

Cuerpo Rígido: Energía cinética

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



21 de abril de 2025

- 1 La energía cinética
- 2 El Tensor de Inercia
- 3 Elipsoide en rotación

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular Ω , es
$$T = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, \text{ donde } \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \Omega \times \mathbf{r}_j,$$

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2$, $j = 1, 2, \dots$, donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$, es decir
$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j v_{\text{cm}}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$$

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2$, $j = 1, 2, \dots$, donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$, es decir
$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j v_{\text{cm}}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$$
- El primer término es $\frac{1}{2} \sum_j m_j v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j \right) v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$.

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2$, $j = 1, 2, \dots$, donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$, es decir $T = \frac{1}{2} \sum_j m_j v_{\text{cm}}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2$
- El primer término es $\frac{1}{2} \sum_j m_j v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j \right) v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$.
- El segundo término se simplifica usando $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Entonces $\sum_j m_j \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \cdot (\mathbf{v}_{\text{cm}} \times \mathbf{\Omega}) = (\mathbf{v}_{\text{cm}} \times \mathbf{\Omega}) \cdot \left(\sum_j m_j \mathbf{r}_j \right) = 0$, ya que $\mathbf{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum_j m_j \mathbf{r}_j}{M} = 0$

- El tercer término se evalúa usando

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \text{ por lo tanto}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$$

- El tercer término se evalúa usando
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \text{ por lo tanto}$$
$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$$
- Entonces $T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 \right] = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}$

- El tercer término se evalúa usando
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \text{ por lo tanto}$$
$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$$
- Entonces $T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 \right] = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 = (\sum_i \Omega_i x_{ij}) (\sum_k \Omega_k x_{kj}) = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k x_{ij} x_{kj},$
$$\Omega_i = \sum_k \Omega_k \delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k \delta_{ik} = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}$$

- El tercer término se evalúa usando

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, por lo tanto

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$$

- Entonces $T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 \right] = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}$

- Además, $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 = (\sum_i \Omega_i x_{ij}) (\sum_k \Omega_k x_{ij}) = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k x_{ij} x_{ij}$,
 $\Omega_i = \sum_k \Omega_k \delta_{ik}$, $\Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k \delta_{ik} = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}$

- La energía cinética será

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k} \left(\Omega_i \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \Omega_i \Omega_k x_{ij} x_{kj} \right), \text{ o mejor}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$

- El tercer término se evalúa usando

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \text{ por lo tanto}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$$

- Entonces $T = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 \right] = T_{\text{cm}} + T_{\text{rot}}$

- Además, $(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 = (\sum_i \Omega_i x_{ij})(\sum_k \Omega_k x_{kj}) = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k x_{ij} x_{kj},$
 $\Omega_i = \sum_k \Omega_k \delta_{ik}, \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k \delta_{ik} = \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}$

- La energía cinética será

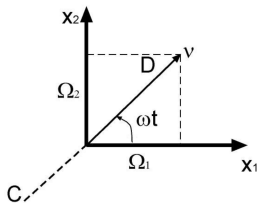
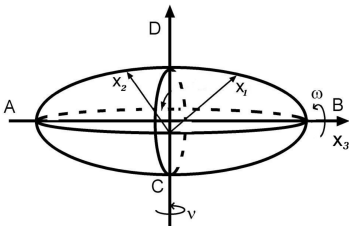
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k} \left(\Omega_i \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \Omega_i \Omega_k x_{ij} x_{kj} \right), \text{ o mejor}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_i \Omega_k \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$$

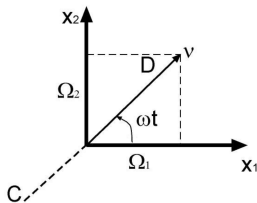
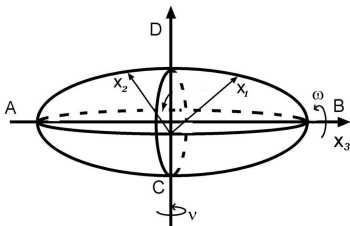
- Donde

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum_j m_j (x_2^2 + x_3^2) & -\sum_j m_j x_1 x_2 & -\sum_j m_j x_1 x_3 \\ -\sum_j m_j x_2 x_1 & \sum_j m_j (x_1^2 + x_3^2) & -\sum_j m_j x_2 x_3 \\ -\sum_j m_j x_3 x_1 & -\sum_j m_j x_3 x_2 & \sum_j m_j (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω , y sobre eje CD con velocidad angular ν ,

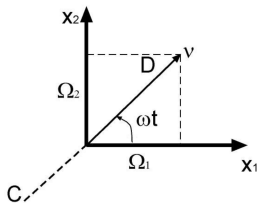
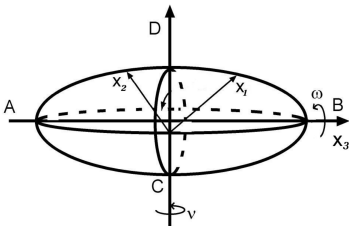


- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω , y sobre eje CD con velocidad angular ν ,



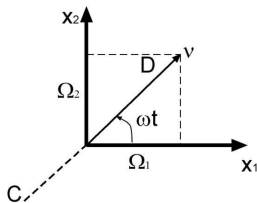
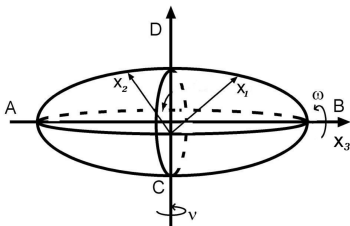
- Escogemos eje AB en la dirección x_3 . Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de ω es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2) .

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω , y sobre eje CD con velocidad angular ν ,



- Escogemos eje AB en la dirección x_3 . Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de ω es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2) .
- Las componentes $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ son $\Omega_1 = \nu \cos \omega t$, $\Omega_2 = \nu \sin \omega t$ y $\Omega_3 = \omega$,

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω , y sobre eje CD con velocidad angular ν ,



- Escogemos eje AB en la dirección x_3 . Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de ω es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2) .
- Las componentes $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ son $\Omega_1 = \nu \cos \omega t$, $\Omega_2 = \nu \sin \omega t$ y $\Omega_3 = \omega$,
- Finalmente $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} \Omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{22} \Omega_2^2 + \frac{1}{2} I_{33} \Omega_3^2 \Rightarrow$

$$T = \frac{1}{2} (I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \sin^2 \omega t) \nu^2 + \frac{1}{2} I_{33} \omega^2$$