Polos, cortes y transformaciones conformes

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

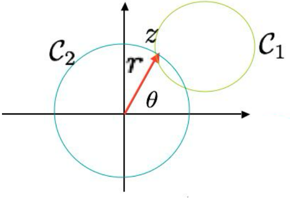
12 de noviembre de 2025

Agenda polos, cortes y transformaciones conformes

1. Funciones univaluadas y multivaluadas
2. Puntos de ramificación y corte
3. Singularidades y ceros
4. Transformaciones conformes
5. Recapitulando
6. Para la discusión

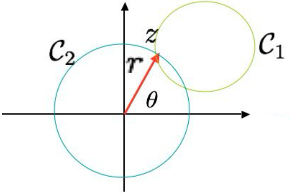
Funciones univaluadas y multivaluadas

- Consideremos la función $w = f(z) = z = r\exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



Funciones univaluadas y multivaluadas

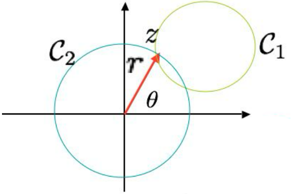
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r\exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_1$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.

Funciones univaluadas y multivaluadas

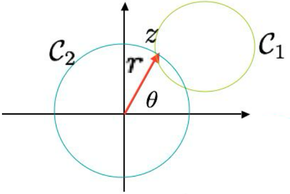
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r\exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_1$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_2$, tendremos $w = z = r\exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n

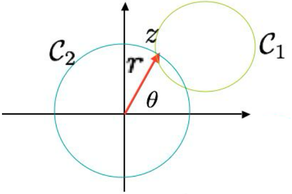
Funciones univaluadas y multivaluadas

- Consideremos la función $w = f(z) = z = r\exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_1$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_2$, tendremos $w = z = r\exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$

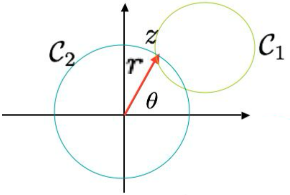
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r\exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_1$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_2$, tendremos $w = z = r\exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$
- Para $n = 1$ tendremos $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$.

Funciones univaluadas y multivaluadas

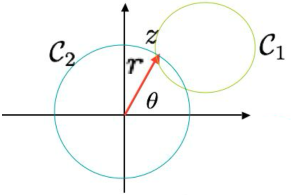
- Consideremos la función $w = f(z) = z = r\exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_1$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_2$, tendremos $w = z = r\exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$
- Para $n = 1$ tendremos $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$.
- Para $n = 2$ recuperamos $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + 2\pi)) = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$

Funciones univaluadas y multivaluadas

- Consideremos la función $w = f(z) = z = r\exp(i\theta)$ y los cambios cuando z sigue por diferentes trayectorias, en el plano complejo.



- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_1$, con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la función $w = z$ es univaluada y retorna a su valor original.
- Si el circuito descrito por z es $\mathcal{C}_2$, tendremos $w = z = r\exp i(\theta + 2n\pi)$ la función es multivaluada dependiendo del n
- Consideremos $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta+2n\pi}{2})$, entonces será univaluada para $n = 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Además tendremos $w > 0$
- Para $n = 1$ tendremos $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + \pi)) = -\sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$.
- Para $n = 2$ recuperamos $w = \sqrt{r}\exp(i(\frac{\theta}{2} + 2\pi)) = \sqrt{r}\exp(i\frac{\theta}{2})$
- El eje $x > 0$ separa las "ramas" $n = 0 \Rightarrow w > 0$ y $n = 1 \Rightarrow w < 0$

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte $=$ líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte $=$ líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte $=$ líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* = *punto de ramificación*.

