

Coordenadas curvilíneas

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



3 de febrero de 2021

- 1 Coordenadas curvilíneas
 - Generalidades
 - Coordenadas cartesianas
 - Coordenadas cilíndricas
- 2 Curvas y parámetros
- 3 Curvatura, vector normal y binormal
- 4 Torsión y las relaciones de Frenet-Serret
- 5 Vectores, tensores y coordenadas curvilíneas
- 6 Productos escalares y vectoriales
- 7 Recapitulando

Consideremos un sistema de coordenadas generalizadas (q^1, q^2, q^3) tales que $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \Leftrightarrow q^i = q^i(\tilde{q}^j)$, con $i, j = 1, 2, 3$.

- Nuestro vector posición en la base canónica será

$$|r\rangle = x(q^1, q^2, q^3) |e_x\rangle + y(q^1, q^2, q^3) |e_y\rangle + z(q^1, q^2, q^3) |e_z\rangle,$$

Consideremos un sistema de coordenadas generalizadas (q^1, q^2, q^3) tales que $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \Leftrightarrow q^i = q^i(\tilde{q}^j)$, con $i, j = 1, 2, 3$.

- Nuestro vector posición en la base canónica será
$$|r\rangle = x(q^1, q^2, q^3) |e_x\rangle + y(q^1, q^2, q^3) |e_y\rangle + z(q^1, q^2, q^3) |e_z\rangle,$$
- y el vector desplazamiento diferencial
$$d\mathbf{r} \equiv |dr\rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} dq^3.$$

Consideremos un sistema de coordenadas generalizadas (q^1, q^2, q^3) tales que $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \Leftrightarrow q^i = q^i(\tilde{q}^j)$, con $i, j = 1, 2, 3$.

- Nuestro vector posición en la base canónica será

$$|r\rangle = x(q^1, q^2, q^3) |e_x\rangle + y(q^1, q^2, q^3) |e_y\rangle + z(q^1, q^2, q^3) |e_z\rangle,$$

- y el vector desplazamiento diferencial

$$d\mathbf{r} \equiv |dr\rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} dq^3.$$

- Por consiguiente, podemos construir la métrica $ds^2 \equiv \langle dr | dr \rangle =$

$$\frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_{ij} = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \\ h_j = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\| \\ |e_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \\ \langle e^j| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_j} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_j} \end{array} \right.$$

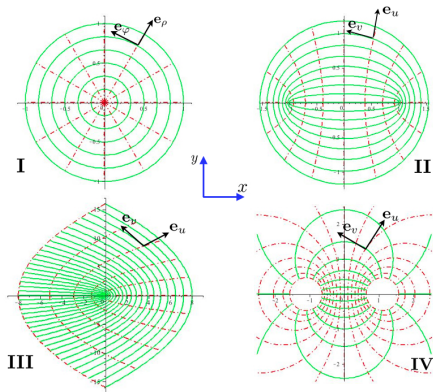


Figura: Algunas coordenadas curvilíneas en 2D. Podemos apreciar algunos ejemplos de sistemas de coordenadas: en el cuadrante I coordenadas polares: $x = \rho \cos(\varphi)$; $y = \rho \sin(\varphi)$. En el cuadrante II coordenadas elípticas: $x = a \cosh(u) \cos(v)$; $y = a \sinh(u) \sin(v)$. En III coordenadas parabólicas: $x = \frac{1}{2} (u^2 - v^2)$; $y = uv$ y en el cuadrante IV coordenadas bipolares: $x^2 + [y - a \cot(u)]^2 = a^2 \csc^2(u)$; $\left[x - a \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)} \right]^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2(v)}$.

