

Armónicos Esféricos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



7 de junio de 2022

- 1 Polinomios asociados de Legendre
 - Definición, Fórmula de Rodrigues, Ecuación diferencial
 - Relaciones de recurrencia, generatriz, ortogonalidad
 - Ejemplos y representación gráfica
- 2 Armónicos esféricos
 - Armónicos esféricos: generalidades, ortogonalidad y expansiones
 - Relaciones de recurrencia y valores extremos $Y_l^m(\theta, \varphi)$
 - Representación Gráfica
 - Algunos armónicos esféricos
- 3 Sección
- 4 Recapitulando

- Los polinomios asociados de Legendre son una “generalización” de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.

- Los polinomios asociados de Legendre son una “generalización” de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.

- Los polinomios asociados de Legendre son una “generalización” de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.
- La fórmula de Rodrigues será $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \left[(x^2 - 1)^l \right] \Rightarrow$
 $P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$

- Los polinomios asociados de Legendre son una “generalización” de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.
- La fórmula de Rodrigues será $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l] \Rightarrow$
 $P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$
- Los *polinomios asociados de Legendre* son solución de la ecuación de Legendre generalizada
$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l^m(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0$$
- y equivalentemente en su forma autoadjunta
$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_l^m(x) \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0$$

- Los polinomios asociados de Legendre son una “generalización” de los Polinomios de Legendre que nos lleva a los Armónicos esféricos.
- La generalización es $P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$, donde, P_l^0 son las funciones originales de Legendre.
- La fórmula de Rodrigues será $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l] \Rightarrow$
 $P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l$
- Los *polinomios asociados de Legendre* son solución de la ecuación de Legendre generalizada
$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l^m(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0$$
- y equivalentemente en su forma autoadjunta
$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_l^m(x) \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0$$
- Como m^2 aparece en la ecuación diferencial es costumbre acotar $-m \leq l \leq m$. Además se puede demostrar que $P_l^m \propto P_l^{-m}$ de la forma $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$.

- Las relaciones de recurrencia para los polinomios asociados de Legendre son mas complicadas y variadas:

$$P_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) = 0$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) + P_{l+1}^{m+1}(x) = 0$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) + (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2} (P_l^m(x))' - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) + \frac{1}{2}P_l^{m+1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2} (P_l^m(x))' - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) = 0$$

- Las relaciones de recurrencia para los polinomios asociados de Legendre son mas complicadas y variadas:

$$P_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) = 0$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) + P_{l+1}^{m+1}(x) = 0$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) + (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2} (P_l^m(x))' - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) + \frac{1}{2}P_l^{m+1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2} (P_l^m(x))' - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) = 0$$

- La función generatriz para los polinomios de Legendre es

$$\mathcal{A}_m(x, t) \equiv \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} (1-x^2)^{-1/2} P_{s+m}^m(x) t^s$$

- Las relaciones de recurrencia para los polinomios asociados de Legendre son mas complicadas y variadas:

$$P_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)xP_l^m(x) - (l+m)P_{l-1}^m(x) - (l-m+1)P_{l+1}^m(x) = 0$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) - P_{l-1}^{m+1}(x) + P_{l+1}^{m+1}(x) = 0$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{1/2} P_l^m(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) + (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2} (P_l^m(x))' - \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) + \frac{1}{2}P_l^{m+1}(x) = 0$$

$$(1-x^2)^{1/2} (P_l^m(x))' - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_l^m(x) = 0$$

- La función generatriz para los polinomios de Legendre es

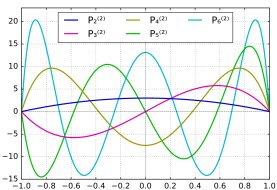
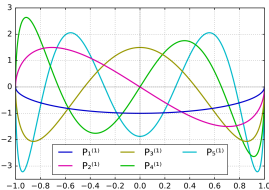
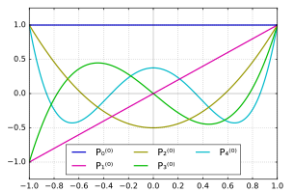
$$\mathcal{A}_m(x, t) \equiv \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} (1-x^2)^{-1/2} P_{s+m}^m(x) t^s$$

