Principio de Mínima Acción

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

14 de febrero de 2025

Agenda

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_s(t)\}$.

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}\left(q_j(t), \dot{q}_j(t), t\right) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \ldots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}\left(q_j(t), \dot{q}_j(t), t\right) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \ldots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.
- El estado del sistema está descrito por $t_1 : \{q_j\left(t_1\right)\}, \{\dot{q}_j\left(t_1\right)\}$ y $t_2 : \{q_j\left(t_2\right)\}, \{\dot{q}_j\left(t_2\right)\}$

- Consideremos un sistema descrito por las coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)\}$ y sus velocidades $\{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_s(t)\}$.
- Definimos una función de la forma $\mathcal{L}\left(q_j(t), \dot{q}_j(t), t\right) \equiv T - V$, para $j = 1, 2, \ldots, s$, donde T y V son la energía cinética y potencial.
- El estado del sistema está descrito por $t_1 : \{q_j\left(t_1\right)\}, \{\dot{q}_j\left(t_1\right)\}$ y $t_2 : \{q_j\left(t_2\right)\}, \{\dot{q}_j\left(t_2\right)\}$
- El Principio de mínima acción, implica que la evolución del sistema entre el estado en t_1 al t_2 es tal que el valor de la integral definida $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t$, denominada la acción del sistema, sea mínima; es decir, $\delta S = 0$ (S es un extremo).

Se pueden establecer una analogía entre el Principio de mínima acción y un principio variacional para funciones de varias variables:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t \leftrightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y_i, y_i', x\right) \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \leftrightarrow f\left(y_i, y_i', x\right)$$

$$t \leftrightarrow x$$

$$q_j \leftrightarrow y_i$$

$$\dot{q}_j \leftrightarrow y_i'$$

$$\delta q_j(t) \leftrightarrow \eta_i(x)$$

$$\delta \dot{q}_j(t) \leftrightarrow \eta_i'(x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0.$$

Ecuaciones de Lagrange

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \ldots, s$, que hacen extrema a S.

Ecuaciones de Lagrange

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \ldots, s$, que hacen extrema a S.
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente $\dot{q}_j$ como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.

Ecuaciones de Lagrange

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \ldots, s$, que hacen extrema a S.
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente $\dot{q}_j$ como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.
- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y $\dot{q}_j$ es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t \Rightarrow$
$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j\right] \mathrm{d}t$

Ecuaciones de Lagrange

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \ldots, s$, que hacen extrema a S.
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente $\dot{q}_j$ como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.
- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y $\dot{q}_j$ es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en
  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t \Rightarrow$
  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j\right] \mathrm{d}t$
- Podemos expresar el segundo término como

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt}\left(\delta q_j\right) \mathrm{d}t = \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j .$$

Ecuaciones de Lagrange

- Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir del Principio de mínima acción, se requiere identificar las trayectorias $q_j(t), j = 1, \ldots, s$, que hacen extrema a S.
- Consideremos las trayectorias perturbadas de q_j como $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y consecuentemente $\dot{q}_j$ como $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$.
- La variación en S cuando $q_j(t)$ es $q_j(t) + \delta q_j(t)$, y $\dot{q}_j$ es $\dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)$, resulta en
  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t \Rightarrow$
  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j\right] \mathrm{d}t$
- Podemos expresar el segundo término como
  $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\delta q_j\right) \mathrm{d}t = \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j\right|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \delta q_j .$$
- Finalmente $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\right] \delta q_j \mathrm{d}t = 0$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. Sea $x_{j\,\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición $\mathbf{r}_\alpha$ de la partícula α

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. Sea $x_{j\,\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición $\mathbf{r}_\alpha$ de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\,\alpha}^2$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. Sea $x_{j\,\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición $\mathbf{r}_\alpha$ de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\,\alpha}^2$
- La energía potencial es $V = \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$

¿Por qué son importantes? 1/3

- Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para las s coordenadas generalizadas $q_j(t)$, las cuales describen la evolución del sistema en el tiempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, s$
- Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a la Segunda Ley de Newton si las coordenadas generalizadas corresponden a las coordenadas cartesianas de las partículas del sistema.
- consideremos N partículas denotadas por $\alpha = 1, 2, \ldots, N$. Sea $x_{j\,\alpha}$ la componente cartesiana $j = 1, 2, 3$ de la posición $\mathbf{r}_\alpha$ de la partícula α
- Si la energía cinética del sistema es $T = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\,\alpha}^2$
- La energía potencial es $V = \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$
- El Lagrangiano está dado por $\mathcal{L} = T - V = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{x}_{i\,\alpha}^2 - \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\,\alpha}$ de la partícula α es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\,\alpha}} = 0$

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\,\alpha}$ de la partícula α es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\,\alpha}} = 0$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\,\alpha} = p_{j\,\alpha}$, y $\frac{\partial L}{\partial x_{j\,\alpha}} = -\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_{j\,\alpha}} = F_{j\,\alpha}$

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\,\alpha}$ de la partícula α es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\,\alpha}} = 0$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\,\alpha} = p_{j\,\alpha}$, y $\frac{\partial L}{\partial x_{j\,\alpha}} = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{j\,\alpha}} = F_{j\,\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\,\alpha}$ es $\frac{dp_{j\,\alpha}}{dt} = F_{j\,\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α.

