Partícula en un Campo electromagnético

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

29 de agosto de 2024

Agenda

1. Fuerza de Lorentz una *una fuerza generalizada*
2. El potencial vector
3. Simetría de Calibre

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$.

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial\dot{x}_i}\right)$

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.

Fuerza de Lorentz

- Una partícula de masa m y carga q, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$, en presencia de un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, está sujeta a fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$
- Consideremos una partícula con una energía potencial función de su posición y velocidad en coordenadas cartesianas: $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.
- El Lagrangiano, en coordenadas cartesianas, es $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, donde $T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$ y $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, genérico
- La ecuación de Lagrange es $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$
- Con lo cual $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Es decir: $m\ddot{x}_i = F_i \Rightarrow F_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}\right)$
- Las fuerzas generalizadas dependen de coordenadas y velocidades.
- La fuerza de Lorentz constituye una fuerza generalizada

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
  $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
  $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
  $$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
  $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$

El potencial vector 1/2

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=0\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$
- Entonces $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi+\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-\frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=0\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$
- Entonces $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi+\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-\frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B}=0\Rightarrow\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})=0\Rightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$
- Entonces $\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F}=q\left[-\nabla\varphi+\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-\frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$
- Como $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla\times\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - \frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$
- Como $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$
- Tendremos $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right]$
$$\Rightarrow F_i = q\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right) - \frac{1}{c}\frac{dA_i}{\mathrm{d}t}\right]$$

El potencial vector 1/2

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$
- Claramente $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ un potencial vector
- Con lo cual $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$
- Entonces $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- La fuerza de Lorentz será $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right]$
- o también $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - \frac{1}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right]$
- Donde $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$
- Como $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- Tendremos $\mathbf{F} = q\left[-\nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t}\right]$
$$\Rightarrow F_i = q\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right) - \frac{1}{c}\frac{dA_i}{\mathrm{d}t}\right]$$
- Como $\frac{\partial V}{\partial x_i} = q\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$ y $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{q}{c}A_i$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía E no depende del potencial vector $\mathbf{A}$ y, por tanto, tampoco depende del campo magnético $\mathbf{B}$.

El potencial vector 2/2

- Finalmente el potencial será $V = q\left(\varphi - \frac{1}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\right)$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$
- La función energía $E = \sum_j \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
- La función de energía $E \neq T(\dot{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, ya a que $V = V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ depende de la velocidad de la partícula.
- La función energía E se conserva dado que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$
- La función de energía E no depende del potencial vector $\mathbf{A}$ y, por tanto, tampoco depende del campo magnético $\mathbf{B}$.
- La fuerza magnética no realiza trabajo ya que siempre es perpendicular a la velocidad de la partícula.

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es
$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**: $\mathbf{A} \quad \to \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \quad \to \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ donde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**: $\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \mathrm{y} \quad \varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ donde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario
- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$
  $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$
  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

Simetría de Calibre 1/2

- El momento conjugado p_i asociado con la coordenada x_i es $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
- El momento conjugado depende de la velocidad y de la posición.
- Sean los campos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que derivan de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$.
- Consideremos la **transformación de calibre**: $\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad \text{y} \quad \varphi \quad \rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ donde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ es un campo escalar arbitrario
- Entonces, los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo esta transformación $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$
  $\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) = \mathbf{E}$
  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
- El Lagrangiano de una partícula en un campo electromagnético bajo una transformación de calibre, es
  $\mathcal{L}' = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi' + \frac{q}{c}\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \frac{q}{c}\nabla\Lambda \cdot \mathbf{v}$
  $= \mathcal{L} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \nabla\Lambda \cdot \mathbf{v}\right) = \mathcal{L} + \frac{q}{c}\frac{d\Lambda}{\mathrm{d}t}$

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos **B** y **E** bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.

Simetría de Calibre 2/2

- Una transformación de calibre implica la adición al Lagrangiano de la derivada total con respecto al tiempo de una function de las coordenadas y el tiempo.
- Las ecuaciones de movimiento que se derivan de $\mathcal{L}$ son invariantes bajo una transformación de calibre.
- La invarianza de los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ bajo una transformación de calibre implica que la fuerza de Lorentz es también invariante.
- Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación de calibre, esto indica la existencia de una simetría fundamental en el electromagnetismo: la **simetría de calibre**
- Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, donde $\delta\mathcal{L}$ es la transformación infinitesimal $\delta\mathcal{L} = \frac{d\Lambda}{dt}$ que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.
- Por el teorema de Noether sabemos que debe existir una cantidad conservada asociada a tal simetría.
- La simetría de calibre de las ecuaciones de Maxwell implica la conservación de la carga eléctrica