### Cuerpo Rígido: ángulos y velocidades de Euler

#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



30 de octubre de 2024

#### Agenda



- Definiciones
- Desplazamiento general del cuerpo rígido
- 3 Velocidades en un cuerpo rígido
- Precesión, nutación y rotación
- lacktriangle Velocidades de Euler
- 6 Transformaciones entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio
- Sección

#### **Definiciones**

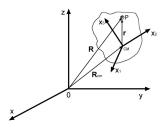


• Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas

#### **Definiciones**



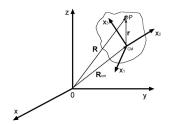
- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



#### **Definiciones**



- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



- Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:
  - Un sistema inercial o laboratorio, denotado por (x, y, z) y con origen en un punto fijo O
  - Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa (CM), identificado por  $(x_1, x_2, x_3)$



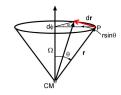
- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .



- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .
  - Rotación de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición  $\bf R$  de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es  $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$

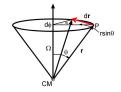


- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .
  - Rotación de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición  $\bf R$  de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es  $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$
- ullet Un desplazamiento infinitesimal de P será  $d{f R}=d{f R}_{
  m cm}+d{f r}$





- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .
  - Rotación de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición  $\bf R$  de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es  $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será  $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\rm cm} + d\mathbf{r}$



 Un cambio infinitesimal dr sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector r, no a un cambio de su magnitud



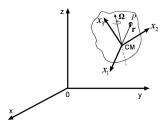
• Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .



- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$

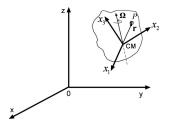


- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$





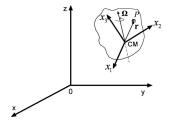
- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (\mathbf{r} \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



•  $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ : velocidad de P en el laboratorio (x,y,z),  $\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt}$  velocidad de traslación del centro de masa en (x,y,z),  $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ : velocidad angular instantánea de rotación.



- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (\mathbf{r} \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$

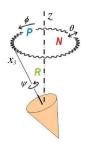


- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ : velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),  $\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt}$  velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),  $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ : velocidad angular instantánea de rotación.
- ullet La dirección de la velocidad angular instantánea  $oldsymbol{\Omega}$  es la misma que la del vector  $d\phi$

# Precesión, nutación y rotación



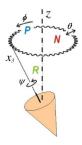
- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,



# Precesión, nutación y rotación



- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - nutación: inclinación con respecto al eje fijo y

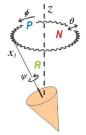


- Angulo Euler de precesión,  $\phi \in [0, 2\pi]$  : ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - Angulo Euler de nutación,  $\theta \in [0, \pi]$  : ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta  $x_3$ .

# Precesión, nutación y rotación



- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - nutación: inclinación con respecto al eje fijo y
  - rotación: rotación del cuerpo sobre sí mismo.



- Angulo Euler de precesión,  $\phi \in [0, 2\pi]$  : ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - Angulo Euler de nutación,  $\theta \in [0, \pi]$  : ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta  $x_3$ .
  - Angulo Euler de rotación,  $\psi \in [0, 2\pi]$  : ángulo de rotación con respecto al eje  $x_3$ , sobre el plano  $(x_1, x_2)$ , medido desde N a  $x_1$ .



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea  $\Omega$  es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea  $\Omega$  es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  se expresan en términos de los ángulos de  $(\theta, \phi, \psi)$  y de sus velocidades angulares  $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ .



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi},\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1,x_2,x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea  $\Omega$  es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector  $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  se expresan en términos de los ángulos de  $(\theta, \phi, \psi)$  y de sus velocidades angulares  $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ .
- Para cada componente  $\Omega_i$ , respecto al sistema centro de masa, tenemos  $\Omega_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i$ , i = 1, 2, 3.

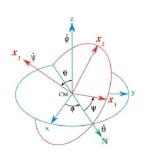
$$\Omega_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

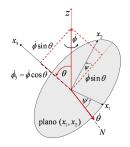
$$\Omega_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi$$

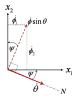
$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

## Componentes y velocidades angulares











• La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .



- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .
- Si  $\mathbf{r}_L$  son las coordenadas de un punto en el sistema  $S_{xyz}$  laboratorio y  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$  las de un punto en el sistema  $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$  centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}} \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j r^j$  y  $\mathbf{r}_L = \mathbb{U} \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j \tilde{r}^j$



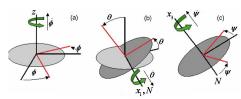
- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .
- Si  $\mathbf{r}_L$  son las coordenadas de un punto en el sistema  $S_{xvz}$  laboratorio y  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$  las de un punto en el sistema  $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$  centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}} \, \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_i \, r^j$

$$\mathbf{r}_L = \mathbb{U} \, \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j \, \tilde{r}^j$$

 $\bullet \ \, \mathsf{Claramente} \ \, \mathbb{U} \tilde{\mathbb{U}} \equiv \tilde{\mathbb{U}} \mathbb{U} = \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{\mathbb{I}} \mathbb{I} = \mathbb{I} \mathbb{I}^{-1}$ 



- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .
- Si  $\mathbf{r}_L$  son las coordenadas de un punto en el sistema  $S_{xyz}$  laboratorio y  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$  las de un punto en el sistema  $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$  centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}}\,\mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j\,r^j$  y  $\mathbf{r}_L = \mathbb{U}\,\mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j\,\tilde{r}^j$
- Rotamos tres veces  $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$  respecto a  $S_{x,y,z}$ .

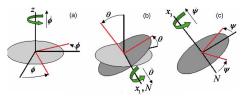


$$\tilde{\mathbb{U}}_{\phi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\theta} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\psi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

#### Título transparencia



• Inicialemente  $S_{x,y,z}$  y  $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$  coinciden y rotamos tres veces  $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$  respecto a  $S_{x,y,z}$ .

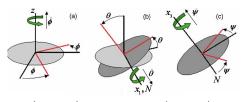


$$\tilde{\mathbb{U}}_{\phi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\theta} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\psi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

#### Título transparencia



• Inicialemente  $S_{x,y,z}$  y  $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$  coinciden y rotamos tres veces  $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$  respecto a  $S_{x,y,z}$ .



$$\tilde{\mathbb{U}}_{\phi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\theta} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\psi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

• En general concatenamos las tres rotaciones como  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi & \sin\phi\sin\phi - \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\phi\sin\phi \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\phi\cos\phi & \cos\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$