- La ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre son:

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx \equiv \int_0^\pi P_p^m(\cos \theta) P_q^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta =$$

$$\frac{2}{2p+1} \frac{(p+m)!}{(p-m)!} \delta_{pq} \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 P_p^m(x) P_p^n(x) dx = \frac{(p+m)!}{m(p-m)!} \delta_{mn}$$

Polinomios asociados de Legendre 3/3



Polinomios	cartesiana		polares
$P_0^0(x)$	=	1	
$P_1^{-1}(x)$	=	$\frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}$	= $\frac{1}{2} \sin \theta$
$P_1^0(x)$	=	x	= $\cos \theta$
$P_1^1(x)$	=	$-(1-x^2)^{1/2}$	= $-\sin \theta$
$P_2^{-2}(x)$	=	$\frac{1}{8}(1-x^2)$	= $\frac{1}{8} \sin \theta$
$P_2^{-1}(x)$	=	$\frac{1}{2}x(1-x^2)^{1/2}$	= $\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta$
$P_2^0(x)$	=	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$	= $\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
$P_2^1(x)$	=	$-3x(1-x^2)^{1/2}$	= $-3 \cos \theta \sin \theta$
$P_2^2(x)$	=	$3(1-x^2)$	= $3 \sin \theta$

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonormal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) \right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonormal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) \right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$
- Cualquier función $f(\theta, \varphi)$ puede ser expandida como $f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \Leftrightarrow$
 $c_{lm} = \langle Y_l^m | f(\theta, \varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_l^m(\theta, \varphi)^* f(\theta, \varphi)$

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonormal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) \right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$
- Cualquier función $f(\theta, \varphi)$ puede ser expandida como $f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \Leftrightarrow c_{lm} = \langle Y_l^m | f(\theta, \varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_l^m(\theta, \varphi)^* f(\theta, \varphi)$
- Esta expansión puede interpretarse como una expansión multipolar: la expansión de Laplace: $f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ C_0^0 representa el monopolo; C_1^{-1} , C_1^0 y C_1^1 representan el dipolo, etc, etc.

- Definimos los armónicos esféricos en función de los polinomios asociados de Legendre como $Y_l^m(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$
- Estas funciones forman una base ortonormal de funciones con producto interno $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) \right]^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$
- Cualquier función $f(\theta, \varphi)$ puede ser expandida como $f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \Leftrightarrow c_{lm} = \langle Y_l^m | f(\theta, \varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_l^m(\theta, \varphi)^* f(\theta, \varphi)$
- Esta expansión puede interpretarse como una expansión multipolar: la expansión de Laplace: $f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell}^m Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ C_0^0 representa el monopolo; C_1^{-1} , C_1^0 y C_1^1 representan el dipolo, etc, etc.
- Podemos re-escribir la expresión anterior como $f(\theta, \varphi) = C + C_i n^i + C_{ij} n^i n^j + C_{ijk} n^i n^j n^k + C_{ijkl} n^i n^j n^k n^l + \dots$. Los n^i son las componentes de un vector unitario en la dirección θ y φ . C es el monopolo; los tres C_i , representan el dipolo, etc

- A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, obtenemos:

$$\cos \theta Y_l^m = \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^m,$$

$$e^{\pm i\varphi} \sin \theta Y_l^m = \mp \left[\frac{(l \pm m+1)(l \pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m \pm 1} \pm \left[\frac{(l \mp m)(l \mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m \pm 1}.$$

- A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, obtenemos:

$$\cos \theta Y_l^m = \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^m,$$

$$e^{\pm i\varphi} \sin \theta Y_l^m = \mp \left[\frac{(l \pm m+1)(l \pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m \pm 1} \pm \left[\frac{(l \mp m)(l \mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m \pm 1}.$$

