Series de Funciones

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

27 de julio de 2021

Agenda Series de Funciones

1. Series de Potencias
2. Algebra de Series de Potencias
3. Inversión, derivación e integración de series
4. Series de Taylor
5. La expansión binomial y la función $\Gamma(z)$
6. Propiedades de la función $\Gamma(x)$
7. Recapitulando

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$, con lo cual una serie infinita será $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$,

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$, con lo cual una serie infinita será $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros.

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$, con lo cual una serie infinita será $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros.
- El punto central con las series de funciones $f(x)$ complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos, $a_k(x)$, más simples.

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$, con lo cual una serie infinita será $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros.
- El punto central con las series de funciones $f(x)$ complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos, $a_k(x)$, más simples.
- Así las sumas parciales converjan a la función $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$.

Series de Potencias

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$, con lo cual una serie infinita será $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros.
- El punto central con las series de funciones $f(x)$ complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos, $a_k(x)$, más simples.
- Así las sumas parciales converjan a la función $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$.
- Una serie de potencias $a_n = c_n x^n$ será un polinomio de grado infinito: $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ o también $P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

- En general, la suma parcial de una serie de funciones se define como $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots$, con lo cual una serie infinita será $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$,
- La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros.
- El punto central con las series de funciones $f(x)$ complicadas es tratar de construir funciones como serie de términos, $a_k(x)$, más simples.
- Así las sumas parciales converjan a la función $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$.
- Una serie de potencias $a_n = c_n x^n$ será un polinomio de grado infinito: $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ o también $P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.
- Los coeficientes c_n son números independientes de x. Pero, más aún, estas series pueden ser series de potencias de número complejos. Vale decir, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ con $z = x + iy$.

Algebra de Series de Potencias

- **Generalidades**: los índices de las series son etiquetas mudas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; n \; (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \; j \; (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \; (k+1) \; (x - x_0)^k$

Algebra de Series de Potencias

- **Generalidades**: los índices de las series son etiquetas mudas
  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; n \; (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \; j \; (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \; (k+1) \; (x - x_0)^{k}$
- **Las series se igualan** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \; j \; (x - x_0)^{j-1}$
  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \; (k+1) \; (x - x_0)^{k}$.
  Entonces $b_n = a_{n+1} \; (n+1)$

- **Generalidades**: los índices de las series son etiquetas mudas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\ j\ (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ (x-x_0)^k$
- **Las series se igualan** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\ j\ (x-x_0)^{j-1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ (x-x_0)^k$.
  Entonces $b_n = a_{n+1}\ (n+1)$
- **Las series se suman** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \left(x-x_0\right)^k = a_0 + a_1 \left(x-x_0\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n + b_n\right) \left(x-x_0\right)^n$,

- **Generalidades**: los índices de las series son etiquetas mudas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\ j\ (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ (x-x_0)^k$
- **Las series se igualan** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\ j\ (x-x_0)^{j-1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ (x-x_0)^k$. Entonces $b_n = a_{n+1}\ (n+1)$
- **Las series se suman** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k\,(x-x_0)^k = a_0 + a_1\,(x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n+b_n)\,(x-x_0)^n$,
- o también $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2}\,(x-x_0)^{k+2} = a_0 + a_1\,(x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n+b_n)\,(x-x_0)^n$

Algebra de Series de Potencias

- **Generalidades**: los índices de las series son etiquetas mudas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; n\,(x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \; j\,(x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\,(k+1)\,(x-x_0)^k$
- **Las series se igualan** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \; j\,(x-x_0)^{j-1}$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\,(k+1)\,(x-x_0)^k$.
  Entonces $b_n = a_{n+1}\,(n+1)$
- **Las series se suman** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k\,(x-x_0)^k = a_0 + a_1\,(x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)\,(x-x_0)^n$,
- o también $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2}\,(x-x_0)^{k+2} = a_0 + a_1\,(x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n+b_n)\,(x-x_0)^n$
- **La series se multiplican** $\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ con $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$

- **Las series se ¡invierten!** Si $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ Entonces $x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(y - y_0\right)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(x - x_0\right)^j\right]^k$

- **Las series se ¡invierten!** Si $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Entonces $x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j\right]^k$
- Con lo cual $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = -\frac{a_2}{(a_1)^3}$, $b_3 = \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \cdots$

