Coordenadas curvilíneas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

7 de febrero de 2022

Agenda: Coordenadas curvilíneas

Coordenadas curvilíneas 1/2

Consideremos un sistema de coordenadas generalizadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ tales que $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \quad \Leftrightarrow \quad q^i = q^i(\tilde{q}^j)\,, \quad \text{con} \quad i, j = 1, 2, 3.$

- Nuestro vector posición en la base canónica será
  $|r\rangle = x(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_z\rangle,$

Coordenadas curvilíneas 1/2

Consideremos un sistema de coordenadas generalizadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ tales que $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \quad \Leftrightarrow \quad q^i = q^i(\tilde{q}^j)\,, \quad \text{con} \quad i,j = 1,2,3.$

- Nuestro vector posición en la base canónica será $|r\rangle = x(q^1,q^2,q^3)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(q^1,q^2,q^3)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z(q^1,q^2,q^3)\,|\mathrm{e}_z\rangle,$
- y el vector desplazamiento diferencial $\mathrm{d}\mathbf{r} \equiv |\mathrm{d}r\rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2}\mathrm{d}q^2 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3}\mathrm{d}q^3.$

Consideremos un sistema de coordenadas generalizadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ tales que $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \quad \Leftrightarrow \quad q^i = q^i(\tilde{q}^j)\,, \quad$ con $\quad i,j = 1,2,3.$

- Nuestro vector posición en la base canónica será
$|r\rangle = x(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z(q^1, q^2, q^3)\,|\mathrm{e}_z\rangle,$
- y el vector desplazamiento diferencial
$\mathrm{d}\mathbf{r} \equiv |\mathrm{d}r\rangle = \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1 + \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\mathrm{d}q^2 + \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\mathrm{d}q^3.$
- Por consiguiente, podemos construir la métrica $\mathrm{d}s^2 \equiv \langle \mathrm{d}r\,|\mathrm{d}r\rangle =$

$$\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\,\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q^j = g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g_{ij} = \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j} \\ \\ h_j = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\| \\ \\ |\mathrm{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j} \\ \\ \left\langle \mathrm{e}^j\right| = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\langle r|}{\partial q_j}\right\|}\frac{\partial\langle r|}{\partial q_j} \end{array}\right.$$

Coordenadas Curvilíneas generalizadas

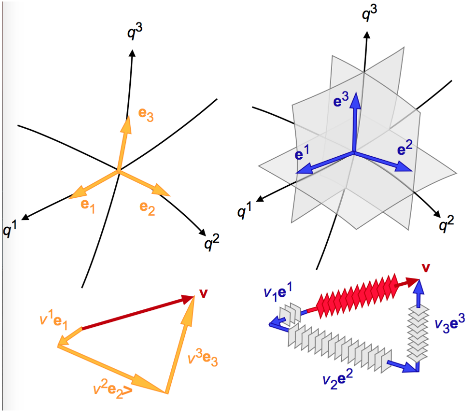

Figura: Representaciones de vectores bases y formas diferenciales, en coordenadas generalizadas en 3D (q^1, q^2, q^3)

