

Monedas y Conos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



24 de mayo de 2025

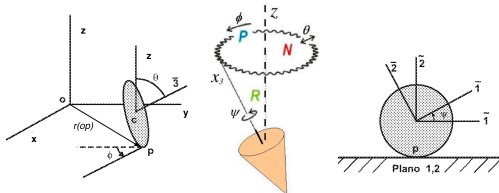
- 1 Moneda que rueda sin deslizar
 - Ligaduras
 - El Lagrangeano
 - Energías cinética y potencial
 - Simetrías y Constantes de movimiento
- 2 Moneda en un plano inclinado
 - Planteamiento del problema
 - Coordenadas y ligaduras
 - Integración de ligaduras
 - Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano
- 3 Un cono que rueda en un plano horizontal
 - Coordenadas y ligaduras
 - Rodar sin deslizar y energía cinética
- 4 Recapitulando

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



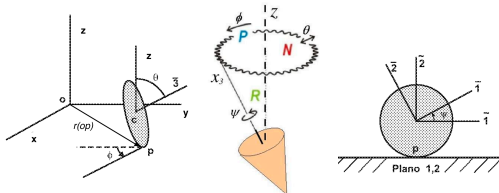
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



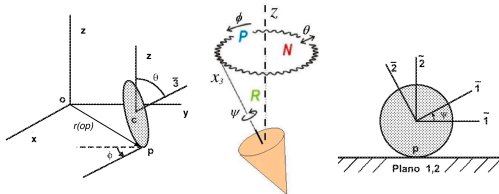
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



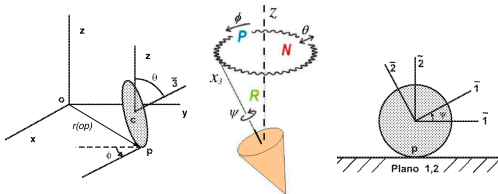
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\Omega} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$;
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$;
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$;
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
 $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
 $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$;
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
 $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
 $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Es decir $\dot{x} + a\dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - a\dot{\theta} \sin \phi \sin \theta + a\dot{\psi} \cos \phi = 0$;
 $\dot{y} + a\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + a\dot{\theta} \cos \phi \sin \theta + a\dot{\psi} \sin \phi = 0$; $\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$.
Nótese que hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría respecto al eje $\hat{\mathbf{x}}_3$.

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta}$ $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta}$ $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta}$ $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- Tendremos $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$+ \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta}$ $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- Tendremos $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$+ \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$$

- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras

$$T = \frac{1}{32}a^2M \left(\dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi}) \cos 2\theta + 8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2 \right)$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\theta}$ $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

- Adicionalmente, $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- Tendremos $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$$+ \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$$

- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras

$$T = \frac{1}{32}a^2M \left(\dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi}) \cos 2\theta + 8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2 \right)$$

- Por su parte, la energía potencial $V = mgz = mga \sin \theta$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} =$
$$\frac{1}{32}aM \left(4 \left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right. \\ \left. + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} =$
$$\frac{1}{32}aM \left(4 \left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right. \\ \left. + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$ y $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} =$
$$\frac{1}{32}aM \left(4 \left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right. \\ \left. + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$ y $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte} \Rightarrow$
$$\frac{1}{16}a^2M \left(\dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{32}aM \left(4 \left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$ y $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{16}a^2M \left(\dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}a^2M \left(\dot{\phi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi} \right) = C_2$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} =$

$$\frac{1}{32}aM \left(4 \left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin \theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right.$$

$$\left. + a\dot{\phi}^2(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte}$ y $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{cte}$
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte} \Rightarrow$

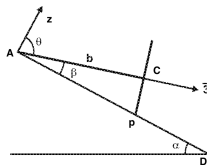
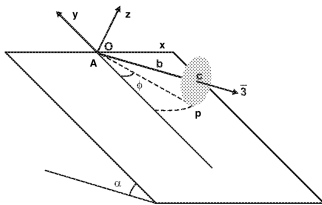
$$\frac{1}{16}a^2M \left(\dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}a^2M \left(\dot{\phi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi} \right) = C_2$
- Por lo tanto $\dot{\phi} \rightarrow \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(-6C_1+4C_2 \cos \theta+C_2 \cos 2\theta+C_2)}{a^2M(-2 \cos 2\theta+\cos 3\theta-5)}$

$$\dot{\psi} \rightarrow \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(4(2C_1-5C_2) \cos 2\theta+32C_1 \cos \theta+8C_1-2C_2 \cos 4\theta-26C_2)}{8a^2M(-2 \cos 2\theta+\cos 3\theta-5)}$$
- La ecuación de movimiento para θ es

$$10\ddot{\theta} + 4\dot{\phi}\dot{\psi} \sin^3 \theta \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dot{\phi}^2(5 \sin 2\theta + \sin 4\theta) + \frac{8g}{a} \cos \theta = 0$$

Planteamiento del problema

Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b . El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo α con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O , eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema \tilde{S} origen también en O y eje $\tilde{3}$ en la dirección AC . Encontrar las ecuaciones de movimiento para



- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\Omega} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\Omega} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y

$$\tilde{\Omega} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y
$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$$
- Con cual $b\dot{\mathbf{x}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3) = 0$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{\mathbf{x}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{\mathbf{y}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{\mathbf{z}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0,$
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0 \text{ y } \dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0.$$
Hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría del cuerpo respecto a $\hat{\mathbf{x}}_3$.