- **Las series se ¡invierten!** Si $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Entonces $x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j\right]^k$
- Con lo cual $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = -\frac{a_2}{(a_1)^3}$, $b_3 = \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \cdots$
- Como $c_n (x - x_0)^n$ son funciones continuas y **la serie se deriva** término a término $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \; n \; (x - x_0)^{n-1}$

- **Las series se ¡invierten!** Si $y - y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Entonces $x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \Rightarrow x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right]^k$
- Con lo cual $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = -\frac{a_2}{(a_1)^3}$, $b_3 = \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \cdots$
- Como $c_n (x - x_0)^n$ son funciones continuas y **la serie se deriva** término a término $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \; n \; (x - x_0)^{n-1}$
- **Las series se integran** $\int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x \, \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \mathrm{d}x \, c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$.

- Sea $f = f(x)$ una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.

- Sea $f = f(x)$ una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.
- Además, $\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$
  $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)\,,$

- Sea $f = f(x)$ una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.
- Además, $\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\, f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$
  $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\, f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)\,,$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas
  $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a); \quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$
  $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$

Series de Taylor

- Sea $f = f(x)$ una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.
- Además, $\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$ $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)\,,$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a);\quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$ $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$
- Con lo cual $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) \approx$ $f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\,[f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a),$

- Sea $f = f(x)$ una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.
- Además, $\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$
  $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)\,,$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas
  $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a); \quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$
  $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$
- Con lo cual $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) \approx$
  $f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\,[f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a),$
- En general la serie de Taylor será
  $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$

- Sea $f = f(x)$ una función continua y continuamente diferenciable. Es decir supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a,b]$.
- Además, $\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\, f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow$
  $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\, f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)\,,$
- Esa última afirmación vale para todo punto y todas las derivadas
  $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a); \quad f'(x) \approx f'(a) + (x-a)f''(a);$
  $f''(x) \approx f''(a) + (x-a)f'''(a).$
- Con lo cual $f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\, f'(x) \approx$
  $f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\, [f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a),$
- En general la serie de Taylor será
  $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$
- Con $\mathcal{R}_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad$ con $a \leq \xi \leq a+h$

Series de Taylor

- Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
\operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\
(1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n + \cdots \quad \forall\, x
\end{aligned}
$$

- Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para} \ -\infty < x < \infty \\
\operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad \text{para} -\infty < x < \infty \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{para} -\infty < x < \infty \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots \quad \text{para} -1 < x < 1 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{para} \ -1 < x < 1 \\
(1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n + \cdots \quad \forall\, x
\end{aligned}
$$

- El desarrollo en series de Taylor para una función de dos variables es

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a,b) + (x-a)\ f_x|_{ab} + (y-b)\ f_y|_{ab} \\
&+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 f_{xx}\Big|_{ab} + 2(x-a)(y-a)\ f_{xy}|_{ab} + (y-a)^2\ f_{yy}|_{ab}\right] \\
&+ \frac{1}{3!}\left[(x-a)^3\ f_{xxx}|_{ab} + 3(x-a)^2(y-a)\ f_{xxy}|_{ab} + 3(x-a)(y-a)^2\ f_{xyy}|_{ab} + (y-a)^3\ f_{yyy}|_{ab}\right] \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

La expansión binomial y la función $\Gamma(z)$

- La expansión binomial para m entero positivo es $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \, , = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) x^n$, la serie termina en $m = n$.

- La expansión binomial para m entero positivo es $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \,, = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) x^n$, la serie termina en $m = n$.
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m y puede definirse como $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

La expansión binomial y la función $\Gamma(z)$

- La expansión binomial para m entero positivo es $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \,, = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) x^n$, la serie termina en $m = n$.
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m y puede definirse como $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.
- La función $\Gamma(z)$ es la generalización del factorial para valores de z complejo y se define $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} \mathrm{d}x \,, \; k > 0 \,.$

La expansión binomial y la función $\Gamma(z)$

- La expansión binomial para m entero positivo es $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \, , = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) x^n$, la serie termina en $m = n$.
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m y puede definirse como $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.
- La función $\Gamma(z)$ es la generalización del factorial para valores de z complejo y se define $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} \mathrm{d}x \, , \; k > 0 \, .$
- Cuando n es un entero positivo coincide con el factorial $n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} \, t^n \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t + n \ln(t)} \, \mathrm{d}t$

