Método de Frobenius

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

27 de septiembre de 2021

Agenda Método Frobenious

1. Puntos singulares regulares
2. Método Frobenius
   - Caso $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero.
   - Caso $m_1 = m_2 = m$
   - Caso $m_1 \neq m_2$ con $m_1 - m_2 = N$, y N entero.
3. Recapitulando

Puntos singulares regulares

- Dada una ecuación diferencial de segundo orden:
$$y'' + F_1(x)y' + F_2(x)\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}\ y = 0\,,$$

Puntos singulares regulares

- Dada una ecuación diferencial de segundo orden:
  $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}\ y = 0\,,$
- $F_1(x)$ y $F_2(x)$ con singularidades regulares en $x = x_0$ y
- $f_1(x)$ y $f_2(x)$ analíticas en $x = x_0$.

Puntos singulares regulares

- Dada una ecuación diferencial de segundo orden:
  $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}\ y = 0\,,$
- $F_1(x)$ y $F_2(x)$ con singularidades regulares en $x = x_0$ y
- $f_1(x)$ y $f_2(x)$ analíticas en $x = x_0$.
- La propuesta de solución será una serie de Frobenius
  $y(x) = (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n\ ,$

Puntos singulares regulares

- Dada una ecuación diferencial de segundo orden:
  $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)\ y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}\ y = 0\,,$
- $F_1(x)$ y $F_2(x)$ con singularidades regulares en $x = x_0$ y
- $f_1(x)$ y $f_2(x)$ analíticas en $x = x_0$.
- La propuesta de solución será una serie de Frobenius
  $y(x) = (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n\ ,$
- n es entero positivo y m entero (positivo o negativo) o racional.
- Frobenius incluye Taylor y Laurent como casos particulares.

Método Frobenius con $x_0 = 0$

- Consideremos $x_0 = 0 \Rightarrow y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2}\, y = 0$

Método Frobenius con $x_0 = 0$

- Consideremos $x_0 = 0 \Rightarrow y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2}\, y = 0$
- Entonces $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas en $x = 0$. Proponemos $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Tendremos que $y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2}\, y = 0 \Rightarrow$
  $x^2 y'' + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) y' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) y = 0\,.$

Método Frobenius con $x_0 = 0$

- Consideremos $x_0 = 0 \Rightarrow y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2}\ y = 0$
- Entonces $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas en $x = 0$. Proponemos $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Tendremos que $y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2}\ y = 0 \Rightarrow$ $x^2 y'' + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) y' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) y = 0\,.$
- Propuesta Frobenius $\Rightarrow y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ implica
  - $y'(x) = m x^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + x^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n x^{n-1}\right)$;
  - $y''(x) = m(m-1) x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + 2m x^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right) + x^m \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right)$,

- Consideremos $x_0 = 0 \Rightarrow y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2} \, y = 0$
- Entonces $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas en $x = 0$. Proponemos $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
- Tendremos que $y'' + \frac{f_1(x)}{x} y' + \frac{f_2(x)}{x^2} \, y = 0 \Rightarrow$ $x^2 y'' + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) y' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) y = 0 \,.$
- Propuesta Frobenius $\Rightarrow y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ implica
  - $y'(x) = m x^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + x^m \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \, a_n x^{n-1}\right) \; ;$
  - $y''(x) = m(m-1) x^{m-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + 2m x^{m-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right) +$ $x^m \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\right) \; ,$
- $x^2 \left[m(m-1) x^{m-2} \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2m x^{m-1} \; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right.$ $\left. + x^m \; \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right] +$ $+ x \; \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \; \left[m x^{m-1} \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^m \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] +$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \; x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \, ,$

Método Frobenius con $x_0 = 0$, cont..

- Con x^m factor común tendremos
$$x^m \left[m(m-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2m\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \right.$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ \left[m\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n\right] +$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = 0\,.$$

- Esto nos permite reacomodar $a_0\mu(m)x^m +$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \ \mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right]\right] x^{m+n} = 0$$

Método Frobenius con $x_0 = 0$, cont..

