Derivadas direccionales, covariantes y geodésicas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

12 de febrero de 2021

Agenda: Derivadas direccionales, covariantes...

1. Derivadas direccionales de campos vectoriales
2. La derivada covariante
3. YYYYYY
4. YYYYYY
5. YYYYYY
6. YYYYYY
7. Recapitulando

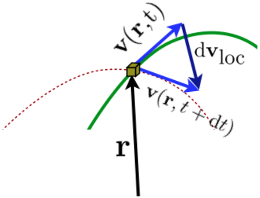
Derivadas direccionales de campos vectoriales

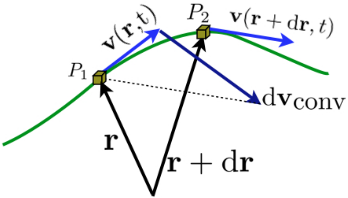
- Inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}$, esto es $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \mathbf{u} = u^i \partial_i \varphi \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} a^i = u^j \partial_j a^i$ $\Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,|a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,(\circ) \equiv \frac{\mathrm{d}(\circ)}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,(\circ) \equiv u^i \partial_i\,(\circ)$.

Derivadas direccionales de campos vectoriales

- Inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}$, esto es $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{u} = u^i\partial_i\varphi \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u} = \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}a^i = u^j\partial_j a^i$
$\Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,|a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,(\circ) \equiv \frac{\mathrm{d}(\circ)}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,(\circ) \equiv u^i\partial_i\,(\circ)$.

- **Ejemplo: El campo de aceleraciones de un fluido.** $\lim_{M'\to M}\frac{\mathbf{v}\left(M'\right)-\mathbf{v}(M)}{M'-M} \equiv \lim_{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r},t)-\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r},t+\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}$
$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$, y en coordenadas cartesianas: $a^i = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}$, con $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$

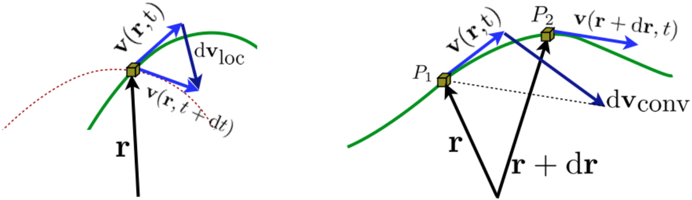




- Este cambio en el campo vectorial proviene de dos contribuciones. Una, local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad, $\mathbf{v}$, en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).

Derivadas direccionales de campos vectoriales

- Inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}$, esto es $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\mathbf{u} = u^i\partial_i\varphi \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}u} = \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}a^i = u^j\partial_j a^i$ $\Rightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,|a\rangle \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\,(\circ) \equiv \frac{\mathrm{d}(\circ)}{\mathrm{d}u} = (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,(\circ) \equiv u^i\partial_i\,(\circ)$.
- **Ejemplo: El campo de aceleraciones de un fluido.** $\lim_{M'\to M}\frac{\mathbf{v}\left(M'\right)-\mathbf{v}(M)}{M'-M} \equiv \lim_{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{r},t)-\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r},t+\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}$ $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$, y en coordenadas cartesianas: $a^i = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}$, con $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$



- Este cambio en el campo vectorial proviene de dos contribuciones. Una, local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad, $\mathbf{v}$, en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).
- La contribución local proviene de la variación del vector (por la dependencia temporal) alrededor del punto, sin importar la dirección que sigue al partícula y la contribución convectiva proviene de la inhomogeneidad del campo de velocidades

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir

$$|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$$

La derivada covariante

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir

  $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$

- por lo que el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene a ser para vectores

  $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,, \quad \text{y} \quad \left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- por lo que el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene a ser para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i \mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene a ser en las bases de las coordenadas generalizadas (que también cambian punto a punto): $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}\,.$

La derivada covariante

- En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases son funciones de las coordenadas, es decir $|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3)$, y $\left\langle \mathbf{e}^i \right| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3)$
- por lo que el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene a ser para vectores $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A_i\mathbf{e}^i\right) = \mathbf{e}^i \mathrm{d}A_i + A_i \mathrm{d}\mathbf{e}^i$, y para forma diferenciales $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}\left(A^i\mathbf{e}_i\right) = \mathbf{e}_i \mathrm{d}A^i + A^i \mathrm{d}\mathbf{e}_i$
- el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ viene a ser en las bases de las coordenadas generalizadas (que también cambian punto a punto): $\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} = \frac{\partial A_k}{\partial q^j}\mathbf{e}^k + A_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = \frac{\partial A^k}{\partial q^j}\mathbf{e}_k + A^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$.
- Las componentes covariantes o contravariantes del vector $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j}$ vienen a ser las componentes de un tensor de segundo orden llamado la *derivada covariante* del vector dado. De esta manera, la derivada covariante de un vector covariante tiene como componentes: $A_{i;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}_i$, mientras que la derivada covariante de un vector contravariante tiene componentes $A^i_{;j} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q^j} \otimes \mathbf{e}^i$.

YYYYYY

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- LZZZZZZ

- LZZZZZZ

YYYYYY

- LZZZZZZ

- LZZZZZZ

Recapitulando

- LZZZZZZ