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|e_j\rangle\}$ ortonormales:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}\right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}; \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}\right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}; \quad \text{y} \quad |e_3\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}\right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3};$$

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|e_j\rangle\}$ ortonormales:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}\right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}; \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}\right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}; \quad \text{y} \quad |e_3\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}\right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3};$$

- La tríada de 1-formas base $\{\langle e^j|\}$ ortonormales:

$$\langle e^1| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right\|} \frac{\partial \langle \mathbf{r}|}{\partial q_1}; \quad \langle e^2| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\right\|} \frac{\partial \langle \mathbf{r}|}{\partial q_2}; \quad \text{y} \quad \langle e^3| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}\right\|} \frac{\partial \langle \mathbf{r}|}{\partial q_3};$$

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|e_j\rangle\}$ ortonormales:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}; \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}; \quad y \quad |e_3\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3};$$

- La tríada de 1-formas base $\{\langle e^j|\}$ ortonormales:

$$\langle e^1| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_1}\right\|} \frac{\partial\langle r|}{\partial q_1}; \quad \langle e^2| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_2}\right\|} \frac{\partial\langle r|}{\partial q_2}; \quad y \quad \langle e^3| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_3}\right\|} \frac{\partial\langle r|}{\partial q_3};$$

- los factores de escala:

$$h_1 = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\right\|; \quad h_2 = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\right\|; \quad y \quad h_3 = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\right\|;$$

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|e_j\rangle\}$ ortonormales:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}; \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}; \quad \text{y} \quad |e_3\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3};$$

- La tríada de 1-formas base $\{\langle e^j|\}$ ortonormales:

$$\langle e^1| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_1}\right\|} \frac{\partial\langle r|}{\partial q_1}; \quad \langle e^2| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_2}\right\|} \frac{\partial\langle r|}{\partial q_2}; \quad \text{y} \quad \langle e^3| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_3}\right\|} \frac{\partial\langle r|}{\partial q_3};$$

- los factores de escala:

$$h_1 = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\right\|; \quad h_2 = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\right\|; \quad \text{y} \quad h_3 = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\right\|;$$

- el elemento de línea en términos de las coordenadas generalizadas como $ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2$;

Las coordenadas cartesianas pueden construirse como

- el vector posición: $|r\rangle = x |e_x\rangle + y |e_y\rangle + z |e_z\rangle \iff \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
- el vector desplazamiento diferencial
$$|dr\rangle = \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right) dz = dx |e_x\rangle + dy |e_y\rangle + dz |e_z\rangle,$$
- los factores de escala quedan definidos como
$$h_1 = h_x = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial x} \right\| = 1; \quad h_2 = h_y = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial y} \right\| = 1; \quad h_3 = h_z = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} \right\| = 1$$
- mientras que la tríada ortonormal es
$$|e_x\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial x} \right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial x}, \quad |e_y\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial y} \right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial y}, \quad |e_z\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} \right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial z}.$$
- Finalmente, el elemento de línea viene definido como
$$(ds)^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2 \iff ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
 y el tensor métrico será
$$g_{11} = g_{xx} = 1; \quad g_{22} = g_{yy} = 1; \quad y \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

- el vector posición: $|r\rangle = x(\rho, \varphi) |e_x\rangle + y(\rho, \varphi) |e_y\rangle + z |e_z\rangle$ con: $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$.
- Entonces
$$\left. \begin{aligned} x &= x(\rho, \varphi) = \rho \cos(\varphi) \\ y &= y(\rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= \cos(\varphi)d\rho - \rho \sin(\varphi)d\varphi \\ dy &= \sin(\varphi)d\rho + \rho \cos(\varphi)d\varphi \\ dz &= dz. \end{aligned}$$
- Identificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} x(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \rho} y(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \rho} z &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} x(\rho, \varphi) &= -\rho \sin(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \varphi} y(\rho, \varphi) &= \rho \cos(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \varphi} z &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} x(\rho, \varphi) &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} y(\rho, \varphi) &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} z &= 1, \end{aligned}$$

- Los factores de escala

$$\begin{aligned} h_\rho &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial [x(\rho, \varphi) |e_x\rangle + y(\rho, \varphi) |e_y\rangle + z |e_z\rangle]}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |e_y\rangle \right\| \\ &= \|\cos(\varphi) |e_x\rangle + \sin(\varphi) |e_y\rangle\| = 1. \end{aligned}$$

Del mismo modo $h_\varphi = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\| = \rho$; $h_z = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\| = 1$.