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$,
 $\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$ y $\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$.
Hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría del cuerpo respecto a $\hat{\mathbf{x}}_3$.
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[\frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$,
 $\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$ y $\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$.
Hemos tomado $\psi = 0$ por la simetría del cuerpo respecto a $\hat{\mathbf{x}}_3$.
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[\frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$
- Donde hemos sustituido el valor de θ que implica $\sin \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$
y $\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

- Como siempre la energía cinética se construye como

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

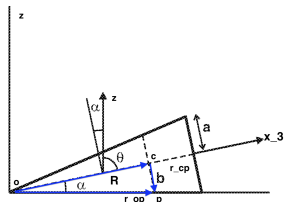
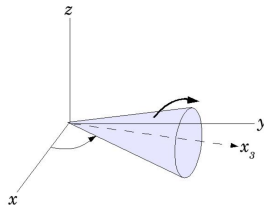
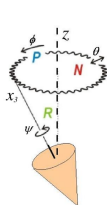
- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2} \dot{\phi}^2$.

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2} \dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será
$$V = Mgb(y \sin \alpha + z \cos \alpha) \equiv Mgb(-\cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$$

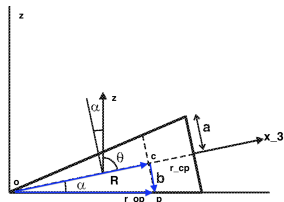
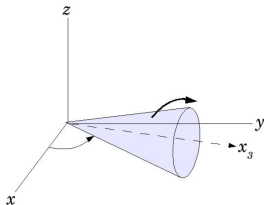
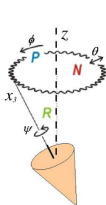
- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será
$$V = Mg(y \sin \alpha + z \cos \alpha) \equiv Mgb(-\cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$$
- La ecuación de movimiento será $\ddot{\phi} = -g \sin \alpha \frac{4(a^2 + b^2)^{3/2}}{a^2 + 6b^2} \sin \phi$

Un cono circular uniforme de altura h , ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y) .



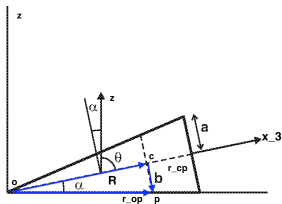
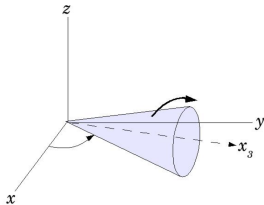
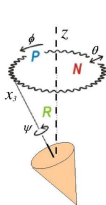
- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.

Un cono circular uniforme de altura h , ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y) .



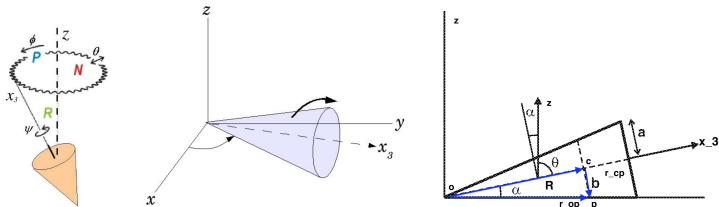
- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{cp}{oc}$

Un cono circular uniforme de altura h , ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y) .



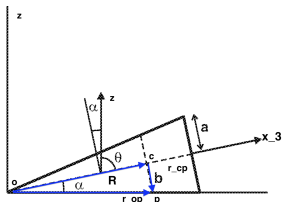
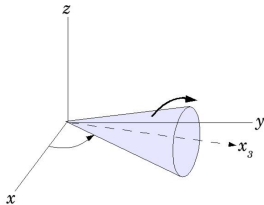
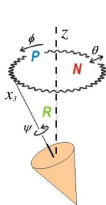
- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{cp}{oc}$

Un cono circular uniforme de altura h , ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y) .



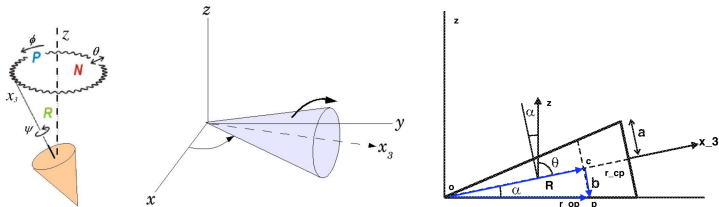
- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, $\tan \alpha = \frac{cp}{oc}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{y}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,

Un cono circular uniforme de altura h , ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y) .



- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{y}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}],$
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}],$
- Con lo cual $x = \frac{3h}{4} \cos \phi \sin \theta, \quad y = \frac{3h}{4} \sin \phi \sin \theta \quad z = \frac{3h}{4} \cos \theta,$

Un cono circular uniforme de altura h , ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y) .



- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, $\tan \alpha = \frac{cp}{oc}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{y}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Con lo cual $x = \frac{3h}{4} \cos \phi \sin \theta$, $y = \frac{3h}{4} \sin \phi \sin \theta$ $z = \frac{3h}{4} \cos \theta$,
- Derivando $\dot{x} = -\frac{3h}{4} \dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$ $\dot{y} = \frac{3h}{4} \dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$ $\dot{z} = 0$

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
 $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
 $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Por otro lado para el centro de masa
 $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$ $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$ $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
 $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Por otro lado para el centro de masa
 $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$ $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$ $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- Entonces, rodar sin deslizar se convierte en
 $\dot{x} + b\dot{\phi} \cos \phi \cos \theta + b\dot{\psi} \cos \phi = 0$ $\dot{y} + b\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + b\dot{\psi} \sin \phi = 0$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

La moneda que rueda sin deslizar

• El Sistema

- Disco homogéneo de radio a , masa M , seis grados de libertad.
- Ligadura: la velocidad del punto de contacto es cero:
 $\dot{\mathbf{r}}_{op} = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{cp} = 0$, y se toma $\psi = 0$ por simetría.

La moneda que rueda sin deslizar

• El Sistema

- Disco homogéneo de radio a , masa M , seis grados de libertad.
- Ligadura: la velocidad del punto de contacto es cero:
 $\dot{\mathbf{r}}_{\text{op}} = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\text{cp}} = 0$, y se toma $\psi = 0$ por simetría.

• Energía, Lagrangiano y simetrías de la moneda

- Energía cinética: $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T I \boldsymbol{\Omega}$. Es decir:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right]$$
- Energía potencial: $V = mga \sin \theta$ entonces el Lagrangiano: $\mathcal{L} = T - V$
- Simetrías y constantes de movimiento: Coordenadas cíclicas: ϕ, ψ
 - $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte} \Rightarrow$

$$\frac{1}{16}a^2M \left(\dot{\phi}(10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$$
 - $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}a^2M \left(\dot{\phi}(4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi} \right) = C_2$
 - La ecuación de movimiento para θ es

$$10\ddot{\theta} + 4\dot{\phi}\dot{\psi} \sin^3 \theta \csc^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \dot{\phi}^2(5 \sin 2\theta + \sin 4\theta) + \frac{8g}{a} \cos \theta = 0$$

La moneda que rueda en un plano inclinado

● El Sistema

- Disco unido a varilla sin masa, rueda sobre plano inclinado.
- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$,
 $\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$ y $\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$,
con $\psi = 0$ por la simetría del cuerpo respecto a $\hat{\mathbf{x}}_3$.
- Entonces, $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$, obtenemos
 $\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[\frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \phi$

Cono que rueda sin deslizar en un plano horizontal

• El Sistema

- Cono de altura h , masa m , ángulo de vértice α .
- Ligaduras: $x = \frac{3h}{4} \cos \phi \sin \theta$, $y = \frac{3h}{4} \sin \phi \sin \theta$ $z = \frac{3h}{4} \cos \theta$.
- Rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$. Se convierte en
$$\dot{x} + b\dot{\phi} \cos \phi \cos \theta + b\dot{\psi} \cos \phi = 0 \quad \dot{y} + b\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + b\dot{\psi} \sin \phi = 0$$

Cono que rueda sin deslizar en un plano horizontal

• El Sistema

- Cono de altura h , masa m , ángulo de vértice α .
- Ligaduras: $x = \frac{3h}{4} \cos \phi \sin \theta$, $y = \frac{3h}{4} \sin \phi \sin \theta$, $z = \frac{3h}{4} \cos \theta$.
- Rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$. Se convierte en
$$\dot{x} + b\dot{\phi} \cos \phi \cos \theta + b\dot{\psi} \cos \phi = 0 \quad \dot{y} + b\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + b\dot{\psi} \sin \phi = 0$$

• Energía Cinética

- La energía cinética es
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I_{11}}{2} [(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2] + \frac{I_{33}}{2} (\Omega^3)^2$$
$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I_{11}}{2} \dot{\phi}^2 \cos^2 \alpha + \frac{I_{33}}{2} (\dot{\phi} \sin \alpha + \dot{\psi})^2$$