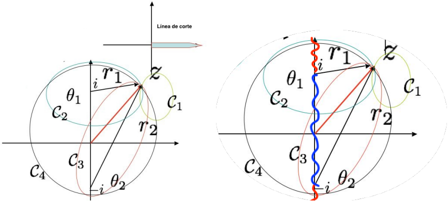
Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte $=$ líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* $=$ *punto de ramificación*.
- Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$

Puntos de ramificación y corte 1/2

- z_0 es un *punto de ramificación* si al dar una vuelta sobre $\mathcal{C}$ alrededor de z_0 se produce un cambio de rama de la función.
- Para $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = 0$ es un punto de ramificación
- Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte*.
- Ramificación de corte = líneas que garantizan funciones univaluadas. La función $w = \sqrt{z}$ tiene un corte en $x > 0$.
- Podemos tomar como rama de corte cualquier curva que comience en el origen $z = 0$ y se extienda hasta $|z| = \infty$
- Es costumbre tomar el corte a lo largo del eje real o imaginario. Al acordar no cruzar este corte $0 \leq \theta < 2\pi$,
- El punto de inicio de la *ramificación de corte* = *punto de ramificación*.
- Para $f(z) = \sqrt{z}$ tendremos un punto de ramificación en $z = 0$
- Si esos valores "siguen" una curva cerrada e incluyen un *punto de ramificación*, esa función no será analítica.

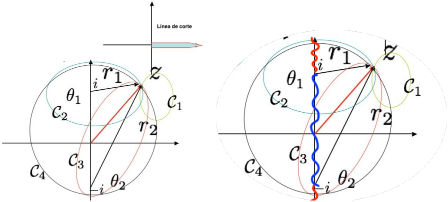
Sea $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$



- El contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.

Puntos de ramificación y corte 2/2

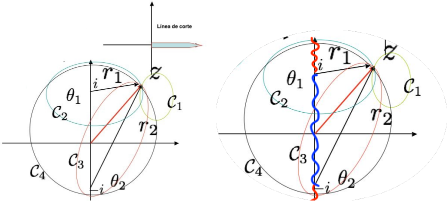
Sea $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$



- El contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$.

Puntos de ramificación y corte 2/2

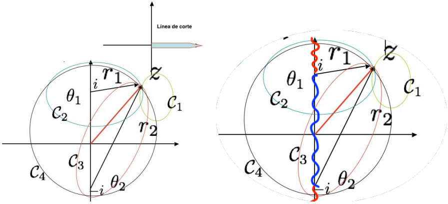
Sea $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$



- El contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_3$ incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.

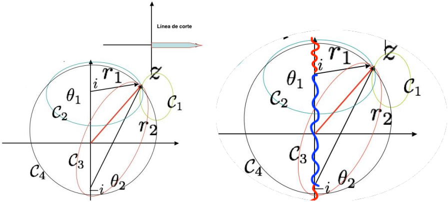
Puntos de ramificación y corte 2/2

Sea $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$



- El contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_3$ incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_4$ incluye ambos puntos de ramificación, $z = i$ y $z = -i$, $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, entonces $f(z) \to f(z)$ retoma su valor.

Sea $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$



- El contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, $f(z)$ es analítica.
- El contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de ramificación, entonces: $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_3$ incluye $z = -i$ como punto de ramificación, entonces: $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$.
- Contorno $\mathcal{C}_4$ incluye ambos puntos de ramificación, $z = i$ y $z = -i$, $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, entonces $f(z) \to f(z)$ retoma su valor.
- Los cortes son $z_{\text{corte}} > i$ y $z_{\text{corte}} < -i$ o $-i < z_{\text{corte}} < i$

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0, excepto en z_0, entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.

Singularidades y ceros de funciones complejas 1/2

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0, excepto en z_0, entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.

Singularidades y ceros de funciones complejas 1/2

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0, excepto en z_0, entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z \to z_0} f(z) \quad \exists$.

Singularidades y ceros de funciones complejas 1/2

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0, excepto en z_0, entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0, excepto en z_0, entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z \to z_0} f(z) \quad \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \quad \nexists$, para ningún n.