- Para $\theta = 0$, el valor de φ se vuelve irrelevante, y todo Y_l^m con dependencia de φ desaparece y como $P_l(1) = 1$, entonces

$$Y_l^m(0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}$$

- A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre, obtenemos:



















































$$\cos \theta Y_l^m = \left[\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^m + \left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^m,$$

$$e^{\pm i\varphi} \sin \theta Y_l^m = \mp \left[\frac{(l \pm m+1)(l \pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{1/2} Y_{l+1}^{m \pm 1} \pm \left[\frac{(l \mp m)(l \mp m-1)}{(2l-1)(2l+1)} \right]^{1/2} Y_{l-1}^{m \pm 1}.$$

- Para $\theta = 0$, el valor de φ se vuelve irrelevante, y todo Y_l^m con dependencia de φ desaparece y como $P_l(1) = 1$, entonces

$$Y_l^m(0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}$$

- Para $\theta = \pi$ tendremos $Y_l^m(\pi, \varphi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}.$

l :		$P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi)$	$P_l^{ m }(\cos \theta) \sin(m \varphi)$	
0	s			
1	p	 		
2	d	  	 	
3	f	   	  	
4	g	    	   	
5	h	     	    	
6	i	      	     	
m:		6 5 4 3 2 1 0	-1 -2 -3 -4 -5 -6	

Wikipedia <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphericalfunctions.svg>

Armónico	Esféricas	Cartesianas
$Y_0^0(\theta, \varphi)$	$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	
$Y_1^1(\theta, \varphi)$	$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$	$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x + iy)/r$
$Y_1^0(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z/r$
$Y_1^{-1}(\theta, \varphi)$	$= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}$	$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x - iy)/r$
$Y_2^2(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$	$= 3\sqrt{\frac{5}{96\pi}} (x^2 - y^2 + 2ixy)/r^2$
$Y_2^1(\theta, \varphi)$	$= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$	$= -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3z(x + iy)/r^2$
$Y_2^0(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$	$= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2} r^2 \right)/r^2$
$Y_2^{-1}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi}$	$= +\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3z(x - iy)/r^2$
$Y_2^{-2}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}$	$= 3\sqrt{\frac{5}{96\pi}} (x^2 - y^2 - 2ixy)/r^2$
$Y_3^3(\theta, \varphi)$	$= -\sqrt{\frac{7}{2880\pi}} 15 \sin^3 \theta e^{3i\varphi}$	$= -\sqrt{\frac{7}{2880\pi}} 15 [x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)]/r^3$
$Y_3^2(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{7}{480\pi}} 15 \cos \theta \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$	$= \sqrt{\frac{7}{480\pi}} 15z(x^2 - y^2 + 2ixy)/r^3$
$Y_3^1(\theta, \varphi)$	$= -\sqrt{\frac{7}{48\pi}} \left(\frac{15}{2} \cos^2 \theta - \frac{3}{2} \right) \sin \theta e^{i\varphi}$	$= -\sqrt{\frac{7}{48\pi}} \left(\frac{15}{2} z^2 - \frac{3}{2} r^2 \right) (x + iy)/r^3$
$Y_3^0(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right)$	$= \sqrt{\frac{7}{4\pi}} z \left(\frac{5}{2} z^2 - \frac{3}{2} r^2 \right)/r^3$
$Y_3^{-1}(\theta, \varphi)$	$= +\sqrt{\frac{7}{48\pi}} \left(\frac{15}{2} \cos^2 \theta - \frac{3}{2} \right) \sin \theta e^{-i\varphi}$	$= \sqrt{\frac{7}{48\pi}} \left(\frac{15}{2} z^2 - \frac{3}{2} r^2 \right) (x - iy)/r^3$
$Y_3^{-2}(\theta, \varphi)$	$= \sqrt{\frac{7}{480\pi}} 15 \cos \theta \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}$	$= \sqrt{\frac{7}{480\pi}} 15z(x^2 - y^2 - 2ixy)/r^3$
$Y_3^{-3}(\theta, \varphi)$	$= +\sqrt{\frac{7}{2880\pi}} 15 \sin^3 \theta e^{-3i\varphi}$	$= \sqrt{\frac{7}{2880\pi}} 15 [x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)]/r^3$



En presentación consideramos

1