Universidad Industrial de Santander (UIS) Facultad de Ciencias, Escuela de Física Bucaramanga, 18 de Agosto de 2020

Generación de un modelo para la extracción de la topología de una red compleja a partir de la evolución de las interacciones entre agentes sociales.

Steven Fernando Rico Aparicio ^{1,2} Autor

Johann H. Martínez^{3,4}
Director

Luis Alberto Núñez^{1,2} Codirector

¹Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación GIRG ²Grupo Halley de Astronomía y Ciencias Aeroespaciales ³Grupo interdisciplinar de sistemas complejos (GISC), Madrid, España ⁴Complex Systems ℰ Sport Analytics. Madrid, España

$\acute{\mathbf{I}}\mathbf{ndice}$

1.	Resumen	2
2.	Introducción	3
3.	Planteamiento del problema	6
4.	Justificación	7
5.	Objetivos	7
	5.1. Objetivo General	7
	5.2. Objetivos Específicos	7
6.	Corpus de Datos	8
7.	Metodología	8
8.	Cronograma de Actividades	10

1. Resumen

El internet, los aeropuertos, las epidemias, las conexiones neuronales y la dinámica social parecieran ser sistemas diferentes. Estos, y muchos otros, comparten características que definen su dinámica con base en la organización de las conexiones que permiten el flujo de información entre sus elementos constitutivos (links y servidores, rutas aéreas y aeropuertos, contactos sociales y agentes). Su estudio yace en el área de la Física de Sistemas Complejos (FSC) y su objetivo es entender la complejidad de los denominados many-body systems, donde la eficiente transmisión de información se debe a la cuantificación de una serie de estados que conviven entre una fase ordenada y un estado altamente entrópico.

Como una de las ramas de la FSC, la Ciencia de Redes busca estudiar los patrones espacio temporales que emergen de la interacción de los elementos que conforman un sistema en red. Si bien la idea de red es intuitiva, no es trivial capturar y cuantificar los conjuntos de enlaces y nodos que definen un grafo, más aún, si la red representa un sistema dinámico que evoluciona en el tiempo. Se define entonces una hipótesis que declara la existencia de una dinámica social codificada en la estructura de red evolutiva, la cual puede ser capturada a partir de algoritmos que involucren herramientas de la FSC. La pregunta apunta a si es posible extraer dicha arquitectura a partir de agentes sociales que evolucionan en el espacio-tiempo, con un inicio y fin de dicha evolución bien definido.

Para responderla, el mundo deportivo del fútbol brinda una enorme utilidad, ya que es posible monitorear la interacción de una cantidad fija de actores durante un tiempo explicito e inequívoco. El proyecto se decanta entonces por la dinámica de deportes de equipo, paradigma de sistemas sociales evolutivos en el que los agentes dotan a los nodos de características físicas, y sus pases asocian funciones de probabilidad.

El desafío de este proyecto radica en la escasez de datos libres que rastreen la dinámica puntual de estos agentes interactuantes (jugadores) y la inexistencia de un modelo físico que capture la red social sin recurrir a sistemas de visión supervisada. En este trabajo se propone crear estrategias de captura de eventos y medir la eficiencia del algoritmo que extraerá la dinámica de la red social, con base en la FSC y la teoría de señales. Se espera aunar al conocimiento de la Ciencia de Redes al proponer una novedosa estrategia para la extracción de una red compleja social con una marcada evolución. Así mismo, se pretende introducir algunos métodos de investigación transdisciplinar en FSC, no solo al país, sino también a la Escuela de Física de la UIS.

Palabras clave: Redes complejas, ciencia de datos, fútbol

2. Introducción

La Física de Sistemas Complejos (FSC) es un área fuertemente activa que se centra en el estudio de la complejidad de sistemas altamente interconectados y pluralitarios, desde la Física Estadística y la Teoría de Grafos. Dado su rasgo transdisciplinar, su auge ha venido creciendo en los últimos años y ha trascendido de los campos de la Física Teórica, las Matemáticas Discretas y la Topología [1]. La Ciencia de Redes ha emergido como su rama de mayor éxito debido a la sencilla intuición de una red y al riguroso cuerpo de herramientas matemáticas y físicas que posee. Esta, se dedica al estudio de sistema basados en el intercambio de información, más allá del interés sobre los elementos que lo componen. En palabras de uno de los autores más prolíficos en el campo, M. Newman: "Las redes constituyen un método, aunque general, muy poderoso de representar patrones de conexión e interacción entre las partes de un sistema" [2].

