

El Trompo de Lagrange

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



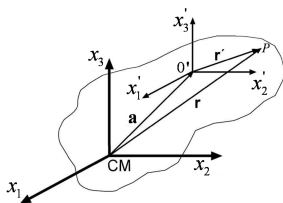
29 de abril de 2025

El Trompo de Lagrange

- 1 Teorema de los ejes paralelos en los momentos de inercia
- 2 Generalidades
- 3 El Lagrangeano
- 4 Coordenadas cíclicas y cantidades conservadas
- 5 Primeras integrales
- 6 Potencial efectivo
- 7 Nutación y rotación

Teorema de los ejes paralelos

Sea I_{ik} el tensor de inercia de un cuerpo rígido (un sistema de N partículas rígidamente unidas) en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo. Un sistema de coordenadas paralelas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) cuyo origen O' se encuentra en una posición $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ con respecto al centro de masa del cuerpo. Entonces el tensor de inercia es $I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j^N m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$.



- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es

$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) , con origen O' en una posición **a** respecto al centro de masa del cuerpo.

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) , con origen O' en una posición \mathbf{a} respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto P respecto (x_1, x_2, x_3) es
$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow x_{ij} = a_i + x'_{ij}$$

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) , con origen O' en una posición \mathbf{a} respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto P respecto (x_1, x_2, x_3) es
$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow x_{ij} = a_i + x'_{ij}$$
- Para (x'_1, x'_2, x'_3) , tenemos $I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k \right)$, con
$$r_j'^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{a})^2 = r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l x_l a_l.$$

- El tensor de inercia en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa del cuerpo, es
$$I_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right).$$
- Supongamos un sistema de coordenadas fijas (x'_1, x'_2, x'_3) , con origen O' en una posición \mathbf{a} respecto al centro de masa del cuerpo.
- La posición de un punto P respecto (x_1, x_2, x_3) es
$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}'_j \Rightarrow x_{ij} = a_i + x'_{ij}$$
- Para (x'_1, x'_2, x'_3) , tenemos $I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j'^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k \right)$, con
$$r_j'^2 = (\mathbf{r}_j - \mathbf{a})^2 = r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_{il} a_l.$$
- Sustituyendo,
$$I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left[\left(r_j^2 + a^2 - 2 \sum_l^3 x_{il} a_l \right) \delta_{ik} - (x_i - a_i)(x_k - a_k) \right]$$
$$I'_{ik} = \sum_j^N m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right) + \sum_j^N m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$$
$$- 2 \sum_j^N m_j \sum_l^3 x_{il} a_l \delta_{ik} + \sum_j^N m_j x_i a_k + \sum_j^N m_j x_k a_i$$

- Pero en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , tenemos

$$\sum_j^N m_j x_i a_k = a_k \left(\sum_j^N m_j x_{ij} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j x_k a_i = a_i \left(\sum_j^N m_j x_{kj} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j \sum_l^3 x_l a_l = \sum_l^3 a_l \left(\sum_j^N m_j x_{lj} \right) = 0.$$

- Pero en el sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , tenemos

$$\sum_j^N m_j x_i a_k = a_k \left(\sum_j^N m_j x_{ij} \right) = 0,$$

$$\sum_j^N m_j x_k a_i = a_i \left(\sum_j^N m_j x_{kj} \right) = 0,$$

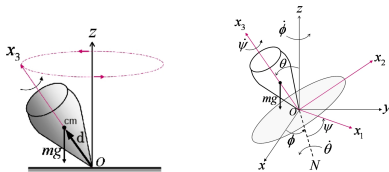
$$\sum_j^N m_j \sum_l^3 x_l a_l = \sum_l^3 a_l \left(\sum_j^N m_j x_{lj} \right) = 0.$$

- Luego tenemos, $I'_{ik} = I_{ik} + \sum_j^N m_j (a^2 \delta_{ik} - a_i a_k)$

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.

