Variedades Lineales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

21 de agosto de 2025

Agenda: Variedades Lineales

Independencia lineal

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así:
  $|0\rangle = C_1 \; |v_1\rangle + C_2 \; |v_2\rangle + C_3 \; |v_3\rangle \cdots + C_n \; |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \; |v_i\rangle$. Si $\forall \; C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes

Independencia lineal

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así: $|0\rangle = C_1 \;|v_1\rangle + C_2 \;|v_2\rangle + C_3 \;|v_3\rangle \cdots + C_n \;|v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \;|v_i\rangle$. Si $\forall\, C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes
- Un conjunto $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle\,,\; |v_2\rangle\,, \cdots\,, |v_n\rangle\} \in \mathbf{V}$, serán base de $\mathbf{V}$ si los $|v_1\rangle\,,\; |v_2\rangle\,, \cdots\,, |v_n\rangle$ si son linealmente independientes

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así: $|0\rangle = C_1 \; |v_1\rangle + C_2 \; |v_2\rangle + C_3 \; |v_3\rangle \cdots + C_n \; |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \; |v_i\rangle$. Si $\forall \; C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes
- Un conjunto $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle \, , \; |v_2\rangle \, , \cdots , |v_n\rangle\} \in \mathbf{V}$, serán base de $\mathbf{V}$ si los $|v_1\rangle \, , \; |v_2\rangle \, , \cdots , |v_n\rangle$ si son linealmente independientes
- Dentro de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ se puedan encontrar subespacios y sub-bases, si $\forall \; |x\rangle \in \mathbf{V}$:

$$|x\rangle = \underbrace{C_1 \; |v_1\rangle \cdots + C_{n-j} \; |v_{n-j}\rangle}_{\mathbf{S}_1} + \underbrace{C_{n-j+1} \; |v_{n-j+1}\rangle \cdots C_{n-k} \; |v_{n-k}\rangle}_{\mathbf{S}_2} + \\ + \underbrace{C_{n-k+1} \; |v_{n-k+1}\rangle \cdots C_n \; |v_n\rangle}_{\mathbf{S}_3}$$

$$|x\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + |x_3\rangle \quad \text{y} \quad |x_1\rangle \in \mathbf{S}_1; \quad |x_2\rangle \in \mathbf{S}_2; \quad |x_3\rangle \in \mathbf{S}_3 \, ,$$

entonces $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \oplus \mathbf{S}_3$.

Si $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\cdots,|v_n\rangle\} \in \mathbf{V}$.

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |v_i\rangle\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} C_1\ \langle v_1\,|v_1\rangle + \cdots + C_n\ \langle v_1\,|v_n\rangle & = \langle v_1\,|x\rangle \\ C_1\ \langle v_2\,|v_1\rangle + \cdots + C_n\ \langle v_2\,|v_n\rangle & = \langle v_2\,|x\rangle \\ \vdots & \vdots \\ C_1\ \langle v_n\,|v_1\rangle + \cdots + C_n\ \langle v_n\,|v_n\rangle & = \langle v_n\,|x\rangle \end{array} \right.$$

Entonces

$$\left| \begin{array}{ccccc} \langle v_1\,|v_1\rangle & \langle v_1\,|v_2\rangle & \langle v_1\,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_1\,|v_n\rangle \\ \langle v_2\,|v_1\rangle & \langle v_2\,|v_2\rangle & \langle v_2\,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_2\,|v_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \langle v_n\,|v_1\rangle & \langle v_n\,|v_2\rangle & \langle v_n\,|v_3\rangle & \cdots & \langle v_n\,|v_n\rangle \end{array} \right| \neq 0$$

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\ \cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

$$\langle \mathrm{e}_i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}\,\left\| |\mathrm{e}_j\rangle \right\|^2\,,\ i,j = 1,2,3,\cdots,n \ \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$$

y **ortonormal** si $\left\| |\mathrm{e}_j\rangle \right\|^2 = 1$.

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\ \cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

$$\langle \mathrm{e}_i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}\,\||\mathrm{e}_j\rangle\|^2\,,\ i,j = 1,2,3,\cdots,n \ \text{ con } \left\{\begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array}\right.$$

  y **ortonormal** si $\||\mathrm{e}_j\rangle\|^2 = 1$.
- Un conjunto ortogonal $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente y por lo tanto **base** de **V**.

