Fauna de Operadores Lineales:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

19 de abril de 2021

Agenda: Fauna de Operadores Lineales:

1. Espacio nulo e imagen de un operador
2. Operadores biyectivos, inversos y adjuntos
3. El detalle de los adjuntos
4. Hermíticos y Unitarios
5. Funciones de Operadores
6. Diferenciación de operadores
7. Ejercicio

Espacio nulo e imagen de un operador

- $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \, / \, \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbb{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\,(\mathbb{A})$, es decir $\aleph\,(\mathbb{A}) = \{|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \;\wedge\; \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle\}$.

Espacio nulo e imagen de un operador

- $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \,/\, \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbb{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\,(\mathbb{A})$, es decir $\aleph\,(\mathbb{A}) = \left\{|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \ \wedge \ \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle\right\}$.
- Definiremos la imagen (rango o recorrido) de $\mathbb{A}$, a $\mathbb{A}\,\{\mathbf{V}\} = \left\{|v'\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbb{A}\,|v\rangle = |v'\rangle\right\}$,

Espacio nulo e imagen de un operador

- $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \,/\, \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbb{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\left(\mathbb{A}\right)$, es decir $\aleph\left(\mathbb{A}\right) = \left\{|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \;\wedge\; \mathbb{A}\,|v\rangle = |0\rangle\right\}$.
- Definiremos la imagen (rango o recorrido) de $\mathbb{A}$, a $\mathbb{A}\left\{\mathbf{V}\right\} = \left\{|v'\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbb{A}\,|v\rangle = |v'\rangle\right\}$,
- Si $\mathbf{V}$ es de dimensión n: $\dim\left[\aleph\left(\mathbb{A}\right)\right] + \dim\left[\mathbb{A}\left\{\mathbf{V}\right\}\right] = \dim\left[\mathbf{V}\right]$,

- **Operadores biyectivos:** Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ es biyectiva (uno a uno o biunívoco) si dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1, \wedge |v'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que: $\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \wedge \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle \Rightarrow |v_1\rangle = |v_2\rangle$, es decir, será biyectiva si $\mathbb{A}$ transforma vectores distintos de $\mathbf{V}_1$ en vectores distintos de $\mathbf{V}_2$.

Operadores biyectivos, inversos y adjuntos

- **Operadores biyectivos:** Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ es biyectiva (uno a uno o biunívoco) si dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1, \ \wedge \ |v'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que: $\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \ \wedge \ \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle \ \Rightarrow \ |v_1\rangle = |v_2\rangle$, es decir, será biyectiva si $\mathbb{A}$ transforma vectores distintos de $\mathbf{V}_1$ en vectores distintos de $\mathbf{V}_2$.
- **Operadores Inversos:** Las transformaciones lineales biyectivas posibilitan definir inversa. Diremos que $\mathbb{A}^{-1}$: $\mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_1$ es el inverso de $\mathbb{A}$, si $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$.
- **Operadores adjuntos:** Si $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ de tal forma que $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$, Definiremos $\mathbb{A}^\dagger : \mathbf{V}^* \to \mathbf{W}^*$, de tal forma que $\langle v'| = \langle v| \mathbb{A}^\dagger$, donde $\mathbf{V}^*$ y $\mathbf{W}^*$ son los duales de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente. Entonces $\mathbb{A}^\dagger$ es el adjunto de $\mathbb{A}$. Es decir:
$$|v\rangle \iff \langle v| \quad \Rightarrow \quad |v'\rangle = \mathbb{A}|v\rangle \iff \langle v'| = \langle v| \mathbb{A}^\dagger .$$
- Entonces, a partir de la definición de producto interno tendremos:
$$\langle \tilde{x} | y\rangle = \langle y | \tilde{x}\rangle^* \quad \forall \quad |\tilde{x}\rangle = \mathbb{A}|x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V} \ \Rightarrow$$
$$\langle x| \mathbb{A}^\dagger |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^* \ \forall \ |x\rangle, |y\rangle \in \mathbf{V} .$$

