Hamilton Jacobi

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

27 de mayo de 2025

Agenda

1. Las transformaciones canónicas $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$
2. El Principio de Mínima Acción
3. La ecuación de Hamilton-Jacobi
4. La trayectoria del sistema
5. Función principal de Hamilton-Jacobi
6. Ecuación Independiente del tiempo
7. Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico
8. Comparando Métodos.
   - Conceptos y Técnicas
   - Ventajas y Limitaciones
   - El Oscilador Armónico: Tres Enfoques
9. Recapitulando
10. Para la discusión

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \rightarrow \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q\left(q_j(0), p_j(0)\right), P_i = p\left(q_j(0), p_j(0)\right)$.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$, $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$, $\quad p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.

Las transformaciones canónicas

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q\left(q_j(0), p_j(0)\right), P_i = p\left(q_j(0), p_j(0)\right)$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q\left(q_j(0), p_j(0), t\right), \quad p_i = p\left(q_j(0), p_j(0), t\right)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, tal que $\mathcal{H}'\left(Q_i, P_i\right) = 0$, entonces existe una función generadora $\mathcal{F}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$

El Principio de Mínima Acción

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$

El Principio de Mínima Acción

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$

El Principio de Mínima Acción

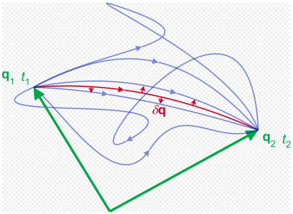
- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.

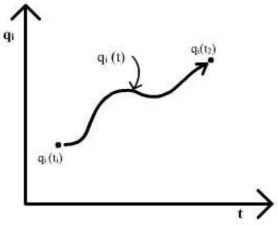
El Principio de Mínima Acción

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.

El Principio de Mínima Acción

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.
- La acción dependerá de las trayectorias y del tiempo, $S = S\,(q_i, t)$.





La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right)$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora tipo $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$, tal que $P_i = \alpha_i =$ cte, $Q_i = \beta_i =$ cte.

La ecuación de Hamilton-Jacobi

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$,
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$. Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora tipo $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$, tal que $P_i = \alpha_i =$ cte, $Q_i = \beta_i =$ cte.
- La derivada total $\frac{d\mathcal{F}_2}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} \dot{P}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t}$ $\Rightarrow \frac{d\mathcal{F}_2}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$
- Donde hemos usado: $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}$ y $\dot{P}_i = 0$.

La trayectoria del sistema

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$
\begin{array}{l|l}
p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}
$$

donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.

La trayectoria del sistema

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$\begin{array}{l|l}
p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}$$

  donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.

- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$

La trayectoria del sistema

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$
\begin{array}{l|l}
p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}
$$

  donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.
- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución $S(q_i, P_i, t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación $\{p_i, q_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$.

La trayectoria del sistema

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$
\begin{array}{l|l}
p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\
Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\
\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0
\end{array}
$$

  donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.
- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución $S(q_i, P_i, t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación $\{p_i, q_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$.
- Las constantes $P_i, Q_i \leftrightarrow \alpha_i, \beta_i$ se expresan en términos de las $2s$ condiciones iniciales $(q_i(0), p_i(0))$.

La trayectoria del sistema

- Comparando las relaciones de $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ y $S(q_i, P_i, t)$, tenemos

$$\begin{array}{l|l} p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{array}$$

  donde $P_i = \text{cte} = \alpha_i$ y $Q_i = \text{cte} = \beta_i$.
- Si $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$ y existe una transformación canónica $\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$, generada por $\mathcal{F}_2 = S$, tal que $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$, entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución $S(q_i, P_i, t)$ de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación $\{p_i, q_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$.
- Las constantes $P_i, Q_i \leftrightarrow \alpha_i, \beta_i$ se expresan en términos de las $2s$ condiciones iniciales $(q_i(0), p_i(0))$.
- La solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema provee la trayectoria $q_i(t) = q_i(q_i(0), p_i(0), t)$ y $p_i(t) = p_i(q_i(0), p_i(0), t)$.

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S(q_i, t)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \ldots, q_s, t) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S(q_i, t)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \ldots, q_s, t) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right)+H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right)=0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S}=S+C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)$, tomamos las s constantes $P_i=\alpha_i$.

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S(q_i, t)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \ldots, q_s, t) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S(q_i, P_i, t)$, tomamos las s constantes $P_i = \alpha_i$.
- La solución $S = S(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$.