- Con x^m factor común tendremos
$$x^m \left[m(m-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2m \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \right.$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ \left[m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] +$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = 0\,.$$
- factorizando para los términos de igual potencia:
$$\left\{ a_0 \left[m(m-1) + b_0 m + c_0 \right] \right\} x^m +$$
$$+ \left\{ a_1 \left[m(m+1) + b_0 (m+1) + c_0 \right] + a_0 \left[b_1 m + c_1 \right] \right\} x^{m+1} +$$
$$+ \left\{ a_2 \left[(m+2)(m+1) + b_0 (m+2) + c_0 \right] + a_1 \left[b_1 (m+1) + c_1 \right] \right.$$
$$\left. + a_0 \left[b_2 m + c_2 \right] \right\} x^{m+2} \ \ldots \ \vdots$$
$$\left\{ a_n \left[(m+n)(m+n-1) + b_0 (m+n) + c_0 \right] + a_{n-1} \left[b_1 (m+n-1) + c_1 \right. \right.$$
$$+ a_{n-2} \left[b_2 (m+n-2) + c_2 \right] + + a_{n-3} \left[b_3 (m+n-3) + c_3 \right] +$$
$$\left. + \cdots + a_1 \left[b_{n-1} (m+1) + c_{n-1} \right] \ a_0 \left[b_n m + c_n \right] \right\} x^{m+n} = 0$$
- Esto nos permite reacomodar $a_0 \mu(m) x^m +$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \ \mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k} \right] \right] x^{m+n} = 0$$

Método Frobenius con $x_0 = 0$, cont..

- La ecuación indicadora surge de anular el coeficiente x^m
  $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$

Método Frobenius con $x_0 = 0$, cont..

- La ecuación indicadora surge de anular el coeficiente x^m
  $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$
- La relación de recurrencia surge de anular el coeficiente x^{m+n},
  $a_n \mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$

Método Frobenius con $x_0 = 0$, cont..

- La ecuación indicadora surge de anular el coeficiente x^m
  $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$
- La relación de recurrencia surge de anular el coeficiente x^{m+n},
  $a_n \mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$
- Se distinguen tres casos
  1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero. La solución general será
     $$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = |x|^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y_2(x) = |x|^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$
  2. $m_1 = m_2 = m$. La solución general será
     $$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = |x|^{m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y_2(x) = y_1(x) \ln x + |x|^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{array}\right\} \Rightarrow$$
     $$\Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$
  3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$, con N entero positivo. La solución general será
     $$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = |x|^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y_2(x) = y_1(x) \ln x + |x|^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{array}\right\} \Rightarrow$$
     $$\Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Caso $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero.

1. Consideremos $x^2 \; y'' + x \left(x + \frac{1}{2}\right) y' - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \; y = 0$, con un polo regular en $x = 0$

1. Consideremos $x^2\; y'' + x\left(x + \frac{1}{2}\right) y' - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\; y = 0$, con un polo regular en $x = 0$
2. Identificando

$$f_1(x) = \frac{1}{2} + x\,, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2} - x^2 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{2}\,,\; b_1 = 1 \\ c_0 = -\frac{1}{2}\,,\; c_1 = 0\,,\; c_2 = -1\,, \end{array} \right.$$

el resto de los coeficientes son: $b_2 = b_3 = \cdots = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = 0$

Caso $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero.

1. Consideremos $x^2\, y'' + x\left(x + \frac{1}{2}\right) y' - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\; y = 0$, con un polo regular en $x = 0$
2. Identificando

$$f_1(x) = \frac{1}{2} + x\,, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2} - x^2 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{2}\,,\; b_1 = 1 \\ c_0 = -\frac{1}{2}\,,\; c_1 = 0\,,\; c_2 = -1\,, \end{array} \right.$$

el resto de los coeficientes son: $b_2 = b_3 = \cdots = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = 0$

3. La ecuación indicadora

$$m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \Rightarrow m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Caso $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$, con N entero.