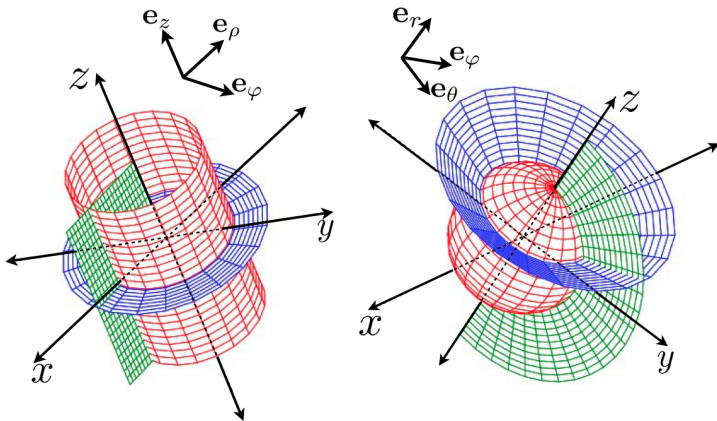


Figura: Coordenadas cilíndricas y esféricas. Para el caso de las coordenadas cilíndricas (figura izquierda), el vector unitario $|\mathbf{e}_\rho\rangle$ es un vector normal a las superficies cilíndricas y apunta en la dirección donde crece el radio ρ . El vector unitario $|\mathbf{e}_\varphi\rangle$ es tangente a las superficies cilíndricas, perpendicular a los planos $\varphi = \text{constante}$ y apunta en la dirección donde aumenta el ángulo azimutal φ . El vector $|\mathbf{e}_z\rangle$ es el mismo vector cartesiano $|\mathbf{k}\rangle$.

- Los vectores unitarios serán

$$|e_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} = \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho} |e_y\rangle = \cos(\varphi) |e_x\rangle + \sin(\varphi) |e_y\rangle ,$$

$$|e_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} |e_y\rangle \right) = -\sin(\varphi) |e_x\rangle + \cos(\varphi) |e_y\rangle ,$$

$$|e_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} |e_z\rangle = |e_z\rangle .$$

- Los vectores unitarios serán

$$|e_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} = \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho} |e_y\rangle = \cos(\varphi) |e_x\rangle + \sin(\varphi) |e_y\rangle ,$$

$$|e_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} |e_y\rangle \right) = -\sin(\varphi) |e_x\rangle + \cos(\varphi) |e_y\rangle ,$$

$$|e_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} |e_z\rangle = |e_z\rangle .$$

- La expresión para el vector desplazamiento infinitesimal será

$$d|r\rangle = \frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} d\varphi + \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} dz = d\rho |e_\rho\rangle + \rho d\varphi |e_\varphi\rangle + dz |e_z\rangle .$$

- Los vectores unitarios serán

$$|e_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} = \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho} |e_y\rangle = \cos(\varphi) |e_x\rangle + \sin(\varphi) |e_y\rangle ,$$

$$|e_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi} |e_y\rangle \right) = -\sin(\varphi) |e_x\rangle + \cos(\varphi) |e_y\rangle ,$$

$$|e_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} |e_z\rangle = |e_z\rangle .$$

- La expresión para el vector desplazamiento infinitesimal será

$$d|r\rangle = \frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} d\varphi + \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} dz = d\rho |e_\rho\rangle + \rho d\varphi |e_\varphi\rangle + dz |e_z\rangle .$$

- El elemento de línea viene definido como

$$ds^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \iff$$
$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 ,$$

- y el tensor métrico:

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1 .$$

- Para las coordenadas generalizadas: $(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$, tendremos $|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$,

