

Espacios Vectoriales: El Concepto

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



12 de febrero de 2024

Agenda: Espacios Vectoriales: El Concepto

- 1 Grupos
- 2 Cuerpo
- 3 Espacio Vectorial
- 4 Algunos espacios vectoriales
- 5 Recapitulando
- 6 Problemas para discusión

Considere el siguiente conjunto $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots\}$ y la operación interna \square (la ley del grupo). Entonces los elementos del conjunto forman un *grupo abeliano*.

- Cerrada respecto a la operación \square :
 $\{g_i \in \mathbf{G}, g_j \in \mathbf{G}\} \Rightarrow \exists g_k = g_i \square g_j \in \mathbf{G}$
- Asociativa respecto a la operación \square :
 $g_k \square (g_i \square g_j) = (g_k \square g_i) \square g_j$
- Existencia de un elemento neutro: $\exists \hat{g} \in \mathbf{G} \Rightarrow g_i \square \hat{g} = g_i = \hat{g} \square g_i$
- Existencia de un elemento inverso:
 $g_i \in \mathbf{G} \Rightarrow \exists g_i^{-1} \in \mathbf{G} \Rightarrow g_i \square g_i^{-1} = g_i^{-1} \square g_i = \hat{g}$
- Conmutativa respecto a la operación \square : $g_i \square g_j \equiv g_j \square g_i$.

Ejemplos de Grupos

- Enteros \mathbb{Z} respecto a la suma;
- Racionales \mathbb{Q} respecto a la suma y a la multiplicación;
- Rotaciones 2D y 3D (grupo no-abeliano);
- Matrices $n \times m$ respecto a la suma, (grupo abeliano).

Definiremos como un cuerpo (o campo) el conjunto

$\mathbf{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots\}$ sobre el cual están definidas dos operaciones: suma (+) y multiplicación (\cdot) y que satisfacen las siguientes propiedades:

- 1 Forman un grupo abeliano respecto a la suma (+) con el elemento neutro representado por el cero 0.
- 2 Forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación (\cdot). Se excluye el cero 0 y se denota el elemento neutro de la multiplicación como 1.
- 3 Es distributiva respecto a la suma (+) : Dados α_i, α_j y α_k se tiene que

$$\alpha_i \cdot (\alpha_j + \alpha_k) = \alpha_i \cdot \alpha_j + \alpha_i \cdot \alpha_k.$$

Ejemplos típicos de campos lo constituyen los racionales \mathbb{Q} , los números reales \mathbb{R} y los números complejos \mathbb{C} . Normalmente se refiere estos campos como *Campos Escalares*.

Sea $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \cdots |v_i\rangle \cdots\}$, será un espacio vectorial lineal y sus elementos $|v_i\rangle$ vectores, si $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$ forman un grupo abeliano respecto a \boxplus y una operación multiplicación por un elemento de un campo, $\mathbf{K} = \{\alpha, \beta, \gamma \cdots\}$:

- \mathbf{V} es cerrado bajo la operación suma \boxplus :
 $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \mathbf{V}$
- La operación suma \boxplus es conmutativa:
 $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle$
- La operación suma \boxplus es asociativa:
 $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus (|v_j\rangle \boxplus |v_k\rangle)$
- Existe un único elemento neutro
 $|0\rangle : |0\rangle \boxplus |v_i\rangle = |v_i\rangle \boxplus |0\rangle = |v_i\rangle \quad \forall |v_i\rangle \in \mathbf{V}$
- Existe un elemento simétrico para cada elemento de \mathbf{V} :
 $\forall |v_i\rangle \in \mathbf{V} \exists |-v_i\rangle / |v_i\rangle \boxplus |-v_i\rangle = |0\rangle$

Pero además \mathbf{V} es cerrado bajo el producto por un escalar: $\forall \alpha \in \mathbf{K}$ y cualquier $|v_i\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow \alpha |v_i\rangle \in \mathbf{V}$ y

