

Teoremas integrales y campos vectoriales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



30 de octubre de 2025

1 Integrales de línea

- Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

2 Integrales de superficie

3 Teorema de Gauss

- Teorema de Gauss y campo eléctrico
- Discontinuidades y densidades superficiales de carga

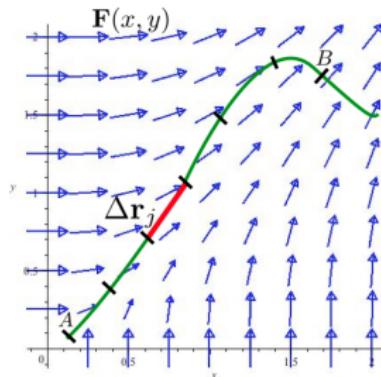
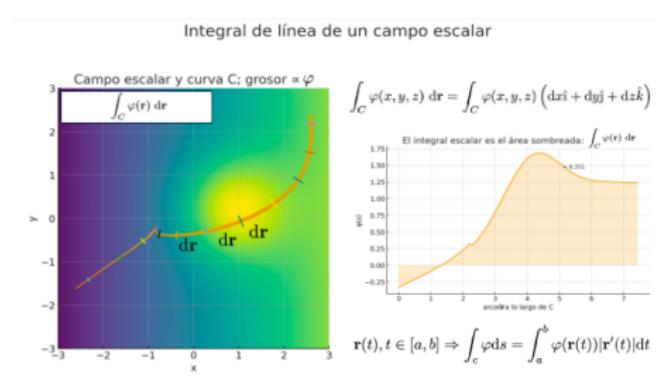
4 Teorema de Stokes

Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

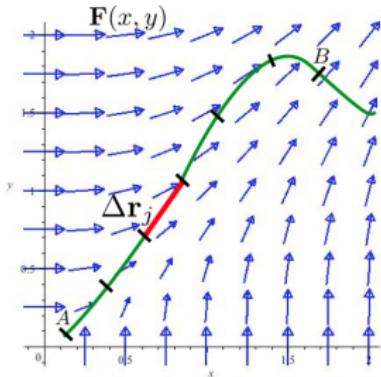
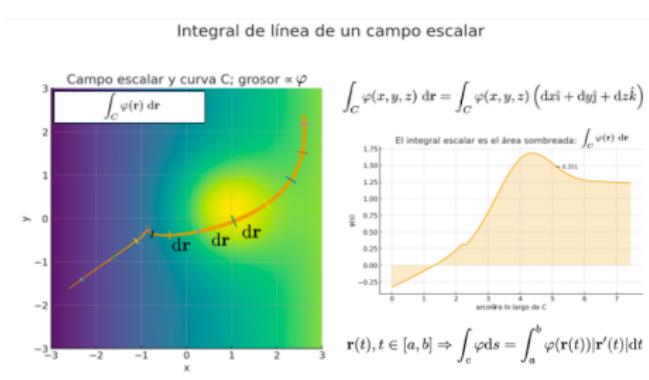
Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
 - Hay que especificar las curvas C , las trayectorias, para la integración.



Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

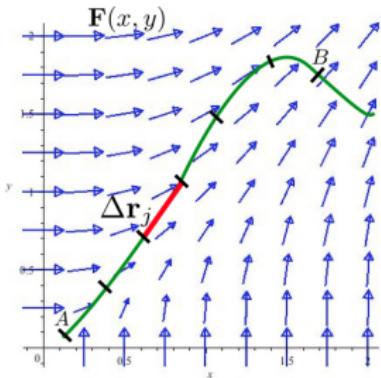
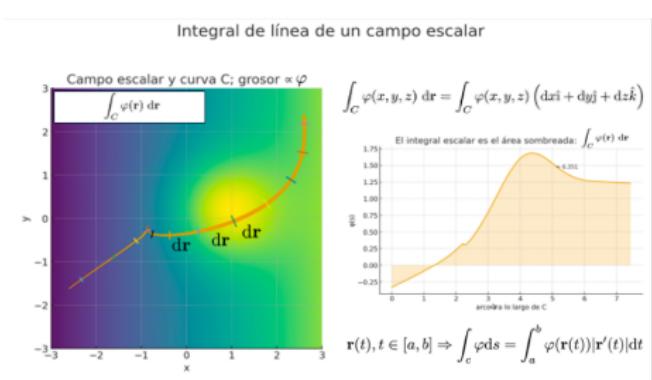
- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C , las trayectorias, para la integración.



- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.

Integrales de línea: $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos:
 $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$
- Hay que especificar las curvas C , las trayectorias, para la integración.



- Trayectorias, abiertas/cerradas dependen de la curva de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.

Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}).$

Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $d\boldsymbol{\nu}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, por lo tanto:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i, \text{ con } \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|.$$

Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $d\boldsymbol{\nu}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, por lo tanto:
 $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.
- En esféricas es: $d\boldsymbol{\nu}_r = \hat{\mathbf{e}}_r dr$, $d\boldsymbol{\nu}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r d\theta$ y $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) d\varphi$,
 En cilíndricas $d\boldsymbol{\nu}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho$, $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi$ y $d\boldsymbol{\nu}_z = \hat{\mathbf{e}}_z dz$.

Integrales de línea $\int_C \phi \, d\mathbf{r}$

- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas,
 $\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$.
- En coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) , \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz .\end{aligned}$$

- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $d\boldsymbol{\nu}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, por lo tanto:
 $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\boldsymbol{\nu}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.
- En esféricas es: $d\boldsymbol{\nu}_r = \hat{\mathbf{e}}_r dr$, $d\boldsymbol{\nu}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r d\theta$ y $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) d\varphi$,
 En cilíndricas $d\boldsymbol{\nu}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho$, $d\boldsymbol{\nu}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi$ y $d\boldsymbol{\nu}_z = \hat{\mathbf{e}}_z dz$.
- En general: $\int_C \phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_C \phi(\mathbf{r}(q^j)) \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [\mathbf{d}x\mathbf{i} + \mathbf{d}y\mathbf{j} + \mathbf{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^i)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (r)dr = \int_C \mathbf{A}(r(q^j)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(r) \cdot dr = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3$.
- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times dr$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times dr = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times dr = \left(\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk} \right) |e_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \epsilon^{ijk} \right) |\tilde{e}_k\rangle$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
 - Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
 - En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (r)dr = \int_C \mathbf{A}(r(q^i)) \cdot (\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(r) \cdot dr = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$
 - Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times dr$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times dr = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times dr = (\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk}) |e_k\rangle \equiv (\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \epsilon^{ijk}) |\tilde{e}_k\rangle$
 - Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifican a través de un parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $d\mathbf{r}$ serán $dx = f'(\lambda)d\lambda$, $dy = g'(\lambda)d\lambda$ y $dz = h'(\lambda)d\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial
- $$\mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \begin{cases} A^1(x, y, z) = & A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv F(\lambda) \\ A^2(x, y, z) = & A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv G(\lambda) \\ A^3(x, y, z) = & A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv H(\lambda) \end{cases}$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}] \Rightarrow$
 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))dx + \int_C A_y(x, y, z)dy + \int_C A_z(x, y, z)dz.$
 - Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno C .
 - En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (r)dr = \int_C \mathbf{A}(r(q^i)) \cdot (\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(r) \cdot dr = \int_C A_{q1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1 dq^1 + \int_C A_{q2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2 dq^2 + \int_C A_{q3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3 dq^3.$
 - Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times dr$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times dr = \int_C [A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}] \times [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times dr = (\int_C A_j dx_k \epsilon^{ijk}) |e_k\rangle \equiv (\int_C \tilde{A}_j h_i dq^i \epsilon^{ijk}) |\tilde{e}_k\rangle$
 - Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifican a través de un parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $d\mathbf{r}$ serán $dx = f'(\lambda)d\lambda$, $dy = g'(\lambda)d\lambda$ y $dz = h'(\lambda)d\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial
- $$\mathbf{A}(x^i) \Rightarrow \begin{cases} A^1(x, y, z) = & A_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv F(\lambda) \\ A^2(x, y, z) = & A_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv G(\lambda) \\ A^3(x, y, z) = & A_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv H(\lambda) \end{cases}$$
- por lo tanto: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)] d\lambda$