- Para las coordenadas generalizadas: $(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$, tendremos $|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$,
- por lo tanto $d\mathbf{r}(q^i(\lambda)) = \frac{dq^1}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} + \frac{dq^2}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} + \frac{dq^3}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \underbrace{\frac{dq^1}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}}_{\mathbf{u}_1} + \underbrace{\frac{dq^2}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}}_{\mathbf{u}_2} + \underbrace{\frac{dq^3}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}}_{\mathbf{u}_3}$,

donde: $\left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}, \mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\}$, son la base del vector $\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}$ tangente a la curva descrita por $\mathbf{r}(\lambda)$.

- Para las coordenadas generalizadas: $(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$, tendremos $|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$,
 - por lo tanto $d\mathbf{r}(q^i(\lambda)) = \frac{dq^1}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} + \frac{dq^2}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} + \frac{dq^3}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \underbrace{\frac{dq^1}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}}_{\mathbf{u}_1} + \underbrace{\frac{dq^2}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}}_{\mathbf{u}_2} + \underbrace{\frac{dq^3}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}}_{\mathbf{u}_3}$,
- donde: $\left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}, \mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\}$, son la base del vector $\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}$ tangente a la curva descrita por $\mathbf{r}(\lambda)$.
- El módulo del vector $\|d\mathbf{r}(\lambda)\|$ representará la longitud de arco ds para esa curva. Por consiguiente

$$\begin{aligned} (ds)^2 = d\mathbf{r}(\lambda) \cdot d\mathbf{r}(\lambda) &= \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \cdot \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} (d\lambda)^2 = \frac{dq^i}{d\lambda} \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{dq^j}{d\lambda} \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j} (d\lambda)^2 \\ &= \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j} \underbrace{\frac{dq^i}{d\lambda} d\lambda}_{dq^i} \underbrace{\frac{dq^j}{d\lambda} d\lambda}_{dq^j} = \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j} dq^i dq^j. \end{aligned}$$

- Dado que $(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = \tilde{g}_{ij} dq^i dq^j = \underbrace{\frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j}}_{\tilde{g}_{ij}} dq^i dq^j$.

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\mathbf{t}} = d\mathbf{r}(s)/ds$ es un vector unitario tangente a la curva Γ , y s es la longitud de arco.

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\mathbf{t}} = d\mathbf{r}(s)/ds$ es un vector unitario tangente a la curva Γ , y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\mathbf{t}}$ es de magnitud constante, $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| \hat{\mathbf{n}} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una línea recta.

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\mathbf{t}} = d\mathbf{r}(s)/ds$ es un vector unitario tangente a la curva Γ , y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\mathbf{t}}$ es de magnitud constante, $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| \hat{\mathbf{n}} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una línea recta.
- Finalmente, con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\mathbf{t}}$ como a $\hat{\mathbf{n}}$, que denominaremos vector *binormal* a Γ , esto es: $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$.

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\mathbf{t}} = d\mathbf{r}(s)/ds$ es un vector unitario tangente a la curva Γ , y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\mathbf{t}}$ es de magnitud constante, $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| \hat{\mathbf{n}} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una línea recta.
- Finalmente, con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\mathbf{t}}$ como a $\hat{\mathbf{n}}$, que denominaremos vector *binormal* a Γ , esto es: $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$.
- Tenemos entonces la tríada $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$ al que podemos anclar un sistema de coordenadas cartesiano en cada punto de Γ .

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\mathbf{t}} = d\mathbf{r}(s)/ds$ es un vector unitario tangente a la curva Γ , y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\mathbf{t}}$ es de magnitud constante, $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right| \hat{\mathbf{n}} = \kappa \hat{\mathbf{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una línea recta.
- Finalmente, con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\mathbf{t}}$ como a $\hat{\mathbf{n}}$, que denominaremos vector *binormal* a Γ , esto es: $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$.
- Tenemos entonces la tríada $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$ al que podemos anclar un sistema de coordenadas cartesiano en cada punto de Γ .
- Este sistema de coordenadas, no inercial, estará rotando constantemente a medida que el observador se mueve a lo largo de la curva en el espacio.

