Examen calificado sobre 20 ptos

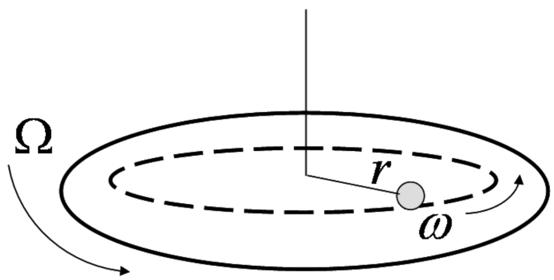
Nombre:

1. Considere una esfera de radio a, masa M y momento de inercia I respecto de un diámetro cualquiera que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.

   a) Escriba la condición de rodadura sin deslizamiento suponiendo que el plano horizontal está fijo (3ptos)

   b) Demuestre que el centro de masas se mueve en línea recta y a velocidad constante (3ptos).

   c) Escriba la condición de rodadura sin deslizamiento suponiendo que el plano horizontal rota con una velocidad angular Ω constante alrededor del eje z tal y como muestra la figura (5ptos).



   d) Determine la expresión para la velocidad angular de la esfera en término de los parámetros Ω, r, a y M. (4ptos)

   e) Muestre que el centro de masa de la esfera tiene una circunsferencia por trayectoria (4ptos)

R Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero. Esto es: $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$. Donde

- $\mathbf{r}_{op}$ y $\dot{\mathbf{r}}_{op}$ son la posición y la velocidad del punto de contacto respecto al sistema de coordenadas laboratorio
- $\mathbf{R}$ y $\dot{\mathbf{R}}$ son la posición y la velocidad del centro de masa de la esfera respecto al sistema de coordenadas laboratorio
- $\mathbf{r}_{cp}$ y $\dot{\mathbf{r}}_{cp} \equiv \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$ son la posición y la velocidad del punto de contacto respecto al sistema de coordenadas fijo en el centro de masa, con $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ la velocidad angular del cuerpo también respecto al centro de masa.

Alineamos el eje $\hat{\mathbf{x}}_3$ con el eje de rotación de la esfera, entonces instantáneamente, $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$. Con lo cual tendremos

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 \equiv a\dot{\psi}\hat{\mathbf{x}}_1$$

Ya que, en general, $\tilde{\Omega}_i$, respecto al sistema centro de masa, es $\tilde{\Omega}_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad i = 1, 2, 3.$
$\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi = 0$
$\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi = 0$
$\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = \dot{\psi}$
donde hemos tomado, para este problema en particular $\theta = \pi/2$, $\psi = 0$ y $\dot{\phi} = 0$

Volviendo a la condición de rodar sin deslizar tenemos

$$\dot{\mathbf{R}} = -\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} \quad \Rightarrow \dot{X}\hat{\mathbf{x}} + \dot{Y}\hat{\mathbf{y}} = -a\dot{\psi}\hat{\mathbf{x}}_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -a\dot{\psi}\cos\phi \\ \\ \dot{Y} = -a\dot{\psi}\,\text{sen}\,\phi \end{cases}$$

Como la única fuerza es el peso y está en la dirección $-\hat{\mathbf{z}}$, entonces $\ddot{X} = \ddot{Y} = 0$ y la esfera se mueve en linea recta.

Rodar sin deslizar cuando la superficie se mueve se puede escribir como $-r\Omega\hat{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$. Pero ahora tenemos lo cual tendremos

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ 0 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 \equiv a\dot{\psi}\hat{\mathbf{x}}_1$$

Ya que, en general, $\tilde{\Omega}_i$, respecto al sistema centro de masa, es $\tilde{\Omega}_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad i = 1, 2, 3.$
$\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi = 0$
$\tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi = \dot{\phi} \equiv \Omega$
$\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = \dot{\psi} = \omega$
donde hemos tomado, para este problema en particular $\theta = \pi/2$, y $\psi = 0$. Se desprenden dos casos

a) $\dot{\psi} = \omega = 0$, entonces la esfera no rota sobre su eje y se deja llevar por el piso. La condición de rodar sin deslizar es $-r\Omega\hat{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{R}}$. Proyectando tendremos $\dot{X} = -r\Omega\cos\phi \quad \text{y} \quad \dot{Y} = -r\Omega\,\text{sen}\,\phi$. Claramente la velocidad del centro de masa describe una circunsferencia. Pero más aún, como $\Omega = \dot{\phi}$ esa ligadura es integrable y se demuestra que el centro de masa describe una circunsferencia, porque está fija la piso.

b) y el caso general $\dot{\psi} = \omega \neq 0$. Entonces la condición se escribe $-(r\Omega + a\omega)\hat{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{R}}$. Otra vez, proyectando obtenemos $\dot{X} = -(r\Omega + a\omega)\cos\phi \quad \text{y} \quad \dot{Y} = -(r\Omega + a\omega)\,\text{sen}\,\phi$. Otra vez, la velocidad del centro de masa describe una circunsferencia. Las ecuaciones también permiten que las velocidades angulares tengan sentidos opuestos. En ese caso el centro de masa puede ir en dirección contraria a la rotación del piso.

