Espacios Euclideanos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

14 de febrero de 2024

Agenda: Espacios Euclideanos

1. Espacios Euclideanos
   - Producto interno
   - La desigualdad de Cauchy-Schwarz
   - Teoremas del coseno y de Pitágoras
2. Ejemplos de espacios vectoriales con producto interno
   - $\mathbb{R}^n$
   - Funciones continuas $\mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$
3. Recapitulando
4. Para la discusión

El siguiente paso en la construcción de espacios vectoriales más ricos es equiparlo con la definición de producto interno y a partir de esta definición construir el concepto de norma y con éste el de distancia. La idea de producto interno generaliza el concepto de producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^3$ e incorpora a los espacios vectoriales abstractos el concepto de ortogonalidad y descomposición ortogonal.

Producto interno

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

En un espacio vectorial $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$, la definición del producto interno de dos vectores la denotaremos como $\langle v_i | v_j \rangle$ y es una aplicación:

$$\mathcal{I}(|v_i\rangle, |v_j\rangle) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}, \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V}.$$

Las propiedades que definen el producto interno son:

1. $\langle v_i | v_i \rangle \equiv \| |v_i\rangle \|^2 \in \mathbf{K} \ \wedge \ \langle v_i | v_i \rangle \geq 0 \quad \forall \ |v_i\rangle \in \mathbf{V}, \quad \mathrm{si} \quad \langle v_i | v_i \rangle = 0 \ \Rightarrow \ |v_i\rangle \equiv |0\rangle$.
2. $\langle v_i | v_j \rangle = \langle v_j | v_i \rangle^* \quad \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V}$.
3. $\langle v_i | \alpha v_j + \beta v_k \rangle = \alpha \langle v_i | v_j \rangle + \beta \langle v_i | v_k \rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \ \wedge \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
4. $\langle \alpha v_i + \beta v_j | v_k \rangle = \alpha^* \langle v_i | v_k \rangle + \beta^* \langle v_j | v_k \rangle \ \forall \ |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \ \wedge \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
5. $\langle v_i | 0 \rangle = \langle 0 | v_i \rangle = 0$.

Los ángulos entre vectores

Todo producto interno $\langle v_i | v_j \rangle$ definido en un espacio vectorial normado $\mathbf{V} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ cumple con la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle v_i | v_j \rangle|^2 \leq \langle v_i | v_i \rangle \langle v_j | v_j \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad |\langle v_i | v_j \rangle| \leq \| |v_i\rangle \| \ \| |v_j\rangle \| \, .$$

Es claro que si $|v_i\rangle = |0\rangle \ \wedge \ |v_j\rangle = |0\rangle$ se cumple la igualdad y es trivial la afirmación.
De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de norma se desprende que:

$$\frac{|\langle v_i | v_j \rangle|^2}{\| |v_i\rangle \|^2 \, \| |v_j\rangle \|^2} \leq 1 \ \Rightarrow \ -1 \leq \frac{|\langle v_i | v_j \rangle|}{\| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \|} \leq 1 \, ,$$

por lo tanto podemos definir el “ángulo” entre los vectores abstractos $|v_i\rangle \ \wedge \ |v_j\rangle$ como:

$$\cos(\Theta_{\mathbb{G}}) = \frac{|\langle v_i | v_j \rangle|}{\| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \|} \, ,$$

donde hemos denotado como $\Theta_{\mathbb{G}}$ el ángulo genérico que forman los

A partir de la definición de norma se obtiene:

$$\begin{aligned} \| |v_i\rangle - |v_j\rangle \|^2 &= \langle v_i - v_j | \, v_i - v_j \rangle \\ &= \langle v_i | \, v_i \rangle + \langle v_i | \, v_j \rangle - \langle v_i | \, v_j \rangle^* - \langle v_j | \, v_j \rangle \\ &= \langle v_i | \, v_i \rangle + \langle v_j | \, v_j \rangle - 2 \, \mathrm{Re} \left(\langle v_i | \, v_j \rangle \right) , \end{aligned}$$

con lo cual hemos generalizado el teorema del coseno para un espacio vectorial abstracto:

$$\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \|^2 = \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 - 2 \, \| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \| \cos(\Theta_{\mathbb{G}}) \, .$$