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\ \cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

$$\langle \mathrm{e}_i \, | \mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij} \, \| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2 \, , \; i,j = 1,2,3,\cdots,n \;\; \text{con} \; \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } \; i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } \; i = j \end{array} \right.$$

  y **ortonormal** si $\| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2 = 1$.
- Un conjunto ortogonal $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente y por lo tanto **base** de **V**.
- Si $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ base ortogonal de **V**, entonces

$$\forall\, |x\rangle \in \mathbf{V} \;\Rightarrow\; |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \;\, |\mathrm{e}_i\rangle \;\Rightarrow\; \langle \mathrm{e}_j \, |x\rangle = \langle \mathrm{e}_j | \left[\sum_{i=1}^{n} C_i \;\, |\mathrm{e}_i\rangle \right] \;\Rightarrow$$

$$C_j = \frac{\langle \mathrm{e}_j \, |x\rangle}{\langle \mathrm{e}_j \, |e_j\rangle} = \frac{\langle \mathrm{e}_j \, |x\rangle}{\| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2}$$

- Si $\{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle\,,\ |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle\,,\cdots\,,|\hat{\mathrm{e}}_n\rangle\} \in \mathbf{V}^n$, base ortonormal: $\| |\hat{\mathrm{e}}_j\rangle \|^2 = 1$, entonces $C_j = \langle \hat{\mathrm{e}}_j \, |x\rangle \;\Rightarrow\; |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \;\, |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\mathrm{e}}_i \, |x\rangle \;\, |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \equiv \sum^{n} |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \langle \hat{\mathrm{e}}_i| \, |x\rangle$.

A partir de un conjunto de vectores linealmente independientes, $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ siempre se podrá construir un conjunto ortogonal de vectores, $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$, de la siguiente forma:

$$|\mathrm{e}_1\rangle \equiv |v_1\rangle$$

$$|\mathrm{e}_2\rangle \equiv |v_2\rangle - \frac{\langle v_2 |\mathrm{e}_1\rangle}{\langle \mathrm{e}_1 |\mathrm{e}_1\rangle} |\mathrm{e}_1\rangle \qquad \langle \mathrm{e}_2 |\mathrm{e}_1\rangle = 0$$

$$|\mathrm{e}_3\rangle \equiv |v_3\rangle - \frac{\langle v_3 |\mathrm{e}_2\rangle}{\langle \mathrm{e}_2 |\mathrm{e}_2\rangle} |\mathrm{e}_2\rangle - \frac{\langle v_3 |\mathrm{e}_1\rangle}{\langle \mathrm{e}_1 |\mathrm{e}_1\rangle} |\mathrm{e}_1\rangle \qquad \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathrm{e}_3 |\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_3 |\mathrm{e}_2\rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$|\mathrm{e}_4\rangle \equiv |v_4\rangle - \frac{\langle v_4 |\mathrm{e}_3\rangle}{\langle \mathrm{e}_3 |\mathrm{e}_3\rangle} |\mathrm{e}_3\rangle - \frac{\langle v_4 |\mathrm{e}_2\rangle}{\langle \mathrm{e}_2 |\mathrm{e}_2\rangle} |\mathrm{e}_2\rangle - \frac{\langle v_4 |\mathrm{e}_1\rangle}{\langle \mathrm{e}_1 |\mathrm{e}_1\rangle} |\mathrm{e}_1\rangle \qquad \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_2\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_3\rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$|\mathrm{e}_n\rangle \equiv |v_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n |\mathrm{e}_i\rangle}{\langle \mathrm{e}_i |\mathrm{e}_i\rangle} |\mathrm{e}_i\rangle \qquad \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_2\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_3\rangle = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

¿ Qué presentamos ?

1. El concepto de dependencia e independencia lineal generalizado
2. Determinante de Gram para identificar independencia lineal
3. Bases, subespacio y sub-bases
4. Bases ortogonales
5. Métodos de Ortogonalización de Gram-Schmidt

1. Encontrar la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ (espacio de funciones continuas en el intervalo [-1,1]) al subespacio generado por los polinomios: $\{1, x, x^2 - 1\}$. Calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado.
    1. $f(x) = x^n$, n entero.
    2. $f(x) = \mathrm{sen}(x)$.
    3. $f(x) = 3x^2$.
2. Utilizando **Sympy** suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una posible base a $\{|\pi_i\rangle\} = \left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\right\}$, considere el producto interno definido por: $\langle f | g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; f(x) \; g(x)\sqrt{1 - x^2}$. Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie[1].

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials`