\frac{p}{m} \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son  $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\bar{p}}{m}$  y  $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange  $\ddot{q}=rac{\dot{p}}{m}=-rac{k}{m}q$
- Con solución  $q(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ ,  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , es decir  $p(t) = m\dot{q} = Am\omega \cos(\omega t + \varphi)$

#### El oscilador armónico



- El Lagrangiano es  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \frac{1}{2}kq^2$
- Hay un único momento conjugado:  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} \mathcal{L} = p\dot{q} \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$ , es decir  $\mathcal{H}(q,p) = p \frac{p}{m} - \frac{1}{2}m \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- Las ecuaciones de Hamilton son  $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$  y  $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$
- Se resuelven igual que la ecuación de Lagrange  $\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}q$
- Con solución  $q(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$ , es decir  $p(t) = m\dot{q} = Am\omega\cos(\omega t + \varphi)$
- El Hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces  $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \text{cte Una elipse en el espacio de fase}$





• El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cot\alpha$ 



- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2 \alpha$  y  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$



- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2 \alpha$  y  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como  $\dot{r}=rac{p_r}{m\csc^2\alpha}$  y  $\dot{arphi}=rac{p_{arphi}}{mr^2}$



- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2 \alpha$  y  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como  $\dot{r}=rac{p_r}{m \csc^2 lpha}$  y  $\dot{arphi}=rac{p_{arphi}}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_{\varphi} \dot{\varphi} \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$  Es decir  $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_{\varphi}) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2} + mgr \cot \alpha$



- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2 \alpha$  y  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como  $\dot{r}=rac{p_r}{m\csc^2\alpha}$  y  $\dot{arphi}=rac{p_{arphi}}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_{\varphi} \dot{\varphi} \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$  Es decir  $\mathcal{H} \left( r, \varphi, p_r, p_{\varphi} \right) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_{\varphi}^2}{2m r^2} + mgr \cot \alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son  $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}$ ;  $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ ;  $\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{cte y } \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3} mg \cot \alpha$



- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2 \alpha$  y  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como  $\dot{r}=rac{p_r}{m \csc^2 lpha}$  y  $\dot{arphi}=rac{p_{arphi}}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_{\varphi} \dot{\varphi} \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$  Es decir  $\mathcal{H} \left( r, \varphi, p_r, p_{\varphi} \right) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_{\varphi}^2}{2m r^2} + mgr \cot \alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son  $\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2}$ ;  $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m \csc^2 \alpha}$ ;  $\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{cte y } \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_{\varphi}^2}{mr^3} mg \cot \alpha$
- Adicionalmente,  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \implies \mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_{\varphi}) = \text{cte.}$



- El sistema tiene 2 grados de libertad y su Lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\csc^2\alpha + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 mgr\cot\alpha$
- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2 \alpha$  y  $p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$
- Se despejan las velocidades generalizadas como  $\dot{r}=rac{p_r}{m\csc^2\alpha}$  y  $\dot{arphi}=rac{p_{arphi}}{mr^2}$
- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = p_r \dot{r} + p_{\varphi} \dot{\varphi} \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \csc^2 \alpha \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cot \alpha.$  Es decir  $\mathcal{H} \left( r, \varphi, p_r, p_{\varphi} \right) = \frac{p_r^2}{2m \csc^2 \alpha} + \frac{p_{\varphi}^2}{2m r^2} + mgr \cot \alpha$
- Las ecuaciones de Hamilton son  $\dot{\varphi}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\varphi}}=\frac{p_{\varphi}}{mr^{2}};\;\dot{r}=\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{r}}=\frac{p_{r}}{m\csc^{2}\alpha};\;\dot{p}_{\varphi}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow p_{\varphi}=mr^{2}\dot{\varphi}=$ cte y  $\dot{p}_{r}=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}=\frac{p_{\varphi}^{2}}{mr^{3}}-mg\cot\alpha$
- Adicionalmente,  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_{\varphi}) = \text{cte.}$
- La función  $\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_{\varphi}) = \text{cte describe una hipersuperficie}$ 3-dimensional en el espacio de fase 4-dimensional  $(r, \varphi, p_r, p_{\varphi})$ .



• El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$



• El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

• Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ;  $p_{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sec^2\theta\dot{\phi}$ .



