

Nombre:

1. Para cada una de las siguientes funciones $f(z)$, halle $f'(z)$ e identifique la región en cual $f(z)$ es analítica.

- $f(z) = e^{-1/z}$

R Analítica en todas partes excepto en $z = 0$.

- $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

R Analítica en todas partes excepto en $z = i$ y $z = -i$.

- $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$

R Analítica en todas partes excepto en $z = 0$ y $z = -1$.

(6ptos)

2. Considere una función de variable compleja del tipo $f(z) = f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r,\theta)}$, en donde $R(r, \theta)$ y $\Theta(r, \theta)$ son funciones reales, continuamente diferenciables en r y θ . Demuestre que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se pueden escribir como

- $\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$
- $\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = -R \frac{\partial \Theta}{\partial r}$

(4ptos)

R En coordenadas cartesianas, una función compleja la escribimos como

$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones de valor real (las partes real e imaginaria de f), las condiciones de Cauchy-Riemann son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

En coordenadas polares, los factores de escala “corrigen” las derivadas en las direcciones, así, $\frac{\partial}{\partial r}$ es la derivada en la dirección $\hat{\rho}$ y $\frac{\partial}{r\partial}$ es la derivada en la dirección $\hat{\theta}$. Adicionalmente, la función $f(z) = f(x + iy) \equiv R(r, \theta)e^{i\Theta(r,\theta)} = R(r, \theta)(\cos \Theta(r, \theta) + i \sin \Theta(r, \theta))$. Identificando tendremos $u(r, \theta) = R(r, \theta) \cos \Theta(r, \theta)$ y $v(r, \theta) = R(r, \theta) \sin \Theta(r, \theta)$.

Con esas consideraciones las condiciones de Cauchy-Riemann adoptan la forma

$$\frac{\partial R \cos \Theta}{\partial r} = \frac{\partial R \sin \Theta}{r \partial \theta}, \quad \frac{\partial R \cos \Theta}{r \partial \theta} = -\frac{\partial R \sin \Theta}{\partial r}.$$

Desarrollando y reordenando, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} &= \tan \Theta \left[R \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] \\ \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} &= -\cot \Theta \left[R \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

Como la función $\Theta(r, \theta)$ es arbitraria concluimos que

$$\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = R \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$$

3. Muestre que la integral

$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz) dz$$

tiene el mismo valor para dos trayectorias distintas:

a) la línea recta que conecta los límites de integración

R En componentes cartesianas el integrando, F , se puede escribir como,

$$F(z) = 4z^2 - 3iz = 4(x^2 - y^2) + 3y + (8xy - 3x)i.$$

Para la trayectoria rectilínea tendremos $y = -7x + 25$, con lo cual el integrando, F , tendrá dos representaciones, si queremos integrar en x y en y

$$F_x(x) = -192x^2 + 1379x - 2425 + (-56x^2 + 197x)i$$

$$F_y(y) = \frac{-192y^2 - 53y + 2500}{49} + \frac{(-8y^2 + 203y - 75)i}{7}.$$

Integrando,

$$\int_{3+4i}^{4-3i} F(z) dz = \int_{3+4i}^{4-3i} F(z)(dx + idy) = \int_3^4 F_1(x) dx + i \int_4^{-3} F_2(y) dy$$

$$= \left(\frac{67}{2} - \frac{7i}{6} \right) + \left(-\frac{49}{6} - \frac{469i}{2} \right) = \frac{76 - 707i}{3}$$

b) un arco en la circunferencia $|z| = 5$

R Para integrar en el círculo $|z| = 5$, utilizamos la representación polar $z = 5e^{i\theta}$. Claramente los puntos $z = 4 - 3i \equiv 5e^{i\theta_1}$, con $\theta_1 = \tan^{-1}(4/3)$. El punto inicial de la integral está en θ_1 y su punto final en $\theta_2 = \tan^{-1}(-3/4)$. Se puede escribir $F_3(\theta) = 4(5^2 e^{2i\theta}) - 3i(5e^{i\theta})$. La integral toma entonces la forma

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_3(\theta) (5ie^{i\theta}) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (500ie^{3i\theta} + 75e^{2i\theta}) d\theta$$

$$= \frac{500}{3} (e^{3i\theta_2} - e^{3i\theta_1}) - \frac{75i}{2} (e^{2i\theta_2} - e^{2i\theta_1})$$

Simplificando

$$e^{3i\theta_1} = \frac{-117 + 44i}{125}, \quad e^{3i\theta_2} = \frac{-44 - 117i}{125},$$

$$e^{2i\theta_1} = \frac{-7 + 24i}{25}, \quad e^{2i\theta_2} = \frac{7 - 24i}{25},$$

obtenemos

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} F_3(\theta) \left(5ie^{i\theta} \right) d\theta = \frac{76 - 707i}{3}$$

El mismo resultado que en la primera parte.

Ahora bien, esta integral es inmediata si hubiéramos integrado directamente en z :

$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz) dz = \left[\frac{4z^3}{3} - \frac{3iz^2}{2} \right]_{3+4i}^{4-3i} = \frac{76 - 707i}{3}$$

(6ptos)

4. Evalúe

$$\oint_C \frac{f(z)}{z(2z+1)^2} dz$$

para un contorno de una circunferencia unitaria, centrada en $z = 0$. Use la nunca bien ponderada expansión en fracciones parciales.

R La descomposición en fracciones parciales implica:

$$\begin{aligned} \oint f(z) \left[\frac{1}{z} - \frac{2}{2z+1} - \frac{2}{(2z+1)^2} \right] dz \\ = \oint \frac{f(z)dz}{z} - \oint \frac{f(z)dz}{z + \frac{1}{2}} - \oint \frac{\frac{1}{2}f(z)dz}{(z + \frac{1}{2})^2}. \end{aligned}$$

Cada integral es ahora un caso de la fórmula de Cauchy y el último caso, fórmula para la derivada. Término a término tendremos:

$$2\pi i f(0) - 2\pi i f\left(-\frac{1}{2}\right) - \pi i f'\left(-\frac{1}{2}\right).$$

(4ptos)