Series de Laurent y Residuos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

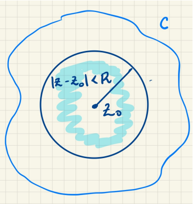
10 de agosto de 2021

Agenda: Series de Laurent y Residuos

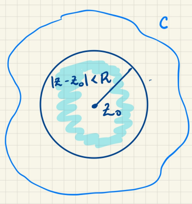
1. Series de Taylor y funciones analíticas
2. Series de Laurent
3. Un ejemplo a pie con $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$
4. Residuos
5. Recapitulando

Series de Taylor y funciones analíticas

- Si $f(z)$ es analítica en un círculo de radio R, encerrado por un contorno $\mathcal{C}$ y centrado en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo $|z - z_0| < R$



- Si $f(z)$ es analítica en un círculo de radio R, encerrado por un contorno $\mathcal{C}$ y centrado en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo $|z - z_0| < R$



- Entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \equiv$ $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + R_n$, con el resto $R_n(z)$ definido como:

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)} \,.$$

Demostración

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right],$$

Demostración

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left[\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right],$$

- Pero alguien muy genial se dio cuenta que $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r} \Rightarrow \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1-r}$.

Demostración

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right],$$

- Pero alguien muy genial se dio cuenta que $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r} \Rightarrow \frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1-r}$.
- Entonces: $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left(\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left(\dfrac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right]$$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- La fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente es:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right],$$

- Pero alguien muy genial se dio cuenta que $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}$.
- Entonces: $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \equiv$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left(\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left(\dfrac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right]$$

- Finalmente, $f(z) = \sum_{j=0}^{n} (z - z_0)^j \left(\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \right) + R_n(z) =$ $\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j + R_n(z)$ donde:
$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\zeta\ \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)}$.

Series de Laurent 1/2

- Si $f(z)$ tiene un polo de orden p, en $z = z_0$, dentro de $\mathcal{R}$, no será analítica. Mientras que la función: $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región.

Series de Laurent 1/2

- Si $f(z)$ tiene un polo de orden p, en $z = z_0$, dentro de $\mathcal{R}$, no será analítica. Mientras que la función: $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región.
- Entonces alrededor de $z = z_0$ tendremos $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$

Series de Laurent 1/2

- Si $f(z)$ tiene un polo de orden p, en $z = z_0$, dentro de $\mathcal{R}$, no será analítica. Mientras que la función: $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región.
- Entonces alrededor de $z = z_0$ tendremos $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
- Es decir $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j =$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{parte analítica}}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2 .$$

- Si $f(z)$ tiene un polo de orden p, en $z = z_0$, dentro de $\mathcal{R}$, no será analítica. Mientras que la función: $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región.
- Entonces alrededor de $z = z_0$ tendremos $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
- Es decir $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j =$
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{parte analítica}}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2 \, .$$
- Con $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \, , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ y
$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-k+1}} dz \, , \quad k = 1, 2, \ldots$

Series de Laurent 2/2

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función $f(z)$ alrededor de un punto $z = z_0$ para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si $f(z)$ es analítica alrededor de $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$.

Series de Laurent 2/2

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función $f(z)$ alrededor de un punto $z = z_0$ para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si $f(z)$ es analítica alrededor de $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$.
- Puede ocurrir que no sólo todos los b_k sean cero para sino que a_0, $a_1, \ldots,$ a_{m-1} sean también cero.

Series de Laurent 2/2

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función $f(z)$ alrededor de un punto $z = z_0$ para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si $f(z)$ es analítica alrededor de $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$.
- Puede ocurrir que no sólo todos los b_k sean cero para sino que a_0, $a_1, \ldots,$ a_{m-1} sean también cero.
- En este caso el primer término distinto de cero es $a_m(z - z_0)^m$ con $m > 0$, entonces que $f(z)$ tiene un cero de orden m en $z = z_0$.