Coordenadas Curvilineas 2D

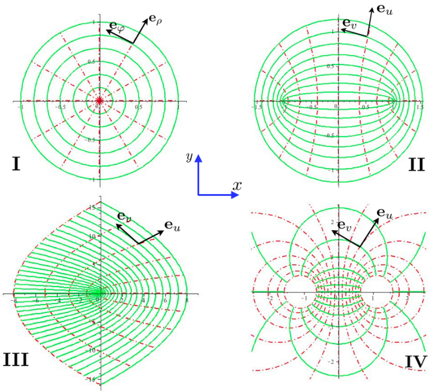

Figura: Algunas coordenadas curvilíneas en 2D. Podemos apreciar algunos ejemplos de sistemas de coordenadas: en el cuadrante I coordenadas polares: $x = \rho\cos(\varphi)$; $\quad y = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)$. En el cuadrante II coordenadas elípticas: $x = a\cosh(u)\cos(v)$; $\quad y = a\mathrm{senh}(u)\mathrm{sen}(v)$. En III coordenadas parabólicas: $x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)$; $\quad y = uv$ y en el cuadrante IV coordenadas bipolares: $x^2 + [y - a\cot(u)]^2 = a^2\csc^2(u)$; $\left[x - a\frac{\mathrm{senh}(v)}{\cosh(v)}\right]^2 + y^2 = \frac{a^2}{\mathrm{senh}^2(v)}$.

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ ortonormales:
$$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^1}\,; \quad |\mathrm{e}_2\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^2}\,; \quad \text{y} \quad |\mathrm{e}_3\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial q^3}\,;$$

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ ortonormales:
  $$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1}\,; \quad |\mathrm{e}_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2}\,; \quad \text{y} \quad |\mathrm{e}_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3};$$
- La tríada de 1-formas base $\left\{\left\langle \mathrm{e}^j\right|\right\}$ ortonormales:
  $$\left\langle \mathrm{e}^1\right| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_1} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_1}\,; \quad \left\langle \mathrm{e}^2\right| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_2} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_2}\,; \quad \text{y} \quad \left\langle \mathrm{e}^3\right| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_3} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_3};$$

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ ortonormales:
  $$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1}\,; \quad |\mathrm{e}_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2}\,; \quad \text{y} \quad |\mathrm{e}_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3}\,;$$
- La tríada de 1-formas base $\{\langle \mathrm{e}^j|\}$ ortonormales:
  $$\langle \mathrm{e}^1| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_1} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_1}\,; \quad \langle \mathrm{e}^2| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_2} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_2}\,; \quad \text{y} \quad \langle \mathrm{e}^3| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_3} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_3}\,;$$
- los factores de escala:
  $$h_1 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|\,; \quad h_2 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|\,; \quad \text{y} \quad h_3 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|\,;$$

Entonces, para fijar ideas:

- La tríada de vectores base $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$ ortonormales:
  $|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1}$; $\quad |\mathrm{e}_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2}$; y $\quad |\mathrm{e}_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3}$;
- La tríada de 1-formas base $\left\{\left\langle \mathrm{e}^j \right|\right\}$ ortonormales:
  $\left\langle \mathrm{e}^1 \right| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_1} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_1}$; $\quad \left\langle \mathrm{e}^2 \right| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_2} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_2}$; y $\quad \left\langle \mathrm{e}^3 \right| = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r|}{\partial q_3} \right\|} \frac{\partial \langle r|}{\partial q_3}$;
- los factores de escala:
  $h_1 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|$; $\quad h_2 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|$; y $\quad h_3 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|$;
- el elemento de línea en términos de las coordenadas generalizadas como $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \mathrm{d}q^i\, \mathrm{d}q^j = \left(h_1\, \mathrm{d}q^1\right)^2 + \left(h_2\, \mathrm{d}q^2\right)^2 + \left(h_3\, \mathrm{d}q^3\right)^2$;

Coordenadas cartesiana

Las coordenadas cartesianas pueden construirse como

- el vector posición: $|r\rangle = x\,|\mathrm{e}_x\rangle + y\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,|\mathrm{e}_z\rangle \Longleftrightarrow \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,,$
- el vector desplazamiento diferencial
$$|\mathrm{d}r\rangle = \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right)\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{d}y\,|\mathrm{e}_y\rangle + \mathrm{d}z\,|\mathrm{e}_z\rangle\ ,$$
- los factores de escala quedan definidos como
$$h_1 = h_x = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial x}\right\| = 1;\ h_2 = h_y = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial y}\right\| = 1;\ h_3 = h_z = \left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\| = 1$$
- mientras que la tríada ortonormal es
$$|\mathrm{e}_x\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial x}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial x}\,,\quad |\mathrm{e}_y\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial y}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial y}\,,\quad |\mathrm{e}_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\,.$$
- Finalmente, el elemento de línea viene definido como
$(\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1\ \mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(h_2\ \mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(h_3\ \mathrm{d}x^3\right)^2 \Longleftrightarrow$
$\mathrm{d}s^2 = \ \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, y el tensor métrico será
$g_{11} = g_{xx} = 1;\quad g_{22} = g_{yy} = 1;$ y $g_{22} = g_{zz} = 1\,.$

