Simetrías y Cantidades Conservadas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

11 de noviembre de 2024

Agenda

1. Transformaciones canónicas infinitesimales
2. Invariancia bajo transformaciones infinitesimales
3. Simetrías y cantidades conservadas
4. Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
5. Transformación como evolución
6. Transformaciones y Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas

Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.

Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.

Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.

Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad

Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \quad \text{y} \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$

Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i\left(q_j, p_j\right)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i\left(q_j, p_j\right)$, donde $f_i\left(q_j, p_j\right)$ y, $g_i\left(q_j, p_j\right)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$, con $\mathcal{G}\left(q_i, P_i\right)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i\right)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$ y $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$ y $\mathcal{G}_i\left(q_j, p_j\right) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$

Transformaciones canónicas infinitesimales

- Consideremos una transformación infinitesimal de la forma $Q_i = q_i + \epsilon f_i(q_j, p_j)$ y $P_i = p_i + \epsilon g_i(q_j, p_j)$, donde $f_i(q_j, p_j)$ y, $g_i(q_j, p_j)$ son funciones dadas y $\epsilon \lll 1$.
- Podemos considerar que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ es una desviación infinitesimal de una transformación identidad.
- Para que la transformación sea canónica debe existir una función generadora $\mathcal{F}_2(q_i, P_i) = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \epsilon \mathcal{G}(q_i, P_i)$, con $\mathcal{G}(q_i, P_i)$ una función a determinar.
- La función generadora es una pequeña desviación de la función generadora para la transformación identidad
- La transformación canónica generada por $\mathcal{F}_2(q_i, P_i)$ es $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$ y $Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$
- Entonces $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i}$ y $\mathcal{G}_i(q_j, p_j) = -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i}$
- Si existe $\mathcal{G}(q_i, P_i)$, entonces la transformación infinitesimal es canónica.

Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en ϵ,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$

Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en ϵ,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función G.

- $f_i\left(q_j, p_j\right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en ϵ,
  $\Rightarrow f_i\left(q_j, p_j\right) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función G.
- El cambio en la función $K\left(q_i, p_i\right)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K\left(Q_i, P_i\right) - K\left(q_i, p_i\right) = K\left(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i\right) - K\left(q_i, p_i\right)$

Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en ϵ,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función G.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$

Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en ϵ,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j}\delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función G.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es
  $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo f_i y g_i, $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial K}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$

Invariancia bajo transformaciones infinitesimales

- $f_i(q_j, p_j) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)$ y hasta primer orden en ϵ,
  $\Rightarrow f_i(q_j, p_j) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \delta_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon)$
- Consideremos el comportamiento del Hamiltoniano bajo una transformación canónica infinitesimal generada por una función G.
- El cambio en la función $K(q_i, p_i)$ definida en el espacio de fase, debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta K = K(Q_i, P_i) - K(q_i, p_i) = K(q_i + \epsilon f_i, p_i + \epsilon g_i) - K(q_i, p_i)$
- Desarrollando por Taylor $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} f_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} g_i \right)$
- Sustituyendo f_i y g_i, $\delta K = \epsilon \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{K, \mathcal{G}\}$
- Si una función $K(q_i, p_i)$ en el espacio de fase es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, entonces $\delta K = 0$ y $\{K, \mathcal{G}\} = 0$.

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$

Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$

Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.

Simetrías y cantidades conservadas

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.

- Si $K = \mathcal{H}$ entonces el cambio en el Hamiltoniano debido a una transformación canónica infinitesimal es $\delta\mathcal{H} = \epsilon\{\mathcal{H}, \mathcal{G}\}$
- Si el Hamiltoniano es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, tendremos $\delta\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow \{\mathcal{H}, \mathcal{G}\} = 0$
- Por lo tanto

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{G}\left(q_i, P_i\right) = \text{cte.}$$

- Si el Hamiltoniano de un sistema es invariante bajo una transformación canónica infinitesimal, la función generadora de esa transformación es una cantidad conservada.
- Este resultado es la conexión entre simetrías y leyes de conservación para un sistema, y es equivalente al Teorema de Noether en el formalismo hamiltoniano.
- La relación entre invariancia y constantes de movimiento se expresa más simple en la formulación hamiltoniana.

Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.

Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 \left(q_1 + a p_1\right)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 \left(q_1 + 2 a p_1\right) - \left(q_1 + 2 a p_1\right) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**

Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 \left(q_1 + a p_1\right)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 \left(q_1 + 2a p_1\right) - \left(q_1 + 2a p_1\right) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2 \left(q_2 + a p_2\right)$ y al evaluar
  $[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_3, H] = p_2 \left(q_2 + 2a p_2\right) - \left(q_2 + 2a p_2\right) p_1 = 0$, **también es constante**

Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$ y al evaluar
  $[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0$, **también es constante**
- Para encontrar f_4, se pueden usar las ecuaciones de movimiento:
  $\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t}$ con A una constante de integración

Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$

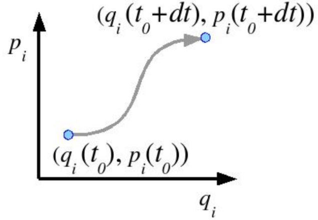
- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1 p_1 + q_2 p_2 + a p_1^2 + b p_2^2$
- Donde $f_1 = p_1 (q_1 + a p_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1 (q_1 + 2a p_1) - (q_1 + 2a p_1) p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2} p_1 + \frac{p_1}{p_2^2} p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2 (q_2 + a p_2)$ y al evaluar
  $[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$
  $[f_3, H] = p_2 (q_2 + 2a p_2) - (q_2 + 2a p_2) p_1 = 0$, **también es constante**
- Para encontrar f_4, se pueden usar las ecuaciones de movimiento:
  $\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = A e^{-t}$ con A una constante de integración
- Por lo cual $f_4 = p_1 e^t$ es una cantidad conservada

Ejemplo: $\mathcal{H} = q_1p_1 + q_2p_2 + ap_1^2 + bp_2^2$

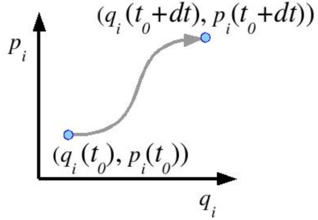
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Considere un hamiltoniano $\mathcal{H} = q_1p_1 + q_2p_2 + ap_1^2 + bp_2^2$
- Donde $f_1 = p_1(q_1 + ap_1)$, y $f_2 = \frac{p_1}{p_2}$ son constantes del movimiento.
- Para comprobar que son constantes tenemos
  $[f_1, \mathcal{H}] = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) \Rightarrow$
  $[f_1, \mathcal{H}] = p_1(q_1 + 2ap_1) - (q_1 + 2ap_1)p_1 = 0$, del mismo modo
  $[f_2, \mathcal{H}] = -\frac{1}{p_2}p_1 + \frac{p_1}{p_2^2}p_2 = 0$. **Son constantes de movimiento**
- Por simetría podemos proponer $f_3 = p_2(q_2 + ap_2)$ y al evaluar
  $[f_3, H] = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) \Rightarrow$
  $[f_3, H] = p_2(q_2 + 2ap_2) - (q_2 + 2ap_2)p_1 = 0$, **también es constante**
- Para encontrar f_4, se pueden usar las ecuaciones de movimiento:
  $\dot{p}_1 = -p_1 \Rightarrow p_1(t) = Ae^{-t}$ con A una constante de integración
- Por lo cual $f_4 = p_1e^t$ es una cantidad conservada
- También $f_5 = p_2e^t$ es una cantidad conservada pero $f_2 = f_4/f_5$

- Consideremos la evolución de una condición inicial en el espacio de fase en un intervalo de tiempo infinitesimal dt.
  $(q_i(t_0), p_i(t_0)) \rightarrow (q_i(t_0+dt), p_i(t_0+dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$



- Consideremos la evolución de una condición inicial en el espacio de fase en un intervalo de tiempo infinitesimal dt.
  $(q_i(t_0), p_i(t_0)) \to (q_i(t_0+dt), p_i(t_0+dt)) \equiv (Q_i(t), P_i(t))$



- Entonces tendremos la transformación
  $P_j \equiv p_j(t_0+dt) = p_j(t_0) + \dot{p}_j dt + \cdots = p_j + \dot{p}_j dt + \cdots$ y
  $Q_j \equiv q_j(t_0+dt) = q_j(t_0) + \dot{q}_j dt + \cdots = q_j + \dot{q}_j dt + \cdots$

Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[\delta_{ik}\delta_{jk} + \left(\delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[\delta_{ik}\delta_{jk} + \left(\delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe

$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\left(q_i(t_0), p_i(t_0)\right) dt + \cdots$$

$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}\left(q_i(t_0), p_i(t_0)\right) dt + \cdots$$

Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[\delta_{ik}\delta_{jk} + \left(\delta_{jk} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik} \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$

- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe

$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$

$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$

- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \to \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$