Series de Laurent 2/2

Podemos utilizar la serie de Laurent de una función $f(z)$ alrededor de un punto $z = z_0$ para clasificar la naturaleza de ese punto.

- Si $f(z)$ es analítica alrededor de $z = z_0 \Rightarrow b_k = 0$.
- Puede ocurrir que no sólo todos los b_k sean cero para sino que a_0, $a_1, \ldots,$ a_{m-1} sean también cero.
- En este caso el primer término distinto de cero es $a_m(z - z_0)^m$ con $m > 0$, entonces que $f(z)$ tiene un cero de orden m en $z = z_0$.
- Si $f(z)$ no es analítica en $z = z_0$ se dan dos casos,
    - Es posible encontrar un número entero p tal que $a_{-p} \neq 0$ pero $a_{-p-k} = 0$ para todo entero $k > 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0$. Al valor de b_{-1} se llama el residuo de $f(z)$ en el polo $z = z_0$.
    - No es posible encontrar ese valor mínimo de $-p$. Si las potencias decrecientes negativas de $z - z_0$ no terminan, se dice que $f(z)$ tiene una singularidad esencial.

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de $z=0$

- Tendremos que

$$
\begin{aligned}
f(z) = -\frac{1}{8z(1-z/2)^3} \\
&= -\frac{1}{8z}\left[1+(-3)\left(-\frac{z}{2}\right)+\frac{(-3)(-4)}{2!}\left(-\frac{z}{2}\right)^2\right. \\
&\qquad \left.+\frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(-\frac{z}{2}\right)^3+\cdots\right] \\
&= -\frac{1}{8z}-\frac{3}{16}-\frac{3z}{16}-\frac{5z^2}{32}-\cdots
\end{aligned}
$$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de $z = 0$

- Tendremos que

$$
\begin{aligned}
f(z) = & -\frac{1}{8z(1 - z/2)^3} \\
& = -\frac{1}{8z}\left[1 + (-3)\left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(-\frac{z}{2}\right)^2 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(-\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots \right] \\
& = -\frac{1}{8z} - \frac{3}{16} - \frac{3z}{16} - \frac{5z^2}{32} - \cdots
\end{aligned}
$$

- Como la menor potencia de z es -1, el punto $z = 0$ es un polo de orden 1.

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de $z = 0$

- Tendremos que
$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{8z(1-z/2)^3} \\ &= -\frac{1}{8z}\left[1 + (-3)\left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(-\frac{z}{2}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(-\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{8z} - \frac{3}{16} - \frac{3z}{16} - \frac{5z^2}{32} - \cdots \end{aligned}$$
- Como la menor potencia de z es -1, el punto $z = 0$ es un polo de orden 1.
- El residuo de $f(z)$ en $z = 0$ es el coeficiente de z^{-1} en la expansión de Laurent en ese punto y es igual a $-1/8$.

Un ejemplo $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$, polo $z = 2$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de $z = 2$ cambiando variables $z = 2 + \xi \Rightarrow \xi = z - 2$

- Entonces tendremos

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(2+\xi)\xi^3} = \frac{1}{2\xi^3(1+\xi/2)} \\
&= \frac{1}{2\xi^3}\left[1 - \left(\frac{\xi}{2}\right) + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2\xi^3} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{1}{8\xi} - \frac{1}{16} + \frac{\xi}{32} - \cdots \\
&= \frac{1}{2(z-2)^3} - \frac{1}{4(z-2)^2} + \frac{1}{8(z-2)} - \frac{1}{16} + \frac{z-2}{32} - \cdots
\end{aligned}
$$

Desarrollamos la serie Laurent alrededor de $z = 2$ cambiando variables $z = 2 + \xi \Rightarrow \xi = z - 2$

- Entonces tendremos

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(2+\xi)\xi^3} = \frac{1}{2\xi^3(1+\xi/2)} \\
&= \frac{1}{2\xi^3}\left[1 - \left(\frac{\xi}{2}\right) + \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \cdots\right] \\
&= \frac{1}{2\xi^3} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{1}{8\xi} - \frac{1}{16} + \frac{\xi}{32} - \cdots \\
&= \frac{1}{2(z-2)^3} - \frac{1}{4(z-2)^2} + \frac{1}{8(z-2)} - \frac{1}{16} + \frac{z-2}{32} - \cdots
\end{aligned}
$$

- Notamos que $z = 2$ es un polo de orden 3 y que el residuo de $f(z)$ en $z = 2$ es $1/8$.

Residuos

- Si $f(z)$ es analítica y univaluada en la vecindad de un punto $z = z_0$, entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 0$

Residuos

- Si $f(z)$ es analítica y univaluada en la vecindad de un punto $z = z_0$, entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 0$
- Si $f(z)$ tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en $z = z_0$ dentro de un circuito de $\mathcal{C}$, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) \neq 0$ y expresamos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$
$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$

Residuos

- Si $f(z)$ es analítica y univaluada en la vecindad de un punto $z = z_0$, entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 0$
- Si $f(z)$ tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en $z = z_0$ dentro de un circuito de $\mathcal{C}$, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) \neq 0$ y expresamos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$ $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$
- Con lo cual $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Residuos

- Si $f(z)$ es analítica y univaluada en la vecindad de un punto $z = z_0$, entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$
- Si $f(z)$ tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en $z = z_0$ dentro de un circuito de $\mathcal{C}$, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) \neq 0$ y expresamos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$ $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$
- Con lo cual $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Para el caso particular $n = -1$ llamaremos residuo de $f(z)$ en $z = z_0$ $c_{-1} = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) \mathrm{d}z \quad \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1}$

Residuos

- Si $f(z)$ es analítica y univaluada en la vecindad de un punto $z = z_0$, entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$
- Si $f(z)$ tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en $z = z_0$ dentro de un circuito de $\mathcal{C}$, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) \neq 0$ y expresamos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$
  $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots$
- Con lo cual $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Para el caso particular $n = -1$ llamaremos residuo de $f(z)$ en $z = z_0$
  $c_{-1} = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) \mathrm{d}z \quad \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1}$
- Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, la serie de Laurent es $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \cdots$

- Si $f(z)$ es analítica y univaluada en la vecindad de un punto $z = z_0$, entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$
- Si $f(z)$ tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en $z = z_0$ dentro de un circuito de $\mathcal{C}$, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) \neq 0$ y expresamos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$ $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$
- Con lo cual $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Para el caso particular $n = -1$ llamaremos residuo de $f(z)$ en $z = z_0$ $c_{-1} = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \quad \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1}$
- Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, la serie de Laurent es $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \cdots$
- Entonces $c_{-1} = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \mathrm{lím}_{z=z_0} (z - z_0) f(z)$

Universidad Industrial de Santander CONSTRUIMOS FUTURO

- Si $f(z)$ es analítica y univaluada en la vecindad de un punto $z = z_0$, entonces, el teorema de la integral de Cauchy resulta $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 0$
- Si $f(z)$ tiene un polo (o una singularidad esencial aislada) en $z = z_0$ dentro de un circuito de $\mathcal{C}$, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) \neq 0$ y expresamos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n =$ $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots$
- Con lo cual $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Para el caso particular $n = -1$ llamaremos residuo de $f(z)$ en $z = z_0$ $c_{-1} = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z \quad \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1}$
- Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, la serie de Laurent es $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \cdots$
- Entonces $c_{-1} = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \text{lím}_{z=z_0} (z - z_0) f(z)$
- Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con $p(z)$ y $q(z)$ analíticas en $z = z_0$, $p(z_0) \neq 0$ y $q(z)$ con un cero simple en $z = z_0$. Entonces $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) =$ $\text{lím}_{z\to z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \text{lím}_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)p(z)}{(z-z_0)[q'(z_0)+(z-z_0)q''(z_0)/2+\cdots]} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

En presentación consideramos

1.