El detalle de los adjuntos

- Esta última relación $\langle x| \mathbb{A}^{\dagger} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^{*} \quad \forall \ |x\rangle , |y\rangle \in \mathbf{V}$, nos permite asociar $\mathbb{A}^{\dagger}$ con $\mathbb{A}$,

El detalle de los adjuntos

- Esta última relación $\langle x|\,\mathbb{A}^{\dagger}\,|y\rangle = \langle y|\,\mathbb{A}\,|x\rangle^{*} \quad \forall\ |x\rangle\,, |y\rangle \in \mathbf{V}$, nos permite asociar $\mathbb{A}^{\dagger}$ con $\mathbb{A}$,
- y además deducir las propiedades de los adjuntos: $\left(\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \mathbb{A}$, $(\lambda\mathbb{A})^{\dagger} = \lambda^{*}\mathbb{A}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{A}^{\dagger}+\mathbb{B}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{B}^{\dagger}\mathbb{A}^{\dagger}$ y consecuentemente, $[\mathbb{A},\mathbb{B}]^{\dagger} = -\left[\mathbb{A}^{\dagger},\mathbb{B}^{\dagger}\right] = \left[\mathbb{B}^{\dagger},\mathbb{A}^{\dagger}\right]$.

El detalle de los adjuntos

- Esta última relación $\langle x| \mathbb{A}^{\dagger} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^{*} \quad \forall \; |x\rangle , |y\rangle \in \mathbf{V}$, nos permite asociar $\mathbb{A}^{\dagger}$ con $\mathbb{A}$,
- y además deducir las propiedades de los adjuntos: $\left(\mathbb{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \mathbb{A}$, $(\lambda\mathbb{A})^{\dagger} = \lambda^{*}\mathbb{A}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{A}^{\dagger}+\mathbb{B}^{\dagger}$, $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{B}^{\dagger}\mathbb{A}^{\dagger}$ y consecuentemente, $[\mathbb{A},\mathbb{B}]^{\dagger} = -\left[\mathbb{A}^{\dagger},\mathbb{B}^{\dagger}\right] = \left[\mathbb{B}^{\dagger},\mathbb{A}^{\dagger}\right]$.
- En conclusión, para obtener el adjunto de una expresión se debe proceder de la siguiente manera:
  - Cambiar constantes por sus complejas conjugadas $\lambda \leftrightarrows \lambda^{*}$.
  - Cambiar los *kets* por sus *bras* asociados y viceversa (*bras* por *kets*): $|v\rangle \leftrightarrows \langle v|$.
  - Cambiar operadores lineales por sus adjuntos $\mathbb{A}^{\dagger} \leftrightarrows \mathbb{A}$.
  - Invertir el orden de los factores: $(|v\rangle \langle w|)^{\dagger} = |w\rangle \langle v|$.

- **Operadores Hermíticos:** Un operador será hermítico (o autoadjunto) si: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, esto implica $\langle x| \mathbb{A}^\dagger |y\rangle \equiv \langle x| \mathbb{A} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^*$. Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son "iguales a su propio complejo conjugado".

- **Operadores Hermíticos:** Un operador será hermítico (o autoadjunto) si: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, esto implica $\langle x| \mathbb{A}^\dagger |y\rangle \equiv \langle x| \mathbb{A} |y\rangle = \langle y| \mathbb{A} |x\rangle^*$. Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son "iguales a su propio complejo conjugado".
- **Operadores Unitarios:** Un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto: $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}$. Podemos decir varias cosas:
  - Las transformaciones unitarias dejan invariante al producto interno: $\langle \tilde{y} |\tilde{x}\rangle = \langle y| \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} |x\rangle = \langle y |x\rangle$
  - El producto de dos operadores unitarios también es unitario: $(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger (\mathbb{U}\mathbb{V}) = \mathbb{V}^\dagger \underbrace{\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}}_{\mathbb{I}} \mathbb{V} = \mathbb{V}^\dagger\mathbb{V} = \mathbb{I}$