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\,\alpha}$ de la partícula α es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\,\alpha}} = 0$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\,\alpha} = p_{j\,\alpha}$, y $\frac{\partial L}{\partial x_{j\,\alpha}} = -\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_{j\,\alpha}} = F_{j\,\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\,\alpha}$ es $\frac{dp_{j\,\alpha}}{dt} = F_{j\,\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α.
- Las ecuaciones de Lagrange no constituyen una nueva teoría del movimiento

¿Por qué son importantes ? 2/3

- La ecuación de Lagrange para la coordenada $x_{j\,\alpha}$ de la partícula α es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\,\alpha}} = 0$
- Por lo tanto $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}} = m(\alpha)\dot{x}_{j\,\alpha} = p_{j\,\alpha}$, y $\frac{\partial L}{\partial x_{j\,\alpha}} = -\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_{j\,\alpha}} = F_{j\,\alpha}$
- La ecuación de Lagrange para $x_{j\,\alpha}$ es $\frac{dp_{j\,\alpha}}{dt} = F_{j\,\alpha}$ que corresponde a la Segunda ley de Newton para la componente j de las coordenadas cartesianas de la partícula α.
- Las ecuaciones de Lagrange no constituyen una nueva teoría del movimiento
- Los resultados de la formulación Lagrangiana o de la formulación Newtoniana del movimiento de un sistema dado son los mismos, pero Las ecuaciones de Lagrange son más generales que la segunda Ley de Newton y son aplicables a cualquier conjunto de coordenadas generalizadas de un sistema.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**
- La formulación Newtoniana, requiere que las ligaduras sean descritas como "fuerzas" actuando sobre las partículas. La formulación Lagrangiana incluye las ligaduras dentro de las coordenadas generalizadas.

¿Por qué son importantes ? 3/3

- Las leyes de Newton enfatizan **causas externas vectoriales (fuerzas)** actuando sobre un cuerpo, mientras que la formulación Lagrangiana se enfoca en **cantidades escalares (energías cinética y potencial)** asociadas con el cuerpo.
- La formulación Newtoniana describe el movimiento de un sistema partícula por partícula, mientras la formulación Lagrangiana describe el movimiento como una propiedad de todo el sistema.
- **El punto de vista Newtoniano explica el movimiento por causa-efecto. El Principio de mínima acción interpreta el movimiento como el resultado de un propósito de la Naturaleza**
- La formulación Newtoniana, requiere que las ligaduras sean descritas como "fuerzas" actuando sobre las partículas. La formulación Lagrangiana incluye las ligaduras dentro de las coordenadas generalizadas.
- La formulación Lagrangiana permite descubrir simetrías fundamentales de los sistemas físicos

Lagrangeanos equivalentes

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f\left(q_j, t\right)$.

Lagrangeanos equivalentes

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{\mathrm{d}f(q_j,t)}{\mathrm{d}t}$

Lagrangeanos equivalentes

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f\left(q_j, t\right)$.
- Sea $\mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) = \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) + \frac{\mathrm{d}f\left(q_j, t\right)}{\mathrm{d}t}$
- La nueva acción es $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t \Rightarrow$
  $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \mathrm{d}t + f\left(q_j\left(t_2\right), t_2\right) - f\left(q_j\left(t_1\right), t_1\right)$

Lagrangeanos equivalentes

- Las ecuaciones de movimiento de un sistema son invariantes si a su Lagrangiano se le agrega una derivada total temporal de una función $f(q_j, t)$.
- Sea $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ el Lagrangiano del sistema para el cual $\delta S = 0$. El nuevo Lagrangiano será $\mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t) = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{\mathrm{d}f(q_j, t)}{\mathrm{d}t}$
- La nueva acción es $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(q_j, \dot{q}_j, t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow$ $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)\,\mathrm{d}t + f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1)$
- Luego, $\delta S' = \delta S + \underbrace{\delta f(q_j(t_2), t_2)}_{=0} - \underbrace{\delta f(q_j(t_1), t_1)}_{=0} \Rightarrow \delta S' = \delta S$
- Por lo tanto $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_{j\,\alpha}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{j\,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{j\,\alpha}} = 0$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformacioes de coordenadas generalizadas.

