Modelado de Objetos Autogravitantes

Grupo de Relatividad y Gravitación
Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Colombia

8 de mayo de 2025

Pregunta de investigación

La intención de este trabajo es entender, o al menos intuir, **¿ cuál es incidencia de los fluidos no pascalianos en la estructura estelar newtoniana y relativistas?**. Esto es, supondremos un perfil de densidad y una forma muy particular de la distribución de presiones radiales y tangenciales. A partir de esas suposiciones compraremos los perfiles de presión para un espacio de parámetros.

1. Modelando objetos autogravitantes

1.1. El concepto

Consideraremos una configuración material auto-gravitante esférica. Esto es un cuerpo material donde la gravitación es la única fuerza que la cohesiona. Este esquema se utiliza para modelar (hiper-simplificadamente) planetas, estrellas o cualquier cuerpo que se conforme con el campo gravitacional generado por su propia masa.

En general, un posible modelado para este tipo objetos (esféricos) se construye a partir de la suposición que esos cuerpos están formados por un fluido donde esa única fuerza los mantiene en equilibrio. Surgen entonces las ecuaciones de estructura, dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

- una que relaciona el gradiente de presión radial con el resto de la variables de estado y se conoce como la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = \mathcal{F}\left(m(r), \rho(r), P(r), P_\perp(r), r\right), \tag{1}$$

  donde $P(r)$ es presión radial; $P_\perp(r)$ representan a las presiones tangenciales; $\rho(r)$, la de densidad de masa y $m(r)$ la masa contenida en una esfera de radio r;

- otra que vincula el gradiente de masa con su densidad

$$\frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho(r)\,; \tag{2}$$

y dos ecuaciones de estado entre las variables físicas del sistema en este caso: la presión radial y la presión tangencial:

$$P(r) = \mathcal{W}\left(\rho(r), r\right) \quad \text{y} \quad P_\perp(r) = \mathcal{V}\left(\rho(r), P(r), r\right)\ , \tag{3}$$

respectivamente.

Es decir, estas dos ecuaciones relacionan las variables de estado del sistema y describen las propiedades físicas de los fluidos [1]. En general, siempre pensamos fluidos pascalianos en los cuales todas las presiones son iguales: $P(r) = P_\perp(r)$. En el caso mas general nos podemos imaginar fluidos con "algún tipo de estructura" que permita una descripción mas rica donde $P(r) \neq P_\perp(r)$. Como estamos en el caso de simetría esféricas tendremos que las dos presiones tangenciales son iguales y, a su vez distintas a la presión radial depende de la densidad. Ese tipo de ecuaciones se conocen como ecuaciones de estado barótropas [2].

De esta manera las ecuaciones (1) (2) y (3) conforman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Nótese la diferencia en la funcionalidad de las ecuaciones de estado para la presión radial y la presión tangencial, lo cual permite despejar unívocamente la densidad, ρ en ambas. La ecuación para la presión radial.

1.2. La ecuación de estado para la anisotropía

A partir de las ecuaciones de estructura (1) y (2) y de las ecuaciones de estado (3) podemos idear una estrategia para resolver el sistema. La expresión para la presión tangencial $P_\perp(r) = P_\perp(\rho(r), P(r), r)$, la sustituimos en las ecuaciones (1) y (2). Luego despejamos $\rho = \mathcal{Z}(P(r), r)$ y la sustituimos en ambas ecuaciones. Entonces tendremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias (posiblemente no lineales) con dos incógnitas: $P(r)$ y $m(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \mathcal{G}\left(m(r), P(r), r, P_0, M, R\right), \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \mathcal{Z}(P(r), r)\,. \tag{5}$$

Este sistema es integrable para un conjunto de condiciones iniciales $P(r = 0) = P_0$ y $m(r = 0) = 0$. Es decir tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y lo resolvemos como un problema de valores iniciales.

1.3. La integración y las condiciones de aceptabilidad física

La integración (casi siempre numérica) se realiza, considerando como condiciones iniciales los valores en el centro ($P(0) = P_\perp(0) = P_0$ y $\rho(0) = \rho_0$) y se integra hasta que la presión radial se anule ($P(R) = 0$). Note que para que el modelo sea consistente, debemos suponer que en el centro las presiones radiales y tangenciales son iguales.

El valor del $r = R$, donde la presión radial se anula, se considera el borde de la distribución y define su masa total ($m(R) = M$). Por lo tanto, los modelos quedan parametrizados por la presiones, densidades centrales, las masas totales M y los radios R de las distribuciones materiales.