Para el caso que los vectores $|v_i\rangle \ \wedge \ |v_j\rangle$ sean ortogonales, esto es $\langle v_i | \, v_j \rangle = 0$, tendremos el teorema de Pitágoras generalizado:

$$\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \|^2 \equiv \| |v_i\rangle + |v_j\rangle \|^2 = \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 \, .$$

Los vectores en estos espacios euclidianos pueden ser representados por $|x\rangle = (x_1, x_2, \cdots x_n) \ \wedge \ |y\rangle = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ y **el producto interno** queda definido por:

$$\langle x|\, y\rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + x_3^* y_3, \cdots x_n^* y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \,,$$

es claro que esta definición de producto interno coincide, para $\mathbb{R}^2$ (y $\mathbb{R}^3$) con la idea de producto escalar convencional vale decir:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \\ \\ \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y \,.$$

pero también se puede proveer una definición de producto interno:

$$\mathbf{a} \circledast \mathbf{b} = 2a_x b_x + a_x b_y + a_y b_x + a_y b_y \,,$$

igualmente válida.

Por su parte, la **norma** es:

$$\| |x\rangle \| = \sqrt{\langle x | \, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, .$$

La **distancia** es la idea intuitiva de distancia euclidiana:

$$d\left(|x\rangle, |y\rangle\right) \equiv \| |x\rangle - |y\rangle \| = \sqrt{\langle x - y | \, x - y \rangle}$$

El teorema del coseno queda como:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \, \cos(\Theta) \, ,$$

mientras que el teorema de Pitágoras es:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

es obvio que para $\mathbb{R}^2$ tanto el teorema del coseno como el teorema de

Una posible definición de **producto interno** sería:

$$\langle f|\, g\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \;\, f^*(x) \;\, g(x) \;,$$

de la cual se deriva la expresión para la **norma**:

$$\| |f\rangle \|^2 = \langle f|\, f\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \;\; |f(x)|^2 \;.$$

La **distancia** entre funciones quedará definida como:

$$d\left(|f\rangle, |g\rangle\right) \equiv \| |f\rangle - |g\rangle \| \equiv \sqrt{\int_a^b \mathrm{d}x \;\; |f(x) - g(x)|^2} =$$

$$= \sqrt{\int_a^b \mathrm{d}x \;\; |f(x)|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\int_a^b \mathrm{d}x \;\, f^*(x)\; g(x)\right) + \int_a^b \mathrm{d}x \;\; |g(x)|^2}\,.$$

El teorema del coseno puede ser escritos como:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \; |f(x)+g(x)|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x \; |f(x)|^2 + \int_a^b \mathrm{d}x \; |g(x)|^2 + 2\left(\int_a^b \mathrm{d}x \; |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \; |g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\Theta)\,,$$

donde:

$$\cos(\Theta) = \frac{\int_a^b \mathrm{d}x \; f^*(x) \; g(x)}{\left(\int_a^b \mathrm{d}x \; |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \; |g(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Y como era de esperarse el teorema de Pitágoras queda:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \; |f(x)+g(x)|^2 = \int_a^b \mathrm{d}x \; |f(x)|^2 + \int_a^b \mathrm{d}x \; |g(x)|^2\,,$$

Recapitulando

- Definimos el **producto interno** para espacios vectoriales abstractos

Recapitulando

- Definimos el **producto interno** para espacios vectoriales abstractos
- El **producto interno** nos permitió construir el **concepto de ángulo** entre dos vectores abstractos: $\cos(\Theta_{\mathbb{G}}) = \frac{\left|\langle v_i | v_j \rangle\right|}{\left\| |v_i\rangle \right\| \left\| |v_j\rangle \right\|}$,. El producto interno equipa con una geometría un espacio vectorial abstracto.