- el vector posición: $|r\rangle = x(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,|\mathrm{e}_z\rangle$ con: $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$.
- Entonces $\left.\begin{array}{l} x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos(\varphi) \\ y = y(\rho,\varphi) = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi) \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \cos(\varphi)\mathrm{d}\rho - \rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{d}\rho + \rho\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z\,. \end{array}$
- Identificando

$$
\begin{array}{lll}
\frac{\partial}{\partial \rho} x(\rho,\varphi) = \cos(\varphi)\,, & \frac{\partial}{\partial \rho} y(\rho,\varphi) = \mathrm{sen}(\varphi)\,, & \frac{\partial}{\partial \rho} z = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} x(\rho,\varphi) = -\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\,, & \frac{\partial}{\partial \varphi} y(\rho,\varphi) = \rho\cos(\varphi)\,, & \frac{\partial}{\partial \varphi} z = 0 \\
\frac{\partial}{\partial z} x(\rho,\varphi) = 0\,, & \frac{\partial}{\partial z} y(\rho,\varphi) = 0\,, & \frac{\partial}{\partial z} z = 1\,,
\end{array}
$$

- Los factores de escala

$$
h_\rho = \left\| \frac{\partial\,|r\rangle}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial\left[x(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + y(\rho,\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle + z\,|\mathrm{e}_z\rangle\right]}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial \rho}\,|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial \rho}\,|\mathrm{e}_y\rangle \right\|
$$
$$
= \left\| \cos(\varphi)\,|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)\,|\mathrm{e}_y\rangle \right\| = 1\,.
$$

Del mismo modo $h_\varphi = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial \varphi} \right\| = \rho\,; \quad h_z = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial z} \right\| = 1\,.$

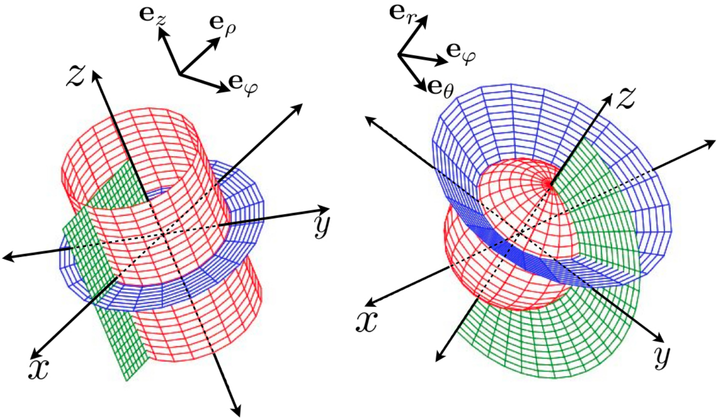

Figura: Coordenadas cilíndricas y esféricas. Para el caso de las coordenadas cilíndricas (figura izquierda), el vector unitario $|\mathrm{e}_\rho\rangle$ es un vector normal a las superficies cilíndricas y apunta en la dirección donde crece el radio ρ. El vector unitario $|\mathrm{e}_\varphi\rangle$ es tangente a las superficies cilíndricas, perpendicular a los planos $\varphi =$ *constante* y apunta en la dirección donde aumenta el ángulo azimutal φ. El vector $|\mathrm{e}_z\rangle$ es el mismo vector cartesiano $|\mathrm{k}\rangle$.

Coordenadas cilíndricas 2/2

- Los vectores unitarios serán

$$|e_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} = \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho}|e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho}|e_y\rangle = \cos(\varphi)|e_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)|e_y\rangle ,$$

$$|e_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}|e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}|e_y\rangle\right) = -\mathrm{sen}(\varphi)|e_x\rangle + \cos(\varphi)|e_y\rangle ,$$

$$|e_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}|e_z\rangle = |e_z\rangle .$$

Coordenadas cilíndricas 2/2

- Los vectores unitarios serán

$$|\mathrm{e}_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} = \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho}|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho}|\mathrm{e}_y\rangle = \cos(\varphi)|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)|\mathrm{e}_y\rangle \ ,$$

$$|\mathrm{e}_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}|\mathrm{e}_y\rangle\right) = -\mathrm{sen}(\varphi)|\mathrm{e}_x\rangle + \cos(\varphi)|\mathrm{e}_y\rangle \ ,$$

$$|\mathrm{e}_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}|\mathrm{e}_z\rangle = |\mathrm{e}_z\rangle \ .$$

- La expresión para el vector desplazamiento infinitesimal será

$$\mathrm{d}|r\rangle = \frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\rho|\mathrm{e}_\rho\rangle + \rho\mathrm{d}\varphi|\mathrm{e}_\varphi\rangle + \mathrm{d}z|\mathrm{e}_z\rangle \ .$$

- Los vectores unitarios serán

$$|\mathrm{e}_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho} = \frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\rho}|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\rho}|\mathrm{e}_y\rangle = \cos(\varphi)|\mathrm{e}_x\rangle + \mathrm{sen}(\varphi)|\mathrm{e}_y\rangle\ ,$$

$$|\mathrm{e}_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial x(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}|\mathrm{e}_x\rangle + \frac{\partial y(\rho,\varphi)}{\partial\varphi}|\mathrm{e}_y\rangle\right) = -\mathrm{sen}(\varphi)|\mathrm{e}_x\rangle + \cos(\varphi)|\mathrm{e}_y\rangle\ ,$$

$$|\mathrm{e}_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\right\|}\frac{\partial|r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}|\mathrm{e}_z\rangle = |\mathrm{e}_z\rangle\ .$$

- La expresión para el vector desplazamiento infinitesimal será

$$\mathrm{d}|r\rangle = \frac{\partial|r\rangle}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial|r\rangle}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial|r\rangle}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\rho|\mathrm{e}_\rho\rangle + \rho\mathrm{d}\varphi|\mathrm{e}_\varphi\rangle + \mathrm{d}z|\mathrm{e}_z\rangle\ .$$

- El elemento de línea viene definido como

$$\mathrm{d}s^2 = \left(h_1\mathrm{d}q^1\right)^2 + \left(h_2\mathrm{d}q^2\right)^2 + \left(h_3\mathrm{d}q^3\right)^2 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\ \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2\,,$$

- y el tensor métrico:

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1\,.$$

Curvas y parámetros

- Para las coordenadas generalizadas: $\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)$, tendremos $|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)$,

Curvas y parámetros

- Para las coordenadas generalizadas: $\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)$, tendremos $|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)$,
- por lo tanto $\mathrm{d}\mathbf{r}\left(q^i(\lambda)\right) = \frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} + \frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} + \frac{\mathrm{d}q^3}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}}_{\mathbf{u}_1} + \frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}}_{\mathbf{u}_2} + \frac{\mathrm{d}q^3}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}}_{\mathbf{u}_3}$,

  donde: $\left\{\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}, \mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}\right\}$, son la base del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ tangente a la curva descrita por $\mathbf{r}(\lambda)$.