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)$, tomamos las s constantes $P_i = \alpha_i$.
- La solución $S = S\left(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s, t\right) = S\left(q_i, \alpha_i, t\right)$.
- Si el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right) = cte = \mathcal{E}$.

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right) + H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S} = S + C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)$, tomamos las s constantes $P_i = \alpha_i$.
- La solución $S = S\left(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s, t\right) = S\left(q_i, \alpha_i, t\right)$.
- Si el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right) = cte = \mathcal{E}$.
- Suponemos que la solución S tiene la forma $S\left(q_i, P_i, t\right) = S\left(q_i, \alpha_i, t\right) = \mathcal{W}\left(q_i, P_i\right) - \mathcal{E}t = \mathcal{W}\left(q_i, \alpha_i\right) - \mathcal{E}t$. Una de las s constantes α_i es $\mathcal{E}$

Función principal de Hamilton-Jacobi

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jabobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para $S\left(q_i, t\right)$ con $s+1$ variables, $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_1, \ldots, q_s, t\right)+H\left(q_1, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right)=0$
- La función S no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si S es solución, entonces $\tilde{S}=S+C_1$ también lo es.
- Una de las $(s+1)$ constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)$, tomamos las s constantes $P_i=\alpha_i$.
- La solución $S=S\left(q_1, \ldots, q_s, P_1, \ldots, P_s, t\right)=S\left(q_i, \alpha_i, t\right)$.
- Si el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H}\left(q_i, p_i\right)=cte=\mathcal{E}$.
- Suponemos que la solución S tiene la forma $S\left(q_i, P_i, t\right)=S\left(q_i, \alpha_i, t\right)=\mathcal{W}\left(q_i, P_i\right)-\mathcal{E} t=\mathcal{W}\left(q_i, \alpha_i\right)-\mathcal{E} t$. Una de las s constantes α_i es $\mathcal{E}$
- La función $\mathcal{W}\left(q_i, P_i\right)=\mathcal{W}\left(q_i, \alpha_i\right)$ se llama función característica o principal de Hamilton.

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$, donde escogimos $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \ldots, s$.

Ecuación Independiente del tiempo

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$, donde escogimos $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \ldots, s$.
- En términos de la función característica $W(q_i, P_i)$ tenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}, \quad \forall i \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial P_i}, \quad i \neq 1$

Ecuación Independiente del tiempo

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$, donde escogimos $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \ldots, s$.
- En términos de la función característica $W(q_i, P_i)$ tenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}, \quad \forall i \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial P_i}, \quad i \neq 1$
- Con, la condición $\mathcal{H}(q_i, p_i) = \mathcal{E}$ tenemos $\mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, P_i), q_i\right) = \mathcal{E}$

Ecuación Independiente del tiempo

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$, donde escogimos $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \ldots, s$.
- En términos de la función característica $W(q_i, P_i)$ tenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}, \quad \forall i \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial P_i}, \quad i \neq 1$
- Con, la condición $\mathcal{H}(q_i, p_i) = \mathcal{E}$ tenemos $\mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, P_i), q_i\right) = \mathcal{E}$
- Si el Hamiltoniano es constante, entonces tendremos una solución de la forma $S(q_i, P_i, t) = \mathcal{W}(q_j, P_i) + P_k q_k - \mathcal{E} t, \quad j \neq k$

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0.$
  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$.
  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0.$
  Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = \mathcal{E}$

Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$. Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = \mathcal{E}$
- Buscamos una solución por separación de variables, $S(q,\mathcal{E},t) = W(q,\mathcal{E}) - \mathcal{E}t$, con $P = \mathcal{E} = \alpha$ constante de integración

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es $\frac{\partial S}{\partial t}(q,t) + \mathcal{H}(p,q) = 0$
- Como $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,t)$, obtenemos $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = 0$. Una ecuacion diferencial parcial de primer orden
- Puesto que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, el Hamitoniano es constante e igual a la energía total del sistema, $\mathcal{H} = \mathcal{E}$
- Buscamos una solución por separación de variables, $S(q,\mathcal{E},t) = W(q,\mathcal{E}) - \mathcal{E}t$, con $P = \mathcal{E} = \alpha$ constante de integración
- Entonces, $\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \left(2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2\right)^{1/2} \Rightarrow,$ $\mathcal{W}(q,E) = \int \left(2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2\right)^{1/2} dq \equiv S(q,\mathcal{E},t) + Et$

- La función $S(q,\mathcal{E},t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta =$cte.