Recapitulando

- Definimos el **producto interno** para espacios vectoriales abstractos
- El **producto interno** nos permitió construir el **concepto de ángulo** entre dos vectores abstractos: $\cos(\Theta_{\mathbb{G}}) = \frac{\left|\langle v_i | v_j \rangle\right|}{\| |v_i\rangle \| \| |v_j\rangle \|}$,. El producto interno equipa con una geometría un espacio vectorial abstracto.
- A partir del concepto de **producto interno** se deduce el **concepto de norma**: $\langle v_i | v_i \rangle \equiv \| |v_i\rangle \|^2$ y de allí el concepto de distancia $\langle v_i - v_j | v_i - v_j \rangle \equiv \| |v_i - v_j\rangle \|^2$

Recapitulando

- Definimos el **producto interno** para espacios vectoriales abstractos
- El **producto interno** nos permitió construir el **concepto de ángulo** entre dos vectores abstractos: $\cos(\Theta_{\mathbb{G}}) = \frac{\left|\langle v_i | v_j \rangle\right|}{\| |v_i\rangle \| \left\| |v_j\rangle \right\|}$,. El producto interno equipa con una geometría un espacio vectorial abstracto.
- A partir del concepto de **producto interno** se deduce el **concepto de norma**: $\langle v_i | v_i \rangle \equiv \| |v_i\rangle \|^2$ y de allí el concepto de distancia $\langle v_i - v_j | v_i - v_j \rangle \equiv \| |v_i - v_j\rangle \|^2$
- Generalizamos el **Teorema del Coseno** para un espacio vectorial abstracto: $\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \|^2 = \| |v_i\rangle \|^2 + \| |v_j\rangle \|^2 - 2 \| |v_i\rangle \| \, \| |v_j\rangle \| \cos(\Theta_{\mathbb{G}})$.

Recapitulando

- Definimos el **producto interno** para espacios vectoriales abstractos
- El **producto interno** nos permitió construir el **concepto de ángulo** entre dos vectores abstractos: $\cos(\Theta_{\mathbb{G}}) = \frac{\left|\langle v_i | v_j \rangle\right|}{\left\| |v_i\rangle \right\| \left\| |v_j\rangle \right\|}$,. El producto interno equipa con una geometría un espacio vectorial abstracto.
- A partir del concepto de **producto interno** se deduce el **concepto de norma**: $\langle v_i | \, v_i \rangle \equiv \left\| |v_i\rangle \right\|^2$ y de allí el concepto de distancia $\langle v_i - v_j | \, v_i - v_j \rangle \equiv \left\| |v_i - v_j\rangle \right\|^2$
- Generalizamos el **Teorema del Coseno** para un espacio vectorial abstracto: $\left\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \right\|^2 = \left\| |v_i\rangle \right\|^2 + \left\| |v_j\rangle \right\|^2 - 2 \left\| |v_i\rangle \right\| \left\| |v_j\rangle \right\| \cos(\Theta_{\mathbb{G}})$.
- Generalizamos el **Teorema de Pitágoras** para un espacio vectorial abstracto: $\left\| |v_i\rangle - |v_j\rangle \right\|^2 \equiv \left\| |v_i\rangle + |v_j\rangle \right\|^2 = \left\| |v_i\rangle \right\|^2 + \left\| |v_j\rangle \right\|^2$.

Para la discusión

1. Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[0, 1]$ o en el intervalo $[-1, 1]$ según el caso. Suponiendo las siguientes definiciones de producto interno en $\mathcal{P}^n$:

$$\langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \langle q_n | p_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x \,.$$

Vamos a encontrar la distancia y el ángulo entre los vectores: $|x_1\rangle = x(x-1)$ y $|x_2\rangle = x$.