Potencial efectivo

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

2 de septiembre de 2024

Agenda

1. El potencial efectivo

2. Las trayectorias

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
  $L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3}$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
  $L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
  $L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\mathrm{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\mathrm{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$ $L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\mathrm{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\mathrm{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}$
- La energía total será $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\mathrm{ef}}(r) = \mathrm{cte}.$

El potencial efectivo

- Para el problema de dos cuerpos con un potencial central $V(r)$
$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{\mu r^3}$
- La fuerza radial $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ entonces $\mu\ddot{r} = f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} \Rightarrow \mu\ddot{r} = f_{\mathrm{ef}}(r)$
- La fuerza efectiva surge de las contribuciones de la fuerza central $f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$ y el efecto no inercial $F_{ni} \equiv \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu r\dot{\theta}^2$
- Se define una energía potencial efectiva, $V_{\mathrm{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$, tal que $f_{\mathrm{ef}}(r) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial r}$
- La energía total será $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\mathrm{ef}}(r) = \mathrm{cte}.$
- Una partícula de masa μ, moviéndose en la dimensión r con energía potencial $V_{\mathrm{ef}}(r)$.

Las trayectorias 1/2

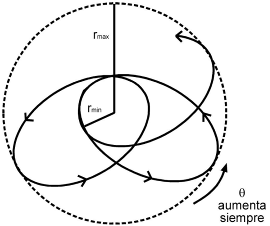
- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\rm ef}(r)$

Las trayectorias 1/2

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimiento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\mathrm{ef}}(r)$
- Los puntos de retorno están dados por la condición $\dot{r} = 0$, i.e. $E = V_{\mathrm{ef}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} = 0$

Las trayectorias 1/2

- La condición $\dot{r}^2 \geq 0$ implica que este movimiento ocurre para valores de r tales que $E \geq V_{\text{ef}}(r)$
- Los puntos de retorno están dados por la condición $\dot{r} = 0$, i.e. $E = V_{\text{ef}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} = 0$
- Es una ecuación algebraica de segundo grado en r y pueden existir dos raíces reales, $r = r_{\text{mín}}, r = r_{\text{máx}}$.



- si $r_{\text{máx}} < \infty \Rightarrow$ movimiento es finito, oscilatorio en r,
- si $r_{\text{máx}} \to \infty \Rightarrow$ movimiento sin retorno,
- si $r_{\text{mín}} = r_{\text{máx}} \Rightarrow$ movimiento es circular.

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$
4. De la ecuación para la energía tenemos
$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} > 0$

Las trayectorias 2/2

1. Como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$
4. De la ecuación para la energía tenemos $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} > 0$
5. Tomando el límite $r \to 0$ tendremos $\lim_{r\to 0}\left[V(r)r^2\right] < -\frac{l^2}{2\mu}$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

1. Como $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \geq 0$, la velocidad angular $\dot{\theta}$ nunca cambia de signo.
2. El ángulo θ siempre se incrementa en el tiempo y el movimiento siempre ocurre en una misma dirección sobre el plano (r, θ).
3. Para encontrar la condición de choque $r \to 0$, i.e. $r_{\text{mín}} = 0$
4. De la ecuación para la energía tenemos $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} > 0 \Rightarrow Er^2 - V(r)r^2 - \frac{l^2}{2\mu} > 0$
5. Tomando el límite $r \to 0$ tendremos $\lim_{r\to 0}\left[V(r)r^2\right] < -\frac{l^2}{2\mu}$
6. Consideremos un potencial atractivo de la forma $V(r) = -k/r^n$, entonces $\lim_{r\to 0}\left[V(r)r^2\right] < -\frac{l^2}{2\mu} \Rightarrow n > 2$
   - $V(r) = -k/r^3$ permite caer al centro, $r_{\text{mín}} = 0$
   - $V(r) = -k/r^2$, requiere $k > \frac{l^2}{2\mu}$ para caer al centro de atracción
   - $V(r) = -k/r$ no permite alcanzar $r_{\text{mín}} = 0$