1. Consideremos $x^2\; y'' + x\left(x+\frac{1}{2}\right) y' - \left(x^2+\frac{1}{2}\right)\; y = 0$, con un polo regular en $x = 0$
2. Identificando
$$f_1(x) = \frac{1}{2}+x\,, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}-x^2 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{2}\,,\; b_1 = 1 \\ c_0 = -\frac{1}{2}\,,\; c_1 = 0\,,\; c_2 = -1\,, \end{array} \right.$$
el resto de los coeficientes son: $b_2 = b_3 = \cdots = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = 0$
3. La ecuación indicadora
$$m(m-1)+b_0 m+c_0 = 0 \Rightarrow m(m-1)+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$
4. La relación de recurrencia anula el coeficiente x^{m+n}
$a_n\mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\;\left[(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0$
$a_n\left[(m+n)(m+n-1) + \frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}\right] + a_{n-1}(m+n-1) - a_{n-2} = 0$
$a_n\left[m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right] + a_{n-1}(m+n-1) - a_{n-2} = 0$

1. La relación de recurrencia
$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}(m+n-1)}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \text{ para } n \geq 2$$

1. La relación de recurrencia
$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}(m+n-1)}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \text{ para } n \geq 2$$
2. Para $m = 1 \quad \Rightarrow a_n = \dfrac{a_{n-2} - na_{n-1}}{2n + n^2 - \frac{1}{2}n}$ para $n \geq 2$.

   Para poder ejecutarla necesitamos calcular a_1 en términos de a_0

1. La relación de recurrencia
$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}(m+n-1)}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \text{ para } n \geq 2$$
2. Para $m = 1 \quad \Rightarrow a_n = \dfrac{a_{n-2} - na_{n-1}}{2n + n^2 - \frac{1}{2}n}$ para $n \geq 2$.
Para poder ejecutarla necesitamos calcular a_1 en términos de a_0
3. y lo obtenemos del coeficiente x^{m+1}
$$a_1\left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0\left[b_1 m + c_1\right] = 0$$
$$a_1\left[1(1+1) + \tfrac{1}{2}(1+1) - \tfrac{1}{2}\right] + a_0\left[1+0\right] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -\tfrac{2}{5}a_0$$

1. La relación de recurrencia
$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}(m+n-1)}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \text{ para } n \geq 2$$
2. Para $m = 1 \quad \Rightarrow a_n = \dfrac{a_{n-2} - na_{n-1}}{2n + n^2 - \frac{1}{2}n}$ para $n \geq 2$.
   Para poder ejecutarla necesitamos calcular a_1 en términos de a_0
3. y lo obtenemos del coeficiente x^{m+1}
$$a_1 \left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0 \left[b_1 m + c_1\right] = 0$$
$$a_1 \left[1(1+1) + \tfrac{1}{2}(1+1) - \tfrac{1}{2}\right] + a_0 \left[1+0\right] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -\tfrac{2}{5} a_0$$
4. y la primera solución será
$$y_1(x) = a_0 \,|x| \left(1 - \tfrac{2}{5}x + \tfrac{9}{35}x^2 - \tfrac{82}{945}x^3 + \tfrac{571}{20790}x^4 + \cdots\right) .$$

1. La relación de recurrencia
$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}(m+n-1)}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \quad \text{para } n \geq 2$$
2. Para $m = 1 \quad \Rightarrow a_n = \dfrac{a_{n-2} - na_{n-1}}{2n + n^2 - \frac{1}{2}n}$ para $n \geq 2$.
   Para poder ejecutarla necesitamos calcular a_1 en términos de a_0
3. y lo obtenemos del coeficiente x^{m+1}
$$a_1 \left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0 \left[b_1 m + c_1\right] = 0$$
$$a_1 \left[1(1+1) + \tfrac{1}{2}(1+1) - \tfrac{1}{2}\right] + a_0 \left[1+0\right] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -\tfrac{2}{5}a_0$$
4. y la primera solución será
$$y_1(x) = a_0 \, |x| \left(1 - \tfrac{2}{5}x + \tfrac{9}{35}x^2 - \tfrac{82}{945}x^3 + \tfrac{571}{20790}x^4 + \cdots\right) .$$
5. Repitiendo el proceso para $m = -\frac{1}{2}$, obtendremos
$$y_2(x) = |x|^{-\frac{1}{2}} \left[1 - x + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{13}{18}x^3 + \tfrac{119}{360}x^4 + \cdots\right]$$

Caso $m_1 = m_2 = m$

1. Consideremos la ecuación de Bessel $x^2\, y'' + x\, y' + x^2\, y = 0\,.$

Caso $m_1 = m_2 = m$

1. Consideremos la ecuación de Bessel $x^2\, y'' + x\, y' + x^2\, y = 0\,.$
2. Identificando $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = x^2$.
   Entonces: $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.

