Pequeñas oscilaciones

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

27 de septiembre de 2024

Agenda

1. Pequeñas oscilaciones 1D

2. Oscilaciones con varios grados de libertad

3. Ejemplo: Osciladores Acoplados

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c \dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c \dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c \ddot{q} = f_{\text{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

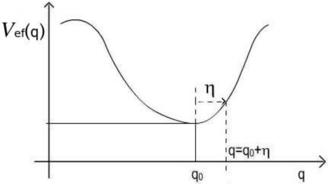
- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\mathrm{ef}}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\mathrm{ef}}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$

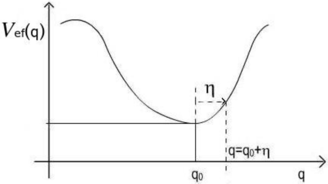
Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\text{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\text{ef}}(q_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\text{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\text{ef}}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



- Desarrollamos por Taylor, $V_{\text{ef}}\left(q\right)$ alrededor de $q = q_0$, y tenemos

$$V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}\left(q_0 + \eta\right) = V\left(q_0\right) + \cancelto{0}{\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0}} \eta + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2}\right|_{q_0} \eta^2 + \cdots ,$$

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}\left(q_0 + \eta\right) \approx \frac{1}{2} K \left(q - q_0\right)^2 = \frac{1}{2} K \eta^2$

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}\left(q_0 + \eta\right) \approx \frac{1}{2} K \left(q - q_0\right)^2 = \frac{1}{2} K \eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q} = -K\left(q - q_0\right) \equiv -K\eta$

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}(q_0 + \eta) \approx \frac{1}{2}K(q - q_0)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q} = -K(q - q_0) \equiv -K\eta$
- Entonces, $\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$, donde $\omega^2 \equiv \frac{K}{c} = \left.\frac{1}{c}\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2}\right|_{q_0}$ es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de q_0.

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

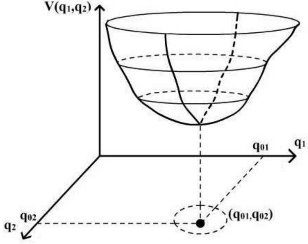
- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}(q_0+\eta) \approx \frac{1}{2}K(q-q_0)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q} = -K(q-q_0) \equiv -K\eta$
- Entonces, $\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$, donde $\omega^2 \equiv \frac{K}{c} = \frac{1}{c}\left.\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial q^2}\right|_{q_0}$ es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de q_0.
- Que tendrá como solución $\eta(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t = A\cos(\omega t + \varphi) \equiv \operatorname{Re}\left[Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right] = \operatorname{Re}\left(ae^{i\omega t}\right)$ donde $a = Ae^{i\varphi}$ es la amplitud compleja

Oscilaciones con varios grados de libertad 1/3

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.

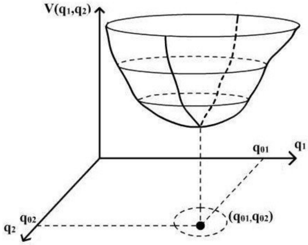
Oscilaciones con varios grados de libertad 1/3

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$



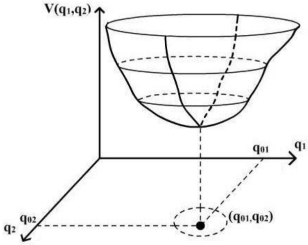
Oscilaciones con varios grados de libertad 1/3

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$



- Perturbando las q_i, tendremos $q_i = q_{0i} + \eta_i$, con $\eta_i \to 0 \quad \left(\frac{\eta_i}{q_{0i}} \ll 1\right)$

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$



- Perturbando las q_i, tendremos $q_i = q_{0i} + \eta_i$, con $\eta_i \to 0 \quad \left(\frac{\eta_i}{q_{0i}} \ll 1\right)$
- El valor del potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$ cerca de la configuración de equilibrio se obtiene de la expansión de Taylor en varias variables de $V(q_1, \ldots, q_s)$ alrededor de $\{q_{0i}\}$, con $q_i = q_{0i} + \eta_i$,

- Esto es $V\left(q_1, \ldots, q_s\right) =$
$V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right) + \sum_i \cancel{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)}^{0}_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V\left(q_1, \ldots, q_s\right) =$
  $V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right) + \cancel{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)}^{0}_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = \left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right)$.

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V\left(q_1, \ldots, q_s\right) =$
  $V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = \left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1, \ldots, q_s\right) = V\left(\eta_1, \ldots, \eta_s\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V(q_1, \ldots, q_s) =$
  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s}) + \sum_i \cancelto{0}{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij} = V_{ji}$

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V\left(q_1,\ldots,q_s\right)=$
$$V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)+\cancelto{0}{\sum_i\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}}\eta_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}\eta_i\eta_j+\cdots$$
- Los $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\}=\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i=q_{0i}+\eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1,\ldots,q_s\right)=V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}\eta_i\eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij}\equiv\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ donde los coeficientes $T_{ij}=T_{ji}$ representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Esto es $V\left(q_1, \ldots, q_s\right) =$
  $V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = \left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1, \ldots, q_s\right) = V\left(\eta_1, \ldots, \eta_s\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij} = V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ donde los coeficientes $T_{ij} = T_{ji}$ representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Esto es $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) =$
  $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right) + \sum_i \cancelto{0}{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i\eta_j + \cdots$
- Los $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = \left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) = V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij} = V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ donde los coeficientes $T_{ij} = T_{ji}$ representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$
- El Lagrangiano del sistema cerca de la configuración de equilibrio es $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i\eta_j\right) \quad i,j = 1,2,\ldots,s$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j\left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

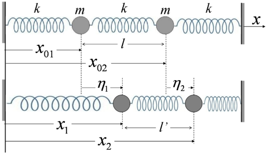
- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j\left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tenemos $\sum_j\left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n\left(V_{mn} - \omega^2 T_{mn}\right) a_n = 0$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j\left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tenemos $\sum_j\left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n\left(V_{mn} - \omega^2 T_{mn}\right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad $s = 1, 2$ tendremos
  $m = 1 : \left(V_{11} - \omega^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $m = 2 : \left(V_{21} - \omega^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega^2 T_{22}\right) a_2 = 0$

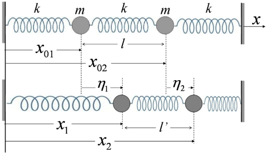
- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j\left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tenemos $\sum_j\left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n\left(V_{mn} - \omega^2 T_{mn}\right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad $s = 1, 2$ tendremos
  $m = 1 : \left(V_{11} - \omega^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $m = 2 : \left(V_{21} - \omega^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega^2 T_{22}\right) a_2 = 0$
- En general, existe solución no trivial $\eta_j(t) \neq 0$ si $a_j \neq 0, \forall j$, cuando $\det\left|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right| = 0$. Las frecuencias características ω deben ser reales para que las soluciones tengan sentido físico.

- Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



Osciladores Acoplados 1/2

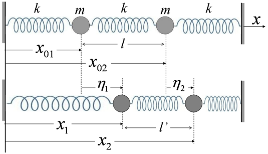
- Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,

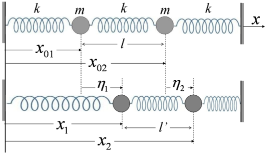
Osciladores Acoplados 1/2

- Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



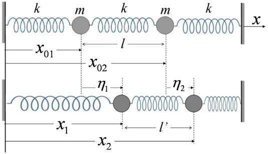
- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$

- Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$

- Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$
- Donde $l' - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es $\left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es $\left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- Finalmente $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$