- **Operadores Hermíticos:** Un operador será hermítico (o autoadjunto) si: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, esto implica $\langle x|\,\mathbb{A}^\dagger\,|y\rangle \equiv \langle x|\,\mathbb{A}\,|y\rangle = \langle y|\,\mathbb{A}\,|x\rangle^*$. Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son "iguales a su propio complejo conjugado".
- **Operadores Unitarios:** Un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto: $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}$. Podemos decir varias cosas:
  - Las transformaciones unitarias dejan invariante al producto interno: $\langle \tilde{y}\,|\tilde{x}\rangle = \langle y|\,\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}\,|x\rangle = \langle y\,|x\rangle$
  - El producto de dos operadores unitarios también es unitario: $(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger\,(\mathbb{U}\mathbb{V}) = \mathbb{V}^\dagger\,\underbrace{\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}}_{\mathbb{I}}\,\mathbb{V} = \mathbb{V}^\dagger\mathbb{V} = \mathbb{I}$
  - Los operadores unitarios aplican una base ortogonal en otra: $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\right|\mathbb{U}\left|\mathrm{e}_j\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^i\right|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}\left|\mathrm{e}_j\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^i\,|\mathrm{e}_j\right\rangle = \delta^i_j$.

Funciones de Operadores

Para funciones de operadores lineales, procedemos por analogía,

- Un polinomio es: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i$

Funciones de Operadores

Para funciones de operadores lineales, procedemos por analogía,

- Un polinomio es: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i$
- Entonces un "polinomio de operadores" será $P_n(\mathbb{A})\,|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]\,|v\rangle = \left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle$, $\forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$

Para funciones de operadores lineales, procedemos por analogía,

- Un polinomio es: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i$
- Entonces un "polinomio de operadores" será
  $P_n(\mathbb{A}) \left|v\right\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n] \left|v\right\rangle = \left[a_i \mathbb{A}^i\right] \left|v\right\rangle, \forall \ \left|v\right\rangle \in \mathbf{V}_1$
- "Desarrollamos por Taylor" la función como una serie de potencias del operador:
  $F(\mathbb{A}) \left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right] \left|v\right\rangle$
  y podemos expresar la exponencial de un operador $\mathbb{A}$, como
  $\mathrm{e}^{\mathbb{A}} \left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right] \left|v\right\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \cdots\right] \left|v\right\rangle$.
- como $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \neq 0 \ \Rightarrow \ e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}} \neq e^{\mathbb{B}} e^{\mathbb{A}} \neq e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$, sólo en el caso en que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$ se tiene $e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}} \left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}+\mathbb{B})^n}{n!}\right] \left|v\right\rangle$,

Funciones de Operadores

Para funciones de operadores lineales, procedemos por analogía,

- Un polinomio es: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i$
- Entonces un "polinomio de operadores" será
  $P_n(\mathbb{A})\,|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]\,|v\rangle = \left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle,\ \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$
- "Desarrollamos por Taylor" la función como una serie de potencias del operador:
  $$F(\mathbb{A})\,|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle$$
  y podemos expresar la exponencial de un operador $\mathbb{A}$, como
  $$\mathrm{e}^{\mathbb{A}}\,|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\cdots\right]|v\rangle\ .$$
- como $[\mathbb{A},\mathbb{B}] \neq 0 \;\Rightarrow\; e^{\mathbb{A}}e^{\mathbb{B}} \neq e^{\mathbb{B}}e^{\mathbb{A}} \neq e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$, sólo en el caso en que $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 0$ se tiene $e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}\,|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbb{A}+\mathbb{B})^n}{n!}\right]|v\rangle$,
- En general $\mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}} = \mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\mathbb{A},\mathbb{B}]}$.

