Transformaciones Canónicas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



11 de noviembre de 2024

Agenda



- Transformaciones Puntuales
- Transformaciones Canónicas
- 3 Transformacion Canónica y Principio de Mínima Acción
- Función Generadora
- 5 Ejemplo de Función Generadora
- 6 Algunos Tipos de funciones generadoras
- 7 Ejemplo: $Q = q + e^p$ & P = p



• Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual** de coordenadas $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual** de coordenadas $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i$, $P_i = q_i$



- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas $\{q_i\}$: cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual** de **coordenadas** $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos $\{Q_i, P_i\}$.
- Consideremos la siguiente transformacion puntual $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ en el espacio de fase, $Q_i = p_i$, $P_i = q_i$
- Entonces $\dot{q}_{i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{i}} \Rightarrow \dot{P}_{i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial p_{i}} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{k}} \frac{\partial Q_{k}}{\partial p_{i}} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{k}} \frac{\partial P_{k}}{\partial p_{i}} \right) =$ $\sum_{k} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{k}} \delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{i}}$ $\dot{p}_{i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i}} \Rightarrow \dot{Q}_{i} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial q_{i}} = -\sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{k}} \frac{\partial Q_{k}}{\partial q_{i}} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{k}} \frac{\partial P_{k}}{\partial q_{i}} \right) =$ $\sum_{k} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{k}} \delta_{ik} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{k}} \text{ Claramente no se cumplen}$

Transformaciones Canónicas



• Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\begin{array}{c|c} \mathcal{H}\left(q_{i},p_{i},t\right) & \rightarrow & \text{Transformación canónica} \rightarrow \left| \begin{array}{c} \tilde{\mathcal{H}}\left(Q_{i},P_{i},t\right) \\ \dot{q}_{i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{i}} \\ \dot{p}_{i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i}} \\ \end{array} \right| \rightarrow & P_{i} = P_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) \\ Q_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) & \dot{Q}_{i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{i}} \\ \dot{P}_{i} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{i}} \\ \end{array}$$

Transformaciones Canónicas



 Una transformación canónica es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\begin{array}{c|c} \mathcal{H}\left(q_{i},p_{i},t\right) & \rightarrow & \text{Transformación canónica} \rightarrow & \tilde{\mathcal{H}}\left(Q_{i},P_{i},t\right) \\ \dot{q}_{i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{i}} & P_{i} = P_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) & \dot{Q}_{i} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_{i}} \\ \dot{p}_{i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{i}} & Q_{i}\left(q_{j},p_{j},t\right) & \dot{P}_{i} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_{i}} \end{array}$$

• Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i,P_i,t\right)$ no depende explícitamente de alguna coordenada Q_j o momento P_j



• La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- ullet Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t
 ight)=\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{L}$



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- ullet Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t
 ight)=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ genera las ecuaciones $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$



- La condición para que una transformación $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ sea canónica se deriva a partir de la equivalencia del Principio de Mínima Acción en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables $\{q_i, p_i\}$, implica $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$
- ullet Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t
 ight)=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}$
- Tendremos $\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$ genera las ecuaciones $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$
- Por su parte $\delta \tilde{S} = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$ genera $\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n$



• Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.



- Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$



- Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $rac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H} \right)$



- Como las variaciones $\delta S=0$ y $\delta \tilde{S}=0$ de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables $\{q_i,p_i\}$ y $\{Q_i,P_i\}$.
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total $\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual $rac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + \left(\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H} \right)$
- La función \mathcal{F} se llama función generadora de la transformación canónica $\{q_i,p_i\} \to \{Q_i,P_i\}$.



• Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal F$ es una propiedad característica de la función $\mathcal F$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal F$ es una propiedad característica de la función $\mathcal F$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal F$ es una propiedad característica de la función $\mathcal F$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.