• El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ;  $p_{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sec^2\theta\dot{\phi}$ .
- Despejamos las velocidades generalizadas  $\dot{r}=\frac{p_r}{m},~\dot{\theta}=\frac{p_{\theta}}{mr^2},$  y  $\dot{\phi}=\frac{p_{\phi}}{mr^2\sec^2{\theta}}$



• El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ;  $p_{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\phi}$ .
- Despejamos las velocidades generalizadas  $\dot{r}=\frac{p_r}{m},~\dot{\theta}=\frac{p_{\theta}}{mr^2},$  y  $\dot{\phi}=\frac{p_{\phi}}{mr^2\operatorname{sen}^2\theta}$
- Construimos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_{\theta} + \dot{\phi}p_{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_{\theta}^2}{r^2} + \frac{p_{\phi}^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\right) + V(r)$$



• El lagrangeano en coordenadas esféricas es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$

- Los momentos conjugados son  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ ;  $p_{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$  y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sec^2\theta\dot{\phi}$ .
- Despejamos las velocidades generalizadas  $\dot{r}=\frac{p_r}{m},~\dot{\theta}=\frac{p_{\theta}}{mr^2},$  y  $\dot{\phi}=\frac{p_{\phi}}{mr^2\operatorname{sen}^2\theta}$
- Construimos el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_{\theta} + \dot{\phi}p_{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_{\theta}^2}{r^2} + \frac{p_{\phi}^2}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\right) + V(r)$$

• Las ecuaciones de Hamilton serán  $\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}; \, \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2};$ 

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\phi}} = \frac{p_{\phi}}{mr^2 \, \text{sen}^2 \, \theta}; \ \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_{\theta}^2}{mr^3} + \frac{p_{\phi}^2}{mr^3 \, \text{sen}^2 \, \theta} - \frac{dV}{dr};$$

$$\dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{p_{\phi}^2 \cot \theta}{mr^2 \sec^2 \theta} \text{ y } \dot{p}_{\phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0.$$



• El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es equivalente a la función de energía  $\mathcal{E}$   $\mathcal{E}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i,p_i,t)$ 



- El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es equivalente a la función de energía  $\mathcal{E}$   $\mathcal{E}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i,p_i,t)$
- Es claro que  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$



- El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es equivalente a la función de energía  $\mathcal{E}$   $\mathcal{E}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i,p_i,t)$
- Es claro que  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces  $\mathcal{H}(q_i, p_i)$  es constante.



- El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es equivalente a la función de energía  $\mathcal{E}$   $\mathcal{E}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i,p_i,t)$
- Es claro que  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces  $\mathcal{H}(q_i, p_i)$  es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)



- El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es equivalente a la función de energía  $\mathcal{E}$   $\mathcal{E}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i,p_i,t)$
- Es claro que  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces  $\mathcal{H}(q_i, p_i)$  es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como  $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_0$ .  $\mathcal{L}_2$  es una función homogénea de grado dos,  $f(\lambda y_1,\ldots,\lambda y_s)=\lambda^2 f(y_1,\ldots,y_s)$ ,  $\mathcal{L}_1$  homogénea de grado 1 y  $\mathcal{L}_0$  homogénea de grado cero. Se cumple  $\sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf$ .



- El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es equivalente a la función de energía  $\mathcal{E}$   $\mathcal{E}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i,p_i,t)$
- Es claro que  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces  $\mathcal{H}(q_i, p_i)$  es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como  $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_0$ .  $\mathcal{L}_2$  es una función homogénea de grado dos,  $f(\lambda y_1,\ldots,\lambda y_s)=\lambda^2 f(y_1,\ldots,y_s)$ ,  $\mathcal{L}_1$  homogénea de grado 1 y  $\mathcal{L}_0$  homogénea de grado cero. Se cumple  $\sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf$ .
- Entonces  $\mathcal{E}(q_i,\dot{q}_i) = \sum_{i=1}^s rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L} = 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_0$



- El Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es equivalente a la función de energía  $\mathcal{E}$   $\mathcal{E}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L} = \mathcal{H}(q_i,p_i,t)$
- Es claro que  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$
- Si el Hamiltoniano de un sistema no depende explicitamente del tiempo, entonces  $\mathcal{H}(q_i, p_i)$  es constante.
- La función energía es el Hamiltoniano pero no es la energía total (ciertas condiciones aplican)
- Un lagrangeano se puede descomponer como  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0$ .  $\mathcal{L}_2$  es una función homogénea de grado dos,  $f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_s) = \lambda^2 f(y_1, \dots, y_s)$ ,  $\mathcal{L}_1$  homogénea de grado 1 y  $\mathcal{L}_0$  homogénea de grado cero. Se cumple  $\sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i = nf$ .
- Entonces  $\mathcal{E}(q_i,\dot{q}_i) = \sum_{i=1}^s rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \mathcal{L} = 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_0$
- Si  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  y el potencial no depende de las velocidades  $\mathcal{L}_2 = T$  y  $\mathcal{L}_0 = -V$ , entonces  $\mathcal{E} = T + V = E$



• Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular  $\omega$  constante.





• Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular  $\omega$  constante.



• El lagrangeano  $\mathcal{L}=\mathcal{T}=rac{m}{2}\left(\dot{r}^2+\omega^2r^2
ight),$ 



• Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular  $\omega$  constante.



- El lagrangeano  $\mathcal{L} = \mathcal{T} = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \right),$
- ullet El momento conjugado  $p_r=m\dot{r}$



• Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular  $\omega$  constante.



