Empezando con los complejos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

11 de noviembre de 2025

Agenda: empezando con los complejos

Números Complejos

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios
  $x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow\; (x + 2i)\,(x - 2i) = 0$, y nos lleva a definir un número $i^2 \equiv -1$

Números Complejos

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios
  $x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow \; (x + 2i)\,(x - 2i) = 0\,,y$ nos lleva a definir un número $i^2 \equiv -1$
- Un número complejo, z, es la generalización de los números imaginarios (puros), ib. Esto es:
  $z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$

Números Complejos

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios
  $x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; (x + 2i)\,(x - 2i) = 0\,,$ y nos lleva a definir un número $i^2 \equiv -1$
- Un número complejo, z, es la generalización de los números imaginarios (puros), ib. Esto es:
  $z = a + ib \qquad$ con $a, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$
- Cada número complejo, z tendrá asociado un número complejo conjugado, z^* tal que:

$$z = a + ib \quad \rightleftharpoons \quad z^* = a - ib\,,$$
$$\Downarrow$$
$$(z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2\,,$$

claramente: $z \cdot z^* \geq 0 \;\Rightarrow\; |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2\,.$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 \,.$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 \,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 \,,$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 \,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 \,,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 + ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\, z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \,.$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2\,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3\,,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 + ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\,z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*\,.$
- Se multiplican números complejos entre si,
  $z_3 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,,$
  también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales
  $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 \,.$
- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 \,,$
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 + ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z$, también $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}\, z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \,.$
- Se multiplican números complejos entre si,
  $z_3 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \,,$
  también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.
- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales:
  $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \;\Rightarrow\; \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}\frac{(a_2-ib_2)}{(a_2-ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)} + i\,\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)} \,,$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\,, \quad \text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \; -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z =$

$$r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\,, \quad \text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

- Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = Re\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = Im\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

Representaciones complejas

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z =$

$$r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\,, \quad \text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

- Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = Re\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = Im\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z =$

$$r\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\,, \quad \text{con:} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

- Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = Re\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = Im\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte ima} \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z \end{array}$$

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$
- Entonces, tenemos tres formas de representar un número complejo: $z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right) \quad \leftrightharpoons \quad z = |z|e^{i\theta}$.

Funciones de variable compleja

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.

Funciones de variable compleja

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Entonces $f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$,
  con $u(x,y)$ la parte real y $v(x,y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región $\mathcal{S}$ será diferenciable en esa región si la derivada

$$
\begin{aligned}
f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}\,,
\end{aligned}
$$

  existe y es única.

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Entonces $f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$,
  con $u(x,y)$ la parte real y $v(x,y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región $\mathcal{S}$ será diferenciable en esa región si la derivada

$$
\begin{aligned}
f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y} ,
\end{aligned}
$$

existe y es única.
- Existe sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, si $\Delta z \to 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \to 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y = 0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} , \\
f'(z)_{\Delta x = 0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} .
\end{aligned}
$$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 2x + i2y$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0\,;\Delta x \to 0$ en el plano complejo.

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0\,; \Delta x \to 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0\,;\Delta x \to 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0\,; \Delta x \to 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0\,;\, \Delta x \to 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$
- Consideremos ahora $f(z) = 2x + iy$ Verifique si es diferenciable.

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0\,; \Delta x \to 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$
- Consideremos ahora $f(z) = 2x + iy$ Verifique si es diferenciable.
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{2x + 2\Delta x + i(y+\Delta y) - 2x - iy}{\Delta x + i\Delta y}$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0\,; \Delta x \to 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$
- Consideremos ahora $f(z) = 2x + iy$ Verifique si es diferenciable.
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{2x + 2\Delta x + i(y+\Delta y) - 2x - iy}{\Delta x + i\Delta y}$
- Con lo cual $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{2\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x} \right] ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \left[-i \frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y} \right] ,
\end{aligned}
$$

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)]+i\,[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[u(x,y+\Delta y)-u(x,y)]+i\,[v(x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta y}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\left[-i\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y}+\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y}\right],
\end{aligned}
$$

- y tienen que ser iguales
$f'(z)_{\Delta y=0}=f'(z)_{\Delta x=0} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i\,\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}\right] ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y\to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \left[-i\,\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y}\right] ,
\end{aligned}
$$

- y tienen que ser iguales
$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$.
- Con lo cual $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)] + i\,[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x} \right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i\,[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \left[-i \frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y} \right],
\end{aligned}
$$

- y tienen que ser iguales
$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$.
- Con lo cual $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann
- Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, si $f(z)$ es analítica, $u(x,y)$ y $v(x,y)$ serán funciones armónicas conjugadas: $\nabla^2 u(x,y) = \nabla^2 v(x,y) = 0$.