Una vez mas el Oscilador Armónico, continuación

- La función $S(q, \mathcal{E}, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}} \right)$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La función $S(q, \mathcal{E}, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \beta'\right)$, con $\beta' = Q\omega =$ cte.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La función $S(q,\mathcal{E},t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q,\mathcal{E},t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \beta'\right)$, con $\beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}}\cos\left(\omega t + \beta'\right)$

Una vez mas el Oscilador Armónico, continuación

- La función $S(q, \mathcal{E}, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta')$, con $\quad \beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$

- La función $S(q, \mathcal{E}, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \beta'\right)$, con $\quad \beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos\left(\omega t + \beta'\right)$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(m\omega \frac{q_0}{p_0}\right)$.

- La función $S(q,\mathcal{E},t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta =$cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q,\mathcal{E},t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta')$, con $\beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(m\omega \frac{q_0}{p_0}\right)$.
- Mientras que $\mathcal{E} = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2\right) = P$

- La función $S(q, \mathcal{E}, t)$ permite encontrar transformación canónica generada por S a partir de sus derivadas parciales,
  $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}$ y
  $Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = $cte.
- Integrando obtenemos $Q + t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1}\left(\omega q \sqrt{\frac{m}{2E}}\right)$
- Con cual, $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \beta'\right)$, con $\quad \beta' = Q\omega =$ cte.
- Entonces $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos\left(\omega t + \beta'\right)$
- Evaluando para $t = 0$, tendremos $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega Q)$ y
  $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1}\left(m\omega \frac{q_0}{p_0}\right)$.
- Mientras que $\mathcal{E} = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2\right) = P$
- Las ecuaciones $p = p\left(q_0, p_0, t\right)$ y $q = q\left(q_0, p_0, t\right)$ expresan la solución de las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico en términos de las condiciones iniciales.

- **Los Conceptos de los formalismos**
  - **Lagrangiano:** Se basa en el principio de mínima acción $\delta S = 0$, con $S = \int \mathcal{L}\, dt$. Utiliza coordenadas generalizadas q_i y velocidades $\dot{q}_i$. Las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Euler-Lagrange.
  - **Hamiltoniano:** Surge de una transformación de Legendre del lagrangiano. Las variables son q_i y sus momentos conjugados p_i. Las ecuaciones de movimiento son de primer orden.
  - **Hamilton-Jacobi:** Busca una función generadora $S(q, t)$ que satisface una ecuación en derivadas parciales no lineal. Es una reformulación avanzada que unifica el análisis dinámico con métodos integrables.

- **Los Conceptos de los formalismos**
  - **Lagrangiano:** Se basa en el principio de mínima acción $\delta S = 0$, con $S = \int \mathcal{L}\, dt$. Utiliza coordenadas generalizadas q_i y velocidades $\dot{q}_i$. Las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Euler-Lagrange.
  - **Hamiltoniano:** Surge de una transformación de Legendre del lagrangiano. Las variables son q_i y sus momentos conjugados p_i. Las ecuaciones de movimiento son de primer orden.
  - **Hamilton-Jacobi:** Busca una función generadora $S(q, t)$ que satisface una ecuación en derivadas parciales no lineal. Es una reformulación avanzada que unifica el análisis dinámico con métodos integrables.
- **Las Técnicas**
  - **Lagrangiano**: espacio de configuración y ecuaciones diferenciales de segundo orden.
  - **Hamiltoniano**: espacio de fases, y ecuaciones de primer orden.
  - **Hamilton-Jacobi** reduce el problema a una única ecuación en derivadas parciales; las soluciones de S generan toda la dinámica.
  - **Simetrías y cantidades conservadas** se identifican más fácilmente en el formalismo Hamiltoniano, aunque el teorema de Noether también se aplica al lagrangiano.

- **Ventajas y Limitaciones**
  - **Lagrangiano:** Ideal para sistemas con ligaduras y simetrías. Se adapta bien a sistemas con coordenadas generalizadas. Menos eficiente en análisis de estabilidad.
  - **Hamiltoniano:** Proporciona una visión clara del espacio de fases y permite análisis cualitativos. Es la base para el paso a la mecánica cuántica.
  - **Hamilton-Jacobi:** Potente para sistemas integrables. Su conexión con la mecánica ondulatoria lo hace fundamental para el tránsito clásico-cuántico. Sin embargo, resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser muy difícil.

