

# Examen Mecánica Clásica

## Instrucciones

- Tiempo: 3 horas
- Conteste todas las preguntas.
- Justifique todas sus respuestas. Se otorgan puntos completos únicamente a respuestas completas y correctamente razonadas.
- Puede usar constantes físicas y matemáticas estándar sin demostración.

## Parte I: Preguntas Conceptuales (30 puntos)

Responda de forma concisa pero rigurosa. Cada pregunta vale 10 puntos.

### 1. Fuerzas Centrales y Simetrías

Discuta el papel de las leyes de conservación en problemas de fuerzas centrales. En particular, derive las cantidades conservadas a partir de las simetrías del Lagrangiano y explique su significado físico o geométrico.

### 2. Modos Normales y Acoplamiento

Explique por qué los modos normales de un sistema con pequeñas oscilaciones corresponden a ecuaciones de movimiento desacopladas. ¿Cómo se relacionan los autovectores de la matriz dinámica con el movimiento físico del sistema?

### 3. Tensor de Inercia y Ecuaciones de Euler

Describa el significado físico de los ejes principales de inercia. Derive las ecuaciones de Euler para un cuerpo rígido en rotación libre y discuta en qué condiciones el movimiento es estable o inestable.

## Parte II: Problemas Prácticos (70 puntos)

Muestre todo su procedimiento. Cada problema indica su valor en puntos.

### Problema 1: Dispersión en un Potencial Central (25 puntos)

Una partícula de masa  $m$  se aproxima a un centro de fuerza con un potencial atractivo de la forma  $V(r) = -\frac{k}{r}$ . La partícula tiene energía  $E > 0$  y parámetro de impacto  $b$ .

- Derive la ecuación diferencial para la órbita  $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ .
- Resuelva la ecuación y encuentre el ángulo de dispersión  $\Theta$ .
- Demuestre que el parámetro de impacto se relaciona con el ángulo de dispersión mediante  $\Theta = 2 \arcsin \left( \frac{k}{L\sqrt{2mE}} \right)$ .

## Problema 2: Osciladores Acoplados (20 puntos)

Dos masas  $m$  están conectadas por tres resortes idénticos de constante elástica  $k$ , dispuestos linealmente con los extremos exteriores fijos. Sean  $x_1$  y  $x_2$  los desplazamientos respecto al equilibrio.

- (a) Escriba el Lagrangiano del sistema.
- (b) Encuentre las frecuencias de los modos normales y describa los movimientos correspondientes.

## Problema 3: El Trompo Libre Simétrico (25 puntos)

Considere un trompo simétrico con momentos de inercia  $I_1 = I_2 \neq I_3$  y sin torques externos. Sea  $\boldsymbol{\omega}$  el vector de velocidad angular y  $\boldsymbol{L}$  el momento angular.

- (a) Escriba las ecuaciones de Euler en el sistema del cuerpo.
- (b) Resuelva  $\omega_1(t), \omega_2(t)$  suponiendo  $\omega_3$  constante.
- (c) Discuta la interpretación geométrica de este movimiento utilizando la construcción de Poincaré.