Ejemplos y curiosidades

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,

Ejemplos y curiosidades

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x\mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x\mathrm{sen}(y)\,,$

Ejemplos y curiosidades

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
4. Supongamos la función armónica conjugada $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
4. Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
5. Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \;\Rightarrow$
   $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)\,,$

Ejemplos y curiosidades

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
$\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
4. Supongamos la función armónica conjugada $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
5. Su parte imaginaria $v(x,y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \;\Rightarrow$
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)\,,$
6. Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
$\Rightarrow \phi = C \;\Rightarrow\; v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C\,.$

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
4. Supongamos la función armónica conjugada $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
5. Su parte imaginaria $v(x,y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \;\Rightarrow$
   $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)\,,$
6. Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
   $\Rightarrow \phi = C \;\Rightarrow\; v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C\,.$
7. Una función compleja genérica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, tal que $u(x,y) = \text{const}$ y $v(x,y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y) = 0$.

Ejemplos y curiosidades

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
4. Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
5. Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \;\Rightarrow$
   $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)\,,$
6. Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
   $\Rightarrow \phi = C \;\Rightarrow\; v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C\,.$
7. Una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.
8. $\nabla u \cdot \nabla v = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}\right] \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}\right] = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
4. Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
5. Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \;\Rightarrow$
   $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)\,,$
6. Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
   $\Rightarrow \phi = C \;\Rightarrow\; v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C\,.$
7. Una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.
8. $\nabla u \cdot \nabla v = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}\right] \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}\right] = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$
9. Las condiciones de Cauchy-Riemann $\nabla u \cdot \nabla v = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$

1. Dada la función $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\right)$,
2. Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
   $\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^{x}\cos(y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{sen}(y)\,,$
3. Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
4. Supongamos la función armónica conjugada $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
5. Su parte imaginaria $v(x,y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \;\Rightarrow$
   $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \;\Rightarrow\; v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)\,,$
6. Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
   $\Rightarrow \phi = C \;\Rightarrow\; v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C\,.$
7. Una función compleja genérica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, tal que $u(x,y) = \text{const}$ y $v(x,y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y) = 0.$
8. $\nabla u \cdot \nabla v = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}\right]\cdot\left[\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}\right] = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$
9. Las condiciones de Cauchy-Riemann $\nabla u \cdot \nabla v = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$
10. Es decir, $u(x,y) =$const y $v(x,y) =$const, corresponden a *trayectorias mutuamente ortogonales*.

En presentación consideramos

1.

Para la discusión

1. ¿ Cuáles de las siguientes funciones son analíticas?
   1. $f(z) = izz^*$
   2. $f(z) = \mathrm{e}^{-2x}\left(cos(2y) - i\mathrm{sen}(2y)\right)$
   3. $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(cos(y) - i\mathrm{sen}(y)\right)$
   4. $f(z) = \mathrm{Re}\left(z^2\right) - i\ \mathrm{Im}\left(z^2\right)$
   5. $f(z) = 1/\left(z - z^5\right)$
   6. $f(z) = \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}(z)$
   7. $f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\ \mathrm{sen}(x)\mathrm{senh}(y)$

1. ¿ Cuáles de las siguientes funciones son analíticas?
   1. $f(z) = izz^*$
   2. $f(z) = \mathrm{e}^{-2x}\left(cos(2y) - i\text{sen}(2y)\right)$
   3. $f(z) = \mathrm{e}^{x}\left(cos(y) - i\text{sen}(y)\right)$
   4. $f(z) = \mathrm{Re}\left(z^2\right) - i\ \mathrm{Im}\left(z^2\right)$
   5. $f(z) = 1/\left(z - z^5\right)$
   6. $f(z) = \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}(z)$
   7. $f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\ \text{sen}(x)\text{senh}(y)$
2. ¿Cuales de las siguientes funciones son armónicas y encuentre la función analítica correspondiente si es el caso?
   1. $u = x^2 + y^2$
   2. $u = \text{sen}(x)\cosh(y)$
   3. $v = \mathrm{e}^{x}\text{sen}(2y)$
   4. $v = x/\left(x^2 + y^2\right)$