Para que los modelos sean físicamente razonables se imponen condiciones adicionales como: que las presiones y densidades sean positivas para todo r dentro de la distribución, $P(r) > 0$ y $\rho(r) > 0$; sus gradientes sean negativos

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} \leqslant 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}\rho(r)}{\mathrm{d}r} \leqslant 0\,; \tag{6}$$

esto quiere decir que la presiones y densidades decrecen a medida que nos acercamos a al superficie. Para el caso de las configuraciones relativistas, se exige adicionalmente que las velocidades del sonido, radiales y

[1] ver https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_of_state

[2] En sentido estricto las ecuaciones de estado barótropas tienen la forma de $P(r) = \mathcal{W}\left(\rho(r)\right)$ pero aquí, sin perder generalidad le añadiremos la funcionalidad en r

tangenciales,

$$v^2 = \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}\rho} \leqslant c^2 \quad \text{y} \quad v_\perp^2 = \frac{\mathrm{d}P_\perp(r)}{\mathrm{d}\rho} \leqslant c^2 \tag{7}$$

sean menores que la velocidad de la luz c.

2. Newton y Einstein

A continuación analizaremos dos casos en para distintas intensidades de campo gravitatorio y consideraremos los casos newtonianos y relativistas.

2.1. Modelando objetos autogravitantes newtonianos anisótropos.

Las ecuaciones diferenciales que describen el equilibrio hidrostático para esferas autogravitantes newtonianas son

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{P_\perp(r) - P(r)}{r} \qquad \text{y} \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho(r), \tag{9}$$

donde G es la constante de gravitación universal. Las ecuaciones (8) y (9), conjuntamente con las ecuaciones de estado (3) que proveen de las características físicas del fluido cierran el sistema de ecuaciones de equilibrio para este tipo de objetos.

2.2. Modelando objetos autogravitantes relativistas anisótropos.

Finalmente, para el caso de fluidos relativistas, anisótropos, las ecuaciones diferenciales para el equilibrio hidróstático serán [3]:

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right)\left(1 - 2\frac{Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} + 2\frac{P_\perp(r) - P(r)}{r} \tag{10}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \rho(r), \tag{11}$$

completadas, de igual manera que el caso anterior con las ecuaciones (3) que describen las características físicas del fluido.

Al comparar (10) con (8) son claras las diferencias que incluyen las tres correcciones relativistas a la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana.

Las definiciones de masa (ecuaciones (9) y (11)) son las mismas en ambos sistemas. Igualmente que la incorporación de la anisotropía (el último término con la diferencia de presiones) es equivalente para ambas ecuaciones de equilibrio.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Tolman%E2%80%93Oppenheimer%E2%80%93Volkoff_equation

2.3. Adimensionalizando los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Para integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales se impone adimensionalizarlas [4]. Aquí vamos a presentar un par de estrategias. La idea es realizar la integración numérica y, por ser una ecuación diferencial de primer orden, convertir la integración en un problema de valores iniciales.

Primero identificamos las siguientes cantidades como

- M y R, como la masa total y el radio de la configuración material, respectivamente,
- P_0 y ρ_0 como la presión y la densidad central, respectivamente.

2.3.1. Estrategia 1

Realizamos los siguientes cambios de variables con los parámetros característicos del sistema:

$$\frac{P}{P_0} \to \tilde{P}, \quad \frac{P_\perp}{P_0} \to \tilde{P}_\perp, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \to \tilde{\rho}, \quad \frac{m}{M} \to \tilde{m}, \quad \text{y} \quad \frac{r}{R} \to \tilde{r}. \tag{12}$$

Claramente, las funciones $\tilde{P}$, $\tilde{P_\perp}$, $\tilde{\rho}$ y $\tilde{r}$ son adimensionales. Seguidamente, organizamos las cantidades M, R, P_0 y ρ_0 y construimos los siguientes parámetros auxiliares adimensionales

$$\mu = \frac{M}{R}\frac{G}{c^2}, \quad \kappa = \frac{P_0}{\rho_0 c^2} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \quad \text{con} \quad \bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}. \tag{13}$$

2.3.2. Estrategia 2

Ahora los cambios de variables serán

$$\frac{P}{c^2\rho_0} \to \tilde{P}\,,, \quad \frac{P_\perp}{c^2\rho_0} \to \tilde{P}_\perp\,, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \to \tilde{\rho}\,, \quad \frac{m}{M} \to \tilde{m} \quad \text{y} \quad \frac{r}{R} \to \tilde{r}$$

