Coordenadas Generalizas y Principios Variacionales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

10 de agosto de 2024

Agenda

Coordenadas Generalizadas

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, ..., N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por 3N coordenadas.

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, ..., N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por 3N coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas: $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \; f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \cdots f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t)$,

Coordenadas Generalizadas

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, ..., N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por 3N coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas: $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0,\ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \cdots f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t)$,
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano $(z = cte)$, o sobre un círculo $(x^2 + y^2 = cte)$, sobre una esfera $(x^2 + y^2 + x^2 = cte)$, etc.

Coordenadas Generalizadas

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, ..., N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por 3N coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas: $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \; f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \cdots f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t),$
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano $(z = cte)$, o sobre un círculo $(x^2 + y^2 = cte)$, sobre una esfera $(x^2 + y^2 + x^2 = cte)$, etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.

Coordenadas Generalizadas

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, ..., N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por 3N coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas: $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0,\ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \cdots f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t),$
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano $(z = cte)$, o sobre un círculo $(x^2 + y^2 = cte)$, sobre una esfera $(x^2 + y^2 + x^2 = cte)$, etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.
- Los grados de libertad definen las **coordenadas generalizadas**, $\{q(t)_1, q(t)_2, ..., q(t)_s\}$.

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, ..., N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por 3N coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas: $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0,\ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \cdots f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t)$,
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano $(z = cte)$, o sobre un círculo $(x^2 + y^2 = cte)$, sobre una esfera $(x^2 + y^2 + x^2 = cte)$, etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.
- Los grados de libertad definen las **coordenadas generalizadas**, $\{q(t)_1, q(t)_2, ..., q(t)_s\}$.
- La evolución temporal de estas coordenadas definen las **velocidades generalizadas** $\{\dot{q}(t)_1, \dot{q}(t)_2, ..., \dot{q}(t)_s\}$.

Coordenadas Generalizadas

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, ..., N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por 3N coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas: $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \ f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0, \cdots f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t)$,
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano $(z = cte)$, o sobre un círculo $(x^2 + y^2 = cte)$, sobre una esfera $(x^2 + y^2 + x^2 = cte)$, etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.
- Los grados de libertad definen las **coordenadas generalizadas**, $\{q(t)_1, q(t)_2, ..., q(t)_s\}$.
- La evolución temporal de estas coordenadas definen las **velocidades generalizadas** $\{\dot{q}(t)_1, \dot{q}(t)_2, ..., \dot{q}(t)_s\}$.
- En Mecánica Clásica, el tiempo t es un parámetro.

Vínculos holónomos y no holónomos

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) = 0$.

Vínculos holónomos y no holónomos

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.

Vínculos holónomos y no holónomos

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l, la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.

Vínculos holónomos y no holónomos

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l, la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.

Vínculos holónomos y no holónomos

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l, la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.
- Los vínculos no holónomos son $g(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \leq 0$ o también $g(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0$

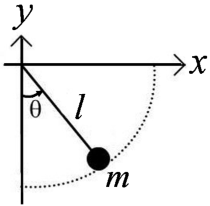
Vínculos holónomos y no holónomos

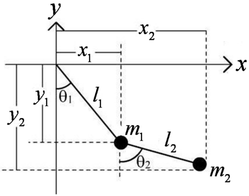
- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l, la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.
- Los vínculos no holónomos son $g(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \leq 0$ o también $g(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0$
- En un disco que rueda sin deslizar sobre un plano se tiene una restricción que involucra las velocidades del centro de masa y la velocidad angular: $\dot{x}_{cm} - R\dot{\theta} = 0$.

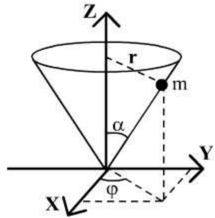
Vínculos holónomos y no holónomos

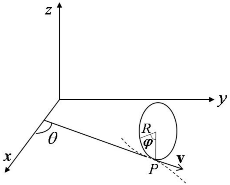
- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l, la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.
- Los vínculos no holónomos son $g(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \leq 0$ o también $g(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0$
- En un disco que rueda sin deslizar sobre un plano se tiene una restricción que involucra las velocidades del centro de masa y la velocidad angular: $\dot{x}_{cm} - R\dot{\theta} = 0$.
- Los vínculos no holónomos no pueden integrarse e involucran relaciones entre coordenadas y velocidades.

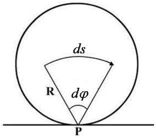
Ejemplos


y
x
θ
l
m


y
x_2
x_1
x
y_1
y_2
θ_1
l_1
m_1
l_2
θ_2
m_2


Z
r
m
α
Y
φ
X


z
y
θ
x
R
φ
P
v


ds
R
dφ
P