- El lagrangeano  $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \right)$ ,
- El momento conjugado  $p_r = m\dot{r}$  El hamiltoniano  $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} \frac{m\omega^2}{2}r^2$  no es la energía,

$$E=T=rac{p_r^2}{2m}+rac{m\omega^2}{2}r^2$$
 pero se conserva  $\partial \mathcal{H}/\partial t=0$ 



• Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular  $\omega$  constante.



- El lagrangeano  $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \right)$ ,
- El momento conjugado  $p_r = m\dot{r}$  El hamiltoniano  $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} \frac{m\omega^2}{2}r^2$  no es la energía,  $E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}r^2$  pero se conserva  $\partial \mathcal{H}/\partial t = 0$
- Diferentes elecciones de coordenadas generalizadas cambian la forma funcional de un Lagrangiano, pero su valor sigue siendo el mismo.



• Consideremos una cuenta de masa m que desliza por una barra, sin masa, que rota sobre un plano con velocidad angular  $\omega$  constante.



- El lagrangeano  $\mathcal{L} = T = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \right)$ ,
- El momento conjugado  $p_r = m\dot{r}$  El hamiltoniano  $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} \frac{m\omega^2}{2}r^2$  no es la energía,  $E = T = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}r^2$  pero se conserva  $\partial \mathcal{H}/\partial t = 0$
- Diferentes elecciones de coordenadas generalizadas cambian la forma funcional de un Lagrangiano, pero su valor sigue siendo el mismo.
- El valor y la forma funcional del hamiltoniano dependen del conjunto de coordenadas generalizadas. Puede ocurrir que se conserve en un sistema de coordenadas pero varíe en otro.



- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por 2n condiciones iniciales:  $q_i(t_0)$ ,  $\dot{q}_i(t_0)$ .



- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con  $\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$  en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por 2n condiciones iniciales:  $q_i(t_0)$ ,  $\dot{q}_i(t_0)$ .
- Formulación Hamiltoniana
  - Define el espacio de fase  $(q_i, p_i)$ , donde  $p_i = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ .
  - Ecuaciones de movimiento de primer orden:  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
  - Estructura rica y general, base de la mecánica cuántica y estadística.



- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por 2n condiciones iniciales:  $q_i(t_0)$ ,  $\dot{q}_i(t_0)$ .
- Formulación Hamiltoniana
  - Define el espacio de fase  $(q_i, p_i)$ , donde  $p_i = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ .
  - Ecuaciones de movimiento de primer orden:  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
  - Estructura rica y general, base de la mecánica cuántica y estadística.
- Ejemplo: Oscilador Armónico
  - $\bullet \ \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \frac{1}{2}kq^2$
  - $p = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$
  - $\bullet \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
  - El sistema describe una elipse en el espacio de fase.



- Formulación Lagrangiana
  - Describe la dinámica con  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  en el espacio de configuración.
  - Ecuaciones de segundo orden: una por cada grado de libertad.
  - Movimiento determinado por 2n condiciones iniciales:  $q_i(t_0)$ ,  $\dot{q}_i(t_0)$ .
- Formulación Hamiltoniana
  - Define el espacio de fase  $(q_i, p_i)$ , donde  $p_i = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ .
  - Ecuaciones de movimiento de primer orden:  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
  - Estructura rica y general, base de la mecánica cuántica y estadística.
- Ejemplo: Oscilador Armónico

$$\bullet \ \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

• 
$$p = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$\bullet \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

- El sistema describe una elipse en el espacio de fase.
- Importancia del Formalismo
  - Simplifica el tratamiento de sistemas con simetrías.
  - Introduce corchetes de Poisson y transformaciones canónicas.
  - Punto de partida hacia formulaciones modernas de la física teórica.

#### Resumiendo



#### Cuadro: Formalismos Equivalentes

Formalismo Lagrangiano	Formalismo Hamiltoniano
Elegir coordenadas generalizadas $q_i$	Usar las $q_i$ y definir los momentos conjugados $p_i = rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
Escribir el lagrangiano $\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)=T-V$	Calcular el hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i,p_i,t)=\sum_i \dot{q}_i p_i - L$
Ecuaciones de Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$	Ecuaciones de Hamilton: $\dot{q}_i=rac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \dot{p}_i=-rac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
Ecuaciones diferenciales de segundo orden para $q_i(t)$	Ecuaciones acopladas de primer orden para $q_i(t)$ , $p_i(t)$
Cantidades conservadas y coordenadas cíclicas q <sub>i</sub>	Cantidades conservadas a partir de simetrías de ${\cal H}$
Imagen geométrica: espacio de configuración $(q_i)$	Imagen geométrica: espacio de fases $(q_i, p_i)$
Simetrías mediante el teorema de Noether	Simetrías mediante transformaciones canónicas

#### Para la discusión



Una partícula de masa m se desliza sin fricción sobre un aro circular de radio R, el cual rota con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del eje vertical z. Describa la dinámica de la partícula utilizando el formalismo Hamiltoniano.