- Dada una $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$, su derivada total $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ debe satisfacer la condición $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{s} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$ para que la transformación $\{q_i, p_i\} \to \{Q_i, P_i\}$ sea canónica.
- Las derivadas parciales de \mathcal{F} con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$, permiten establecer la relación entre las variables $\{Q_i, P_i\}$ y $\{q_i, p_i\}$ y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora $\mathcal F$ es una propiedad característica de la función $\mathcal F$ y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora \mathcal{F} , es posible encontrar una transformación canónica asociada a \mathcal{F} .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora que produce esa transformación.
- La relación entre el Hamiltoniano $\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t\right)$ y el Hamiltoniano transformado $\tilde{\mathcal{H}}\left(Q_i,P_i,t\right)$ resultante de la transformación canónica $\{q_i,p_i,t\} \rightarrow \{Q_i,P_i,t\}$ generada por una \mathcal{F} siempre es $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$



•
$$\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$$



- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{2} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 P_1 \dot{Q}_1 P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$



- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{2} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 P_1 \dot{Q}_1 P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2\dot{q}_2 = \frac{d}{dt}(p_2q_2) q_2\dot{p}_2$; $P_1\dot{Q}_1 = \frac{d}{dt}(P_1Q_1) Q_1\dot{P}_1$; $P_2\dot{Q}_2 = \frac{d}{dt}(P_2Q_2) Q_2\dot{P}_2$



- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i \sum_{i=1}^{2} P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 P_1 \dot{Q}_1 P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- Para llevarlo a esa forma hacemos $p_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} (p_2 q_2) q_2 \dot{p}_2$; $P_1 \dot{Q}_1 = \frac{d}{dt} (P_1 Q_1) Q_1 \dot{P}_1$; $P_2 \dot{Q}_2 = \frac{d}{dt} (P_2 Q_2) Q_2 \dot{P}_2$
- Con lo cual $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1\dot{q}_1 q_2\dot{p}_2 + Q_1\dot{P}_1 + Q_2\dot{P}_2 + \frac{d}{dt}(p_2q_2 P_1Q_1 P_2Q_2) + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$



• Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2)\dot{q}_1 + q_1\dot{P}_1 + (2q_1 + P_2)\dot{p}_2 + p_2\dot{P}_2$



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2;$ $p_1 = P_1 + 2p_2;$ $Q_1 = q_1;$ $-q_2 = 2q_1 + P_2;$ $Q_2 = p_2$



- Es decir $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables (q_i, p_i, Q_i, P_i) , i = 1, 2,
- Comparando con $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 p_2 q_2$; $p_1 = P_1 + 2p_2$; $Q_1 = q_1$; $-q_2 = 2q_1 + P_2$; $Q_2 = p_2$
- La transformación canónica $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ generada por G es $P_1 = p_1 2p_2$ $Q_1 = q_1$; $P_2 = -2q_1 q_2$ $Q_2 = p_2$.

Tipos de Funciones Generadoras



Funciones Generadoras	Funciones Generadadoras y derivadas	Un ejemplo sencillo
$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1(q,Q,t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}; P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_1 = q_i Q_i, Q_i = p_i, P_i = -q_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}; Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_2 = q_i P_i, Q_i = q_i, P_i = p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -rac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}; P_i = -rac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_3 = p_i Q_i, Q_i = -q_i, P_i = -p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -rac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}; Q_i = rac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_4 = p_i P_i, Q_i = p_i, P_i = -q_i$

Ejemplo:
$$Q = q + e^p$$
 & $P = p$



Dada una transformación $Q=q+e^p$ & P=p, encontrar sus función generadora

• Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P

Ejemplo: $Q = q + e^p$ & P = p



Dada una transformación $Q=q+e^p$ & P=p, encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P
- Las relaciones para $F_2(q, P)$ son: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

Ejemplo: $Q = q + e^p$ & P = p



Dada una transformación $Q=q+e^p$ & P=p, encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P
- Las relaciones para $F_2(q,P)$ son: $p=\frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo p=P en $Q=q+e^P$, como $Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}\Rightarrow$, $F_2(q,P)=qP+\int e^P\,dP\Rightarrow F_2(q,P)=qP+e^P+C$ y C=0

Ejemplo: $Q = q + e^p$ & P = p



Dada una transformación $Q=q+e^p$ & P=p, encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora F supondremos una función generadora del tipo $F_2(q, P)$, que depende de q y P
- Las relaciones para $F_2(q,P)$ son: $p=\frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo p=P en $Q=q+e^P$, como $Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}\Rightarrow$, $F_2(q,P)=qP+\int e^P\,dP\Rightarrow F_2(q,P)=qP+e^P+C$ y C=0
- La función generadora es $F_2(q, P) = qP + e^P$