Pequeñas oscilaciones

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

8 de abril de 2025

Agenda

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$

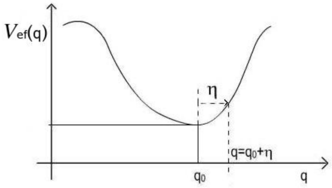
Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\mathrm{ef}}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

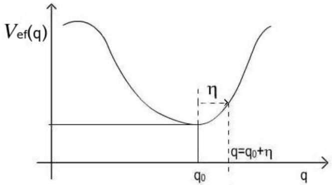
- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c\dot{q}^2 - V_{\rm ef}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\rm ef}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\rm ef}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\rm ef}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\rm ef}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\rm ef}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c\dot{q}^2 - V_{\text{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\text{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\text{ef}}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



- Desarrollamos por Taylor, $V_{\text{ef}}\left(q\right)$ alrededor de $q = q_0$, y tenemos

$$V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}\left(q_0 + \eta\right) = V\left(q_0\right) + \cancelto{0}{\left.\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0}} \eta + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2}\right|_{q_0} \eta^2 + \cdots ,$$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}\left(q_0 + \eta\right) \approx \frac{1}{2}K\left(q - q_0\right)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}\left(q_0 + \eta\right) \approx \frac{1}{2}K\left(q - q_0\right)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q} = -K\left(q - q_0\right) \equiv -K\eta$

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}(q_0 + \eta) \approx \frac{1}{2}K(q - q_0)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q} = -K(q - q_0) \equiv -K\eta$
- Entonces, $\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$, donde $\omega^2 \equiv \frac{K}{c} = \left.\frac{1}{c}\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial q^2}\right|_{q_0}$ es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de q_0.

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}(q_0 + \eta) \approx \frac{1}{2}K(q - q_0)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial q} = -K(q - q_0) \equiv -K\eta$
- Entonces, $\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$, donde $\omega^2 \equiv \frac{K}{c} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 V_{\text{ef}}}{\partial q^2}\Big|_{q_0}$ es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de q_0.
- Que tendrá como solución $\eta(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t = A\cos(\omega t + \varphi) \equiv \operatorname{Re}\left[Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right] = \operatorname{Re}\left(ae^{i\omega t}\right)$ donde $a = Ae^{i\varphi}$ es la amplitud compleja

El péndulo simple

Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud ℓ, que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$, donde $\theta = 0$, es un punto de equilibrio estable.

El péndulo simple

Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud ℓ, que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos\theta)$, donde $\theta = 0$, es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, tendremos $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$

El péndulo simple

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud ℓ, que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$, donde $\theta = 0$, es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, tendremos $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$
- La ecuación de movimiento es $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

El péndulo simple

Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud ℓ, que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos\theta)$, donde $\theta = 0$, es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, tendremos $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$
- La ecuación de movimiento es $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$
- La frecuencia de oscilación será $\omega^2 = \frac{K}{c} = \frac{g}{\ell} \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

El péndulo simple

Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud ℓ, que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$, donde $\theta = 0$, es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños: $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, tendremos $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$
- La ecuación de movimiento es $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$
- La frecuencia de oscilación será $\omega^2 = \frac{K}{c} = \frac{g}{\ell} \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$
-

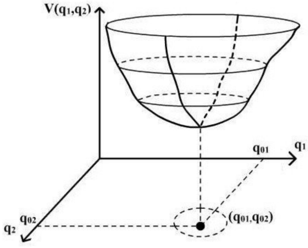
Comparación	General	Péndulo
Coordenada	q	θ
Equilibrio	q_0	0
Perturbación	$\eta = q - q_0$	θ
Potencial expandido	$V(q_0) + \frac{1}{2}K\eta^2$	$\frac{1}{2}mgl\theta^2$
Frecuencia angular	$\omega = \sqrt{\frac{K}{c}}$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$

Oscilaciones con varios grados de libertad 1/3

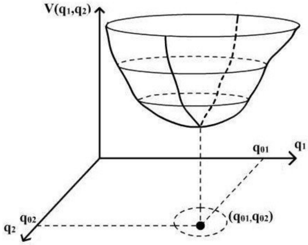
- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.

