Ecuación de Laplace:
La esfericidad ante todo

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

30 de septiembre de 2021

Agenda de la Ecuación de Laplace

1. Ecuación de Laplace homogénea en esféricas $\nabla^2_{\rho\theta\phi} u(\vec{r}, t) = 0$
   - Separación Variables
   - La ecuación en $R(r)$
   - La ecuación en $\Theta(\theta)$
   - La ecuación en $\Phi(\phi)$
   - Los armónicos esféricos
2. Ecuación de Laplace inhomogénea $\nabla^2_{\rho\theta\phi} u(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)$

Consideremos $\nabla^2_{\rho\theta\phi} u(\vec{r}, t) = 0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0\,.$$

Como siempre $u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, con lo cual

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{\Theta \operatorname{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{\Phi \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0\,.$$

Separando variables

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda$$

$$\frac{1}{\Theta \operatorname{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{1}{\Phi \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = -\lambda$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda \Leftrightarrow r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \lambda R = 0$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \lambda R = 0 \Rightarrow (r = \mathrm{e}^{\tilde{r}}) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}\tilde{r}^2} + \frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}\tilde{r}} - \lambda\tilde{R} = 0$$

que tendrán como solución

$$\tilde{R}(\tilde{r}) = \tilde{A}\mathrm{e}^{\lambda_1\tilde{r}} + \tilde{B}\mathrm{e}^{\lambda_2\tilde{r}} \Leftrightarrow R(r) = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2} \quad \text{con}$$

donde $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$ y $\lambda_1\lambda_2 = -\lambda$ (*demostrarlo*).
Si, $\lambda_1 = l$ entonces $\lambda_2 = -(l+1)$ y $\lambda = l(l+1)$ consecuentemente

$$u(r,\theta,\phi) = \left(Ar^l + Br^{-(l+1)}\right)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad \text{y}$$

$$\left(\frac{\mathrm{sen}\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\mathrm{sen}^2\theta\right)=m^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}$$

Si $\mu=\cos\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-\sqrt{1-\mu^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$. Entonces $\Theta(\theta)\to\tilde{\Theta}(\mu)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sqrt{1-\mu^2}\frac{\mathrm{d}\tilde{\Theta}(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right)-\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\tilde{\Theta}(\mu)=0$$

- Si $m=0$ tendremos la ecuación de Legendre, cuya solución es de la forma $\tilde{\Theta}(\mu)=EP_l(\mu)+FQ_l(\mu)$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\operatorname{sen}^2\theta\right)=m^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}$$

Si $\mu=\cos\theta\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-\sqrt{1-\mu^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$. Entonces $\Theta(\theta)\to\tilde{\Theta}(\mu)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sqrt{1-\mu^2}\frac{\mathrm{d}\tilde{\Theta}(\mu)}{\mathrm{d}\mu}\right)-\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\tilde{\Theta}(\mu)=0$$

- Si $m=0$ tendremos la ecuación de Legendre, cuya solución es de la forma $\tilde{\Theta}(\mu)=EP_l(\mu)+FQ_l(\mu)$
- Si $m\neq 0$ tendremos la ecuación asociada de Legendre, cuya solución es de la forma $\tilde{\Theta}(\mu)=EP_l^m(\mu)+FQ_l^m(\mu)$ con

$$P_l^m(\mu)=\left(1-\mu^2\right)^{|m|/2}\frac{\mathrm{d}^{|m|}P_l(\mu)}{\mathrm{d}\mu^{|m|}}\;;Q_l^m(\mu)=\left(1-\mu^2\right)^{|m|/2}\frac{\mathrm{d}^{|m|}Q_l(\mu)}{\mathrm{d}\mu^{|m|}}$$

donde m y l son enteros, con $0\leq|m|\leq l$

Finalmente

$$m^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} \Rightarrow \Phi(\phi) = C\cos m\phi + D\,\mathrm{sen}\, m\phi \quad \text{para } m \neq 0$$

y $\Phi(\phi) = C\phi + D$, para $m = 0$.
Entonces la solución general queda como

$$u(r,\theta,\phi) = \left(Ar^l + Br^{-(l+1)}\right)\left(C\cos m\phi + D\,\mathrm{sen}\, m\right)\left(EP_l^m(\mu) + FQ_l^m(\mu)\right)$$

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(Ar^l + Br^{-(l+1)}\right)\left(C\cos m\phi + D\,\mathrm{sen}\, m\right)\left(EP_l^m(\cos\theta) + FQ_l^m(\cos\theta)\right)$$

Si queremos que la solución sea regular para $\mu = \cos\theta = \pm 1$ tendremos

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(Ar^l + Br^{-(l+1)}\right)\left(C\cos m\phi + D\,\mathrm{sen}\, m\right)P_l^m(\cos\theta)$$

Los armónicos esféricos

La parte angular de la solución finita para la ecuación de Laplace

$$\Theta(\theta)\Phi(\phi) = (C\cos m\phi + D\mathrm{sen} m)\, P_l^m(\cos\theta)$$

puede redefinirse como una función de dos variables

$$Y_{ml} = (-1)^m \left(\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right) P_l^m(\cos\theta) \exp(im\phi)$$

los armónicos esféricos, funciones ortogonales

$$\left\langle Y^{ml} \middle| Y_{kj} \right\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \,(Y_{ml}(\theta,\phi))^* \, Y_{kj}(\theta,\phi)$$

por lo tanto los armónicos esféricos expanden cualquier función

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{ml} Y_{ml}(\theta,\phi) \quad \text{con}$$

$$A_{ml} = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \,(Y_{ml}(\theta,\phi))^* \, f(\theta,\phi)$$

Suponemos de entrada que

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos\theta) \quad \text{y} \quad \rho((r,\theta)) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(r) P_l(\cos\theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{P_l(\cos\theta)}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} \right) + \frac{R_l}{r^2 \mathrm{sen}\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\mathrm{sen}\theta \frac{\mathrm{d}P_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right) \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} F_l(r) P_l(\cos\theta)}_{\rho(\vec{r},t)}$$

nótese que estamos analizando el caso axialmente simétrico $m = 0$ y, para ese caso tenemos además

$$\frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\mathrm{sen}\theta \frac{\mathrm{d}P_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right) = -l(l+1) P_l(\cos\theta)$$

con lo cual

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{R_l l(l+1)}{r^2}\right)P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}F_l(r)P_l(\cos\theta)$$

y claramente

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l(r)}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{R_l(r) l(l+1)}{r^2} = F_l(r)$$