Transformaciones Canónicas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



7 de noviembre de 2024

Agenda



- Transformaciones Canónicas
 - Transformaciones Puntuales
 - Transformaciones Canónicas
 - Transformacion Canónica y Principio de Mínima Acción
 - Función Generadora
 - Ejemplo de Función Generadora
 - Algunos Tipos de funciones generadoras
- Paréntesis de Poisson
 - Definición
 - Propiedades
 - Dos ejemplos



• Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual** de coordenadas $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual** de **coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual** de coordenadas $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i$, $P_i = q_i$



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual** de **coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i$, $P_i = q_i$
- Entonces $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) =$ $\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{Q}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) =$ $\sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \text{ Claramente no se cumplen}$

Transformaciones Canónicas



 Una transformación canónica es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\begin{array}{c|c} \mathcal{H}\left(q_{i},p_{i},t\right) & \rightarrow & \text{Transformación canónica} \rightarrow \left| \begin{array}{c} \tilde{\mathcal{H}}\left(Q_{i},P_{i},t\right) \\ \dot{q}_{i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{i}} \\ \dot{p}_{i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i}} \\ \end{array} \right| \rightarrow & P_{i} = P_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) \\ Q_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) & \dot{Q}_{i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{i}} \\ \dot{P}_{i} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{i}} \\ \end{array}$$

Transformaciones Canónicas



• Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\begin{array}{c|c} \mathcal{H}\left(q_{i},p_{i},t\right) & \rightarrow & \text{Transformación canónica} \rightarrow & \tilde{\mathcal{H}}\left(Q_{i},P_{i},t\right) \\ \dot{q}_{i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{i}} & P_{i} = P_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) & \dot{Q}_{i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{i}} \\ \dot{p}_{i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i}} & Q_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) & \dot{P}_{i} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{i}} \end{array}$$

• Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i,P_i,t\right)$ no depende explícitamente de alguna coordenada Q_j o momento P_j



• La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- ullet Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t
 ight)=\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L}$



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- ullet Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t
 ight)=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ genera las ecuaciones $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- ullet Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t
 ight)=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ genera las ecuaciones $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$
- Por su parte $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$ genera $\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n$



• Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.



- Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$



- Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $rac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H} \right)$



- Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $rac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H} \right)$
- La función \mathcal{F} se llama función generadora de la transformación canónica $\{q_i,p_i\} \to \{Q_i,P_i\}$.



• Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora \mathcal{F} es una propiedad característica de la función \mathcal{F} y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal F$ es una propiedad característica de la función $\mathcal F$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal F$ es una propiedad característica de la función $\mathcal F$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal F$ es una propiedad característica de la función $\mathcal F$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.
- La relación entre el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t\right)$ y el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i,P_i,t\right)$ resultante de la transformación canónica $\{q_i,p_i,t\} \to \{Q_i,P_i,t\}$ generada por una \mathcal{F} siempre es $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$.



Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}, i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$.

•
$$\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$$



Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$, i = 1, 2, generada por la función $\mathcal{G} = q_1(P_1 + 2p_2) + p_2P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{2} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 P_1 \dot{Q}_1 P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$



Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}, i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1(P_1 + 2p_2) + p_2P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{2} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 P_1 \dot{Q}_1 P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} (p_2 q_2) q_2 \dot{p}_2$; $P_1 \dot{Q}_1 = \frac{d}{dt} (P_1 Q_1) Q_1 \dot{P}_1$; $P_2 \dot{Q}_2 = \frac{d}{dt} (P_2 Q_2) Q_2 \dot{P}_2$



Encontrar la transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}, i = 1, 2$, generada por la función $\mathcal{G} = q_1(P_1 + 2p_2) + p_2P_2$.