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_S \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es
$$\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s A_{\hat{n}} \, dS.$$

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es $\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s A_{\hat{n}} \, dS$.
- los operadores diferenciales:
 - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi (q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad de Campo
 - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad Flujo
 - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$ Densidad Circulación

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es $\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s A_{\hat{n}} \, dS$.
- los operadores diferenciales:
 - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi (q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad de Campo
 - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad Flujo
 - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$ Densidad Circulación
- as integrales de volumen $\int_V \phi(\mathbf{r}) \, dV$ y $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dV$

Integrales de superficie

- Ahora las integrales de superficie, son $\int_s \phi \, d\mathbf{S}$, $\int_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_s \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$.
- El flujo de un campo vectorial, es $\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS$.
- los operadores diferenciales:
 - $\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi (q^i) \, d\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad de Campo
 - $\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow$ Densidad Flujo
 - $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \Rightarrow$ Densidad Circulación
- as integrales de volumen $\int_V \phi(\mathbf{r}) \, dV$ y $\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dV$
- Mientras que el segundo tipo de integral es simplemente: $\int_V \mathbf{A}(x^i) \, dV = \mathbf{i} \int_V A_x(x^j) \, dV + \mathbf{j} \int_V A_y(x^j) \, dV + \mathbf{k} \int_V A_z(x^j) \, dV$.

Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es

$$\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV.$$

Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es
$$\iint_s \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_s \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_s \phi(x^i) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$
Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_s d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x^i) dV.$

Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$
 Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x^i) dV$.

- **Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico \mathbf{E} y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

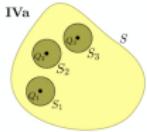
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$
 Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x^i) dV$.

- **Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico \mathbf{E} y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

- Si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S , podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i . Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i.$$



Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

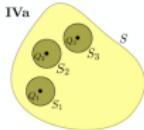
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$
 Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x^i) dV$.

- Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico \mathbf{E} y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

- Si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S , podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i . Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i.$$



- Hemos definido una superficie con "huecos" alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que

$$\text{entra sale, } \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}' \right) \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

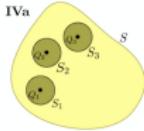
Teorema de Gauss

- El Teorema de Gauss es

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$
- Campo escalar $\phi(x, y, z)$, $\Rightarrow \iint_S \phi(x^i) d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV$
 Campo vectorial $\mathbf{B}(x, y, z) \Rightarrow \iint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{B}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}(x^i) dV.$
- **Teorema de Gauss y campo eléctrico** La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico \mathbf{E} y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$
- Si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S , podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i . Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_i.$$



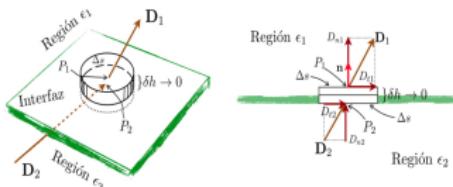
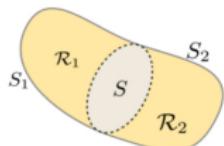
- Hemos definido una superficie con "huecos" alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que entra sale,

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{E}' \right) \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
- Finalmente encontramos una de las leyes de Maxwell si reescribimos la integral de superficie utilizando la ley de Gauss

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S , y una superficie \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo

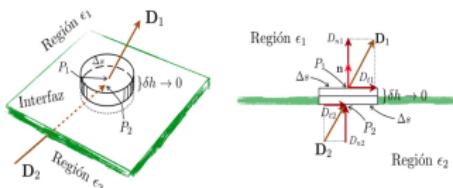
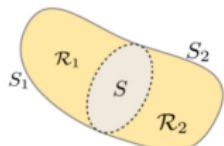


- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S , y una superficie \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo

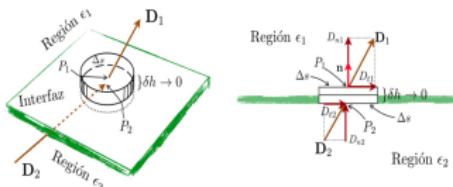
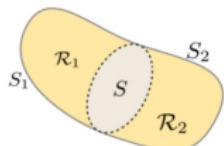


- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S , y una superficie \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo



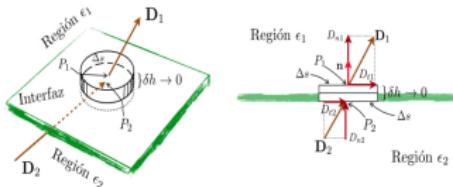
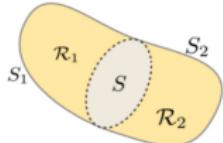
- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$.