Una red, en su forma más sencilla, se expresa por una cantidad de nodos unidos por medio de puentes o enlaces. Para su estudio ésta se basa en cuatro pilares fundamentales: Teoría de grafos, Física Estadística, Dinámica no Linear y *Big Data* [2]. Al poseer la capacidad de evaluar la dinámica de un sistema con base en la topología que este posea, la ciencia de redes puede ser aplicada a múltiples disciplinas como: la Biología [3], la Tecnología [4], la Economía [5], la Medicina [6], el Arte [7] y el foco de este proyecto, la Sociedad [8].

Físicamente, una red se define como un sistema de partículas indistinguibles y correlacionadas entre sí, donde la descripción del ensamble está dada por las características de las conexiones y no por la importancia de los elementos constitutivos. Matemáticamente, el grafo **G**, es un objeto conformado por dos conjuntos, a saber: uno de nodos **N** y otro de enlaces **L**, mientras que la red, en sí misma, es la representación visual del objeto grafo en el espacio tridimensional. No obstante, a lo largo del proyecto se hablará indistintamente de grafo y red como una misma entidad. Ahora bien, desde la perspectiva de las ciencias sociales, los nodos identifican agentes, mientras que los enlaces sus relaciones, o el flujo de información entre ellos. Este punto de vista permite analizar patrones espacio temporales, como por ejemplo: la dinámica de transmisión de enfermedades [9] o la dispersión de rumores [10], entre otros.

El análisis de redes en ciencias sociales abarca un gran abanico de preguntas ¿se puede conocer cuáles actores son los más relevantes? ¿qué tipo de rol central juegan? ¿dónde se encuentran los enlaces más fuertes? ¿cuáles de ellos forman un camino para una rápida transmisión de información en sitios muy distantes de la red? o también ¿es posible entender la estructura global de la misma? Estas preguntas, se basan en el supuesto de conocer de antemano la red social asociada, algo que muchas veces no es una tarea trivial y requiere ingentes esfuerzos metodológicos, computacionales y teóricos. De esta forma, no solo el análisis de una red es intrincado sino también la construcción de la misma, siendo en esta linea de trabajo, la de construir una red compleja a partir de datos brutos, en la que se enmarca este estudio.

Un problema particular que enmarca dicho reto son las redes que evolucionan en el tiempo. La captura de la estructura de red de este tipo de grafos implica no solamente la compleja introducción de la variable temporal, sino también, los potenciales desplazamientos que los nodos puedan tener, generando así consecuencias de difícil cuantificación, por ejemplo: la

estructura de red podría cambiar en cada paso temporal, así como la posición de los nodos y su centro de masa o los enlaces entre actores y la fuerza de estos, entre otros [11]. Si bien la extracción de esta arquitectura de red que evoluciona en el tiempo es un problema de alto grado de complejidad, se considera viable trabajar en un algoritmo que sirva para la captura de la conectividad del sistema a estudiar, dentro de una serie de delimitaciones. Se supone un sistema pseudocanónico en el que el espacio está definido, la temperatura es constante a efectos de los agentes interactuantes y el número de elementos está claramente determinado. En aras de una red que permita tener las anteriores características, junto con un marcado inicio y final de su evolución, el proyecto se decanta por un sistema que ejemplifica perfectamente una red social temporal: la red de deportes colectivos, en particular las redes de fútbol.

En el fútbol nace la idea de modelar los partidos como una red, con base en el análisis de las interacciones (pases) entre todos los jugadores (nodos) de un mismo equipo, con el fin de estudiar el rendimiento de este y el rol o importancia que posee cada jugador en el desarrollo de un encuentro [12]. Entender este tipo de redes sociales ha sido de gran importancia en la literatura científica. Las diferentes herramientas de la teoría de grafos han permitido realizar un análisis cuantitativo del estilo de juego de diversos conjuntos sociales en la ligas de fútbol, como por ejemplo la cardinal importancia del F.C Barcelona en la liga española [11][13] [14].

Para construir las redes de pases, es necesario tener conocimiento de información de posicionamiento para cada jugador en la cancha así como las acciones o eventos que ocurren durante un encuentro. En abril de 2020 $Metrica\ Sport$, una plataforma privada de video análisis deportivo, liberó al público un conjunto de datos que cumplen con estos cometidos. Debido a la robustez de elementos y la alta frecuencia en la que se tomaron $(f_{sampling} = 25\ fps)$, éstos son caracterizados como $big\ data$ y vienen clasificados en dos tipos de archivos. El primero de ellos se denomina de tipo rastreo, tracking. Este recopila la información más básica del partido: la ubicación espacial sobre la cancha, en coordenadas bidimensionales, del balón y de los 22 jugadores al mismo tiempo; esto se realiza mediante tecnología de monitoreo por visión artificial supervisada [15]. En la literatura científica, estos datos son los más comunes, sin embargo, extraer la red de pases de estos es un problema de alta complejidad.