Singularidades y ceros de funciones complejas 1/2

- Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica es un punto singular
- Sí una función es analítica en el entorno de z_0, excepto en z_0, entonces z_0 es una singularidad aislada o un punto singular.
- $f(z) = 1/z$, es analítica en todo punto excepto en $z = 0$.
- Un **punto singular aislado** z_0 de una función f se **denomina removible o evitable** si: $\lim_{z\to z_0} f(z) \quad \exists$.
- Un **polo de orden** n es un punto singular aislado z_0 de una función $w = f(z)$ si: $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0$, con n entero positivo.
- Un punto **singular aislado** es una **singularidad esencial** de f si $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \quad \nexists$, para ningún n.
- Los **ceros de una función compleja**, $f(z_0) = 0$, se clasifican igual que los polos $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ con n entero positivo y $g(z) \neq 0 \quad \forall\ z$.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z\to z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z\to z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z\to z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0.

Clasificación de las singularidades aisladas

- Si f no está definida en z_0 entonces f no es analítica en z_0.
- Si f está definida en z_0 con valor diferente al $\lim_{z\to z_0} f(z)$, entonces f no es continua en z_0 y no es analítica.
- Si f está definida en z_0 con valor $\lim_{z\to z_0} f(z)$, entonces f no es singular en z_0.
- Si z_0 es una **singularidad removible** cuando $f(z) \to 0/0$ cuando $z \to z_0$, por ejemplo: $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \Rightarrow$ $f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}\cdots\right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}\cdots\right) \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z) = 1$

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi$

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0, ya que $\lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right) i\pi} \left(z - \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi\right) \frac{\mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital $\Rightarrow \lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right) i\pi} \frac{\left[z - \left(n+\frac{1}{2}\right) i\pi\right] \cosh(z) + \mathrm{senh}(z)}{\mathrm{senh}(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0, ya que $\lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \left(z - \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi\right) \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital $\Rightarrow \lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \frac{\left[z - \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi\right] \cosh(z) + \operatorname{senh}(z)}{\operatorname{senh}(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.
- Dada la función $f(z) = \frac{z^2+16}{z-4i}$, tiene un polo (aparente) en $z = 4i$.

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0, ya que $\lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \left(z - \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi\right) \frac{\mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital $\Rightarrow \lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \frac{\left[z - \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi\right] \cosh(z) + \mathrm{senh}(z)}{\mathrm{senh}(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.
- Dada la función $f(z) = \frac{z^2+16}{z-4i}$, tiene un polo (aparente) en $z = 4i$.
- Es aparente porque $f(z) = \frac{(z+4i)(z-4i)}{z-4i} = z + 4i$ y $\lim_{z \to 4i} z + 4i = 8i$

Ejemplos

- Si tenemos la función $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$, es inmediato que los polos de orden 1 son $z = 1$ y $z = -1$
- Si $f(z) = \tanh(z) = \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, que diverge si $\Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$.
- En general $e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z}$, despejando $z_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi$
- $f(z)$ tiene un polo simple en z_0, ya que $\lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \left(z - \left(n + \frac{1}{2}\right) i\pi\right) \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)}$. Con el Teorema de L'Hopital $\Rightarrow \lim_{z \to \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi} \frac{\left[z - \left(n+\frac{1}{2}\right)i\pi\right] \cosh(z) + \operatorname{senh}(z)}{\operatorname{senh}(z)} = 1$, z_0 es un polo simple.
- Dada la función $f(z) = \frac{z^2+16}{z-4i}$, tiene un polo (aparente) en $z = 4i$.
- Es aparente porque $f(z) = \frac{(z+4i)(z-4i)}{z-4i} = z + 4i$ y $\lim_{z \to 4i} z + 4i = 8i$
- Entonces $g(z) = \begin{cases} z + 4i & \text{si } z \neq 4i \\ 8i & \text{si } z = 4i \end{cases}$

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
  $z = x + iy \;\leftrightarrow\; w = r + is \;\Rightarrow\; w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \;\leftrightarrow\; z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
  $z = x + iy \;\leftrightarrow\; w = r + is \;\Rightarrow\; w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \;\leftrightarrow$
  $z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
  $z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.

Transformaciones conformes

- Las transformaciones entre planos complejos, son:
  $z = x + iy \;\leftrightarrow\; w = r + is \;\Rightarrow\; w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \;\leftrightarrow\; z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$
- Transformaciones $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ entre diagramas de Argand,
- Existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados.
- Para todo punto z y w (excepto en aquellos en los cuales $g'(z)$ y por lo tanto $h'(w)$ son cero o infinita) **transformaciones conformes** cumplen con:
  - Curvas continuas en z transforman en curvas continuas en w.
  - Cualquier función analítica en $z = x + iy$ transforma en otra función $w = r + is$ también analítica.
  - Los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre las curvas que se interceptan.
  - El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.

Transformaciones conformes

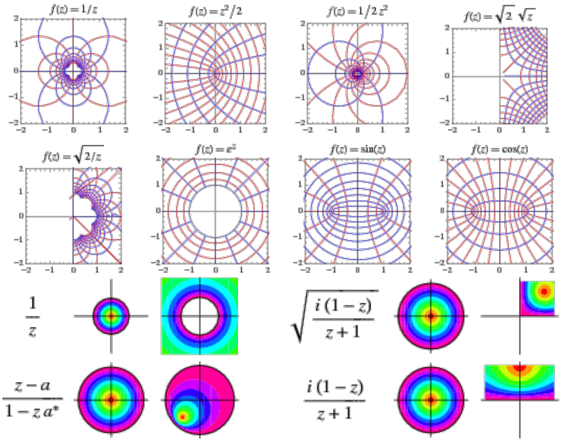


Figura: Tranformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping**. *MathWorld–A Wolfram Web Resource.*
`http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html`

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** θ $\; w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** $\theta \quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** $\theta \quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano. Para convencernos de ello notamos que $|w| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|.$

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** $\theta \quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano. Para convencernos de ello notamos que $|w| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior ($y \geq 0$), entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.

Transformaciones conformes

- **Traslaciones**: $w = z + b$; **rotaciones con un ángulo** θ $\quad w = ze^{i\theta}$; **expansiones de escala** a: $w = az$
- $w = \frac{1}{z}$ transforma puntos desde dentro de un círculo hacia afuera: $w = \frac{1}{|z|\exp(i\phi)} = \left|\frac{1}{z}\right| \exp(-i\phi)$ entonces: $0 \leq |z| \leq 1 \;\Rightarrow\; \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \;\Rightarrow\; 0 < |w| \leq 1.$
- La transformación $w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)$, lleva puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano. Para convencernos de ello notamos que $|w| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|.$
- Si z_0 y z los consideramos en el semiplano superior ($y \geq 0$), entonces $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, entonces cada uno de los puntos del semiplano es transformado dentro del círculo de radio $|w|$.
- La igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$.

Recapitulando

En presentación consideramos

1.

Para la discusión

1. Determine el tipo de singularidades (en caso de poseerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$
   1. $$f(z) = \frac{1}{z-2}$$
   2. $$f(z) = \frac{1+z^3}{z^2}$$
   3. $$f(z) = \operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Para la discusión

1. Determine el tipo de singularidades (en caso de poseerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$
   1. $$f(z) = \frac{1}{z-2}$$
   2. $$f(z) = \frac{1+z^3}{z^2}$$
   3. $$f(z) = \operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right)$$
2. Identifique los ceros, polos y las singularidades esenciales de las siguientes funciones:
   1. $$f(z) = \frac{z-2}{z^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$
   2. $$f(z) = e^{1/z}$$
   3. $$\left(\frac{1}{\ }\right.$$