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{2} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 P_1 \dot{Q}_1 P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2\dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(p_2q_2) q_2\dot{p}_2$; $P_1\dot{Q}_1 = \frac{d}{dt}(P_1Q_1) Q_1\dot{P}_1$; $P_2\dot{Q}_2 = \frac{d}{dt}(P_2Q_2) Q_2\dot{P}_2$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1\dot{q}_1 q_2\dot{p}_2 + Q_1\dot{P}_1 + Q_2\dot{P}_2 + \frac{d}{dt}(p_2q_2 P_1Q_1 P_2Q_2) + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$



• Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2;$ $p_1 = P_1 + 2p_2;$ $Q_1 = q_1;$ $-q_2 = 2q_1 + P_2;$ $Q_2 = p_2$



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2$; $p_1 = P_1 + 2p_2$; $Q_1 = q_1$; $-q_2 = 2q_1 + P_2$; $Q_2 = p_2$
- La transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ generada por G es $P_1 = p_1 2p_2$ $Q_1 = q_1$; $P_2 = -2q_1 q_2$ $Q_2 = p_2$.

Tipos de Funciones Generadoras



Funciones Generadoras	Funciones Generadadoras y derivadas	Un ejemplo sencillo
$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1(q,Q,t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}; P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_1 = q_i Q_i, Q_i = p_i, P_i = -q_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}; Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_2 = q_i P_i, Q_i = q_i, P_i = p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -rac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}; P_i = -rac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_3 = p_i Q_i, Q_i = -q_i, P_i = -p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -rac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}; Q_i = rac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_4 = p_i P_i, Q_i = p_i, P_i = -q_i$

Paréntesis de Poisson: Definición



• Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.



- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.



- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i=rac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-rac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$



- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$



- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f,\mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.



- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f,\mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$



- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f,\mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Si f no depende explícitamente del tiempo (cantidad conservada), tenemos $\{f,\mathcal{H}\}=0$



- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , i = 1, ..., s, de un sistema mecánico con un Hamiltoniano $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$.
- La derivada total de f es $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Sus ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$
- Sustituyendo, tenemos $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Entonces el paréntesis de Poisson de la función f para un sistema con hamiltoniano \mathcal{H} es $\{f,\mathcal{H}\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$.
- Con lo cual $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$
- Si f no depende explícitamente del tiempo (cantidad conservada), tenemos $\{f,\mathcal{H}\}=0$
- Para $f(q_i, p_i, t)$ y $g(q_i, p_i, t)$ podemos definir el paréntesis de Poisson de f y g como $\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$.



 El paréntesis de Poisson puede ser considerado como una operación entre dos funciones definidas en un espacio algebraico que asigna otra función en ese espacio.



- El paréntesis de Poisson puede ser considerado como una operación entre dos funciones definidas en un espacio algebraico que asigna otra función en ese espacio.
- El paréntesis de Poisson, como operación algebraica, posee las siguientes propiedades (características de lo que se denomina álgebra de Lie):
 - $\{f,g\} = -\{g,f\}, \quad \{f,f\} = 0$ (antisimetría).
 - $\{f,c\} = 0$, si c =cte.
 - $\{af_1 + bf_2, g\} = a\{f_1, g\} + b\{f_2, g\}, \quad a, b = \text{ctes}, \text{ un operador lineal.}$
 - $\{f_1f_2,g\} = f_1\{f_2,g\} + f_2\{f_1,g\}$, (no asociativo).
 - $\bullet \ \{f,\{g,\mathcal{H}\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0 \quad \text{ la identidad de Jacobi.}$



 \bullet Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_{i}, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_{i}}{\partial q_{k}} \frac{\partial f}{\partial p_{k}} - \frac{\partial q_{k}}{\partial p_{k}} \frac{\partial f}{\partial q_{k}} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_{k}} = \frac{\partial f}{\partial p_{i}}$$

$$\{p_{i}, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial p_{i}}{\partial q_{k}} \frac{\partial f}{\partial p_{k}} - \frac{\partial p_{i}}{\partial p_{k}} \frac{\partial f}{\partial q_{k}} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_{k}} = -\frac{\partial f}{\partial q_{i}}.$$



ullet Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial g_k}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

• Si $f=p_j$, ó $f=q_j$, $\{q_i,q_j\}=0$, $\{p_i,p_j\}=0$, $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}$



ullet Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial g_k}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$



ullet Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial p'}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \right) = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, 6 $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$
- En Mecánica Cuántica, la operación [A, B] = AB BA se denomina el conmutador de los operadores u observables A y B.



