Ecuaciones diferenciales parciales: Generealidades

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

30 de septiembre de 2021

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden
2. Ecuaciones diferenciales segundo orden
3. Problemas bien planteados
4. Característica y existencia de soluciones

Soluciones homogéneas

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = R(x,y)$$

Consideremos ecuaciones de primer orden

$$D(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + F(x,y)u(x,y) = R(x,y)$$

supongamos $R(x,y) = 0$ y $u(x,y) = h(x,y)f(p) \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial x}$

$$\left(D\frac{\partial h}{\partial x} + E\frac{\partial h}{\partial y} + F\,h\right) + \left(D\frac{\partial p}{\partial x} + E\frac{\partial p}{\partial y}\right) h\frac{\mathrm{d}f(p)}{\mathrm{d}p} = 0$$

$$\left(D\frac{\partial p}{\partial x} + E\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{D(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{E(x,y)}$$

Ejemplo

$$x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 2y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + x\,u(x,y) = x$$

suponemos $u(x,y) = h(x,y)f(p)$ y resolvemos la homogénea

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y} \Rightarrow p = \frac{x^2}{y} \quad \Rightarrow u(x,y) = h(x,y)f\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

con $h(x,y)$ cualquier solución de la ecuación, como por ejemplo $h(x,y) = \exp(-x)$, con lo cual la solución general de la inhomogénea será

$$u(x,y) = 1 + \exp(-x)f\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

si la condición de frontera impone que $u(1,y) = \frac{1}{y}$, entonces

$$u(1,y) = 1 + \exp(-1)f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} \Rightarrow u(x,y) = 1 + \mathrm{e}^{1-x}\left(\frac{x^2}{y} - 1\right)$$

Solución de la homogénea

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = R(x,y)$$

consideremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$A\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = R(x,y)$$

con A, B y C constantes. Otra vez supongamos $R(x,y) = 0$ y $u(x,y) = f(\underbrace{x + \lambda y}_{p})$, entonces tendremos

$$\underbrace{\left(A + B\lambda + C\lambda^2\right)}_{=0} \frac{\mathrm{d}^2 f(p)}{\mathrm{d}p^2} = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

la solución general será $u(x,y) = f(x + y\lambda_+) + g(x + y\lambda_-)$

Hiperbólicas, Parabólicas y Elípticas

- Hiperbólica $B^2 > 4AC$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow u(x,y) = f(x+vt) + g(x-vt)$$

- Hiperbólica $B^2 > 4AC$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow u(x,y) = f(x+vt) + g(x-vt)$$

- Elíptica $B^2 < 4AC$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x,y) = f(x+iy) + g(x-iy)$$

- Hiperbólica $B^2 > 4AC$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow u(x,y) = f(x+vt) + g(x-vt)$$

- Elíptica $B^2 < 4AC$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x,y) = f(x+iy) + g(x-iy)$$

- Parabólica $B^2 = 4AC$

$$u(x,y) = f\left(x + \left(\frac{B}{2C}\right)y\right) + h(x,y)g\left(x + \left(\frac{B}{2C}\right)y\right)$$

la más simple será

$$u(x,y) = f\left(x + \left(\frac{B}{2C}\right)y\right) + xg\left(x + \left(\frac{B}{2C}\right)y\right)$$

Problemas bien planteados

Diremos que un problema está bien planteado si estas condiciones se cumplen

- Existe al menos una solución
- La solución es única
- La solución depende de forma continua de las condiciones iniciales

Para un conjunto de condiciones de borde:

- existen (unica o familia) o
- no existen soluciones

Consideremos una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$D(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = F(x,y,u(x,y))$$

que cumpla con una condición $u(x,y) = \phi(s)$ que se especifica a lo largo de una curva C descrita paramétricamente $x = x(s)$ y $y = y(s)$. Entonces la variación de u a lo largo de C

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$$

que puede ser considerado un sistema (inhomogéneo) de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$

Ejemplo

$$x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + 2y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + x\,u(x,y) = 0$$

con $u(1,y) = 2y + 1$ sobre la línea $x = 1$, en $1 \leq y \leq 2$

Encontramos que la solución $u(x,y) = \exp(-x) f\left(\frac{x^2}{y}\right)$ las curvas características serán $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{y} \leq 1$ y $u(x,y) = \mathrm{e}^{1-x}\left(\frac{2y}{x^2}\right) + 1$