Curvas y parámetros

- Para las coordenadas generalizadas: $\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)$, tendremos $|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}\left(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right)$,
- por lo tanto $\mathrm{d}\mathbf{r}\left(q^i(\lambda)\right) = \frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1} + \frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^2} + \frac{\mathrm{d}q^3}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^3} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}}_{\mathbf{u}_1} + \frac{\mathrm{d}q^2}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^2}}_{\mathbf{u}_2} + \frac{\mathrm{d}q^3}{\mathrm{d}\lambda}\underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^3}}_{\mathbf{u}_3}$,

  donde: $\left\{\mathbf{u}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^1}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^2}, \mathbf{u}_3 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^3}\right\}$, son la base del vector $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ tangente a la curva descrita por $\mathbf{r}(\lambda)$.
- El módulo del vector $\|\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)\|$ representará la longitud de arco $\mathrm{d}s$ para esa curva. Por consiguiente

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(\lambda) &= \frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\mathrm{d}\lambda}(\mathrm{d}\lambda)^2 = \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}(\mathrm{d}\lambda)^2 \\
&= \frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}\underbrace{\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{d}q^i}\underbrace{\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{d}q^j} = \frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}\,\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j\,.
\end{aligned}
$$

- Dado que $(\mathrm{d}s)^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = \tilde{g}_{ij}\,\mathrm{d}\tilde{x}^i\,\mathrm{d}\tilde{x}^j = \bar{g}_{ij}\,\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^j = \underbrace{\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{r}(\lambda)\right)}{\partial q^j}}_{\bar{g}_{ij}}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j$.

Curvatura, normal y binormal

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a la curva Γ, y s es la longitud de arco.

Curvatura, normal y binormal

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a la curva Γ, y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es de magnitud constante, $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\right| \hat{\boldsymbol{n}} = \kappa \hat{\boldsymbol{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una linea recta.

Curvatura, normal y binormal

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a la curva Γ, y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es de magnitud constante, $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\right| \hat{\boldsymbol{n}} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una linea recta.
- Finalmente, con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\boldsymbol{n}}$, que denominaremos vector *binormal* a Γ, esto es: $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$.

Curvatura, normal y binormal

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a la curva Γ, y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es de magnitud constante, $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\right| \hat{\boldsymbol{n}} = \kappa \hat{\boldsymbol{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una linea recta.
- Finalmente, con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\boldsymbol{n}}$, que denominaremos vector *binormal* a Γ, esto es: $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$.
- Tenemos entonces la tríada $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$ al que podemos anclar un sistema de coordenadas cartesiano en cada punto de Γ.

Curvatura, normal y binormal

- Si $\mathbf{r}(s)$ describe una curva Γ en el espacio, entonces, $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a la curva Γ, y s es la longitud de arco.
- Como el vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ es de magnitud constante, $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\right| \hat{\boldsymbol{n}} = \kappa \hat{\boldsymbol{n}}$. será un vector perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*.
- La curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una linea recta.
- Finalmente, con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\boldsymbol{n}}$, que denominaremos vector *binormal* a Γ, esto es: $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$.
- Tenemos entonces la tríada $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$ al que podemos anclar un sistema de coordenadas cartesiano en cada punto de Γ.
- Este sistema de coordenadas, no inercial, estará rotando constantemente a medida que el observador se mueve a lo largo de la curva en el espacio.

Tríada ortonormal $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$,

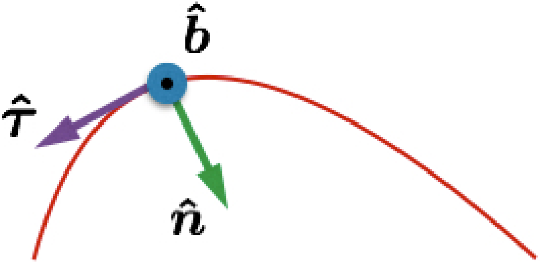

Figura: La tríada $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$, un sistema de ortonormal anclado en cada punto sobre una curva de Γ, donde s es la longitud de arco. $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a una curva. $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left|\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\right| \hat{\boldsymbol{n}} = \kappa \hat{\boldsymbol{n}}$, será perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, κ es *curvatura* de Γ. $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$, un vector *binormal* a Γ.