La expansión binomial y la función $\Gamma(z)$

- La expansión binomial para m entero positivo es $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \, , = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) x^n \, ,$ la serie termina en $m = n$.
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m y puede definirse como $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n \, .$
- La función $\Gamma(z)$ es la generalización del factorial para valores de z complejo y se define $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} \mathrm{d}x \, , \; k > 0 \, .$
- Cuando n es un entero positivo coincide con el factorial $n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^n \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t+n\ln(t)} \, \mathrm{d}t$
- Si $f(t) = -t + n\ln(t) = f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \cdots$ $f(t) = -n + n\ln(n) + 0 + (t-n)^2(-n/n^2)/2 + \cdots$

- La expansión binomial para m entero positivo es
$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \,, = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) x^n \,,$ la serie termina en $m = n$.
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m y puede definirse como $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.
- La función $\Gamma(z)$ es la generalización del factorial para valores de z complejo y se define $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} \mathrm{d}x \,, \; k > 0 \,.$
- Cuando n es un entero positivo coincide con el factorial
$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t+n\ln(t)} \,\mathrm{d}t$
- Si $f(t) = -t + n\ln(t) = f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \cdots$
$f(t) = -n + n\ln(n) + 0 + (t-n)^2(-n/n^2)/2 + \cdots$
- Entonces $n! \sim \int_0^{\infty} e^{-n+n\ln(n)-(t-n)^2/2n} \,\mathrm{d}t = n^n e^{-n} \int_0^{\infty} e^{-(t-n)^2/2n} \,\mathrm{d}t$

La expansión binomial y la función $\Gamma(z)$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La expansión binomial para m entero positivo es $(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \, , = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) x^n$, la serie termina en $m = n$.
- La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m y puede definirse como $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.
- La función $\Gamma(z)$ es la generalización del factorial para valores de z complejo y se define $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} \mathrm{d}x \, , \; k > 0 \, .$
- Cuando n es un entero positivo coincide con el factorial $n! = \Gamma(1+n) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^n \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t + n\ln(t)} \, \mathrm{d}t$
- Si $f(t) = -t + n\ln(t) = f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \cdots$ $f(t) = -n + n\ln(n) + 0 + (t-n)^2(-n/n^2)/2 + \cdots$
- Entonces $n! \sim \int_0^{\infty} e^{-n+n\ln(n)-(t-n)^2/2n} \, \mathrm{d}t = n^n e^{-n} \int_0^{\infty} e^{-(t-n)^2/2n} \, \mathrm{d}t$
- Si $n >> 1$ $n! \sim= n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ **La Fórmula de Stirling**

Propiedades de la función $\Gamma(x)$

- Si $k = 1$, tenemos $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b = 1$.

Propiedades de la función $\Gamma(x)$

- Si $k=1$, tenemos $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0 e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = 1\,.$
- Si $\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{k-1}\,\mathrm{d}x$ integramos por partes

  $\Gamma(k)=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-x}x^k}{k}\right]_0^b + \frac{1}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x\,,\quad k>0\,,$

  $\Gamma(k)=\frac{1}{k}\Gamma(k+1)\ \Rightarrow \Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$

- Si $k=1$, tenemos $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0 e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\ \right]_0^b = 1\,.$
- Si $\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{k-1}\,\mathrm{d}x$ integramos por partes

$$\Gamma(k)=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-x}x^k}{k}\ \right]_0^b + \frac{1}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x\,,\qquad k>0\,,$$

$$\Gamma(k)=\frac{1}{k}\Gamma(k+1)\ \Rightarrow \Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$$

- También $\Gamma(k+1)=\frac{1}{k+1}\Gamma(k+2)\Rightarrow\Gamma(k)=\frac{1}{k(k+1)}\Gamma(k+2)$

$$\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)}\ \cdots$$

$$\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}\,,\qquad k\neq 0,-1,-2,\ldots,-(n-1)\,.$$

