

# Transformadas de Fourier

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



11 de mayo de 2021

- 1 Otra vez series de Fourier
- 2 Expresión integral para la series de Fourier
- 3 Transformada de Fourier
- 4 Transformadas Integrales
- 5 Propiedades de la Transformada de Fourier
- 6 Una aplicación fugaz
- 7 Recapitulando

- Cualquier función en  $[0, 2\pi]$  puede expresarse en como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |e_i\rangle \Rightarrow c_i = \langle e_i | f \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_n & \text{si } i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx) = c_{2n-1} \equiv b_n & \text{si } i = 2n - 1 \end{cases}$$

donde los  $c_i$  son los coeficientes de Fourier,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] ,$$

- Cualquier función en  $[0, 2\pi]$  puede expresarse en como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |e_i\rangle \Rightarrow c_i = \langle e_i | f \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_n & \text{si } i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx) = c_{2n-1} \equiv b_n & \text{si } i = 2n - 1 \end{cases}$$

donde los  $c_i$  son los coeficientes de Fourier,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] ,$$

- Si el período es  $T$  y para un  $t_0$  genérico

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \text{ con } \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \\ \text{doble del promedio de la función} \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ \text{amplitud de la función par, } f(-x) = f(x) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ \text{amplitud de la función impar, } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

- Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \sin(nt) \right] \sin(nx) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(n[t - x]). \end{aligned}$$

- Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \sin(nt) \right] \sin(nx) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(n[t-x]). \end{aligned}$$

- Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n(t-x)) \right] \\ &= \Re \left[ \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( e^{-i(t-x)k} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

- Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[ \int_0^{2\pi} dt f(t) \sin(nt) \right] \sin(nx) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(n[t-x]). \end{aligned}$$

- Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n(t-x)) \right] \\ &= \Re \left[ \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( e^{-i(t-x)k} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

- y al sumar la progresión geométrica que representa una serie de exponenciales llegamos a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left[ \frac{\sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) (t-x) \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} (t-x) \right)} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t),$$

por lo tanto pasamos de  $f(t)$  a  $F(x)$  mediante una “transformación”

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t).$$

- También es muy común expresar una función  $f(t)$  en términos de una serie de Fourier compleja:

$\{\dots|\tilde{\phi}_n\rangle\dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{i(\frac{2n\pi}{T})t}\dots\}$  con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Esto es

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n |\tilde{\phi}_n\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i(\frac{2n\pi}{T})t} \quad \text{con} \quad \tilde{C}_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n | f \rangle}{\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \rangle} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{i(\frac{2n\pi}{T})t} f(t).$$



- También es muy común expresar una función  $f(t)$  en términos de una serie de Fourier compleja:

$$\{\dots|\tilde{\phi}_n\rangle\dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}\dots\} \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Esto es}$$

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n |\tilde{\phi}_n\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \text{ con } \tilde{C}_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n | f \rangle}{\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \rangle} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} f(t).$$

- si  $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \Leftrightarrow \Delta\omega_n = \frac{2\Delta n\pi}{T}$ , obviamente  $\Delta n = 1 \equiv \frac{T\Delta\omega_n}{2\pi}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \Leftrightarrow f(t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} C_{\omega} e^{i\omega t},$$

- También es muy común expresar una función  $f(t)$  en términos de una serie de Fourier compleja:

$$\{\dots|\tilde{\phi}_n\rangle\dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}\dots\} \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Esto es}$$

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n |\tilde{\phi}_n\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \text{ con } \tilde{C}_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n | f \rangle}{\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \rangle} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} f(t).$$

- si  $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \Leftrightarrow \Delta\omega_n = \frac{2\Delta n\pi}{T}$ , obviamente  $\Delta n = 1 \equiv \frac{T\Delta\omega_n}{2\pi}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \Leftrightarrow f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t},$$

- pasamos  $\tilde{C}_n \rightarrow C_{\varpi}$ , ambos discretos. Pero además cuando  $T \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$ , i.e. cuando el período de la función es infinito (la función no es periódica), entonces el índice  $\omega_n$  se convierte en una variable  $\omega$  continua:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- También es muy común expresar una función  $f(t)$  en términos de una serie de Fourier compleja:

$$\{\dots|\tilde{\phi}_n\rangle\dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}\dots\} \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Esto es}$$

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n |\tilde{\phi}_n\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \text{ con } \tilde{C}_n = \frac{\langle \tilde{\phi}_n | f \rangle}{\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \rangle} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} f(t).$$