Las funciones $\tilde{P}$, $\tilde{P_\perp}$, $\tilde{\rho}$ y $\tilde{r}$ vuelven a ser adimensionales y, ahora, las variables auxiliares serán

$$\mu = \frac{M}{R}\frac{G}{c^2}, \quad \text{y} \quad \xi = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}\rho_0}{M} = \frac{M_{\rho_0}}{M}$$

2.3.3. La Física está en los parámetros

Es evidente el significado físico de cada una de estos parámetros (adimensionales) característicos del sistema:

- $\mu = \frac{M}{R}\frac{G}{c^2}$ representa la relación masa/radio de la configuración
- $\kappa = \frac{P_0}{\rho_0 c^2}$ la relación presión central / densidad central y, finalmente
- $\eta = \frac{\rho_0}{\bar{\rho}}$ la relación entre la densidad central y la densidad promedio calculada a partir de los valores del radio y la masa total de la distribución.
- $\xi = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}\rho_0}{M} = \frac{M_{\rho_0}}{M}$, la relación entre la masa homogénea, M_{ρ_0}, (calculada con la densidad central) y la masa total M.

[4] Pueden consultar un video muy educativo al respecto *Introduction to Nondimensionalization* en `shorturl.at/mETY8`

Es importante resaltar en los valores de estos parámetros estará la física. Nóte que cada uno de esos parámetros interviene en la corrección relativista a la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana. Esto es

$$\frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \to \kappa\frac{\tilde{P}(r)}{\tilde{\rho}(r)}, \qquad \frac{Gm(r)}{rc^2} \to \mu\frac{\tilde{m}(r)}{\tilde{r}} \quad \text{y} \quad \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2} \to 3\eta\kappa\frac{\tilde{P}\tilde{r}^3}{\tilde{m}}\,. \tag{14}$$

Como son correcciones y están comparadas con la unidad, los valores de μ, κ y η, serán pequeños.

2.4. Los sistemas de ecuaciones

Entonces construimos dos sistemas de ecuaciones (newtoniano y relativista) adimensionales, parametrizados por μ, κ y η. Estos sistemas son:

2.4.1. Estrategia 1

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = -\frac{\mu}{\kappa}\frac{\tilde{m}\,\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} + 2\frac{\tilde{P}_\perp(\tilde{P},\tilde{\rho},r) - \tilde{P}}{\tilde{r}} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = \eta\tilde{r}^2\tilde{\rho}, \tag{16}$$

para el caso newtoniano y

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = -\frac{\mu}{\kappa}\frac{\tilde{m}\,\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2}\left(1+\kappa\frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}}\right)\left(1+3\eta\kappa\frac{\tilde{P}\tilde{r}^3}{\tilde{m}}\right)\left(1-2\mu\frac{\tilde{m}}{\tilde{r}}\right)^{-1} + 2\frac{\tilde{P}_\perp(\tilde{P},\tilde{\rho},r) - \tilde{P}}{\tilde{r}} \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = \eta\tilde{r}^2\tilde{\rho}, \tag{18}$$

para el caso relativista.

2.4.2. Estrategia 2

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = -\mu\frac{\tilde{m}\,\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} + 2\frac{\tilde{P}_\perp(\tilde{P},\tilde{\rho},r) - \tilde{P}}{\tilde{r}} \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = 3\xi\,\tilde{r}^2\,\tilde{\rho} \tag{20}$$

para el caso newtoniano y

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = -\mu\frac{\tilde{m}\,\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2}\left(1+\frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}}\right)\left(1+3\xi\frac{\tilde{P}\tilde{r}^3}{\tilde{m}}\right)\left(1-2\mu\frac{\tilde{m}}{\tilde{r}}\right)^{-1} + 2\frac{\tilde{P}_\perp(\tilde{P},\tilde{\rho},r) - \tilde{P}}{\tilde{r}} \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{m}}{\mathrm{d}\tilde{r}} = 3\xi\,\tilde{r}^2\,\tilde{\rho}, \tag{22}$$

para el caso relativista.

2.5. Propuesta de anisotropía

Por falta de información experimental uno puede tomar el camino de la simplicidad propuesto por R.L. Bowers y E.P.T. Liang [5] para el caso relativista y más recientemente por Herrera y Barreto [6], para el caso newtoniano. Esta estrategia permite integrar el sistema (1), (2) y (3) imponiendo una expresión para la diferencia de presiones radiales y tangenciales, $\Delta = P_\perp(r) - P(r)$.

