Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

28 de mayo de 2021

Agenda Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Motivación, origen y conceptos básicos
2. Orden y linealidad
3. Soluciones: explícitas, implícitas, generales y particulares
4. Valores iniciales y valores de contorno
5. Sección
6. Recapitulando

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F}\left[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right] = 0$, donde: $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}, \quad y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{(n)} y}{\mathrm{d}x^{(n)}}$.

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F}\left[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right] = 0$, donde: $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$, $\quad y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{(n)} y}{\mathrm{d}x^{(n)}}$.
- Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias: $ax + yy' = 0$, $\quad x^2 y''' - (y')^2 = e^x$, $\quad y'' \cos(x) + \cos(y) = 2$.

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F}\left[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right] = 0$, donde: $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$, $\quad y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{(n)} y}{\mathrm{d}x^{(n)}}$.
- Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias: $ax + yy' = 0$, $\quad x^2 y''' - (y')^2 = e^x$, $\quad y'' \cos(x) + \cos(y) = 2$.
- Si la función es $f = f(x, y, z)$ una ecuación diferencial en derivadas parciales es una de la forma: $\mathcal{F}\left[x, y, z, f, \partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial_z f,\ \partial_x^2 f,\ \partial_y^2 f,\ \partial_z^2 f,\ \partial_{xy} f,\ \partial_{xz} f, \ldots\right] = 0$,

- Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo $\mathcal{F}\left[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right] = 0$, donde: $y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$, $\quad y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2}, \cdots, y^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{(n)} y}{\mathrm{d}x^{(n)}}$.
- Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias: $ax + yy' = 0, \quad x^2 y''' - (y')^2 = e^x, \quad y'' \cos(x) + \cos(y) = 2$.
- Si la función es $f = f(x, y, z)$ una ecuación diferencial en derivadas parciales es una de la forma: $\mathcal{F}\left[x, y, z, f, \partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial_z f,\ \partial_x^2 f,\ \partial_y^2 f,\ \partial_z^2 f,\ \partial_{xy} f,\ \partial_{xz} f, \ldots\right] = 0$,
- Ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - f(x, y) = p(y)$.

Orden y linealidad

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n, es:
  $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,,$

Orden y linealidad

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n, es:
  $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,,$
- Entonces lineal o no lineal

$$
\begin{aligned}
y'y'' + yy' - ay^2 &= k(x) \quad \text{es no lineal} \\
\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y &= k(x) \quad \text{es lineal}
\end{aligned}
$$

Orden y linealidad

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n, es:
$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,,$
- Entonces lineal o no lineal
$$\begin{aligned} y'y'' + yy' - ay^2 &= k(x) \quad \text{es no lineal} \\ \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y &= k(x) \quad \text{es lineal} \end{aligned}$$
- El orden de la ecuación diferencial
$$\begin{aligned} y'' &+ (3y')^3 + 2x = 7\,, \quad \text{EDO no lineal de orden 2} \\ y' &+ y = x\,, \quad \text{EDO lineal de orden 1}\,. \end{aligned}$$

Orden y linealidad

- Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n, es:
  $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,,$
- Entonces lineal o no lineal
  $$\begin{array}{rcll} y'y'' + yy' - ay^2 & = & k(x) & \text{es no lineal} \\ \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y & = & k(x) & \text{es lineal} \end{array}$$
- El orden de la ecuación diferencial
  $$\begin{array}{lcll} y'' & + & (3y')^3 + 2x = 7\,, & \text{EDO no lineal de orden 2} \\ y' & + & y = x\,, & \text{EDO lineal de orden 1}\,. \end{array}$$
- Homogénea o Inhomogénea
  $$\begin{array}{rcll} \frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} + g(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - ay(x) & = & k(x) & \text{lineal inhomogénea} \\ y''(x) + g(x)y'(x) - ay(x) & = & 0 & \text{lineal homogénea.} \end{array}$$

Soluciones: explícitas, implícitas, generales y ....

- Las soluciones será explícitas
  $\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + 4\ e^t \Rightarrow y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2\ te^t$

- Las soluciones será explícitas
$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + 4\ e^t \ \Rightarrow\ y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2\ te^t$$
- e implícitas $y\ y' + x = 0 \ \Rightarrow\ f(x,y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow$
$$\left\{ \begin{array}{ll} y = & \sqrt{25 - x^2} \\ y = & -\sqrt{25 - x^2} \end{array} \right. \quad \text{con} \ -5 < x < 5$$

- Las soluciones será explícitas
  $\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + 4\ e^t \ \Rightarrow \ y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2\ te^t$
- e implícitas $y\ y' + x = 0 \ \Rightarrow \ f(x,y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow$
  $\left\{ \begin{array}{rl} y = & \sqrt{25 - x^2} \\ y = & -\sqrt{25 - x^2} \end{array} \right. \quad \text{con} \ -5 < x < 5$
- Las soluciones generales representan familias de soluciones parametrizadas por constantes de integración

$$\begin{array}{rcl} y' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_1 \\ y'' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_2 x + C_1 \\ y''' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_3 x^2 + C_2 x + C_1 \end{array}$$

- Las soluciones será explícitas
$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + 4\ e^t \ \Rightarrow\ y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2\ te^t$$
- e implícitas $y\ y' + x = 0\ \Rightarrow\ f(x,y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow$
$$\left\{ \begin{array}{ll} y = & \sqrt{25 - x^2} \\ y = & -\sqrt{25 - x^2} \end{array} \right. \quad \text{con} \ -5 < x < 5$$
- Las soluciones generales representan familias de soluciones parametrizadas por constantes de integración
$$\begin{array}{rcl} y' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_1 \\ y'' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_2 x + C_1 \\ y''' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_3 x^2 + C_2 x + C_1 \end{array}$$
- Si $y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ es solución de una ecuación diferencial $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0$, para n constantes $\{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n\}$ arbitrarias, entonces $y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ es una familia n-paramétrica de soluciones.

Valores iniciales y valores de contorno

- Un problema de valores iniciales es
$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0$
$\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ donde
$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$

- Un problema de valores iniciales es
$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0$
$\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ donde
$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$
- Determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un único punto, :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\omega}\mathrm{sen}(\omega x)\,.$$

Valores iniciales y valores de contorno

- Un problema de valores iniciales es
  $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0$
  $\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ donde
  $y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$
- Determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un único punto, :
  $$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\omega}\mathrm{sen}(\omega x)\,.$$
- Si disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, tendremos un problema de valores de contorno.
  $$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \mathrm{sen}(n\pi\omega x)\,.$$

- Un problema de valores iniciales es
$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0$
$\Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ donde
$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n\,.$
- Determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un único punto, :
$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\omega}\mathrm{sen}(\omega x)\,.$$
- Si disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, tendremos un problema de valores de contorno.
$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \mathrm{sen}(n\pi\omega x)\,.$$
- Nótese que también pudimos haber tenido información del tipo $y(0) = y_0\,,\ y'(1) = y_1\,;\ y'(0) = y_0\,,\ y'(1) = y_1\,;\ y'(0) = y_0\,,\ y(1) = y_1\,,$ y para cada uno de estos caso tendremos una solución distinta.

Recapitulando

En presentación consideramos

1.