Propiedades de la función $\Gamma(x)$

- Si $k = 1$, tenemos $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\ \right]_0^b = 1\,.$
- Si $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{k-1}\, \mathrm{d}x$ integramos por partes

  $$\Gamma(k) = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-x}x^k}{k}\ \right]_0^b + \frac{1}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x\,, \quad k > 0\,,$$

  $$\Gamma(k) = \frac{1}{k}\Gamma(k+1)\ \Rightarrow \Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$$
- También $\Gamma(k+1) = \frac{1}{k+1}\Gamma(k+2) \Rightarrow \Gamma(k) = \frac{1}{k(k+1)}\Gamma(k+2)$

  $$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)}\ \cdots$$

  $$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}\,, \quad k \neq 0, -1, -2, \ldots, -(n-1)\,.$$
- la fórmula de reflexión de Euler $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}$

Propiedades de la función $\Gamma(x)$

- Si $k=1$, tenemos $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0 e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = 1\,.$
- Si $\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{k-1}\,\mathrm{d}x$ integramos por partes

  $\Gamma(k)=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-x}x^k}{k}\right]_0^b + \frac{1}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x\,,\quad k>0\,,$

  $\Gamma(k)=\frac{1}{k}\Gamma(k+1)\ \Rightarrow \Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$
- También $\Gamma(k+1)=\frac{1}{k+1}\Gamma(k+2)\Rightarrow\Gamma(k)=\frac{1}{k(k+1)}\Gamma(k+2)$

  $\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)}\ \cdots$

  $\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}\,,\quad k\neq 0,-1,-2,\ldots,-(n-1)\,.$
- la fórmula de reflexión de Euler $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}$
- Propiedades de la función $\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\int_0^1\mathrm{d}t\ t^{a-1}(1-t)^{b-1}$

Propiedades de la función $\Gamma(x)$

- Si $k = 1$, tenemos $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\ \right]_0^b = 1\,.$
- Si $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{k-1}\, \mathrm{d}x$ integramos por partes

  $\Gamma(k) = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-x}x^k}{k}\ \right]_0^b + \frac{1}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x} \mathrm{d}x\,, \quad k > 0\,,$

  $\Gamma(k) = \frac{1}{k}\Gamma(k+1) \;\Rightarrow \Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$
- También $\Gamma(k+1) = \frac{1}{k+1}\Gamma(k+2) \Rightarrow \Gamma(k) = \frac{1}{k(k+1)}\Gamma(k+2)$

  $\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)}\ \cdots$

  $\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}\,, \quad k \neq 0, -1, -2, \ldots, -(n-1)\,.$
- la fórmula de reflexión de Euler $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}$
- Propiedades de la función $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\int_0^1 \mathrm{d}t\; t^{a-1}(1-t)^{b-1}$
- Fórmula de Hastings $\Gamma(z+1) = z! =$

  $1 + z(a_1 + z(a_2 + z(a_3 + z(a_4 + z(a_5 + z(a_6 + z(a_7 + za_8)))))))\,.$

Propiedades de la función $\Gamma(x)$

- Si $k=1$, tenemos $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0 e^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\ \right]_0^b=1\,.$
- Si $\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{k-1}\,\mathrm{d}x$ integramos por partes
  $\Gamma(k)=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-x}x^k}{k}\ \right]_0^b+\frac{1}{k}\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x\,,\quad k>0\,,$
  $\Gamma(k)=\frac{1}{k}\Gamma(k+1)\ \Rightarrow\Gamma(k+1)=k\Gamma(k)$
- También $\Gamma(k+1)=\frac{1}{k+1}\Gamma(k+2)\Rightarrow\Gamma(k)=\frac{1}{k(k+1)}\Gamma(k+2)$
  $\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+3)}{k(k+1)(k+2)}\ \cdots$
  $\Gamma(k)=\frac{\Gamma(k+n)}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}\,,\quad k\neq 0,-1,-2,\ldots,-(n-1)\,.$
- la fórmula de reflexión de Euler $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}$
- Propiedades de la función $\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\int_0^1\mathrm{d}t\ t^{a-1}(1-t)^{b-1}$
- Fórmula de Hastings $\Gamma(z+1)=z!=$
  $1+z(a_1+z(a_2+z(a_3+z(a_4+z(a_5+z(a_6+z(a_7+za_8)))))))\,.$
- También la aproximación polinómica
  $\frac{1}{\Gamma(z)}=\sum_{k=1}^\infty C_k\,z^k\Rightarrow\frac{1}{\Gamma(z)}\approx\sum_{k=1}^8 C_k\,z^k\,.$

Recapitulando

En presentación consideramos

1.