Por otro lado, la segunda instancia de archivos, denominado de eventos (*events*), provee información necesaria para construir la red de pases directamente. Este archivo clasifica los acciones que ocurren en el partido (pases, goles, tiro al arco, saque de banda, penalti, entre otros) y las identifica en el tiempo exacto del evento a una resolución de segundos. Toma en cuenta el jugador que lo realizó y su posición espacial. Sin embargo en este caso, los datos son recolectados y organizados manualmente gracias a expertos que revisan, segundo a segundo, las grabaciones de los partidos [16], haciendo que su disponibilidad publica sea limitada. Pese a esto, los datos liberados por *Metrica Sport*, para dos partidos completos e independientes, poseen ambas clases de archivos.

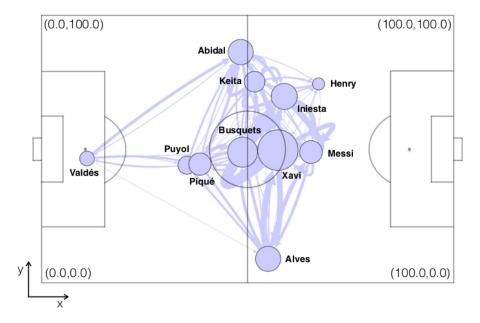


Figura 1: Red de pases del F.C Barcelona en su encuentro contra el Real Madrid jugado en el estadio Benabeu durante la temporada 2009/2010. En el presente grafo tanto nodos como vértices representan el peso en sistema mediante el radio del jugador y el ancho del enlace. Tomada de [13]

Formalmente, una red de pases (Fig. 1) es la construcción geométrica de un grafo en el sistema deportivo, siendo este definido como una pareja ordenada de conjuntos tales que G = (N, L) donde N es un conjunto no vacío de vértices y L es un conjunto de aristas. La representación matemática fundamental de los grafos es la **matriz de adyacencia**. Esta es una matriz A_{ij} (Eq. 1) de dimensión $n \times n$ donde n es el numero de nodos. Su función es codificar los pases entre todos los jugadores de un mismo equipo, obteniendo una matriz con elementos nulos en su diagonal ya que un auto-pase en un evento que no aúna a la dinámica de la red [2].

$$A_{ij} = \begin{cases} x \text{ tal que } x \text{ es la multiplicidad de pases entre nodos } i \text{ y } j, \\ 0 \text{ de otra manera.} \end{cases}$$
 (1)

El análisis de estos sistemas complejos se hace a través de la aplicación de varios conceptos de redes. Aunque un amplio abanico de coeficientes permiten cuantificar y caracterizar la dinámica y estilo de juego de un equipo, comúnmente se estudia el clustering y el camino más corto. El camino más corto (R) (Eq. 2) es un parámetro de conectividad entre los nodos de la red, de modo que se define d_{ij} como la menor distancia (enlaces) entre un nodo i y uno j, mientras que l_i se establece como la mínima distancia promedio entre i y todos los nodos restantes [2]. En términos de deportivos, este indicador expresa que tan fuerte es el nexo entre los futbolistas y cuantifica por cuantos nodos en promedio debe pasar el balón para conectar dos jugadores cualquiera dentro del equipo [13].

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i} \ell_{i} = \frac{1}{n^{2}} \sum_{ij} d_{ij} \tag{2}$$

El coeficiente de **clustering** (C), por otro lado, se centra en organizaciones locales. Como lo indica su nombre, éste es un parámetro de agrupamiento y cuantifica la medida en que un par de nodos, con uno tercero en común, estén conectados entre sí. Para esto definimos como grado (k_i) la cantidad de nodos vecinos con la cual el vértice i mantiene un enlace, y la cantidad de posibles conexiones entre pares de vecinos como $k_i(k_i-1)/2$. De esta forma, el parámetro se define como la cantidad de pares existentes en relación a los posibles, promediando sobre todos los nodos de la red (Eq. 3) [17]. Lo que implica que cuando nos remitimos al mundo del fútbol, el clustering es una medida de la robustez local de la red entre cualquier triplete de jugadores, es decir, si a un jugador (a) se le imposibilita realizar un pase a su compañero (b), el coeficiente mide la probabilidad de que dicho pase sea efectivo a través de un tercer jugador intermediario (c) [13].