- Otra vez $\hat{\mathbf{b}}$ es de magnitud constante, entonces $\hat{\mathbf{b}} \perp \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \wedge \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$

- Otra vez $\hat{\mathbf{b}}$ es de magnitud constante, entonces $\hat{\mathbf{b}} \perp \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \wedge \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$
- Al ser $d\hat{\mathbf{b}}/ds$ perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\mathbf{b}}$, entonces será proporcional a $\hat{\mathbf{n}}$: $\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \tau = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds}$. Esta constante de proporcionalidad es la *torsión* de la curva Γ en un punto dado, y a $1/\tau$ el radio de torsión.
- La *torsión* mide que lejos está una curva de permanecer en un plano.

- Otra vez $\hat{\mathbf{b}}$ es de magnitud constante, entonces $\hat{\mathbf{b}} \perp \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \wedge \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$
- Al ser $d\hat{\mathbf{b}}/ds$ perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\mathbf{b}}$, entonces será proporcional a $\hat{\mathbf{n}}$: $\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau \hat{\mathbf{n}} \Rightarrow \tau = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds}$. Esta constante de proporcionalidad es la *torsión* de la curva Γ en un punto dado, y a $1/\tau$ el radio de torsión.
- La *torsión* mide que lejos está una curva de permanecer en un plano.
- A partir del hecho que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{b}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}}$, tendremos
$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\mathbf{b}} \times \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = -\tau(\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}}) + \kappa(\hat{\mathbf{b}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \tau\hat{\mathbf{b}} - \kappa\hat{\boldsymbol{\tau}}.$$
- A las ecuaciones $\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{n}}$, $\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{n}}$, $\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \tau\hat{\mathbf{b}} - \kappa\hat{\boldsymbol{\tau}}$ se les conoce como las fórmulas de Frenet-Serret de la geometría diferencial.

- Como hemos vistos las coordenadas curvilíneas son una base mas del espacio vectorial

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle = a^x |e_x\rangle + a^y |e_y\rangle + a^z |e_z\rangle \equiv a^\rho |e_\rho\rangle + a^\varphi |e_\varphi\rangle + a^z |e_z\rangle$$

- Como hemos vistos las coordenadas curvilíneas son una base mas del espacio vectorial

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle = a^x |e_x\rangle + a^y |e_y\rangle + a^z |e_z\rangle \equiv a^\rho |e_\rho\rangle + a^\varphi |e_\varphi\rangle + a^z |e_z\rangle$$

- Por lo tanto construiremos tensores en cualquier sistema de coordenadas curvilíneo a partir del producto tensorial de vectores y formas, expresados en esos sistemas de coordenadas:

$$\mathcal{T} = T^{ij} |e_i\rangle \otimes |\tilde{e}_j\rangle, \quad T_i^j \langle e^i| \otimes |\tilde{e}_j\rangle \quad \text{o} \quad T_{ij} \langle e^i| \otimes \langle \tilde{e}^j|.$$

- T^{ij} , constituyen **las componentes** contravariantes; T_i^j **las componentes** mixtas de un tensor y, **las componentes** covariantes de ese tensor.

- Como hemos vistos las coordenadas curvilíneas son una base mas del espacio vectorial

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle = a^x |e_x\rangle + a^y |e_y\rangle + a^z |e_z\rangle \equiv a^\rho |e_\rho\rangle + a^\varphi |e_\varphi\rangle + a^z |e_z\rangle$$

- Por lo tanto construiremos tensores en cualquier sistema de coordenadas curvilíneo a partir del producto tensorial de vectores y formas, expresados en esos sistemas de coordenadas:

$$\mathcal{T} = T^{ij} |e_i\rangle \otimes |\tilde{e}_j\rangle, \quad T_i^j \langle e^i| \otimes |\tilde{e}_j\rangle \quad \text{o} \quad T_{ij} \langle e^i| \otimes \langle \tilde{e}_j|.$$

- T^{ij} , constituyen **las componentes** contravariantes; T_i^j **las componentes** mixtas de un tensor y, **las componentes** covariantes de ese tensor.