- $\alpha (\beta |v_i\rangle) = (\alpha\beta) |v_i\rangle$
- $(\alpha + \beta) |v_i\rangle = \alpha |v_i\rangle \boxplus \beta |v_i\rangle$
- $\alpha (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha |v_i\rangle \boxplus \alpha |v_j\rangle$
- $\mathbf{1} |v_i\rangle = |v_i\rangle \quad \forall |v_i\rangle \in \mathbf{V}$
- La condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ sea un subespacio vectorial de \mathbf{V} es que para cualesquier $|u_i\rangle$ y $|v_i\rangle$ de \mathbf{S} y cualesquier α y β de \mathbf{K} se tiene que: $\alpha |u_i\rangle + \beta |v_i\rangle \in \mathbf{S}$.

- Los números reales $\mathbf{V} = \mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbf{V} = \mathbb{C}$ con el campo \mathbf{K} de reales o complejos y definidas las operaciones ordinarias de suma y multiplicación.
- El espacio $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$: producto cartesiano de \mathbb{R} , con n -uplas de números, la operación suma ordinaria de vectores en n -dimensionales y la multiplicación por escalares.

$$|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$$

$$|x\rangle \boxplus |y\rangle \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\alpha |x\rangle = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n) .$$

- \mathbf{E}^∞ con $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ de infinitas componentes.

$$|x\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \quad \wedge \quad |y\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots)$$

$$|x\rangle \boxplus |y\rangle \equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots)$$

$$\alpha |x\rangle = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n, \cdots) ,$$

con la restricción que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i = L$, con L finito.

- Las matrices $n \times n$ reales o complejas \mathbf{K} real o complejo.

$$\begin{aligned}|x\rangle &= M_{ab} \quad \wedge \quad |y\rangle = N_{ab} \\ |x\rangle \boxplus |y\rangle &\equiv M_{ab} + N_{ab} = (M + N)_{ab} \\ \alpha |x\rangle &= \alpha M_{ab} = (\alpha M)_{ab}\end{aligned}$$

- Los $\mathcal{P} = \{a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n, \dots\}$, con \boxplus la suma y multiplicación ordinaria de polinomios con números.
- Espacios Funcionales con la suma ordinaria entre funciones y la multiplicación por un número (por un elemento de un campo)

$$\begin{aligned}|f\rangle &= f(x) \quad \wedge \quad |g\rangle = g(x) \\ |f\rangle \boxplus |g\rangle &\equiv f(x) + g(x) \equiv (f + g)(x) \\ \alpha |f\rangle &= (\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x).\end{aligned}$$

- Las funciones continuas e infinitamente diferenciables, definidas en $[a, b] : C_{[a,b]}^\infty$.

En presentación consideramos

- ① La definición abstracta de grupo
 - ① construimos la tabla de multiplicación de un grupo
 - ② discutimos la importancia del homorfismo entre grupos abstractos

En presentación consideramos

- ① La definición abstracta de grupo
 - ① construimos la tabla de multiplicación de un grupo
 - ② discutimos la importancia del homorfismo entre grupos abstractos
- ② Definimos un cuerpo de números como un conjunto de números con dos operaciones definidas y que forman grupo respecto a cada una de esas operaciones

En presentación consideramos

- ① La definición abstracta de grupo
 - ① construimos la tabla de multiplicación de un grupo
 - ② discutimos la importancia del homorfismo entre grupos abstractos
- ② Definimos un cuerpo de números como un conjunto de números con dos operaciones definidas y que forman grupo respecto a cada una de esas operaciones
- ③ Definimos el concepto de espacio vectorial y lo ejemplificamos con distintos objetos matemáticos.

Sea \mathcal{P}_n el conjunto de todos los polinomios de grado n , en x , con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

- ❶ Demostrar que \mathcal{P}_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).
- ❷ Si los coeficientes a_i son enteros ¿ \mathcal{P}_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?
- ❸ ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de \mathcal{P}_n es un subespacio vectorial?
 - ❶ El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n - 1$.
 - ❷ El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
 - ❸ Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
 - ❹ Todos los polinomios que tienen a $x - 1$ como un factor.