$$C = \frac{2}{n} \sum_{i} \frac{\text{(numero de pares de vecinos de i que están conectados)}}{k_i(k_i - 1)}$$
(3)

Con todo lo anterior, se hipotetiza la existencia de una estructura de red social, con evolución temporal, que puede ser potencialmente develada a partir de los datos de tracking de un sistema. Se espera con este trabajo contribuir al estudio de la FSC y la generación de redes sociales. Esto, mediante la creación de algoritmos tipo Big Data que puedan depurar ingentes cantidades de datos en bruto (raw data) con fuertes grados de complejidad computacional de carácter físico (posición, tiempo, frecuencia, interacciones, radios de contactos, entre otros).

3. Planteamiento del problema

Los sistemas de redes son estudiados con base en la construcción de la red y las conexiones entre los agentes que los componen. Sin embargo, las interacciones que definen el sistema, hacen parte de un gran abanico de posibles interacciones y su proceso de clasificación es ciertamente arduo y complejo.

Los sistemas con evolución temporal presentan dos problemas principales en la FSC. En primera instancia, la construcción de la red representa un trabajo intrincado. No existen modelos que identifiquen y capturen las interacciones dentro de un sistema. Estas son rastreadas y clasificadas manualmente por expertos que supervisan, segundo a segundo, la evolución de los agentes. En segunda instancia, hay poca disposición de estos datos de interacción en la literatura científica. Esto trunca un continuo desarrollo investigativo en esta área de conocimiento.

Es así, que a partir de la hipótesis se quiere responder la pregunta de sí: ¿es posible extraer la red de un sistema cerrado a partir del rastreo en bruto de las interacciones de los agentes y sus enlaces en el tiempo?

Para responder esto, el estudio se basa en el sistema deportivo del fútbol. Este mundo proporciona datos del seguimiento posicional de los jugadores y el balón a lo largo del partido (tracking). Los cuales codifican las potenciales interacciones (Pases) del sistema. Este trabajo

busca entonces la reconstrucción directa de una red compleja apoyándose en técnicas de la FSC, análisis cuantitativos propios de la teoría de señales y del aprendizaje de máquina, como lo es la captación de eventos estadísticamente significativos en el tiempo.

4. Justificación

Se observa la necesidad de generar un modelo matemático y computacional que permita obtener la topología de una red compleja desde de las interacciones base de un sistema físico. Esta sistematización incrementaría la utilidad de los datos de posición o rastreo para fines de investigación científica, más allá del contexto social. Así, el presente trabajo de grado propone obtener de forma directa la arquitectura de red de fútbol a partir de los datos recolectados por el monitoreo espacio-temporal de los jugadores a lo largo del partido. Estos resultados no solo aportarán a potenciales automatizaciones y toma de decisiones en deportes colectivos, sino que podrían ser extrapolados a otros sistemas sociales como la evolución en las redes de enfermedades de transmisión por contacto social; e incluso biológicos, como la captura de redes evolutivas en cultivos in vitro de neuronas. Por último, y no menos importante, se justifica este trabajo bajo el interés de una óptima transferencia de conocimiento entre grupos de investigación internacionales activos en sistemas complejos, que avalan este proyecto, y la escuela de física de la UIS, en aras de extender y abrir campo a futuras áreas de estudio actuales en la física.

5. Objetivos

5.1. Objetivo General

Generar un modelo para extraer la topología de una red compleja a partir de la evolución de las interacciones entre agentes sociales desde la Física de Sistemas Complejos.

5.2. Objetivos Específicos

- 1. Explorar el volumen de datos tipo big data liberado y filtrar la información asociada a los eventos denominado como "Pase" como enlaces entre agentes interactuantes.
- 2. Definir un modelo físico de captura de pases bajo restricciones espacio-temporales.
- 3. Crear un algoritmo de captura de pases a ser implementado sobre el set de datos de tracking.
- 4. Estimar la eficiencia de captura mediante herramientas de teoría de detección de señales.
- 5. Crear las redes complejas experimentales para evaluarlas mediante métodos estadísticos de teoría de la información y conceptos de cuantificación de la ciencia de redes.

