# Polinomios de Legendre

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

18 de abril de 2022

# Agenda Polinomios de Legendre

1. Como decíamos ayer: Legendre *vía* Gram-Schmidt
2. Fórmula de Rodrigues
3. Ortogonalidad, norma y expansión de funciones
4. Ecuación diferencial
5. Relación de recurrencia y función generatriz
6. Potencial electrostático de un dipolo
7. Recapitulando

# Los polinomios Legendre *vía* Gram-Schmidt

- Un espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$, tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\right\}$ con un producto interno $\langle \pi^i | \pi_j \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \; \pi_i(t)\pi_j(t)$.

# Los polinomios Legendre *vía* Gram-Schmidt

- Un espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$, tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\right\}$ con un producto interno $\langle \pi^i | \pi_j \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\ \pi_i(t)\pi_j(t)$.
- Entonces los polinomios de Legendre surgen a partir del método de ortogonalización de Gram-Schmidt

| $\|\pi_n\rangle$ | $\|P_n\rangle$ | $\left\|\hat{P}_n\right\rangle$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $t$ | $t$ | $\sqrt{\frac{3}{2}}\ t$ |
| $t^2$ | $t^2 - \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3t^2 - 1\right)$ |
| $t^3$ | $t^3 - \frac{3}{5}t$ | $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5t^3 - 3t\right)$ |
| $t^4$ | $t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}$ | $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

# Fórmula de Rodrigues

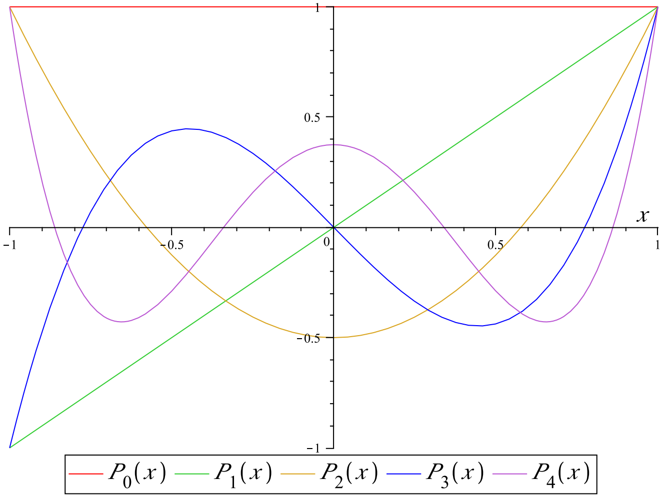
- El **Teorema de aproximación polinómica de Weiernstrass** Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un $n$ suficientemente grande y un $\epsilon$ suficientemente pequeño $|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall \; x \in [a, b]$

# Fórmula de Rodrigues

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weiernstrass** Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un $n$ suficientemente grande y un $\epsilon$ suficientemente pequeño $|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall\ x \in [a, b]$
- La base ortonormal de **Polinomios de Legendre** en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ vienen construidos a partir de la Fórmula de Rodrígues $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $P_0(x) = 1$.

- El **Teorema de aproximación polinómica de Weiernstrass** Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios, para un $n$ suficientemente grande y un $\epsilon$ suficientemente pequeño $|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall\ x \in [a, b]$
- La base ortonormal de **Polinomios de Legendre** en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ vienen construidos a partir de la Fórmula de Rodrígues $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $P_0(x) = 1$.
- Esto es:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$




$P_n(x)$ tiene $n$ raíces reales en el intervalo $(-1, 1)$

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por
  $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.
  Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

## Ortogonalidad, norma y expansión de funciones

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.
  Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.
- La norma de los polinomios de Legendre es $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por
$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.
Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.
- La norma de los polinomios de Legendre es $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$.
- Los Polinomios de Legendre son un conjunto completo de funciones y expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado $x \in [-1,1]$, esto es $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t\right]}_{a_k} P_k(x)$.

- Los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente por
  $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.
  Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.
- La norma de los polinomios de Legendre es $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$.
- Los Polinomios de Legendre son un conjunto completo de funciones y expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$, esto es $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t\right]}_{a_k} P_k(x)$.
- Esto es $f(x) =$
  $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1} tf(t)\mathrm{d}t\right] P_1(x) + \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^2-1)f(t)\mathrm{d}t\right] P_2(x) +$
  $+\frac{7}{4}\left[\int_{-1}^{1}(5t^3-3t)f(t)\mathrm{d}t\right] P_3(x) +$
  $\frac{9}{16}\left[\int_{-1}^{1}(35t^4-30t^2+3)f(t)\mathrm{d}t\right] P_4(x) + \cdots$

# Ecuación diferencial

- Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria
$$(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} + n(n+1)\,P_n(x) = 0$$

- Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria
$(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} + n(n+1)\,P_n(x) = 0$
- ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones

| $n$ | Ecuación de Legendre | Solución |
|---|---|---|
| 0 | $(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}P_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0$ | $P_0(x) = 1$ |
| 1 | $(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_1(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}P_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2\,P_1(x) = 0$ | $P_1(x) = x$ |
| 2 | $(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_2(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}P_2(x)}{\mathrm{d}x} + 6\,P_2(x) = 0$ | $P_2(x) = 1-3x^2$ |
| 3 | $(1-x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_3(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}P_3(x)}{\mathrm{d}x} + 12\,P_3(x) = 0$ | $P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$ |

# Relación de recurrencia y función generatriz

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = \ (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.

# Relación de recurrencia y función generatriz

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = \ (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t,x)$ de los polinomios de Legendre, es: $\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) \ + P_1(x) \ t + P_2(x) \ t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \ t^n \, , \ |t| < 1 \, , |x| \leq 1$. Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = \ (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t,x)$ de los polinomios de Legendre, es: $\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) \ + P_1(x) \ t + P_2(x) \ t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \ t^n \,, \ |t| < 1\,, |x| \leq 1$. Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo $n$.

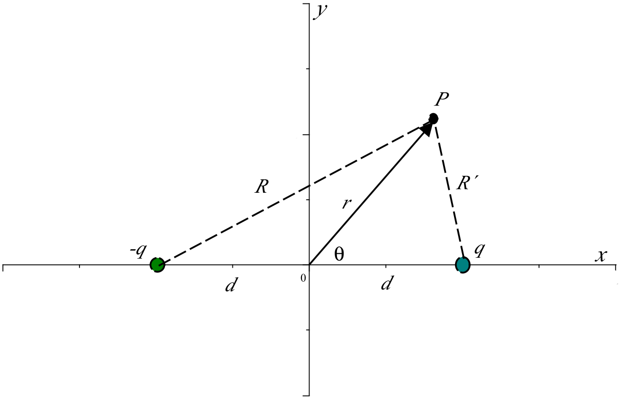
# Relación de recurrencia y función generatriz

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = \ (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t,x)$ de los polinomios de Legendre, es: $\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) \ + P_1(x)\ t + P_2(x)\ t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n\,,\ |t| < 1\,, |x| \leq 1$. Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo $n$.
- Tienen una representación integral de la forma $P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \mathrm{d}\varphi$

- La relación de recurrencia para los polinomios de Legendre es $(n+1)P_{n+1}(x) = \ (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$. Podremos generar todos los polinomios si recordamos que $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$.
- La función generatriz $\mathcal{P}(t,x)$ de los polinomios de Legendre, es: $\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x) \ + P_1(x)\ t + P_2(x)\ t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n\,,\ |t| < 1\,, |x| \leq 1$. Los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias que converge para $|2xt + t^2| < 1$.
- Los polinomios de Legendre, cumplen con la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo $n$.
- Tienen una representación integral de la forma $P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \mathrm{d}\varphi$
- ecuaciones diferenciales equivalentes
  - Forma autoadjunta $\left[(1-x^2)\ y'\right]' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$
  - Con $u = P_n(\cos(\theta))$, tenemos $\frac{1}{\mathrm{sen}\,(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\mathrm{sen}\,(\theta)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda(\lambda+1)u = 0$
  - Con $u = \sqrt{\mathrm{sen}\,\theta}\,P_n(\cos\theta)$ tendremos $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + \left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\mathrm{sen}^2(\theta)}\right]u = 0$

# Potencial electrostático de un dipolo

Consideremos un dipolo donde $V = q\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$




Donde $(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\theta)$ y $R^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)$

- Entonces

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n, \text{ y}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\left(\pi - \theta\right)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$$

# Potencial electrostático de un dipolo

- Entonces
  $\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$, y
  $\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\left(\pi - \theta\right)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$
  $= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n$.

- Entonces
  $\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$, y
  $\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\left(\pi - \theta\right)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$
  $= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n$.
- Todos los términos pares de $P_n(\cos(\theta))$ se anulan y tendremos
  $V = \frac{2q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta))\ \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}$

# Potencial electrostático de un dipolo

- Entonces
$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$, y
$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\left(\pi - \theta\right)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$
$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos(\pi - \theta)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta))\left(\frac{d}{r}\right)^n$
- El potencial será $V = \frac{q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n$.
- Todos los términos pares de $P_n(\cos(\theta))$ se anulan y tendremos
$V = \frac{2q}{r}\ \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta))\ \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}$
- Si $\frac{d}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V \approx \frac{q}{r^2}\ 2d\cos(\theta)$.

En presentación consideramos

1.