Oscilaciones con varios grados de libertad 1/3

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$

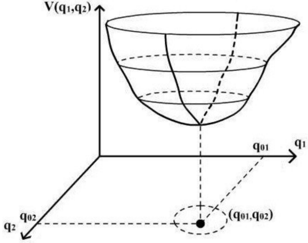


- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \dots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \dots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \dots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$



- Perturbando las q_i, tendremos $q_i = q_{0i} + \eta_i$, con $\eta_i \to 0 \quad \left(\frac{\eta_i}{q_{0i}} \ll 1\right)$

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$



- Perturbando las q_i, tendremos $q_i = q_{0i} + \eta_i$, con $\eta_i \to 0 \quad \left(\frac{\eta_i}{q_{0i}} \ll 1\right)$
- El valor del potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$ cerca de la configuración de equilibrio se obtiene de la expansión de Taylor en varias variables de $V(q_1, \ldots, q_s)$ alrededor de $\{q_{0i}\}$, con $q_i = q_{0i} + \eta_i$,

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Esto es $V(q_1, \ldots, q_s) =$
$V(q_{01}, \ldots, q_{0s}) + \cancel{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}}^{0} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V(q_1, \ldots, q_s) =$
  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s}) + \sum_i \cancelto{0}{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$.

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) =$
  $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = \left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) = V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

- Esto es $V\left(q_1,\ldots,q_s\right)=$
  $$V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)+\sum_i \cancelto{0}{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}}\eta_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}\eta_i\eta_j+\cdots$$
- Los $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\}=\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i=q_{0i}+\eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1,\ldots,q_s\right)=V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}\eta_i\eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij}\equiv\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij}=V_{ji}$

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V(q_1, \ldots, q_s) =$
  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s}) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij} = V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ donde los coeficientes $T_{ij} = T_{ji}$ representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/3

- Esto es $V(q_1, \ldots, q_s) =$
$$V(q_{01}, \ldots, q_{0s}) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$$
- Los $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij} = V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ donde los coeficientes $T_{ij} = T_{ji}$ representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Esto es $V\left(q_1,\ldots,q_s\right)=$
$$V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)+\cancelto{0}{\sum_i\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}}\eta_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}\eta_i\eta_j+\cdots$$
- Los $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\}=\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i=q_{0i}+\eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1,\ldots,q_s\right)=V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}\eta_i\eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij}\equiv\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ donde los coeficientes $T_{ij}=T_{ji}$ representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$
- El Lagrangiano del sistema cerca de la configuración de equilibrio es $\mathcal{L}=T-V=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j-V_{ij}\eta_i\eta_j\right)\quad i,j=1,2,\ldots,s$

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j \left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.

Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j \left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tenemos $\sum_j \left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n \left(V_{mn} - \omega^2 T_{mn}\right) a_n = 0$

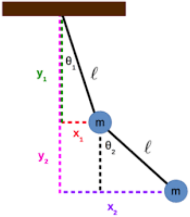
Oscilaciones con varios grados de libertad 3/3

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j\left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tenemos $\sum_j\left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n\left(V_{mn} - \omega^2 T_{mn}\right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad $s = 1, 2$ tendremos
$m = 1 : \left(V_{11} - \omega^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
$m = 2 : \left(V_{21} - \omega^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega^2 T_{22}\right) a_2 = 0$