Transformación como evolución 1/2

- El paréntesis de Poisson entre las nuevas coordenadas será
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} dt \right) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} dt \right) \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{k=1}^{s} \left[\delta_{ik}\delta_{jk} + \left(\delta_{jk}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} + \delta_{ik}\frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_k} \right) dt \right] \Rightarrow$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} + \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} \right) dt \equiv \delta_{ij} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \right) \delta t = \delta_{ij}$$
- Por lo tanto, la transformación infinitesimal es canónica y se escribe
$$P_j = p_j(t_0) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
$$Q_j = q_j(t_0) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} (q_i(t_0), p_i(t_0))\, dt + \cdots$$
- El Hamiltoniano es la función generadora de la transformación canónica infinitesimal $\{q_i(t_0), p_i(t_0)\} \to \{q_i(t_0 + dt), p_i(t_0 + dt)\}$
- La evolución temporal de un sistema en su espacio de fase es una transformación canónica inducida por el Hamiltoniano.

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$.
- Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para $\tilde{\mathcal{H}}$.

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$.
- Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para $\tilde{\mathcal{H}}$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento P_j es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para $\tilde{\mathcal{H}}$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento P_j es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$.
- Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para $\tilde{\mathcal{H}}$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento P_j es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j = \text{cte}$. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p, q\} \to \{P, Q\}$ con Q cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$.

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para $\tilde{\mathcal{H}}$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento P_j es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p, q\} \to \{P, Q\}$ con Q cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$.
- Sea una transformación canónica $p = f(P)\cos Q$ y $q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q$, donde debemos determinar $f(P)$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$.
- Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para $\tilde{\mathcal{H}}$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento P_j es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j =$ cte. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p, q\} \to \{P, Q\}$ con Q cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$.
- Sea una transformación canónica $p = f(P)\cos Q$ y $q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q$, donde debemos determinar $f(P)$
- $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \frac{1}{2m}\left[(p(Q,P))^2 + m^2\omega^2(q(Q,P))^2\right] = \frac{1}{2m}[f(P)]^2$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 1/2

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ es conveniente cuando el cambio de variables hace desaparecer alguna coordenada Q_j o momento P_k en el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i, P_i, t\right)$.
- Se dice que esa coordenada o momento es cíclica para $\tilde{\mathcal{H}}$.
- Si $\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0$, entonces, la ecuación de Hamilton para el momento P_j es $\dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j = \text{cte}$. Es decir, **momento conservado**.
- Sea un oscilador armónico $\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- Encontrar la transformación canónica $\{p, q\} \to \{P, Q\}$ con Q cíclica en $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$.
- Sea una transformación canónica $p = f(P)\cos Q$ y $q = \frac{f(P)}{m\omega}\sin Q$, donde debemos determinar $f(P)$
- $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \frac{1}{2m}\left[(p(Q,P))^2 + m^2\omega^2(q(Q,P))^2\right] = \frac{1}{2m}[f(P)]^2$
- La transformación se reescribe como $p = m\omega q \cot Q \quad \Rightarrow p = p(q, Q) \Rightarrow \mathcal{F}_1(q, Q)$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo q, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo q, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo q, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo q, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con E la energía total.

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q,Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q,Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q,Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q,P)$
- Sustituyendo q, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q,P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q,p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q,P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con E la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para Q y P son
  $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \mathrm{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$
  $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q, Q)$ y $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q, Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q, P)$
- Sustituyendo q, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q, P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q, p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q, P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con E la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para Q y P son
  $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \mathrm{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$
  $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$
- Sustituyendo en $q(P, Q)$ y $p(P, Q)$ obtenemos
  $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi)$ y $p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \varphi)$

Coordenadas Hamiltonianas Cíclicas 2/2

- Para $\mathcal{F}_1$ tenemos $p = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = p(q,Q) \quad$ y $\quad P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = P(q,Q)$
- Entonces $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q$ por lo tanto $\mathcal{F}_1(q,Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$
- Por otro lado $P = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \csc^2 Q \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = q(Q,P)$
- Sustituyendo q, obtenemos $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q = p(Q,P)$.
- Comparando vemos que $f(P) = (2m\omega P)^{1/2}$ y $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \omega P$
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t} = 0$, tenemos $\mathcal{H}(q,p) = \tilde{\mathcal{H}}(Q,P)$
- Como, tenemos $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = E =$cte, con E la energía total.
- Las ecuaciones de Hamilton para Q y P son
  $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \mathrm{cte} \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$
  $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \varphi$
- Sustituyendo en $q(P,Q)$ y $p(P,Q)$ obtenemos
  $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad$ y $\quad p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \varphi)$
- Donde $\left(\frac{2E}{m\omega^2}\right)^{1/2}$ es la amplitud y φ es la fase.