Caso $m_1 = m_2 = m$

1. Consideremos la ecuación de Bessel $x^2\ y'' + x\ y' + x^2\ y = 0\,.$
2. Identificando $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = x^2$.
   Entonces: $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \Rightarrow$
   $m(m-1) + m = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \quad \Rightarrow m = 0$

Caso $m_1 = m_2 = m$

1. Consideremos la ecuación de Bessel $x^2\ y'' + x\ y' + x^2\ y = 0\,.$
2. Identificando $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = x^2$.
   Entonces: $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \Rightarrow$
   $m(m-1) + m = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \quad \Rightarrow m = 0$
4. La relación de recurrencia anula el coeficiente x^{m+n}
   $a_n\mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \left[(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0$
   $a_n\mu(m+n) + a_{n-2}\ \left[(m+n-1)b_2 + c_2\right] + a_{n-1}\ \left[(m+n-1)b_1 + c_1\right]$
   para $m = 0 \Rightarrow a_n n^2 + a_{n-2}\ \left[(0+n-1)0+1\right] + a_{n-1}\ \left[(0+n-1)0+0\right]$
   $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$ para $n \geq 2$.

1. Consideremos la ecuación de Bessel $x^2\ y'' + x\ y' + x^2\ y = 0\,.$
2. Identificando $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = x^2$.
   Entonces: $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \Rightarrow$
   $m(m-1) + m = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \quad \Rightarrow m = 0$
4. La relación de recurrencia anula el coeficiente x^{m+n}
   $a_n\mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \left[(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0$
   $a_n\mu(m+n) + a_{n-2}\ \left[(m+n-1)b_2 + c_2\right] + a_{n-1}\ \left[(m+n-1)b_1 + c_1\right]$
   para $m = 0 \Rightarrow a_n n^2 + a_{n-2}\ \left[(0+n-1)0+1\right] + a_{n-1}\ \left[(0+n-1)0+0\right]$
   $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$ para $n \geq 2$.
5. Al anular el coeficiente de x^{m+1} mostramos que $a_1 = 0$
   $a_1\left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0\left[b_1 m + c_1\right] = 0$
   $a_1[0(0+1) + (0+1) + 0] + a_0[0+0] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0\,.$

Caso $m_1 = m_2 = m$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

1. Consideremos la ecuación de Bessel $x^2\, y'' + x\, y' + x^2\, y = 0\,.$
2. Identificando $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = x^2$.
   Entonces: $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora $\mu(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \Rightarrow$
   $m(m-1) + m = 0 \Rightarrow m^2 = 0 \quad \Rightarrow m = 0$
4. La relación de recurrencia anula el coeficiente x^{m+n}
   $a_n\mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \left[(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0$
   $a_n\mu(m+n) + a_{n-2}\ \left[(m+n-1)b_2 + c_2\right] + a_{n-1}\ \left[(m+n-1)b_1 + c_1\right]$
   para $m = 0 \Rightarrow a_n n^2 + a_{n-2}\ \left[(0+n-1)0+1\right] + a_{n-1}\ \left[(0+n-1)0+0\right]$
   $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$ para $n \geq 2$.
5. Al anular el coeficiente de x^{m+1} mostramos que $a_1 = 0$
   $a_1\left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0\left[b_1 m + c_1\right] = 0$
   $a_1[0(0+1) + (0+1) + 0] + a_0[0+0] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0\,.$
6. Y la primera solución será
   $$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}\right] = a_0 J_0(x)$$
   Donde $J_0(x)$ se conoce como la función de Bessel de primera especie

1. Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye $y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ en la ecuación: $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

Caso $m_1 = m_2 = m$ Cont..

1. Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye $y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ en la ecuación: $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$
2. al sustituir en la ecuación diferencial: $x^2\left[J_0''\ln(x) + 2\frac{J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^{n-2}\right] +$ $x\left[J_0'\ln(x) + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\right] +$ $x^2\left[J_0\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right] = 0$

UNIVERSIDAD Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

1. Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye $y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ en la ecuación: $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$
2. al sustituir en la ecuación diferencial:
$$x^2\left[J_0''\ln(x) + 2\frac{J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^{n-2}\right] +$$
$$x\left[J_0'\ln(x) + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\right] +$$
$$x^2\left[J_0\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right] = 0$$
3. Acomodando $\left[\underbrace{x^2J_0'' + xJ_0' + x^2J_0}_{=0}\right]\ln(x) + 2xJ_0' +$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2} = 0$$

1. Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye $y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ en la ecuación: $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$
2. al sustituir en la ecuación diferencial:
$$x^2\left[J_0''\ln(x) + 2\frac{J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^{n-2}\right] +$$
$$x\left[J_0'\ln(x) + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\right] +$$
$$x^2\left[J_0\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right] = 0$$
3. Acomodando $\left[\underbrace{x^2J_0'' + xJ_0' + x^2J_0}_{=0}\right]\ln(x) + 2xJ_0' +$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2} = 0$$
4. Por lo tanto
$$B_1x + 2^2B_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left(B_n n^2 + B_{n-2}\right)x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

1. Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye $y_2(x) = J_0(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ en la ecuación: $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$
2. al sustituir en la ecuación diferencial:
$$x^2\left[J_0''\ln(x) + 2\frac{J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^{n-2}\right] +$$
$$x\left[J_0'\ln(x) + \frac{J_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\right] +$$
$$x^2\left[J_0\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right] = 0$$
3. Acomodando $\left[\underbrace{x^2 J_0'' + xJ_0' + x^2 J_0}_{=0}\right]\ln(x) + 2xJ_0' +$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2} = 0$$
4. Por lo tanto
$$B_1 x + 2^2 B_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left(B_n n^2 + B_{n-2}\right)x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$
5. Finalmente
$$y_2(x) \equiv Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left[\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}S_n\, x^{2n}\right],$$

1. Si $m_1 > m_2$, entonces tendremos que $m_1 = m_2 + N$, y las ecuaciones indicadoras nos indican $\mu(m_1) = m_1(m_1 - 1) + b_0 m_1 + c_0 = 0$ y $\mu(m_2) \equiv \mu(m_1 + N) = (m_1 + N)(m_1 + N - 1) + b_0(m_1 + N) + c_0 = 0$

Caso $m_1 \neq m_2$ con $m_1 - m_2 = N$, y N entero

1. Si $m_1 > m_2$, entonces tendremos que $m_1 = m_2 + N$, y las ecuaciones indicadoras nos indican $\mu(m_1) = m_1(m_1 - 1) + b_0 m_1 + c_0 = 0$ y $\mu(m_2) \equiv \mu(m_1 + N) = (m_1 + N)(m_1 + N - 1) + b_0(m_1 + N) + c_0 = 0$
2. Como las raíces difieren en un entero hay un momento en el cual se cumple para el coeficiente x^{m+N}, que $a_N \mu(m+N) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \ [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$ y el término $\mu(m+N)$ se anula. Distinguimos dos posibles casos
   - El segundo término se anula idénticamente $\sum_{k=0}^{N-1} a_k \ [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$
   - El segundo término no se anula idénticamente $\sum_{k=0}^{N-1} a_k \ [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \neq 0$

1. Considere la ecuación de Bessel, de orden fraccionario
$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

1. Considere la ecuación de Bessel, de orden fraccionario
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$
2. Identificando: $f_1(x) = 1$, y $f_2(x) = -\frac{1}{4} + x^2$ y consecuentemente $b_0 = 1$, $c_0 = -\frac{1}{4}$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.