- La ecuación de Lagrange en η_k es $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\left(\delta_{ik}\dot{\eta}_j + \delta_{jk}\dot{\eta}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik}\dot{\eta}_i\right) = \sum_j T_{kj}\dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(V_{ij}\delta_{ik}\eta_j + V_{ij}\delta_{jk}\eta_i\right) = -\sum_j V_{kj}\eta_j$
- la ecuación de movimiento para η_k queda $\sum_j\left(T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j\right) = 0$, donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tenemos $\sum_j\left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n\left(V_{mn} - \omega^2 T_{mn}\right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad $s = 1, 2$ tendremos
  $m = 1: \left(V_{11} - \omega^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $m = 2: \left(V_{21} - \omega^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega^2 T_{22}\right) a_2 = 0$
- En general, existe solución no trivial $\eta_j(t) \neq 0$ si $a_j \neq 0, \forall j$, cuando $\det\left|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right| = 0$. Las frecuencias características ω deben ser reales para que las soluciones tengan sentido físico.

El Péndulo doble 1/3

Encontrar las frecuencias de oscilación del péndulo doble en el régimen de pequeñas oscilaciones. Sean dos masas puntuales $m_1 = m_2 = m$, suspendidas por dos varillas rígidas e inextensibles de longitud ℓ. Donde los angulos θ_1, θ_2, son las desviaciones de las varillas respecto a la vertical. Suponga el que movimiento se desarrolla en un plan, la gravedad es uniforme y $\theta_1, \theta_2 \ll 1$



- Las posiciones de las masas son
  $x_1 = \ell \sin\theta_1 \approx \ell\theta_1, \quad y_1 = -\ell\cos\theta_1 \approx -\ell + \frac{1}{2}\ell\theta_1^2$ y
  $x_2 = x_1 + \ell\sin\theta_2 \approx \ell(\theta_1+\theta_2), \quad y_2 = y_1 - \ell\cos\theta_2 \approx -2\ell + \frac{1}{2}\ell\theta_1^2 + \frac{1}{2}\ell\theta_2^2$

El Péndulo doble 2/3

- La energía cinética $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$

El Péndulo doble 2/3

- La energía cinética $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial $V = -mgy_1 - mgy_2 \approx mg\ell\left(\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^2\right)$

El Péndulo doble 2/3

- La energía cinética $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial $V = -mgy_1 - mgy_2 \approx mg\ell\left(\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^2\right)$
- El Lagrangiano
  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) - \frac{1}{2}mg\ell\left(2\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$

El Péndulo doble 2/3

- La energía cinética $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial $V = -mgy_1 - mgy_2 \approx mg\ell\left(\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^2\right)$
- El Lagrangiano
  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) - \frac{1}{2}mg\ell\left(2\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$
- Si definimos $\eta_1 = \theta_1$, y $\eta_2 = \theta_2$, tendremos, respectivamente, la energía cinética y potencial de la forma
  $T = \frac{1}{2}m\ell^2\begin{pmatrix}\dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\eta}_1\\ \dot{\eta}_2\end{pmatrix}$ y
  $V = \frac{1}{2}mg\ell\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$

El Péndulo doble 2/3

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La energía cinética $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial $V = -mgy_1 - mgy_2 \approx mg\ell\left(\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^2\right)$
- El Lagrangiano
  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) - \frac{1}{2}mg\ell\left(2\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$
- Si definimos $\eta_1 = \theta_1$, y $\eta_2 = \theta_2$, tendremos, respectivamente, la energía cinética y potencial de la forma
  $T = \frac{1}{2}m\ell^2\begin{pmatrix}\dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\eta}_1\\ \dot{\eta}_2\end{pmatrix}$ y
  $V = \frac{1}{2}mg\ell\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$
- La ecuación de movimiento es $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\eta}_1\\ \ddot{\eta}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} = 0$

- Si buscamos soluciones de la forma $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ tendremos $\det\left[mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$, con lo cual

- Si buscamos soluciones de la forma $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ tendremos $\det \left[mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$, con lo cual
- $\begin{vmatrix} g - 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g - \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g - 2\ell\omega^2)(2g - \ell\omega^2) - (\ell\omega^2)^2 = 0$

- Si buscamos soluciones de la forma $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ tendremos $\det\left[mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$, con lo cual
- $\begin{vmatrix} g - 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g - \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g - 2\ell\omega^2)(2g - \ell\omega^2) - (\ell\omega^2)^2 = 0$
- $2g^2 - 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 - \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 - 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$