Torsión y las relaciones de Frenet-Serret

- Otra vez $\hat{\boldsymbol{b}}$ es de magnitud constante, entonces $\hat{\boldsymbol{b}} \perp \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \wedge \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$

Torsión y las relaciones de Frenet-Serret

- Otra vez $\hat{\boldsymbol{b}}$ es de magnitud constante, entonces $\hat{\boldsymbol{b}} \perp \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \wedge \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$
- Al ser $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}/\mathrm{d}s$ perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\boldsymbol{b}}$, entonces será proporcional a $\hat{\boldsymbol{n}}$: $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{\boldsymbol{n}} \quad \Rightarrow \tau = -\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s}$. Esta constante de proporcionalidad es la *torsión* de la curva Γ en un punto dado, y a $1/\tau$ el radio de torsión.
- La *torsión* mide que lejos está una curva de permanecer en un plano.

- Otra vez $\hat{\boldsymbol{b}}$ es de magnitud constante, entonces $\hat{\boldsymbol{b}} \perp \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \wedge \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \perp \hat{\boldsymbol{\tau}}$
- Al ser $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}/\mathrm{d}s$ perpendicular tanto a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ como a $\hat{\boldsymbol{b}}$, entonces será proporcional a $\hat{\boldsymbol{n}}$: $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{\boldsymbol{n}} \quad \Rightarrow \tau = -\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s}$. Esta constante de proporcionalidad es la *torsión* de la curva Γ en un punto dado, y a $1/\tau$ el radio de torsión.
- La *torsión* mide que lejos está una curva de permanecer en un plano.
- A partir del hecho que $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{b}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}}$, tendremos $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{b}} \times \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = -\tau(\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{\tau}}) + \kappa(\hat{\boldsymbol{b}} \times \hat{\boldsymbol{n}}) = \tau\hat{\boldsymbol{b}} - \kappa\hat{\boldsymbol{\tau}}$.
- A las ecuaciones $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \kappa\hat{\boldsymbol{n}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{\boldsymbol{n}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \tau\hat{\boldsymbol{b}} - \kappa\hat{\boldsymbol{\tau}}$. se les conoce como las fórmulas de Frenet-Serret de la geometría diferencial.

- Como hemos vistos las coordenadas curvilíneas son una base mas del espacio vectorial
  $|a\rangle = a^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = a^x\,|\mathrm{e}_x\rangle + a^y\,|\mathrm{e}_y\rangle + a^z\,|\mathrm{e}_z\rangle \equiv a^\rho\,|\mathrm{e}_\rho\rangle + a^\varphi\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle + a^z\,|\mathrm{e}_z\rangle$

- Como hemos vistos las coordenadas curvilíneas son una base mas del espacio vectorial
$|a\rangle = a^i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = a^x \left|\mathrm{e}_x\right\rangle + a^y \left|\mathrm{e}_y\right\rangle + a^z \left|\mathrm{e}_z\right\rangle \equiv a^\rho \left|\mathrm{e}_\rho\right\rangle + a^\varphi \left|\mathrm{e}_\varphi\right\rangle + a^z \left|\mathrm{e}_z\right\rangle$
- Por lo tanto construiremos tensores en cualquier sistema de coordenadas curvilíneo a partir del producto tensorial de vectores y formas, expresados en esos sistemas de coordenadas:
$\mathcal{T} = T^{ij} \left|\mathrm{e}_i\right\rangle \otimes \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle \;, \quad T_i^j \left\langle \mathrm{e}^i\right| \otimes \left|\tilde{\mathrm{e}}_\mathrm{j}\right\rangle \quad \text{o} \quad T_{ij} \left\langle \mathrm{e}^i\right| \otimes \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\mathrm{j}\right| \;.$
- T^{ij}, constituyen **las componentes** contravariantes; T_i^j **las componentes** mixtas de un tensor y, **las componentes** covariantes de ese tensor.