1. Considere la ecuación de Bessel, de orden fraccionario
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$
2. Identificando: $f_1(x) = 1$, y $f_2(x) = -\frac{1}{4} + x^2$ y consecuentemente $b_0 = 1$, $c_0 = -\frac{1}{4}$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora
$m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \quad \Rightarrow m(m-1) + m - \frac{1}{4} = m^2 - \frac{1}{4} = 0.$
Con lo cual $m = \pm\frac{1}{2}$ y $N = 1$

1. Considere la ecuación de Bessel, de orden fraccionario
$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$
2. Identificando: $f_1(x) = 1$, y $f_2(x) = -\frac{1}{4} + x^2$ y consecuentemente $b_0 = 1$, $c_0 = -\frac{1}{4}$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora
$$m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \quad \Rightarrow m(m-1) + m - \frac{1}{4} = m^2 - \frac{1}{4} = 0.$$
Con lo cual $m = \pm\frac{1}{2}$ y $N = 1$
4. El coeficiente $x^{m+N} \equiv x^{m+1}$ es
$$a_1 \left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0 \left[b_1 m + c_1\right] = 0$$
$$a_1 \left[m^2 + 2m + \frac{3}{4}\right] + a_0 \left[0\right] = 0$$

1. Considere la ecuación de Bessel, de orden fraccionario
$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$
2. Identificando: $f_1(x) = 1$, y $f_2(x) = -\frac{1}{4} + x^2$ y consecuentemente $b_0 = 1$, $c_0 = -\frac{1}{4}$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora
$m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \quad \Rightarrow m(m-1) + m - \frac{1}{4} = m^2 - \frac{1}{4} = 0.$
Con lo cual $m = \pm\frac{1}{2}$ y $N = 1$
4. El coeficiente $x^{m+N} \equiv x^{m+1}$ es
$a_1 \left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0 \left[b_1 m + c_1\right] = 0$
$a_1 \left[m^2 + 2m + \frac{3}{4}\right] + a_0 \left[0\right] = 0$
5. Para la raíz menor $m_2 = -\frac{1}{2}$
$a_1[m^2 + 2m + \frac{3}{4}] + a_0[0] = 0 \quad \Rightarrow a_1[0] + a_0[0] = 0$ y cualquier valor de a_1 y a_0 estarán permitidos.

1. La relación de recurrencia anula el coeficiente x^{m+n}
$a_n\mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$
$a_n\mu(m+n) + a_{n-2}\ [(m+n-1)b_2 + c_2] + a_{n-1}\ [(m+n-1)b_1 + c_1] = 0$
$a_n\left[\left(-\frac{1}{2}+n\right)\left(-\frac{3}{2}+n\right) + \left(-\frac{1}{2}+n\right) - \frac{1}{4}\right] + a_{n-1}\,[0] + a_{n-2}\,[1] = 0$
$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2-n}$ con $n \geq 2$.

1. La relación de recurrencia anula el coeficiente x^{m+n}
$a_n\mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$
$a_n\mu(m+n) + a_{n-2} \ [(m+n-1)b_2 + c_2] + a_{n-1} \ [(m+n-1)b_1 + c_1] = 0$
$a_n \left[\left(-\frac{1}{2}+n\right)\left(-\frac{3}{2}+n\right) + \left(-\frac{1}{2}+n\right) - \frac{1}{4}\right] + a_{n-1}\,[0] + a_{n-2}\,[1] = 0$
$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2-n}$ con $n \geq 2$.
2. La solución general será
$y(x) = a_0 \ x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right) +$
$+a_1 \ x^{-\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\right)$

1. La relación de recurrencia anula el coeficiente x^{m+n}
$a_n\mu(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \;\left[(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0$
$a_n\mu(m+n) + a_{n-2}\left[(m+n-1)b_2 + c_2\right] + a_{n-1}\left[(m+n-1)b_1 + c_1\right] = 0$
$a_n\left[\left(-\frac{1}{2}+n\right)\left(-\frac{3}{2}+n\right) + \left(-\frac{1}{2}+n\right) - \frac{1}{4}\right] + a_{n-1}\left[0\right] + a_{n-2}\left[1\right] = 0$
$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2-n}$ con $n \geq 2$.
2. La solución general será
$y(x) = a_0\; x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right) +$
$+a_1\; x^{-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\right)$
3. Equivalentemente $y(x) = a_0\; x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right)$
$+a_1\; x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \cdots\right)$.