- \mathcal{T} es un objeto geométrico que se expresa en una base (tensorial):

$$\{|e_i\rangle\} \text{ y 1-formas } \{\langle \tilde{e}_j|\}, \text{ y no necesariamente son las mismas}$$
$$\mathcal{T} = T^{x\rho} |e_x; e_\rho\rangle + T^{x\varphi} |e_x; e_\varphi\rangle + T^{xz} |e_x; e_z\rangle + T^{y\rho} |e_y; e_\rho\rangle + T^{y\varphi} |e_y; e_\varphi\rangle + T^{yz} |e_y; e_z\rangle + \cdots + T^{zz} |e_z; e_z\rangle,$$

- Un tensor bizarro parte cartesiano y parte cilíndrico.

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a | b \rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a | b \rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$
- **El Producto Vectorial** se expresa como $|c\rangle = c^i |e_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k |e_i\rangle \Leftrightarrow |\tilde{c}\rangle = \tilde{c}^i |\tilde{e}_i\rangle = |\tilde{a}\rangle \times |\tilde{b}\rangle = \tilde{\epsilon}^{ijk} \tilde{a}_j \tilde{b}_k |\tilde{e}_i\rangle$.
 ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas, y $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ está expresado en las coordenadas curvilíneas

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a | b \rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$
- **El Producto Vectorial** se expresa como $|c\rangle = c^i |e_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k |e_i\rangle \Leftrightarrow |\tilde{c}\rangle = \tilde{c}^i |\tilde{e}_i\rangle = |\tilde{a}\rangle \times |\tilde{b}\rangle = \tilde{\epsilon}^{ijk} \tilde{a}_j \tilde{b}_k |\tilde{e}_i\rangle$.
 ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas, y $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ está expresado en las coordenadas curvilíneas
- De la relación anterior es claro que, el tensor de Levi-Civita transformará como un tensor, es decir $\tilde{\epsilon}^{ijk} = \epsilon^{lmn} \frac{\partial q^i}{\partial x^l} \frac{\partial q^j}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^n} = J \epsilon^{ijk} = \sqrt{g} \epsilon^{ijk}$
donde J es el determinante de la matriz jacobiana,

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a | b \rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$
- **El Producto Vectorial** se expresa como $|c\rangle = c^i |e_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k |e_i\rangle \Leftrightarrow |\tilde{c}\rangle = \tilde{c}^i |\tilde{e}_i\rangle = |\tilde{a}\rangle \times |\tilde{b}\rangle = \tilde{\epsilon}^{ijk} \tilde{a}_j \tilde{b}_k |\tilde{e}_i\rangle$.
 ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas, y $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ está expresado en las coordenadas curvilíneas
- De la relación anterior es claro que, el tensor de Levi-Civita transformará como un tensor, es decir $\tilde{\epsilon}^{ijk} = \epsilon^{lmn} \frac{\partial q^i}{\partial x^l} \frac{\partial q^j}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^n} = J \epsilon^{ijk} = \sqrt{g} \epsilon^{ijk}$
donde J es el determinante de la matriz jacobiana,
- Con lo cual $|c\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \underbrace{a_j b_k \epsilon^{ijk}}_{c^i} |e_i\rangle = \underbrace{\tilde{a}_m \tilde{b}_n \tilde{\epsilon}^{lmn}}_{\tilde{c}^l} |\tilde{e}_l\rangle = J \epsilon^{lmn} \tilde{a}_m \tilde{b}_n |\tilde{e}_l\rangle = \sqrt{g} \epsilon^{lmn} \tilde{a}_m \tilde{b}_n |\tilde{e}_l\rangle$

- LZZZZZZZ