Monedas y Conos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

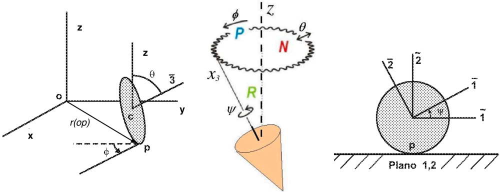
26 de noviembre de 2024

Agenda

1. Moneda que rueda sin deslizar
   - Ligaduras
   - El Lagrangeano
   - Energías cinética y potencial
   - Simetrías y Constantes de movimiento
2. Moneda en un plano inclinado
   - Planteamiento del problema
   - Coordenadas y ligaduras
   - Integración de ligaduras
   - Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano
3. Un cono que rueda en un plano horizontal
   - Coordenadas y ligaduras
   - Rodar sin deslizar

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

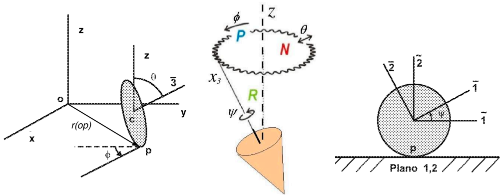
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.
Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

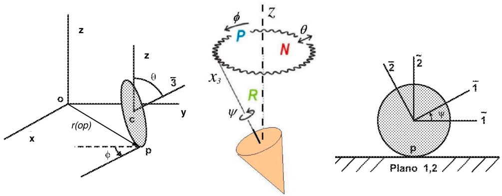
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.
Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

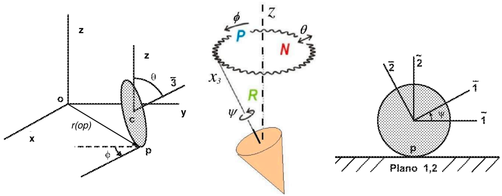
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.
Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante. Algunas animaciones ilustrativas en
`https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg`



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)$; $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi - \cos\psi\cos\theta\cos\phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi\operatorname{sen}\theta$

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi\cos\phi + \cos\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi)$;
  $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi - \cos\psi\cos\theta\cos\phi)$ y
  $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi\operatorname{sen}\theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi \cos\phi + \cos\psi \cos\theta \operatorname{sen}\phi)$; $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi - \cos\psi \cos\theta \cos\phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi \operatorname{sen}\theta$
- Por su parte, $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.

Moneda que rueda sin deslizar: Lagrangeano

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\operatorname{sen}\psi \cos\phi + \cos\psi \cos\theta \operatorname{sen}\phi)$; $y_{op} = y + a(\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\phi - \cos\psi \cos\theta \cos\phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a\cos\psi \operatorname{sen}\theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
  $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Es decir $\dot{x} + a\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - a\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + a\dot{\psi}\cos\phi = 0$;
  $\dot{y} + a\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\cos\theta + a\dot{\theta}\cos\phi\operatorname{sen}\theta + a\dot{\psi}\operatorname{sen}\phi = 0$; $\quad \dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen} \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\,\theta \operatorname{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\,\theta \cos\psi - \dot{\theta} \operatorname{sen}\,\psi$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\,\theta \operatorname{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen}\,\theta \cos\psi - \dot{\theta} \operatorname{sen}\,\psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- y $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \operatorname{sen}\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\,\theta \operatorname{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\,\psi$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- y $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Tendremos $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$

Energías cinética y potencial

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \,\text{sen}\, \theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$
  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- y $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} M a^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2} M a^2$.
- Tendremos $T = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
  $+\frac{1}{8} M a^2 \left[\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras
  $T = \frac{1}{32} a^2 M \left(\dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi})\cos 2\theta\right.$
  $\left.+8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2\right)$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\,\mathrm{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi$
$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$ y $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$
- y $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Tendremos $T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$
$+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras
$T = \frac{1}{32}a^2M\left(\dot{\phi}^2(\cos 4\theta + 13) + 32\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta + 2\dot{\phi}(5\dot{\phi} + 4\dot{\psi})\cos 2\theta\right.$
$\left.+8\dot{\phi}\dot{\psi} + 24\dot{\psi}^2 + 20\dot{\theta}^2\right)$
- Por su parte, la energía potencial $V = mgz = mga\,\mathrm{sen}\,\theta$

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4 \left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g \sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) \right.$
  $\left. + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$
$$\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$$

Simetrías y Constantes de movimiento

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
$$\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right.$$
$$\left. + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$
$$\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$$
- $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left(\dot{\phi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi}\right) = C_2$