- **Ventajas y Limitaciones**
  - **Lagrangiano:** Ideal para sistemas con ligaduras y simetrías. Se adapta bien a sistemas con coordenadas generalizadas. Menos eficiente en análisis de estabilidad.
  - **Hamiltoniano:** Proporciona una visión clara del espacio de fases y permite análisis cualitativos. Es la base para el paso a la mecánica cuántica.
  - **Hamilton-Jacobi:** Potente para sistemas integrables. Su conexión con la mecánica ondulatoria lo hace fundamental para el tránsito clásico-cuántico. Sin embargo, resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser muy difícil.
- **Resumiento**
  - Los tres métodos describen la misma física, pero desde perspectivas distintas.
  - El enfoque lagrangiano es más geométrico y útil con ligaduras.
  - El hamiltoniano es estructuralmente más rico y se presta al análisis de conservación y estabilidad.
  - El enfoque de Hamilton-Jacobi es el más general y conecta elegantemente con la mecánica cuántica.

El Oscilador Armónico: Tres Enfoques 1/2

Partícula de masa m, sujeta a una fuerza $F = -kx \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

- **Método Lagrangeano**
  - Lagrangiano: $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
  - Ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$
  - Solución: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

El Oscilador Armónico: Tres Enfoques 1/2

Partícula de masa m, sujeta a una fuerza $F = -kx \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

- **Método Lagrangeano**
  - Lagrangiano: $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
  - Ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$
  - Solución: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- **Ventajas del enfoque Lagrangiano**
  - Se basa en el principio de mínima acción.
  - Ideal para sistemas con ligaduras y coordenadas generalizadas.
  - Geométricamente intuitivo y extendible a campos.

El Oscilador Armónico: Tres Enfoques 1/2

Partícula de masa m, sujeta a una fuerza $F = -kx \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

- **Método Lagrangeano**
  - Lagrangiano: $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
  - Ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$
  - Solución: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- **Ventajas del enfoque Lagrangiano**
  - Se basa en el principio de mínima acción.
  - Ideal para sistemas con ligaduras y coordenadas generalizadas.
  - Geométricamente intuitivo y extendible a campos.
- **Método Hamiltoniano**
  - Hamiltoniano a partir de $\mathcal{L} \Rightarrow p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$
  - Ecuaciones de Hamilton $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx$
  - **Resultado:** $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

El Oscilador Armónico: Tres Enfoques 1/2

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Partícula de masa m, sujeta a una fuerza $F = -kx \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

- **Método Lagrangeano**
  - Lagrangiano: $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
  - Ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$
  - Solución: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- **Ventajas del enfoque Lagrangiano**
  - Se basa en el principio de mínima acción.
  - Ideal para sistemas con ligaduras y coordenadas generalizadas.
  - Geométricamente intuitivo y extendible a campos.
- **Método Hamiltoniano**
  - Hamiltoniano a partir de $\mathcal{L} \Rightarrow p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$
  - Ecuaciones de Hamilton $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx$
  - **Resultado:** $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
- **Ventajas del enfoque Hamiltoniano**
  - Describe la evolución en el espacio de fases.
  - Revela estructura conservativa y simetrías.
  - Puente natural hacia mecánica cuántica y estadística.

El Oscilador Armónico: Tres Enfoques 2/2

- **Método Hamilton-Jacobi**
  - Ecuación de Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
  - Separación de variables
    $S(x,t) = W(x) - Et \Rightarrow \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)$
  - Solución $W(x) = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}dx$

El Oscilador Armónico: Tres Enfoques 2/2

- **Método Hamilton-Jacobi**
  - Ecuación de Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
  - Separación de variables
    $S(x,t) = W(x) - Et \Rightarrow \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)$
  - Solución $W(x) = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}dx$
- **Ventajas del enfoque Hamilton-Jacobi**
  - Método más general: permite obtener soluciones completas.
  - Potente para sistemas integrables.
  - Conexión profunda con la mecánica ondulatoria (Schrödinger).

El Oscilador Armónico: Tres Enfoques 2/2

- **Método Hamilton-Jacobi**
  - Ecuación de Hamilton-Jacobi $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
  - Separación de variables
    $S(x,t) = W(x) - Et \Rightarrow \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)$
  - Solución $W(x) = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}\,dx$
- **Ventajas del enfoque Hamilton-Jacobi**
  - Método más general: permite obtener soluciones completas.
  - Potente para sistemas integrables.
  - Conexión profunda con la mecánica ondulatoria (Schrödinger).
- **Resumiendo**
  - Los tres métodos predicen la misma dinámica.
  - **Lagrangiano:** Intuitivo, útil con ligaduras.
  - **Hamiltoniano:** Estructural, simétrico, fundamental en física moderna.
  - **Hamilton-Jacobi:** Avanzado, integra el sistema completo, conecta con teoría cuántica.