La idea es proponer una funcionalidad para Δ que permita integrar fácilmente la ecuación de equilibrio hidrostático. De esta forma, para el caso newtoniano por simplicidad imponemos una forma de la anisotrópía

$$\Delta = \mathcal{C}\frac{m(r)\rho(r)}{r} \quad \Rightarrow P_\perp = P_\perp(\rho(r), P(r), r) \equiv P(r) + \mathcal{C}\frac{m(r)\rho(r)}{r}, \tag{23}$$

Donde $\mathcal{C}$ representa la intensidad de la anisotropía y, obviamente $\mathcal{C} = 0$ recupera el caso isótropo de los fluidos pascalianos.

Con esta suposición de anisotropía, la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana (8) se transforma en

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{P_\perp(r) - P(r)}{r} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = h\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \tag{24}$$

con $h = 2\mathcal{C} - 1$ una constante que también mide la diferencia de presiones y, por consiguiente la anisotropía.

Del mismo modo, para el caso relativista propondremos

$$\Delta = \frac{\mathcal{C}}{r}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right)\left(1 - 2\frac{m(r)}{r}\right)^{-1} \tag{25}$$

Con lo cual, la ecuación (10) se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = h\frac{m(r)\rho(r)}{r^2}\left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right)\left(1 - 2\frac{m(r)}{rc}\right)^{-1} \tag{26}$$

y otra vez $h = 2\mathcal{C} - 1$ es una constante que mide la anisotropía. En ambos casos las ecuaciones (9) o (11) completan cada sistema, respectivamente.

2.6. Ecuación de Estado o Perfiles de densidad

Con esta propuesta de anisotropía solo tendremos que proponer una ecuación de estado para la presión radial para integrar los sistemas newtoniano (24)-(9) y relativista (26)-(11). Claramente al introducir una ecuación de estado barótropa $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{\rho}) \Rightarrow \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{P})$, las ecuaciones (19) y (21) se pueden integrar numéricamente.

Es equivalente, y simplifica aún mas la integración, si en lugar de incluir una ecuación de estado $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{\rho})$, se propone un perfil de densidad, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{r})$. Entonces, la ecuación (21), se convierte en una ecuación de Ricatti para $\tilde{P}(\tilde{r})$ y conviene integrarla, también numéricamente. La integración va desde $\tilde{P}(\tilde{r} \to 0) = 1$ hasta $\tilde{P}(\tilde{r}_\alpha) = 0$. En particular, supondremos una perfil de densidades del tipo Gokhroo-Mehra[7]

$$\tilde{\rho} = \left(1 - B\tilde{r}^2\right)\,, \tag{27}$$

[5] Bowers, Richard L., y E. P. T. Liang. "Anisotropic spheres in general relativity."The Astrophysical Journal 188 (1974): 657.

[6] Herrera, L., y W. Barreto. "Newtonian polytropes for anisotropic matter: General framework and applications." Physical Review D 87, no. 8 (2013): 087303.

[7] Gokhroo, M. K., y A. L. Mehra. "Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity".General relativity and gravitation 26, no. 1 (1994): 75-84.

donde, la constante B se obtiene integrando la ecuación (20) (o la (22)) hasta la masa total M y se puede escribir como

$$B = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{3}{\eta}\right).$$

De esta forma, el sistema puede ser integrado para un espacio de parámetros μ, κ, η y h. Es importante acotar que si bien adimensionamos $\frac{r}{R} \to \tilde{r}$, la integración la llevamos hasta $\tilde{r} = \tilde{r}_\alpha$ que anula la presión y que no necesariamente coincide con $\tilde{r} = 1$. En ese caso re-escalamos los siguientes parámetros que inicialmente definimos

$$\mu\frac{\tilde{M}}{\tilde{r}_\alpha} = \frac{m(r_b)}{r_b} \qquad \text{y} \qquad \bar{\rho}\frac{\tilde{M}}{\tilde{r}_\alpha^3} = \frac{m(r_b)}{4\pi 3 r_b^3}$$

3. ¿Qué y cómo hacerlo?

Como lo planteamos inicialmente, la intención es entender, o al menos intuir, **el efecto que induce la anisotropía de las presiones en los modelos estelares, tanto newtonianos como relativistas**. Para responder esa pregunta se propone construir modelos (newtonianos y relativistas) para distintos valores de los parámetros involucrados. Esto es, integrar (8) y (9) (y equivalentemente el sistema relativista (10) y (11)) con el perfil de densidad 27, identificando para cuales valores de $\tilde{r}$ se anula la presión radial y, a partir de allí identificar el valor de la masa de la configuración $\tilde{m}$.

Para un espacio de parámetros μ, κ, η y h dado, estudiar el comportamiento de la ecuación de estado $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{\rho})$ resultante y sacar algunas conclusiones de la incidencia de la anisotropía.