- Si $\mathbb{A}(t)$, depende de una variable arbitraria t, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{A}\left(t + \Delta t\right) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t} \,.$$

Diferenciación de operadores

- Si $\mathbb{A}(t)$, depende de una variable arbitraria t, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{A}(t+\Delta t) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}\,.$$

- Para el caso inmediato $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}t$, tendremos

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|v\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\right]\left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\right)\right]\left|v\right\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}\mathbb{A}^n}{n!}\right]\left|v\right\rangle = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1}\mathbb{A}^{n-1}}{(n-1)!}\right]}_{e^{\mathbb{A}t}}\mathbb{A}\left|v\right\rangle$$

Diferenciación de operadores

- Si $\mathbb{A}(t)$, depende de una variable arbitraria t, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{A}\left(t + \Delta t\right) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t} .$$

- Para el caso inmediato $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}t$, tendremos

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|v\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbb{A}t\right)^{n}}{n!}\right]\left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\left(\mathbb{A}t\right)^{n}}{n!}\right)\right]\left|v\right\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^{n-1}\mathbb{A}^{n}}{n!}\right]\left|v\right\rangle = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}\mathbb{A}^{n-1}}{(n-1)!}\right]}_{e^{\mathbb{A}t}}\mathbb{A}\left|v\right\rangle$$

- Es fácil demostrar que $\left[F(\mathbb{A}), \mathbb{A}\right] = 0$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^{n}}{n!}\right)\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^{n}}{n!}\right)$$

- Si $\mathbb{A}(t)$, depende de una variable arbitraria t, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{A}\left(t+\Delta t\right) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}\,.$$

- Para el caso inmediato $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}t$, tendremos

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|v\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\right]\left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(\mathbb{A}t)^n}{n!}\right)\right]\left|v\right\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|v\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n t^{n-1}\mathbb{A}^n}{n!}\right]\left|v\right\rangle = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1}\mathbb{A}^{n-1}}{(n-1)!}\right]}_{e^{\mathbb{A}t}}\mathbb{A}\left|v\right\rangle$$

- Es fácil demostrar que $[F(\mathbb{A}), \mathbb{A}] = 0$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right)\mathbb{A} \equiv \mathbb{A}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right)$$

- Pero $[\mathbb{A}, F\left(\mathbb{B}\right)] \stackrel{?}{=} [\mathbb{A}, \mathbb{B}]\,\frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}\,.$

Diferenciación de operadores

$$[\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] \stackrel{?}{=} [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}},$$

- Probamos primero que: si $[\mathbb{A}, \mathbb{C}] = [\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 0$, con $\mathbb{C} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \Rightarrow [\mathbb{A}, \mathbb{B}^n] = \mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{B}^{n-1}$.
  Entonces

$$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = \mathbb{A}\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = (\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = \mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}(\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = 2\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}^2(\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} = n[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{B}^{n-1}$$

Diferenciación de operadores

$$[\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] \stackrel{?}{=} [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}},$$

- Probamos primero que: si $[\mathbb{A}, \mathbb{C}] = [\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 0$, con $\mathbb{C} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \Rightarrow [\mathbb{A}, \mathbb{B}^n] = \mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{B}^{n-1}$.

  Entonces

  $$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = \mathbb{A}\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

  $$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = (\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

  $$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = \mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}(\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

  $$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = 2\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}^2(\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n}\mathbb{A}$$

  $$\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} = n[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{B}^{n-1}$$

- Con lo cual $[\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] = \left[\mathbb{A}, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbb{B}^n}{n!}\right]$, es decir

  $$[\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{n\mathbb{B}^{n-1}}{n!} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{\mathrm{d}F(\mathbb{B})}{\mathrm{d}\mathbb{B}}$$

Ejercicio

Considere los siguientes operadores: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ hermítico, $\mathbb{K} = -\mathbb{K}^\dagger$ antihermítico; $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger$ unitario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos operadores genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:

1. En general:
    1. $\left(\mathbb{P}^\dagger\right)^{-1} = \left(\mathbb{P}^{-1}\right)^\dagger$.
    2. $(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$
    3. Si $[\mathbb{P},\mathbb{Q}] = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathbb{Q})^{-1} = (\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{P}$
2. Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ también será un operador hermítico.
3. Si $\mathbb{K}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}$ es también lo será. En particular eso se cumple para $\tilde{\mathbb{K}} = i\mathbb{A}$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.
4. Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$, será hermítica *si y sólo si* $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmuntan.