

Empezando con los complejos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



11 de noviembre de 2025

Agenda: empezando con los complejos

- 1 Números Complejos
- 2 Algebra de complejos
- 3 Representaciones complejas
- 4 Funciones de variable compleja
- 5 Par de ejemplos:
- 6 Condiciones de Cauchy-Riemann
- 7 Ejemplos y curiosidades
- 8 Recapitulando
- 9 Para la discusión

Números Complejos

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0, \text{ y nos lleva a definir un número } i^2 \equiv -1$$

Números Complejos

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2i \\ x = -2i \end{cases} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0, \text{ y nos lleva a definir un número } i^2 \equiv -1$$

- Un número complejo, z , es la generalización de los números imaginarios (puros), ib . Esto es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow \text{parte real} \\ b \rightarrow \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

Números Complejos

- Nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0, \text{ y nos lleva a definir un número } i^2 \equiv -1$$

- Un número complejo, z , es la generalización de los números imaginarios (puros), ib . Esto es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

- Cada número complejo, z tendrá asociado un número complejo conjugado, z^* tal que:

$$z = a + ib \iff z^* = a - ib,$$



$$(z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2,$$

$$\text{claramente: } z \cdot z^* \geq 0 \Rightarrow |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2.$$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2.$$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2.$$

- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3,$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2.$$

- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3,$

- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.

- Dos números complejos serán iguales

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2.$$

- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3,$

- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*.$

- Se multiplican números complejos entre si,

$$z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$
 también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$

Algebra de complejos

- Dos números complejos serán iguales

$$z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2.$$

- Se suman : $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3,$

- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$ y claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$.

- Se multiplican números complejos entre si,

$$z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$
 también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$

- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} \frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)},$$

Representaciones complejas

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) , \quad \text{con: } \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Representaciones complejas

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad \text{con: } \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Con esta interpretación tendremos:

$x = \operatorname{Re} z$	\Rightarrow	componente real del vector z o parte real de z
$y = \operatorname{Im} z$	\Rightarrow	componente imaginaria del vector z o parte ima-
$r = \sqrt{zz^*} = z $	\Rightarrow	módulo, magnitud o valor absoluto de z
θ	\Rightarrow	ángulo polar o de fase del número complejo z

Representaciones complejas

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad \text{con: } \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Con esta interpretación tendremos:

$x = \operatorname{Re} z \quad \Rightarrow \quad$ componente real del vector z o parte real de z

$y = \operatorname{Im} z \quad \Rightarrow \quad$ componente imaginaria del vector z o parte ima-

$r = \sqrt{zz^*} = |z| \quad \Rightarrow \quad$ módulo, magnitud o valor absoluto de z

$\theta \quad \Rightarrow \quad$ ángulo polar o de fase del número complejo z

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

Representaciones complejas

- De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \quad \Leftarrow \quad z =$$

$$r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad \text{con: } \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \text{donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Con esta interpretación tendremos:

$x = Re z \quad \Rightarrow \quad$ componente real del vector z o parte real de z

$y = Im z \quad \Rightarrow \quad$ componente imaginaria del vector z o parte ima-

$r = \sqrt{zz^*} = |z| \quad \Rightarrow \quad$ módulo, magnitud o valor absoluto de z

$\theta \quad \Rightarrow \quad$ ángulo polar o de fase del número complejo z

- La tercera relación proviene de $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
 - Entonces, tenemos tres formas de representar un número complejo:
- $$z = x + iy \quad \Leftarrow \quad z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \quad \Leftarrow \quad z = |z|e^{i\theta}.$$

Funciones de variable compleja

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.

Funciones de variable compleja

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región \mathcal{S} será diferenciable en esa región si la derivada

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y},\end{aligned}$$

existe y es única.

Funciones de variable compleja

- Si en una determinada región del plano complejo a z le corresponde un $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Entonces $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u(x, y)$ la parte real y $v(x, y)$ la parte imaginaria.
- Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región \mathcal{S} será diferenciable en esa región si la derivada

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y},\end{aligned}$$

existe y es única.

- Existe sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, si $\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned}f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x}, \\f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y}.\end{aligned}$$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0 ; \Delta x \rightarrow 0$ en el plano complejo.

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$
- Consideremos ahora $f(z) = 2x + iy$ Verifique si es diferenciable.

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$
- Consideremos ahora $f(z) = 2x + iy$ Verifique si es diferenciable.
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2x+2\Delta x+i(y+\Delta y)-2x-iy}{\Delta x+i\Delta y}$

Par de ejemplos:

- Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ Verifique si es derivable
- Entonces $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, con lo cual
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2+2i(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x^2+y^2-2ixy}{\Delta x+i\Delta y}$
- $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2i\Delta x \Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \right) = 2x + i2y$
- Independiente de la ruta $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ en el plano complejo.
- Obvio ya que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}$
- Finalmente, $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$
- Consideremos ahora $f(z) = 2x + iy$ Verifique si es diferenciable.
- Entonces, $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2x+2\Delta x+i(y+\Delta y)-2x-iy}{\Delta x+i\Delta y}$
- Con lo cual $f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta x+i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right], \end{aligned}$$

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right], \end{aligned}$$

- y tienen que ser iguales

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$$

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right], \end{aligned}$$

- y tienen que ser iguales

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$$

- Con lo cual $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ \wedge $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann

Condiciones de Cauchy-Riemann

- Entonces

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right], \end{aligned}$$

- y tienen que ser iguales

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$$

- Con lo cual $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ \wedge $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann
- Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si $f(z)$ es analítica, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas: $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$.