- si  $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \Leftrightarrow \Delta\omega_n = \frac{2\Delta n\pi}{T}$ , obviamente  $\Delta n = 1 \equiv \frac{T\Delta\omega_n}{2\pi}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \Leftrightarrow f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t},$$

- pasamos  $\tilde{C}_n \rightarrow C_{\varpi}$ , ambos discretos. Pero además cuando  $T \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$ , i.e. cuando el período de la función es infinito (la función no es periódica), entonces el índice  $\omega_n$  se convierte en una variable  $\omega$  continua:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- Con lo cual podemos expresar la transformada y la anti-transformada de Fourier como

$$F(\omega) \equiv \mathbb{T}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \Leftrightarrow f(t) \equiv \mathbb{T}^{-1}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega).$$

$$F_n(s) = \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(s, t).$$

Nombre	$F(s) = \mathbb{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} f(t) dt$	$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} F(s) ds$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} F(s) ds$
Hankel	$F(s) = \int_0^{\infty} t J_n(st) f(t) dt$	$f(t) = \int_0^{\infty} s J_n(ts) F(s) ds$
Mellin	$F(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s) ds$

- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral  $\mathbb{T}\left\{\int^t dt f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$  donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  es la delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración

- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral  $\mathbb{T}\left\{\int^t dt f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$  donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  es la delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento  $\mathbb{T}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral  $\mathbb{T}\left\{\int^t dt f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$  donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  es la delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento  $\mathbb{T}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- Traslación  $\mathbb{T}\{f(t+a)\} = e^{ia\omega} F(\omega)$



- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral  $\mathbb{T}\left\{\int^t dt f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$  donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  es la delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento  $\mathbb{T}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- Traslación  $\mathbb{T}\{f(t+a)\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial  $\mathbb{T}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(\omega + i\alpha)$

- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral  $\mathbb{T}\left\{\int^t dt f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$  donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  es la delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento  $\mathbb{T}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- Traslación  $\mathbb{T}\{f(t+a)\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial  $\mathbb{T}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(\omega + i\alpha)$
- Si  $f(t)$  es par  $F(\omega)$  es real o si  $f(t)$  es impar  $F(\omega)$  es imaginario puro

- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral  $\mathbb{T}\{f^t dt f(t)\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$  donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  es la delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento  $\mathbb{T}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
- Traslación  $\mathbb{T}\{f(t+a)\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial  $\mathbb{T}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(\omega + i\alpha)$
- Si  $f(t)$  es par  $F(\omega)$  es real o si  $f(t)$  es impar  $F(\omega)$  es imaginario puro
- Además se cumple la relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

o equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(-\omega) d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt$$

- La transformada de la derivada  $\mathbb{T}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$  y en general  $\mathbb{T}\{f^n(t)\} = i^n \omega^n F(\omega)$ . Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral  $\mathbb{T}\{\int^t dt f(t)\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c \delta(\omega)$  donde la función (distribución)  $\delta(\omega)$  es la delta de Dirac y el término  $2\pi c \delta(\omega)$  representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento  $\mathbb{T}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
- Traslación  $\mathbb{T}\{f(t+a)\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial  $\mathbb{T}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(\omega + i\alpha)$
- Si  $f(t)$  es par  $F(\omega)$  es real o si  $f(t)$  es impar  $F(\omega)$  es imaginario puro
- Además se cumple la relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

o equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(-\omega) d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt$$

- Más aún  $\mathbb{T}\{h(t)\} = F(\omega) * G(\omega) \Leftrightarrow h(t) \equiv (f * g) \equiv (g * f) \propto \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(t - \xi) d\xi$

$$\alpha \ddot{u} + \beta \dot{u} + \gamma u \equiv \alpha \frac{d^2 u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + \gamma u = \lambda(t)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + k x = F(t) \text{ con } \left\{ \begin{array}{ll} x & \Rightarrow \text{Desplazamiento} \\ \frac{dx}{dt} & \Rightarrow \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow \text{Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow \text{Elasticidad} \\ F(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Aplicada} \end{array} \right.$$

y circuitos eléctricos

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \text{ con } \left\{ \begin{array}{ll} Q & \Rightarrow \text{Carga Eléctrica} \\ \frac{dQ}{dt} = I & \Rightarrow \text{Int. de Corriente} \\ L & \Rightarrow \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow \text{Capacitancia} \end{array} \right.$$