ullet Como p_i y q_i representan coordenadas independientes tenemos

$$\{q_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$\{p_i, f\} = \sum_{k=1}^{s} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} \end{pmatrix} = -\sum_{k=1}^{s} \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

- Si $f = p_j$, ó $f = q_j$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
- Utilizando paréntesis de Poisson, las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse como $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \{q_i, \mathcal{H}\}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \{p_i, \mathcal{H}\}$
- En Mecánica Cuántica, la operación [A, B] = AB BA se denomina el conmutador de los operadores u observables A y B.
- La estructura algebraica de la Mecánica Clásica, expresada en las propiedades de los paréntesis de Poisson, se preserva en la Mecánica Cuántica. En particular, $\{q_i, p_j\} = i\hbar \delta_{ij}$, donde \hbar es la constante de Planck (dividida por 2π).

Dos Ejemplos



- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
 - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$
 - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
 - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
 - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

Dos Ejemplos



- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
 - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$
 - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
 - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
 - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$
- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$L_x = yp_z - zp_y$$
, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$

Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de **p** y **L**:

$$\begin{aligned} \{p_{y}, L_{x}\} &= -\frac{\partial L_{x}}{\partial y} = -p_{z}; \quad \{p_{x}, L_{x}\} = -\frac{\partial L_{x}}{\partial x} = 0; \\ \{p_{z}, L_{y}\} &= -\frac{\partial L_{y}}{\partial z} = -p_{x} \\ \{L_{x}, L_{y}\} &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial L_{x}}{\partial q_{i}} \frac{\partial L_{y}}{\partial p_{i}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{i}} \frac{\partial L_{y}}{\partial q_{i}}\right) \\ \{L_{x}, L_{y}\} &= \\ \left(\frac{\partial L_{x}}{\partial x} \frac{\partial L_{y}}{\partial p_{x}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{x}} \frac{\partial L_{y}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial L_{x}}{\partial y} \frac{\partial L_{y}}{\partial p_{y}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{y}} \frac{\partial L_{y}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial L_{x}}{\partial z} \frac{\partial L_{y}}{\partial p_{z}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{z}} \frac{\partial L_{y}}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

 $\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$

Dos Ejemplos



- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
 - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$
 - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
 - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
 - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$
- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$L_x = yp_z - zp_y$$
, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$

Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de p y L:

$$\{p_{y}, L_{x}\} = -\frac{\partial L_{x}}{\partial y} = -p_{z}; \quad \{p_{x}, L_{x}\} = -\frac{\partial L_{x}}{\partial x} = 0;$$

$$\{p_{z}, L_{y}\} = -\frac{\partial L_{y}}{\partial z} = -p_{x}$$

$$\{L_{x}, L_{y}\} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial L_{x}}{\partial q_{i}} \frac{\partial L_{y}}{\partial p_{i}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{i}} \frac{\partial L_{y}}{\partial q_{i}}\right)$$

$$\{L_{x}, L_{y}\} \equiv \sum_{i=1} \left(\frac{\partial q_{i}}{\partial q_{i}} \frac{\partial p_{i}}{\partial p_{i}} - \frac{\partial p_{i}}{\partial p_{i}} \frac{\partial q_{i}}{\partial q_{i}} \right)$$
$$\{L_{x}, L_{y}\} =$$

$$\left(\frac{\partial L_{x}}{\partial x}\frac{\partial L_{y}}{\partial p_{x}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{x}}\frac{\partial L_{y}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial L_{x}}{\partial y}\frac{\partial L_{y}}{\partial p_{y}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{y}}\frac{\partial L_{y}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial L_{x}}{\partial z}\frac{\partial L_{y}}{\partial p_{z}} - \frac{\partial L_{x}}{\partial p_{z}}\frac{\partial L_{y}}{\partial z}\right)
\left\{L_{x}, L_{y}\right\} = xp_{y} - yp_{x} = L_{z}; \quad \left\{L_{y}, L_{z}\right\} = L_{x} \quad \left\{L_{z}, L_{x}\right\} = L_{y}$$

• En general, $\{l_i,l_j\}=\epsilon_{ijk}l_k$ y en Mecánica Cuántica, $[l_i,l_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}l_k$.