2. Si queremos modelar la materia oscura en el sistema solar podemos suponer que los cuerpos están sujetos a un campo de fuerzas centrales del tipo

$$\vec{F} = -\left(\frac{k}{r^2} + br\right)\hat{\mathbf{r}}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección radial y el efecto de la materia oscura es muy pequeño $b \ll \frac{k}{r^3}$.

a) Escriba las ecuaciones de Hamilton y determine las cantidades conservadas asociadas a este sistema (3ptos)

b) Encuentre la frecuencia de oscilación alrededor de una órbita circular (3ptos)

R El lagrangeano para un potencial central con ese campo de fuerzas es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r), \quad \text{con} \quad V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{br^2}{2}$$

Como $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = L = $ const, entonces el Hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton serán:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{br^2}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{L}{mr^2} \\ \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p_r} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} - br \\ \dot{p_\theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Las cantidades conservadas son la energía y la cantidad de movimiento angular. Vale decir:

$$E = \mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{br^2}{2} \quad \text{y} \quad L = p_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

A partir de ese Hamiltoniano podemos definir un potencial efectivo de la forma

$$V_{efec} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{br^2}{2}$$

Para una órbita circular de radio $r = r_0$ tendremos un mínimo de ese potencial efectivo

$$\left.\frac{dV_{efec}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \quad \Rightarrow \frac{L^2}{mr_0^3} - \frac{k}{r_0^2} - br_0 = 0$$

Desarrollando el potencial por Taylor alrededor del mínimo del potencial obtendremos

$$V_{efec}(r) = V_{efec}(r_0) + (r - r_0)\, V'_{efec}(r_0) + \frac{1}{2}(r - r_0)^2\, V''_{efec}(r_0) + \cdots$$

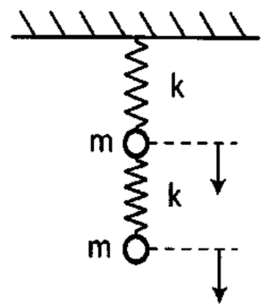
y sustituyendo en el Hamiltoniano, identificamos que es el hamiltoniano del oscilador armónico. Al derivar dos veces el potencial efectivo tendremos

$$\mathcal{H} \approx \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2}\left(r - r_0\right)^2 V''_{efec}\left(r_0\right) \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{m} V''_{efec}\left(r_0\right) = \frac{3L^2}{m^2 r_0^4} - \frac{2k}{m r_0^3} + \frac{b}{m}$$

finalmente obtenemos la frecuencia de oscilación

$$\omega = \left(\frac{k}{m r_0^3} + \frac{4b}{m}\right)^{1/2}$$

3. Considere dos osciladores verticales acoplados, tal y como muestra la figura

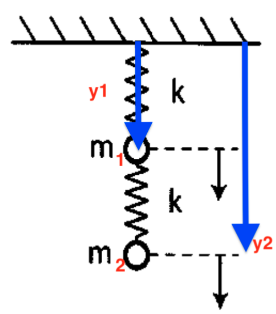


Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones del sistema (5ptos)

R El lagrangianos del sistema es

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{2}k y_1^2 - \frac{1}{2}k(y_1 - y_2)^2 + mgy_1 + mgy_2.$$

Las ecuaciones de movimiento son



$$m\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}t^2}+2ky_1-ky_2=mg \tag{1}$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}t^2}+ky_2-ky_1=mg \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Para eliminar los términos inhomogeneos hacemos el siguiente cambio de variable

$$y_1=\tilde{y}_1+\frac{2mg}{k} \quad \text{y} \quad y_2=\tilde{y}_2+\frac{3mg}{k}$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento quedan como

$$m\frac{\mathrm{d}^2\tilde{y}_1}{\mathrm{d}t^2}+2k\tilde{y}_1-k\tilde{y}_2=0 \tag{4}$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2\tilde{y}_2}{\mathrm{d}t^2}-k\tilde{y}_1+k\tilde{y}_2=0 \tag{5}$$

Suponemos soluciones del tipo $\tilde{y}_1(t)=A_1e^{i\omega t}$ y $\tilde{y}_2(t)=A_2e^{i\omega t}$ y obtenemos

$$(2k-m\omega^2)A_1-kA_2=0 \tag{6}$$
$$-kA_1+(k-m\omega^2)A_2=0 \tag{7}$$

que en forma matricial se escribe

$$\begin{bmatrix}2k-m\omega^2 & -k\\ -k & k-m\omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{vmatrix}2k-m\omega^2 & -k\\ -k & k-m\omega^2\end{vmatrix}=m^2\omega^4-3km\omega^2+k^2=0$$

con las soluciones

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k(3+\sqrt{5})}{2m}}, \quad \omega_2=\sqrt{\frac{k(3-\sqrt{5})}{2m}}$$

Las relaciones entre las amplitudes son

- para el primer modo normal y de mayor frecuencia

$$\omega_1^2=\frac{k(3+\sqrt{5})}{2m} \quad \Rightarrow \frac{A_2}{A_1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

  Dado que $\sqrt{5}\approx 2{,}236$, la relación de amplitud es negativa y aproximadamente $-0{,}618$. Entonces A_2 tiene signo opuesto a A_1 y las dos masas oscilan en oposición de fase. La segunda masa se mueve menos que la primera en magnitud, ya que $|\frac{A_2}{A_1}|<1$.

- para el segundo modo normal y de menor frecuencia

$$\omega_2^2=\frac{k(3-\sqrt{5})}{2m} \quad \Rightarrow \frac{A_2}{A_1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

  Numéricamente, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$. Esto indica que A_2 es positivo y mayor que A_1, por locual las dos masas oscilan en fase. La segunda masa se mueve más que la primera en magnitud.