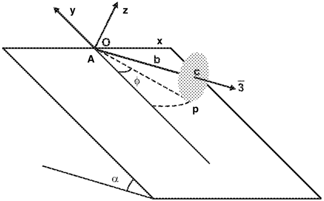
Simetrías y Constantes de movimiento

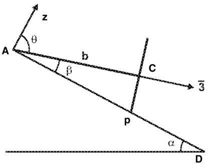
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right.$
  $\left. + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$
  $\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$
- $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left(\dot{\phi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi}\right) = C_2$
- Por lo tanto $\dot{\phi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(-6C_1 + 4C_2\cos\theta + C_2\cos 2\theta + C_2)}{a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$
  $\dot{\psi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(4(2C_1 - 5C_2)\cos 2\theta + 32C_1\cos\theta + 8C_1 - 2C_2\cos 4\theta - 26C_2)}{8a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$
  $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left(4\left(6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta\right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right.$
  $\left. + a\dot{\phi}^2(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13)\right)$
- Las coordenadas ψ y ϕ son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$ =cte y $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ =cte
- $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$
  $\frac{1}{16} a^2 M \left(\dot{\phi}(10\cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4\dot{\psi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1)\right) = C_1$
- $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left(\dot{\phi}(4\cos\theta + \cos 2\theta + 1) + 6\dot{\psi}\right) = C_2$
- Por lo tanto $\dot{\phi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(-6C_1 + 4C_2\cos\theta + C_2\cos 2\theta + C_2)}{a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$
  $\dot{\psi} \to \frac{\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(4(2C_1 - 5C_2)\cos 2\theta + 32C_1\cos\theta + 8C_1 - 2C_2\cos 4\theta - 26C_2)}{8a^2 M(-2\cos 2\theta + \cos 3\theta - 5)}$
- La ecuación de movimiento para θ es
  $10\ddot{\theta} + 4\dot{\phi}\dot{\psi}\sin^3\theta\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dot{\phi}^2(5\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \frac{8g}{a}\cos\theta = 0$

Planteamiento del problema

Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b. El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo α con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O, eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema $\tilde{S}$ origen también en O y eje $\tilde{3}$ en la direción AC. Encontrar las ecuaciones de movimiento para





Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right],$

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi\operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan\beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi \operatorname{sen}\theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $\dot{z} = 0$

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan\beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$; $y = -b\cos\phi\operatorname{sen}\theta$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$

Coordenadas y ligaduras

- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta =$ constante implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\quad \tan\beta = \frac{a}{b}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b\left[\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{x}} - \cos\phi \operatorname{sen}\theta \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Entonces $x = b \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$; $\quad y = -b\cos\phi \operatorname{sen}\theta \quad$ y $z = b\cos\theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta =$ const., se obtiene:
  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi \operatorname{sen}\theta$, $\quad \dot{y} = b\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $\quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, $\tilde{S}$ tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Con cual $b\dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3) = 0$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
  $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$

Integración de ligaduras

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta) = 0$
$\dot{y} + a(\dot{\psi}\operatorname{sen}\phi + \dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\operatorname{sen}\theta) = 0$
$\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$ $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;\quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$ $\dot{y} + a(\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$ $\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad \dot{y} = b\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad \dot{z} = 0$, obtenemos $\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a}\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3\, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\, \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$
  $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos\phi + \dot{\phi} \cos\phi \cos\theta - \dot{\theta} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta) = 0$
  $\dot{y} + a(\dot{\psi} \operatorname{sen}\phi + \dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \dot{\theta} \cos\phi \operatorname{sen}\theta) = 0$
  $\dot{z} - a\dot{\theta} \cos\theta = 0$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
  $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
  $\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a} \operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$
- Donde hemos sustituido el valor de θ que implica $\operatorname{sen}\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\cos\theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

- Como siempre la energía cinética se construye como
$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como
  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen }\theta\,\text{sen }\psi + \dot{\theta}\cos\psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen }\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen }\psi;$
  $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta.$

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\,\mathrm{sen}\;\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\;\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\;\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\,\mathrm{sen}\ \psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\ \psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\mathrm{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$

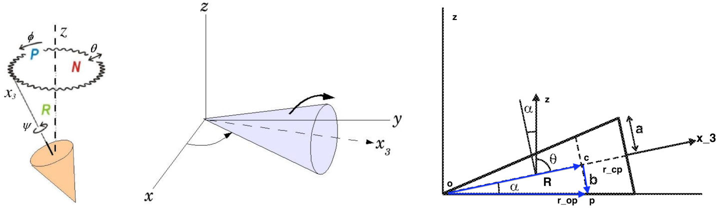
- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\text{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será $V = Mg(y\,\text{sen}\,\alpha + z\cos\alpha) \equiv Mgb(-\cos\phi\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha)$

Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

- Como siempre la energía cinética se construye como $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$; $\quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi$; $\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$.
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8}\frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2}\dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\text{sen}\,\alpha\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será $V = Mg(y\,\text{sen}\,\alpha + z\cos\alpha) \equiv Mgb(-\cos\phi\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha)$
- La ecuación de movimiento será $\ddot{\phi} = -g\,\text{sen}\,\alpha\frac{4\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{a^2+6b^2}\,\text{sen}\,\phi$

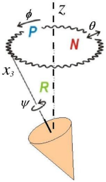
Coordenadas y ligaduras

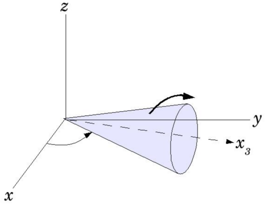
Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

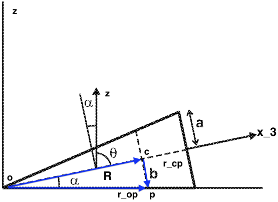


- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

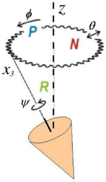


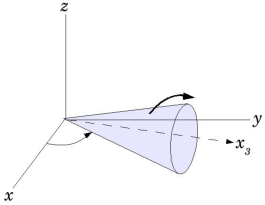


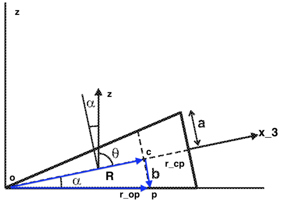


- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).



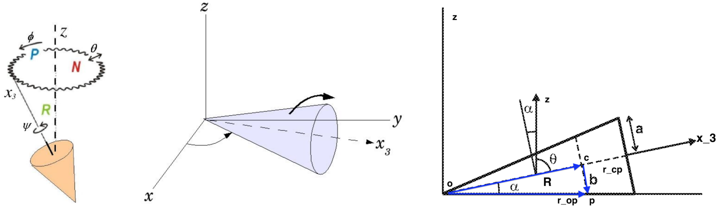




- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

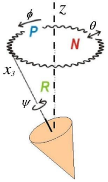
Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).

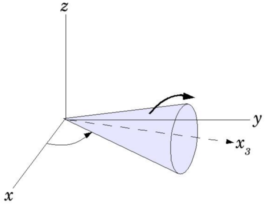


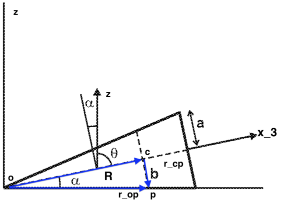
- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,

Coordenadas y ligaduras

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).



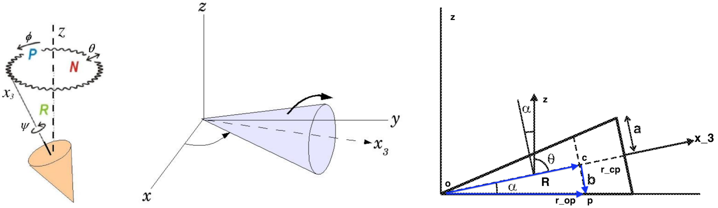




- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Con lo cual $x = \frac{3h}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad y = \frac{3h}{4}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \quad z = \frac{3h}{4}\cos\theta$,

Coordenadas y ligaduras

Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice α y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).



- Tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{cp}{oc}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{cp}{oc}$
- Entonces $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\cos\alpha\,\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Es decir $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}\left[\cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}\right]$,
- Con lo cual $x = \frac{3h}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, \quad y = \frac{3h}{4}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \quad z = \frac{3h}{4}\cos\theta$,
- Derivando $\dot{x} = -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \quad \dot{y} = \frac{3h}{4}\dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta \quad \dot{z} = 0$

Rodar sin deslizar

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Omega}_2 & \tilde{\Omega}_3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}_3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}_1\,\hat{\mathbf{x}}_3)$

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Omega}_2 & \tilde{\Omega}_3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}_3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}_1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\quad a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.

Rodar sin deslizar

- La ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Por su parte, $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}_1 & \tilde{\Omega}_2 & \tilde{\Omega}_3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}_3\, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}_1\, \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\quad a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Que se convierten en $\dot{x} + b\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\cos\phi = 0$ y $\dot{y} + b\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$