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S , y una superficie \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo



- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

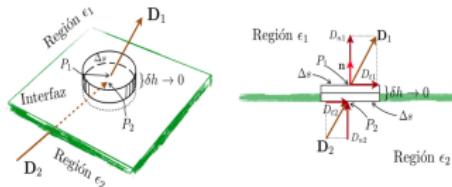
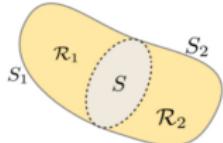
- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$.

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ con } \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \text{ el vector unitario, normal a la superficie } \bar{S} \text{ y que apunta de } R_1 \rightarrow R_2.$$

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S , y una superficie \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo



- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$.

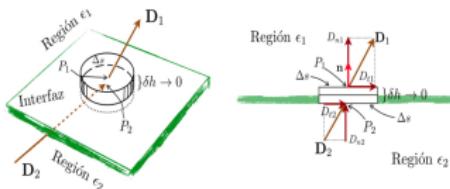
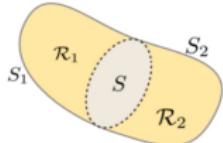
- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ con } \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \text{ el vector unitario, normal a la superficie } \bar{S} \text{ y que apunta de } R_1 \rightarrow R_2.$$

- El ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , a través de una superficie \bar{S} , que separa dos medios. La ecuación de Maxwell correspondiente será $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(r) \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} = \sigma$, con $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.

Discontinuidades y densidades superficiales de carga

- Supongamos una región R delimitada por una superficie S , y una superficie \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, es discontinuo



- Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ y } \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{A}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

- Si consideramos el teorema de Gauss en toda la región $\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \equiv \int_{V_1} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV + \int_{V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$.

- Si el campo es discontinuo, la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \text{ con } \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} \text{ el vector unitario, normal a la superficie } \bar{S} \text{ y que apunta de } R_1 \rightarrow R_2.$$

- El ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , a través de una superficie \bar{S} , que separa dos medios. La ecuación de Maxwell correspondiente será $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(r) \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} = \sigma$, con $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.
- Así $(\nabla \cdot \mathbf{D})dV = \mathbf{D}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 \Rightarrow \rho(r)(\Delta S_2 \delta h) = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_2} \Delta S_2 \Rightarrow \rho(r)\delta h \equiv \sigma = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_2}$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C .

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS.$$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C .

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS.$$

- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C .

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS.$$

- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iint_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S .

La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C .

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS.$$

- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \iint_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S .

La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint_C \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$

$$\oint_C \mathbf{dr} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C .

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS.$$

- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S .

La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

- Versiones del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$
- $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$
- Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria: $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0} \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$

Teorema de Stokes

- El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C .

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_S dS.$$

- Teorema de Stokes y Campo Magnético.** La ley de Ampere para una densidad de corriente: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$.
- Al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$, para cualquier superficie S .

La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

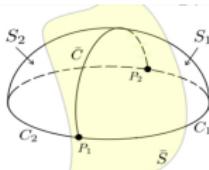
- Versión del Teorema de Stokes: Campo escalar $\oint_C \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi(x, y, z)$

$$\oint_C \mathbf{dr} \times \mathbf{B}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B}(x, y, z)$$

- Teorema de Stokes y fuerzas conservativas.** El teorema de Stokes permite identificar campos vectoriales irrotacionales con integrales de línea independientes de la trayectoria: $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$
- Un campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ que es discontinuo sobre una superficie \bar{S} , que divide R en dos subregiones R_1 y R_2

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

curva \bar{C} en S_1 curva \bar{C} en S_2



$$\text{Entonces } \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{P_1}^{P_2} (\mathbf{A}|_{S_2} - \mathbf{A}|_{S_1}) \cdot d\mathbf{r}.$$