Recapitulando

- **Transformaciones canónicas**
  - Transformación canónica: $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$
  - Permiten hallar soluciones donde Q_i, P_i sean constantes.
  - Si $H'(Q_i, P_i) = 0$, entonces: $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
  - Esta F es la función generadora del cambio.

Recapitulando

- **Transformaciones canónicas**
  - Transformación canónica: $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$
  - Permiten hallar soluciones donde Q_i, P_i sean constantes.
  - Si $H'(Q_i, P_i) = 0$, entonces: $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
  - Esta F es la función generadora del cambio.
- **Principio de mínima acción**
  - La acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$
  - Si $t_2 = t$ es variable, entonces $S = S(q_i, t)$
  - Las trayectorias reales minimizan esta acción.

Recapitulando

- **Transformaciones canónicas**
  - Transformación canónica: $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$
  - Permiten hallar soluciones donde Q_i, P_i sean constantes.
  - Si $H'(Q_i, P_i) = 0$, entonces: $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
  - Esta F es la función generadora del cambio.
- **Principio de mínima acción**
  - La acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$
  - Si $t_2 = t$ es variable, entonces $S = S(q_i, t)$
  - Las trayectorias reales minimizan esta acción.
- **Ecuación de Hamilton-Jacobi**
  - Derivada total de S: $\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$
  - Comparando con $\mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$, se deduce: $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
  - Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi.

- **Transformaciones canónicas**
  - Transformación canónica: $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$
  - Permiten hallar soluciones donde Q_i, P_i sean constantes.
  - Si $H'(Q_i, P_i) = 0$, entonces: $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
  - Esta F es la función generadora del cambio.
- **Principio de mínima acción**
  - La acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$
  - Si $t_2 = t$ es variable, entonces $S = S(q_i, t)$
  - Las trayectorias reales minimizan esta acción.
- **Ecuación de Hamilton-Jacobi**
  - Derivada total de S: $\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$
  - Comparando con $\mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$, se deduce: $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
  - Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi.
- **Trayectoria del sistema**
  - La solución $S(q_i, \alpha_i, t)$ genera la transformación canónica.
  - Las constantes α_i se determinan a partir de las condiciones iniciales.
  - Las trayectorias resultan como:
    $q_i(t) = q_i(q_0, p_0, t), \quad p_i(t) = p_i(q_0, p_0, t)$

Recapitulando

- **Función principal de Hamilton**
  - Si $\mathcal{H}$ no depende del tiempo: $S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t$
  - $\mathcal{W}$ se llama función principal o característica de Hamilton.
  - Se reduce a resolver: $\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}\right) = \mathcal{E}$

Recapitulando

- **Función principal de Hamilton**
  - Si $\mathcal{H}$ no depende del tiempo: $S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t$
  - $\mathcal{W}$ se llama función principal o característica de Hamilton.
  - Se reduce a resolver: $\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}\right) = \mathcal{E}$
- **Oscilador Armónico**
  - Hamiltoniano: $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
  - Ecuación de H-J: $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right) = 0$
  - Separación de variables: $S = \mathcal{W}(q) - \mathcal{E}t$
  - Se obtiene: $\left(\frac{d\mathcal{W}}{dq}\right)^2 = 2m\left(\mathcal{E} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)$
  - $\mathcal{W}(q) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}\, dq$. Usando derivadas: $p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}$
  - Solución completa: $q(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$

Recapitulando

- **Función principal de Hamilton**
  - Si $\mathcal{H}$ no depende del tiempo: $S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t$
  - $\mathcal{W}$ se llama función principal o característica de Hamilton.
  - Se reduce a resolver: $\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}\right) = \mathcal{E}$
- **Oscilador Armónico**
  - Hamiltoniano: $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
  - Ecuación de H-J: $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right) = 0$
  - Separación de variables: $S = \mathcal{W}(q) - \mathcal{E}t$
  - Se obtiene: $\left(\frac{d\mathcal{W}}{dq}\right)^2 = 2m\left(\mathcal{E} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)$
  - $\mathcal{W}(q) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2}\, dq$. Usando derivadas: $p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}$
  - Solución completa: $q(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$
- **Comparación de métodos**
  - **Lagrangiano:** Ideal para ligaduras y ecuaciones de segundo orden.
  - **Hamiltoniano:** Espacio de fase y ecuaciones de primer orden.
  - **Hamilton-Jacobi:** Reducción a una PDE; conecta con mecánica cuántica.

Para la discusión

Desarrolle el péndulo simple (una masa m que cuelga de una cuerda inextensible sin masa, de longitud l) por los tres métodos antes mencionados