Entonces

$$\mathbb{T} \left\{ \alpha \ddot{f} + \beta \dot{f} + \gamma f \right\} \equiv \mathbb{T} \left\{ \alpha \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \beta \frac{df(t)}{dt} + \gamma f(t) \right\} = \mathbb{T} \{ \lambda(t) \}$$

se transforma en una ecuación algebraica

$$\left[ \omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\beta}{\alpha} \omega \right] F(\omega) = \frac{\Lambda(\omega)}{\alpha}$$

donde hemos definido  $F(\omega) = \mathbb{T} \{ f(t) \}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{\gamma}{\alpha}$  y  $\Lambda(\omega) = \mathbb{T} \{ \lambda(t) \}$ .  
Por lo tanto podemos despejar  $F(\omega)$  como

$$F(\omega) = \frac{\Lambda(\omega)}{\alpha \left[ \omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\beta}{\alpha} \omega \right]} \Rightarrow f(t) = \mathbb{T}^{-1} \left\{ \frac{\Lambda(\omega)}{\alpha \left[ \omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\beta}{\alpha} \omega \right]} \right\}$$

vale decir, formalmente la solución será  $f(t) = \mathbb{T}^{-1} \{ F(\omega) \}$

## En presentación consideramos

- 1 Repasamos una vez más las series de Fourier

## En presentación consideramos

- 1 Repasamos una vez más las series de Fourier
- 2 Presentamos la representación integral de las series de Fourier  $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$ .



## En presentación consideramos

- 1 Repasamos una vez más las series de Fourier
- 2 Presentamos la representación integral de las series de Fourier  $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$ .
- 3 Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquetada con  $n$ ,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$  a una serie de Fourier discreta, etiquetada por  $\varpi$ :  $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$

## En presentación consideramos

- 1 Repasamos una vez más las series de Fourier
- 2 Presentamos la representación integral de las series de Fourier  $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$ .
- 3 Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquetada con  $n$ ,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$  a una serie de Fourier discreta, etiquetada por  $\varpi$ :  $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$
- 4 Extendimos el período de la función a toda la recta real  $T \rightarrow \infty$  y convertimos la variable discreta  $\omega_n$  en una variable continua:  $\Delta\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$

## En presentación consideramos

- 1 Repasamos una vez más las series de Fourier
- 2 Presentamos la representación integral de las series de Fourier  $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$ .
- 3 Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquetada con  $n$ ,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$  a una serie de Fourier discreta, etiquetada por  $\varpi$ :  $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$
- 4 Extendimos el período de la función a toda la recta real  $T \rightarrow \infty$  y convertimos la variable discreta  $\omega_n$  en una variable continua:  $\Delta\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$
- 5 Entonces los coeficientes se nos convierten en funciones y las sumatorias en integrales

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n \right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ La transformada de Fourier}$$

## En presentación consideramos

- 1 Repasamos una vez más las series de Fourier
- 2 Presentamos la representación integral de las series de Fourier  $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$ .
- 3 Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquetada con  $n$ ,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$  a una serie de Fourier discreta, etiquetada por  $\varpi$ :  $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$
- 4 Extendimos el período de la función a toda la recta real  $T \rightarrow \infty$  y convertimos la variable discreta  $\omega_n$  en una variable continua:  $\Delta\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$
- 5 Entonces los coeficientes se nos convierten en funciones y las sumatorias en integrales  
$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n \right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
, La transformada de Fourier
- 6 Presentamos algunas propiedades de la Transformada de Fourier

## En presentación consideramos

- 1 Repasamos una vez más las series de Fourier
- 2 Presentamos la representación integral de las series de Fourier  $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$ .
- 3 Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquetada con  $n$ ,  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$  a una serie de Fourier discreta, etiquetada por  $\varpi$ :  $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$
- 4 Extendimos el período de la función a toda la recta real  $T \rightarrow \infty$  y convertimos la variable discreta  $\omega_n$  en una variable continua:  $\Delta\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$
- 5 Entonces los coeficientes se nos convierten en funciones y las sumatorias en integrales  
$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n \right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
, La transformada de Fourier
- 6 Presentamos algunas propiedades de la Transformada de Fourier
- 7 Consideramos una aplicación formal para una ecuación diferencial de segundo orden