- Si buscamos soluciones de la forma $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ tendremos $\det\left[mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$, con lo cual
- $\begin{vmatrix} g - 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g - \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g - 2\ell\omega^2)(2g - \ell\omega^2) - (\ell\omega^2)^2 = 0$
- $2g^2 - 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 - \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 - 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$
- $\omega^2 = \frac{3g\ell \pm \sqrt{(3g\ell)^2 - 8g^2\ell^2}}{2\ell^2} = \frac{3g \pm \sqrt{9g^2 - 8g^2}}{2\ell} = \frac{3g \pm g}{2\ell}$

El Péndulo doble 3/3

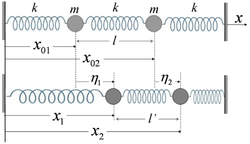
- Si buscamos soluciones de la forma $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ tendremos $\det\left[mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$, con lo cual
- $\begin{vmatrix} g - 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g - \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g - 2\ell\omega^2)(2g - \ell\omega^2) - (\ell\omega^2)^2 = 0$
- $2g^2 - 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 - \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 - 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$
- $\omega^2 = \frac{3g\ell \pm \sqrt{(3g\ell)^2 - 8g^2\ell^2}}{2\ell^2} = \frac{3g \pm \sqrt{9g^2 - 8g^2}}{2\ell} = \frac{3g \pm g}{2\ell}$
- y las frecuencias de oscilación son: $\omega_1^2 = \frac{4g}{2\ell} = \frac{2g}{\ell}$, y $\omega_2^2 = \frac{2g}{2\ell} = \frac{g}{\ell}$

UIS Universidad Industrial de Santander CONSTRUIMOS FUTURO

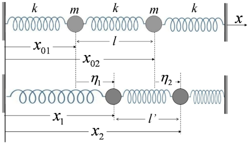
- Si buscamos soluciones de la forma $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$ tendremos $\det\left[mg\ell\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} - \omega^2 m\ell^2\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right] = 0$, con lo cual
- $\begin{vmatrix}g - 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2\\ -\ell\omega^2 & 2g - \ell\omega^2\end{vmatrix} = (g - 2\ell\omega^2)(2g - \ell\omega^2) - (\ell\omega^2)^2 = 0$
- $2g^2 - 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 - \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 - 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$
- $\omega^2 = \frac{3g\ell \pm \sqrt{(3g\ell)^2 - 8g^2\ell^2}}{2\ell^2} = \frac{3g \pm \sqrt{9g^2 - 8g^2}}{2\ell} = \frac{3g \pm g}{2\ell}$
- y las frecuencias de oscilación son: $\omega_1^2 = \frac{4g}{2\ell} = \frac{2g}{\ell}$, y $\omega_2^2 = \frac{2g}{2\ell} = \frac{g}{\ell}$
- Para ω_1: masas oscilan en oposición de fase
  Para ω_2: masas oscilan en fase

Osciladores Acoplados 1/2

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.

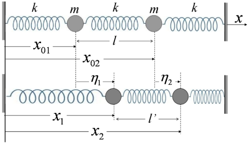


- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$, Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$

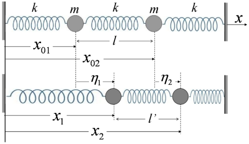
Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$

Osciladores Acoplados 1/2

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$
- Donde $l' - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V=\frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2+2k\eta_2^2-2k\eta_1\eta_2\right]=\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11}=2k, \quad V_{22}=2k, \quad V_{12}=V_{21}=-k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11}-\omega^2 T_{11} & V_{12}-\omega^2 T_{12} \\ V_{21}-\omega^2 T_{21} & V_{22}-\omega^2 T_{22} \end{vmatrix}=0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix}=0$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es $\left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$

Osciladores Acoplados 2/2

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es $\left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- Finalmente $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$