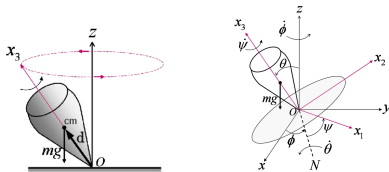
-
- The figure consists of two diagrams. The left diagram shows a cone with its vertex at the origin O of a coordinate system with a vertical z -axis. The center of mass (cm) is at a distance d from O along the axis of the cone. A dashed circle represents the path of the center of mass, with a curved arrow indicating a precession angular velocity $\dot{\phi}$. The weight mg acts vertically downwards from the center of mass. The right diagram shows a rigid body rotating about a fixed point O . It illustrates the addition of angular velocities: $\dot{\psi}$ is the angular velocity about a vertical axis (parallel to z), and $\dot{\theta}$ is the angular velocity about a horizontal axis x_1 . The resulting instantaneous axis of rotation is N . The weight mg acts vertically downwards from the center of mass. The coordinate system (x_1, x_2, x_3) is shown, with x_3 being the vertical axis.

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.



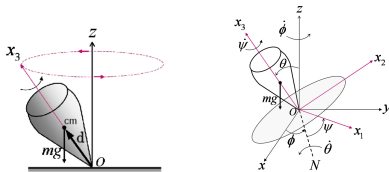
- Los momentos de inercia $I_{11}^{\text{cm}} = I_{22}^{\text{cm}} \neq I_{33}^{\text{cm}}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.



- Los momentos de inercia $I_{11}^{\text{cm}} = I_{22}^{\text{cm}} \neq I_{33}^{\text{cm}}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio (x, y, z) y el sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, ambos con origen en O .

- Consideremos un trompo de masa m en el campo gravitacional terrestre, y cuyo punto inferior O está fijo.
- Sea d la distancia, sobre el eje de simetría del trompo, desde el punto fijo O hasta el centro de masa.



- Los momentos de inercia $I_{11}^{cm} = I_{22}^{cm} \neq I_{33}^{cm}$ son los momentos de inercia del trompo con respecto a su centro de masa.
- Tomamos el sistema del laboratorio (x, y, z) y el sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo, ambos con origen en O .
- Sea $\mathbf{d} = (0, 0, d)$ la posición del centro de masa del trompo con respecto a O en el sistema (x_1, x_2, x_3) .

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$.

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O , es $V = mgz = mgd \cos \theta$.

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O , es $V = mgz = mgd \cos \theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O , $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O , es $V = mgz = mgd \cos \theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O , $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$
- Las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$

- Consideremos los momentos de inercia respecto al sistema (x_1, x_2, x_3) fijo en el cuerpo con origen en O , ubicado en $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$ con respecto al centro de masa.
- Los momentos de inercia con respecto a los ejes (x_1, x_2, x_3) del sistema centrado en O son $I_{ik} = I_{ik}^{\text{cm}} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$.
- Por lo tanto $I_{11} = I_{11}^{\text{cm}} + md^2$, $I_{22} = I_{22}^{\text{cm}} + md^2$ y $I_{33} = I_{33}^{\text{cm}} \neq I_{11} = I_{22}$
- La energía potencial con respecto a O , es $V = mgz = mgd \cos \theta$.
- La energía cinética del trompo se debe a la rotación con respecto al punto fijo O , $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (I_{11}\Omega_1^2 + I_{22}\Omega_2^2 + I_{33}\Omega_3^2)$
- Las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ se pueden expresar en función de los ángulos de Euler como
$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2$$
- El Lagrangiano del sistema es
$$\mathcal{L} = T_{\text{rot}} - V = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgd \cos \theta.$$

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ .

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ .
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ .
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ .
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z) , al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ .
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z) , al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}_3$ ni $\hat{\mathbf{z}}$, es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que $L_3 = \text{cte}$ y $L_z = \text{cte}$.

- El sistema posee tres grados de libertad: los ángulos de Euler θ , ϕ y ψ
- No depende del tiempo y tiene dos coordenadas cíclicas: ψ y ϕ .
- La ecuación de Lagrange para ψ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$
- Entonces, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_{33}\Omega_3 = L_3 = \text{cte.}$
- La ecuación de Lagrange para ϕ (cíclica) es $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$
- Otra vez
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = (I_{11} \sin^2 \theta + I_{33} \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_{33} \dot{\psi} \cos \theta = L_z = \text{cte.}$
- El torque externo del peso $\boldsymbol{\tau} = -mg\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{d} = mgd (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}_3)$, es perpendicular al plano (x_3, z) , al igual que el vector $d\mathbf{L}$ del cambio de momento angular del trompo.
- No hay componentes del torque en las direcciones $\hat{\mathbf{x}}_3$ ni $\hat{\mathbf{z}}$, es decir no hay cambios del vector momento angular en esas direcciones, por lo que $L_3 = \text{cte}$ y $L_z = \text{cte.}$
- La energía se conserva
$$E = \frac{1}{2} I_{11} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_{33} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgd \cos \theta = \text{cte.}$$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).
- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33} \dot{\phi} \cos \theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left(E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).

- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33} \dot{\phi} \cos \theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left(E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$$

- Podemos reescribir $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta) = \text{cte}$, con

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

- El trompo de Lagrange es un sistema integrable: posee tres grados de libertad (ψ, ϕ y θ) y tres cantidades conservadas (L_3, L_z y E).

- Las primeras integrales del sistema serán:

$$\dot{\phi} = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3 - I_{33} \dot{\phi} \cos \theta}{I_{33}} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_{11}} \left(E - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} - \frac{L_3^2}{2I_{33}} + mgd \cos \theta \right)}$$

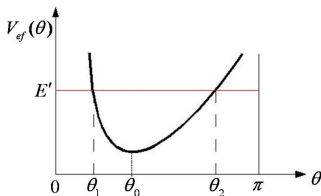
- Podemos reescribir $E' = E - \frac{L_3^2}{2I_{33}} = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta) = \text{cte}$, con

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

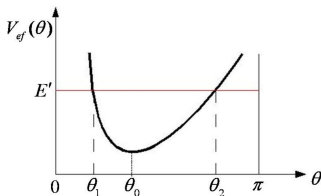
- Es un problema unidimensional para la coordenada θ , con un potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$

El Trompo de Lagrange: Potencial efectivo

- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$

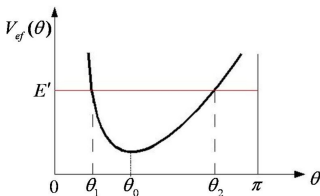


- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$

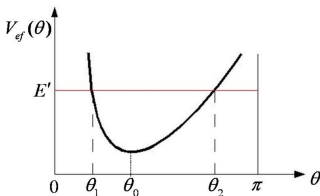
- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación

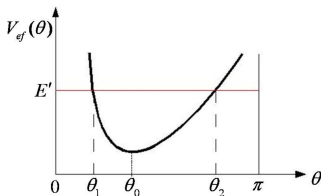
$$E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación
$$E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$
- La nutación ocurre en el intervalo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

- El potencial efectivo $V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene un mínimo para θ_0 en $\left. \frac{\partial V_{\text{ef}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$



- Los ángulo θ posibles ocurren para valores $E' \geq V_{\text{ef}}(\theta)$
- Los puntos de retorno θ_1 y θ_2 son soluciones de la ecuación

$$E' = V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_{11} \sin^2 \theta} + mgd \cos \theta$$

- La nutación ocurre en el intervalo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- De la energía obtuvimos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}{I_{11}}}, \Rightarrow t(\theta) = \sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$$

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2 , dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos \theta)$

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2 , dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos \theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3 \cos \theta, \forall \theta)$.

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2 , dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos \theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre $(L_z > L_3 \cos \theta, \forall \theta)$.
- Cuando $\dot{\phi}$ cambia de signo en θ_1 ó en θ_2 , dependiendo del signo de la cantidad $(L_z - L_3 \cos \theta_{1,2})$ (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).

- El período de nutación es $T_{\text{nut}} = 2\sqrt{\frac{I_{11}}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{(E' - V_{\text{ef}}(\theta))}}$
- La velocidad angular de precesión $\dot{\phi}$, puede cambiar su dirección instantánea en los puntos de retorno θ_1 y θ_2 , dependiendo del signo de $(L_z - L_3 \cos \theta)$
- Cuando $\dot{\phi} > 0$ siempre ($L_z > L_3 \cos \theta, \forall \theta$).
- Cuando $\dot{\phi}$ cambia de signo en θ_1 ó en θ_2 , dependiendo del signo de la cantidad $(L_z - L_3 \cos \theta_{1,2})$ (el sentido del movimiento depende de condiciones iniciales).
- Cuando $\dot{\phi} = 0$ en θ_1 ó en θ_2 ($L_z = L_3 \cos \theta_{1,2}$).