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
- ④ Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen}(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen}(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
- ④ Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
- ⑤ Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$,

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
- ④ Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
- ⑤ Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$,
- ⑥ Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
 $\Rightarrow \phi = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$.

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
- ④ Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
- ⑤ Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$,
- ⑥ Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
 $\Rightarrow \phi = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$.
- ⑦ Una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
- ④ Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
- ⑤ Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$,
- ⑥ Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
 $\Rightarrow \phi = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$.
- ⑦ Una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que
 $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.
- ⑧ $\nabla u \cdot \nabla v = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \right] \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
- ④ Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
- ⑤ Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$,
- ⑥ Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
 $\Rightarrow \phi = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$.
- ⑦ Una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que
 $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.
- ⑧ $\nabla u \cdot \nabla v = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \right] \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$
- ⑨ Las condiciones de Cauchy-Riemann $\nabla u \cdot \nabla v = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Ejemplos y curiosidades 1/2

- ① Dada la función $f(z) = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$,
- ② Tendremos $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y)$,
 $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y)$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos(y)$,
- ③ Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y $f(z)$ es analítica
- ④ Supongamos la función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
- ⑤ Su parte imaginaria $v(x, y)$ será $u = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$,
- ⑥ Entonces, $\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$
 $\Rightarrow \phi = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$.
- ⑦ Una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tal que
 $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const} \Rightarrow \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.
- ⑧ $\nabla u \cdot \nabla v = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \right] \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$
- ⑨ Las condiciones de Cauchy-Riemann $\nabla u \cdot \nabla v = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.
- ⑩ Es decir, $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const}$, corresponden a *trayectorias mutuamente ortogonales*.

Ejemplos y curiosidades 2/2

- ① Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$.

Ejemplos y curiosidades 2/2

- ① Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$.
- ② Las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* .

Ejemplos y curiosidades 2/2

- ① Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$.
- ② Las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* .
- ③ Tenemos que
$$\begin{cases} x = \frac{z + z^*}{2} \\ y = \frac{z - z^*}{2i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*}$$

Ejemplos y curiosidades 2/2

- ① Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$.
- ② Las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* .
- ③ Tenemos que
$$\begin{cases} x = \frac{z + z^*}{2} \\ y = \frac{z - z^*}{2i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*}$$
- ④ Entonces, $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{1}{2i} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right]$,

Ejemplos y curiosidades 2/2

- ① Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$.
- ② Las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* .
- ③ Tenemos que
$$\begin{cases} x = \frac{z + z^*}{2} \\ y = \frac{z - z^*}{2i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*}$$
- ④ Entonces, $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{1}{2i} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right]$,
- ⑤ Arreglando, $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0$

Ejemplos y curiosidades 2/2

- ① Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$.
- ② Las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* .
- ③ Tenemos que
$$\begin{cases} x = \frac{z + z^*}{2} \\ y = \frac{z - z^*}{2i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*}$$
- ④ Entonces, $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{1}{2i} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right]$,
- ⑤ Arreglando, $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0$
- ⑥ Con lo cual, $f(z) \Leftrightarrow f(x, y) \equiv f \left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i} \right)$

Ejemplos y curiosidades 2/2

- ① Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$.
- ② Las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* .
- ③ Tenemos que
$$\begin{cases} x = \frac{z + z^*}{2} \\ y = \frac{z - z^*}{2i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*}$$
- ④ Entonces, $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{1}{2i} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right]$,
- ⑤ Arreglando, $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0$
- ⑥ Con lo cual, $f(z) \Leftrightarrow f(x, y) \equiv f \left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i} \right)$
- ⑦ La funciones analíticas son verdaderas funciones de variable compleja y no, como pudiera parecer, de dos variables reales interpuestas.

Recapitulando

En presentación consideramos

1

① ¿ Cuáles de las siguientes funciones son analíticas?

- ① $f(z) = izz^*$
- ② $f(z) = e^{-2x} (\cos(2y) - i\sin(2y))$
- ③ $f(z) = e^x (\cos(y) - i\sin(y))$
- ④ $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$
- ⑤ $f(z) = 1/(z - z^5)$
- ⑥ $f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$
- ⑦ $f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i \sin(x)\sinh(y)$

Para la discusión

① ¿ Cuáles de las siguientes funciones son analíticas?

- ① $f(z) = izz^*$
- ② $f(z) = e^{-2x} (\cos(2y) - i\sin(2y))$
- ③ $f(z) = e^x (\cos(y) - i\sin(y))$
- ④ $f(z) = \operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$
- ⑤ $f(z) = 1/(z - z^5)$
- ⑥ $f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$
- ⑦ $f(z) = \cos(x)\cosh(y) - i \sin(x)\sinh(y)$

② ¿Cuales de las siguientes funciones son armónicas y encuentre la función analítica correspondiente si es el caso?

- ① $u = x^2 + y^2$
- ② $u = \sin(x)\cosh(y)$
- ③ $v = e^x \sin(2y)$
- ④ $v = x/(x^2 + y^2)$