6. Corpus de Datos

El conjunto de datos a tratar corresponde a 2 partidos de fútbol. La información es organizada por niveles: partido, equipo, mitad jugada (Fig. 2). El algoritmo a crear correrá sobre los datos de tracking que consisten en más de 60 posiciones (entre coordenadas espaciales de jugadores y balón) rastreadas simultáneamente con una frecuencia de 25 (frames/s). Esto corresponde a un almacenamiento de más de 135000 frames en los 90 minutos de juego para cada partido. Por otro lado, los datos de events, recopilados de forma manual por expertos, presentan para cada partido más de 1700 frames con información de acciones (pases, goles, tiros al arco y demás), los jugadores que las realizaron, sus posiciones espaciales, los lapsos de tiempo de las jugadas, entre otros.

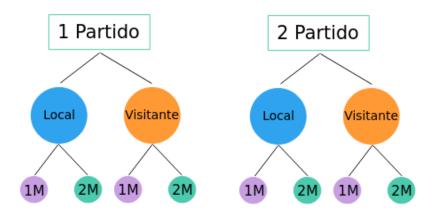


Figura 2: Niveles de organización para lectura de datos de rastreo.

7. Metodología

Para cumplir los objetivos planteados, se requiere proceder con el siguiente orden de actividades (tentativo a cambios según la evolución de la investigación y previa aprobación del proyecto):

- 1. Identificar la estructura presentada en los volúmenes de big data disponibles y estudiar la terminología deportiva presente en ella mediante la documentación de definiciones proporcionada por Metrica Sports. Así mismo entender y asociar esta terminología a la jerga propia de la FSC y su literatura científica.
- 2. Diseñar restricciones espacio-temporales con fundamento físico, matemático y computacional, bajo las cuales una acción en el campo será catalogada como un pase efectivo de un jugador i a un jugador j.

- 3. Estructurar el algoritmo a actuar sobre datos de *tracking* teniendo en cuenta el movimiento relativo de los agentes interactuantes, los tiempos de interacción, la frecuencia de muestreo de los datos, los marcos de referencia inerciales y la definición de nodo y enlace de la FSC.
- **4.** Evaluar la eficiencia del modelo mediante el calculo del error cualitativo de pases capturados por el código y mediante el análisis de curvas ROC.

El contraste con el error cualitativo estima qué porcentaje de posibles pases capturados por el código son reales respecto a los registrados en events. Ahora bien, las curvas ROC (Receiver Operating Characteristic) son un método gráfico utilizado comúnmente en maching learning para evaluar resultados en problemas de clasificación binaria. Este método clasifica los resultados en positivo o negativo y los ubica en una matriz de confusión en cuatro categorías (Tb. 1): verdadero Positivo (VP) resultado correcto clasificado como positivo, falso positivo (FP) resultado incorrecto clasificado como negativo y falso negativo (FN) resultado correcto clasificado como negativo.

Cuadro 1: Matriz de confusión

		Valor real		
		Correcto	Incorrecto	
Predicción	Positivo	VP	FP	
1 redicción	Negativo	FN	VN	

La curva se define al graficar la taza de verdaderos positivos (VPR) contra la taza de falsos positivos (FPR) (Fig. 3) en donde se aprecia como el número de clasificaciones correctas varia respecto al número de clasificaciones incorrectas a medida que se desplaza un umbral de decisión [18]. Estos coeficientes se definen como:

$$VPR = \frac{VP}{VP + FN}$$
 y $FPR = \frac{FP}{FP + VN}$. (4)

- 5. Construir la red compleja de pases
- 5.1 Obtener la matriz de adyacencia del sistema y evaluar la similitud de organización de la red por medio de herramientas de la Teoría de la Información como la divergencia de Jensen-Shannon o de geometría euclídea de alto orden como la norma de Frobenius.
- 5.2 Potencialmente, calcular los parámetros de análisis de red, como lo son los coeficientes de camino más corto y *clustering*, para las redes experimentales (captura de pases) y teóricas (*events*) y contrastarlos.