Invariancia respecto a las coordenadas generalizadas

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformacioes de coordenadas generalizadas.
- Sean las $q_i, s \quad i = 1, \ldots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.

Invariancia respecto a las coordenadas generalizadas

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformacioes de coordenadas generalizadas.
- Sean las $q_i, s \quad i = 1, \ldots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$

Invariancia respecto a las coordenadas generalizadas

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformacioes de coordenadas generalizadas.
- Sean las $q_i, s \quad i = 1, \ldots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas $q_i = q_i(Q_1, \ldots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_s, t)$, $\mathcal{L}\left(Q_i, \dot{Q}_i, t\right)$, también satisface $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$

Invariancia respecto a las coordenadas generalizadas

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformacioes de coordenadas generalizadas.
- Sean las $q_i, s \quad i = 1, \ldots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas $q_i = q_i(Q_1, \ldots, Q_s, t) \Leftrightarrow Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_s, t)$, $\mathcal{L}\left(Q_i, \dot{Q}_i, t\right)$, también satisface $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$
- Entonces calculamos $\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}$

- La forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformacioes de coordenadas generalizadas.
- Sean las $q_i, s \quad i = 1, \ldots, s$, las coordenadas generalizadas de un sistema con s grados de libertad y cuyo Lagrangiano es $\mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$.
- Con las ecuaciones de Lagrange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$
- Bajo la transformación de coordenadas $q_i = q_i\left(Q_1, \ldots, Q_s, t\right) \Leftrightarrow Q_j = Q_j\left(q_1, \ldots, q_s, t\right)$, $\mathcal{L}\left(Q_i, \dot{Q}_i, t\right)$, también satisface $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$
- Entonces calculamos $\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}$
- El "nuevo" Lagrangiano será $\mathcal{L}\left(Q_1, \ldots, \dot{Q}_1, \ldots, t\right) = \mathcal{L}\left[q_i\left(Q_1, \ldots, t\right), \dot{q}_i\left(Q_1, \ldots, \dot{Q}_1, \ldots, t\right), t\right]$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^{s} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}\right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^{s}\left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}\right) = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^{s} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} \left(\frac{\mathrm{d} q_j}{\mathrm{d} t} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$
- Entonces,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) - \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right)}_{=0} \right]$$

- Entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right)$ y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^{s} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}}_{=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

- Además $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_i} \left(\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \delta_{ik} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$
- Entonces,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) - \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) - \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \right)}_{=0} \right]$$

- Por lo tanto $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0$

Recapitulando

Presentamos los *fundamentos matemáticos, el significado físico y las aplicaciones* del formalismo lagrangiano

1. La acción de un sistema viene dada por $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt$

Recapitulando

Presentamos los *fundamentos matemáticos, el significado físico y las aplicaciones* del formalismo lagrangiano

1. La acción de un sistema viene dada por $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt$
2. La trayectoria entre dos estados para un sistema físico es aquella que hace *estacionaria* la acción ($\delta S = 0$).

Recapitulando

Presentamos los *fundamentos matemáticos, el significado físico y las aplicaciones* del formalismo lagrangiano

1. La acción de un sistema viene dada por $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt$
2. La trayectoria entre dos estados para un sistema físico es aquella que hace *estacionaria* la acción ($\delta S = 0$).
3. El Lagrangiano se define como: $\mathcal{L} = T - V$ donde T es la energía cinética y V es la energía potencial.

Recapitulando

Presentamos los *fundamentos matemáticos, el significado físico y las aplicaciones* del formalismo lagrangiano

1. La acción de un sistema viene dada por $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt$
2. La trayectoria entre dos estados para un sistema físico es aquella que hace *estacionaria* la acción ($\delta S = 0$).
3. El Lagrangiano se define como: $\mathcal{L} = T - V$ donde T es la energía cinética y V es la energía potencial.
4. La *ecuación de Euler-Lagrange* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$ se obtiene considerando pequeñas variaciones en la trayectoria.

Recapitulando

Presentamos los *fundamentos matemáticos, el significado físico y las aplicaciones* del formalismo lagrangiano

1. La acción de un sistema viene dada por $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt$
2. La trayectoria entre dos estados para un sistema físico es aquella que hace *estacionaria* la acción ($\delta S = 0$).
3. El Lagrangiano se define como: $\mathcal{L} = T - V$ donde T es la energía cinética y V es la energía potencial.
4. La *ecuación de Euler-Lagrange* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$ se obtiene considerando pequeñas variaciones en la trayectoria.
5. Esta ecuación proporciona las ecuaciones de movimiento de un sistema.
   - Generalizan las leyes de Newton para *cualquier sistema de coordenadas*.
   - El método permite incorporar restricciones de forma natural.
   - Las ecuaciones se aplican a cualquier sistema mecánico, lo que las hace más versátiles que la mecánica newtoniana.