1. Considere la ecuación diferencial $x^2 y'' + x(2-x)y' + \left(x^2+2\right) y = 0$

1. Considere la ecuación diferencial $x^2 y'' + x(2-x)y' + \left(x^2+2\right) y = 0$
2. Identificando: $f_1(x) = -2 + x$, y $f_2(x) = 2 + x^2$ y consecuentemente $b_0 = -2$, $b_1 = 1$, $c_0 = 2$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.

1. Considere la ecuación diferencial $x^2y'' + x(2-x)y' + \left(x^2+2\right)y = 0$
2. Identificando: $f_1(x) = -2 + x$, y $f_2(x) = 2 + x^2$ y consecuentemente $b_0 = -2$, $b_1 = 1$, $c_0 = 2$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora $m^2 - 3m + 2 = 0$.
   Con lo cual $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ y $N = 1$.

1. Considere la ecuación diferencial $x^2 y'' + x(2-x)y' + \left(x^2+2\right) y = 0$
2. Identificando: $f_1(x) = -2 + x$, y $f_2(x) = 2 + x^2$ y consecuentemente $b_0 = -2$, $b_1 = 1$, $c_0 = 2$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora $m^2 - 3m + 2 = 0$.
   Con lo cual $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ y $N = 1$.
4. Como $N = 1$ al anular el coeficiente x^{m+1} tendremos
   $a_1 \left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0 \left[b_1 m + c_1\right] = 0$
   $a_1 \left[m^2 - m\right] + a_0 \left[m\right] = 0$, para $m = 2$,
   $a_1 \left[2\right] + a_0 \left[2\right] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -a_0$

1. Considere la ecuación diferencial $x^2y'' + x(2-x)y' + \left(x^2+2\right)y = 0$
2. Identificando: $f_1(x) = -2 + x$, y $f_2(x) = 2 + x^2$ y consecuentemente $b_0 = -2$, $b_1 = 1$, $c_0 = 2$, $c_1 = 0$, y $c_2 = 1$.
3. La ecuación indicadora $m^2 - 3m + 2 = 0$.
   Con lo cual $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ y $N = 1$.
4. Como $N = 1$ al anular el coeficiente x^{m+1} tendremos
   $a_1\left[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0\right] + a_0\left[b_1 m + c_1\right] = 0$
   $a_1\left[m^2 - m\right] + a_0\left[m\right] = 0$, para $m = 2$,
   $a_1\left[2\right] + a_0\left[2\right] = 0 \quad \Rightarrow a_1 = -a_0$
5. La relación de recurrencia proviene de anular el coeficiente de x^{m+n}, para $m = 2$:
   $a_n[(2+n)(2+n-1) - 2(2+n) + 2] + a_{n-1}[(2+n-1) + 0] +$
   $a_{n-2}[0(2+n-2) + 1] = 0$
   $a_n\left[(2+n)(1+n) - 2n - 2\right] + a_{n-1}[1+n] + a_{n-2}[1] = 0$
   $a_n[n^2 + n] = -a_{n-1}[1+n] - a_{n-2}$, para $n \geq 2$

1. Por lo cual para $m = 2$ tendremos
$y_1(x) = x^2\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \cdots\right)$

1. Por lo cual para $m = 2$ tendremos
   $y_1(x) = x^2\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \cdots\right)$
2. La segunda solución linealmente independiente para $m = 1$ será
   $y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$

1. Por lo cual para $m = 2$ tendremos
$y_1(x) = x^2\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \cdots\right)$
2. La segunda solución linealmente independiente para $m = 1$ será
$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$
3. Finalmente, la solución general puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(x) = \; & C_1\, x^2\left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 - \frac{7}{720}x^4 + \frac{31}{10800}x^5 + \ldots\right) + \\ & + C_2\, \left[x^2\ln(x)\left(-1 + x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \frac{7}{720}x^4 + \ldots\right)\right. \\ & \left. + x\left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{19}{36}x^3 - \frac{53}{432}x^4 - \frac{1}{675}x^5 + \ldots\right)\right]. \end{aligned}$$

que queda como ejercicio para el lector

Recapitulando

En presentación consideramos

1.
2.