La divergencia de Jensen-Shannon (JSD) es un método estadístico proveniente de la teoría de la información que mide la semejanza entre dos distribuciones de probabilidad P y Q [19]. Estas distribuciones pueden ser obtenidas desde la matriz de adyacencia de una red compleja mediante herramientas de geometría euclídea de alto orden, como por ejemplo la norma de

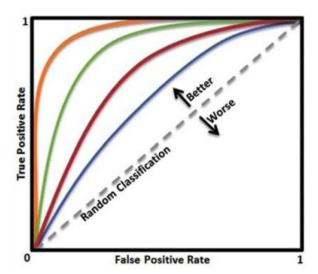


Figura 3: Ejemplificación de curvas ROC. En la coordenada (1,1) se ubicaría el clasificador perfecto. Tomada de: https://www.youtube.com/watch?v=J918J1MeCbY

Frobenius, la cual extiende el concepto de norma vectorial sobre el campo matricial. JSD se basa en la divergencia de Kullback-Leiber la cual establece la comparación de distribuciones discretas sobre el mismo espacio de probabilidad \mathcal{X} como:

$$D(P||Q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x) \log \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right). \tag{5}$$

Esta propuesta presenta inconvenientes de simetría que soluciona la JSD, además, esta cantidad es acotada y definida (positiva), tal que entre más cercana esté a cero, menor distancia o diferencia hay entre las distribuciones. La JSD es defina entonces como:

$$JSD(P||Q) = \frac{1}{2}D(P||M) + \frac{1}{2}D(Q||M) \quad donde \quad M = \frac{1}{2}(P+Q). \tag{6}$$

8. Cronograma de Actividades

Actividad	MES					
Actividad	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	
1						
2						
3						
4						
5.1						
5.2						
Documento final						

Referencias

- [1] Péter Érdi. Complexity explained. Springer Science & Business Media, 2007.
- [2] Mark Newman. Networks. Oxford university press, 2018.
- [3] Marko Gosak, Rene Markovič, Jurij Dolenšek, et al. Network science of biological systems at different scales: A review. *Physics of life reviews*, 24:118–135, 2018.
- [4] Anthony Franciscus Joannes van Raan. Handbook of quantitative studies of science and technology. Elsevier, 2013.
- [5] Dror Y Kenett and Shlomo Havlin. Network science: a useful tool in economics and finance. *Mind & Society*, 14(2):155–167, 2015.
- [6] Johann H Martínez, María Eugenia López, Pedro Ariza, et al. Functional brain networks reveal the existence of cognitive reserve and the interplay between network topology and dynamics. *Scientific reports*, 8(1):1–11, 2018.
- [7] Samuel P Fraiberger, Roberta Sinatra, Magnus Resch, et al. Quantifying reputation and success in art. *Science*, 362(6416):825–829, 2018.
- [8] Charles Kadushin. Understanding social networks: Theories, concepts, and findings. Oup Usa, 2012.
- [9] José L Herrera-Diestra, Javier M Buldú, Mario Chavez, et al. Using symbolic networks to analyse dynamical properties of disease outbreaks. *Proceedings of the Royal Society* A, 476(2236):20190777, 2020.
- [10] Flavio Chierichetti, Silvio Lattanzi, and Alessandro Panconesi. Rumor spreading in social networks. *Theoretical Computer Science*, 412(24):2602–2610, 2011.
- [11] Johann H Martínez, David Garrido, José L Herrera-Diestra, et al. Spatial and temporal entropies in the spanish football league: A network science perspective. *Entropy*, 22(2):172, 2020.
- [12] Kyoung-Jin Park and Alper Yilmaz. Social network approach to analysis of soccer game. In 2010 20th International Conference on Pattern Recognition, pages 3935–3938. IEEE, 2010.

- [13] Javier M Buldu, J Busquets, Ignacio Echegoyen, et al. Defining a historic football team: Using network science to analyze guardiola's fc barcelona. *Scientific reports*, 9(1):1–14, 2019.
- [14] JL Herrera-Diestra, I Echegoyen, JH Martínez, et al. Pitch networks reveal organizational and spatial patterns of guardiola's fc barcelona. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138:109934, 2020.
- [15] Javier Fernandez and Luke Bornn. Wide open spaces: A statistical technique for measuring space creation in professional soccer. In *Sloan Sports Analytics Conference*, volume 2018, 2018.
- [16] Luca Pappalardo, Paolo Cintia, Alessio Rossi, et al. A public data set of spatio-temporal match events in soccer competitions. *Scientific data*, 6(1):1–15, 2019.
- [17] L da F Costa, Francisco A Rodrigues, Gonzalo Travieso, et al. Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in physics*, 56(1):167–242, 2007.
- [18] Jesse Davis and Mark Goadrich. The relationship between precision-recall and roc curves. In *Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning*, pages 233–240, 2006.
- [19] Diego Martín Mateos. Medidas de complejidad y de información como herramientas para el análisis de series temporales: aplicaciones al estudio de señales de origen electrofisiológicos.