Universidad Industrial de Santander CONSTRUIMOS FUTURO

- Como hemos vistos las coordenadas curvilíneas son una base mas del espacio vectorial
$|a\rangle = a^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = a^x\,|\mathrm{e}_x\rangle + a^y\,|\mathrm{e}_y\rangle + a^z\,|\mathrm{e}_z\rangle \equiv a^\rho\,|\mathrm{e}_\rho\rangle + a^\varphi\,|\mathrm{e}_\varphi\rangle + a^z\,|\mathrm{e}_z\rangle$
- Por lo tanto construiremos tensores en cualquier sistema de coordenadas curvilíneo a partir del producto tensorial de vectores y formas, expresados en esos sistemas de coordenadas:
$\mathcal{T} = T^{ij}\,|\mathrm{e}_i\rangle \otimes |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$, $\quad T_i^j\,\langle\mathrm{e}^i| \otimes |\tilde{\mathrm{e}}_\mathrm{j}\rangle$ o $\quad T_{ij}\,\langle\mathrm{e}^i| \otimes \langle\tilde{\mathrm{e}}^\mathrm{j}|$.
- T^{ij}, constituyen **las componentes** contravariantes; T_i^j **las componentes** mixtas de un tensor y, **las componentes** covariantes de ese tensor.
- $\mathcal{T}$ es un objeto geométrico que se expresa en una base (tensorial): $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y 1-formas $\left\{\langle\tilde{\mathrm{e}}^\mathrm{j}|\right\}$, y no necesariamente son las mismas
$\mathcal{T} = T^{x\rho}\,|\mathrm{e}_x;\mathrm{e}_\rho\rangle + T^{x\varphi}\,|\mathrm{e}_x;\mathrm{e}_\varphi\rangle + T^{xz}\,|\mathrm{e}_x;\mathrm{e}_z\rangle + T^{y\rho}\,|\mathrm{e}_y;\mathrm{e}_\rho\rangle +$
$T^{y\varphi}\,|\mathrm{e}_y;\mathrm{e}_\varphi\rangle + T^{yz}\,|\mathrm{e}_y;\mathrm{e}_z\rangle + \cdots + T^{zz}\,|\mathrm{e}_z;\mathrm{e}_z\rangle$,
- Un tensor bizarro parte cartesiano y parte cilíndrico.

Productos escalares y vectoriales

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a | \, b \rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a | \, b \rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$
- **El Producto Vectorial** se expresa como $|c\rangle = c^i \, |\mathrm{e}_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k \, |\mathrm{e}_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\tilde{c}\rangle = \tilde{c}^i \, |\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle = |\tilde{a}\rangle \times \left|\tilde{b}\right\rangle = \tilde{\epsilon}^{ijk} \tilde{a}_j \tilde{b}_k \, |\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle$.
  ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas, y $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ está expresado en las coordenadas curvilíneas

Productos escalares y vectoriales

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a|\ b\rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$
- **El Producto Vectorial** se expresa como $|c\rangle = c^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k\,|\mathrm{e}_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\tilde{c}\rangle = \tilde{c}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle = |\tilde{a}\rangle \times \left|\tilde{b}\right\rangle = \tilde{\epsilon}^{ijk} \tilde{a}_j \tilde{b}_k\,|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle$.
  ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas, y $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ está expresado en las coordenadas curvilíneas
- De la relación anterior es claro que, el tensor de Levi-Civita transformará como un tensor, es decir
  $\tilde{\epsilon}^{ijk} = \epsilon^{lmn} \frac{\partial q^i}{\partial x^l} \frac{\partial q^j}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^n} = J\,\epsilon^{ijk} = \sqrt{g}\,\epsilon^{ijk}$
  donde J es el determinante de la matriz jacobiana,

Productos escalares y vectoriales

- **El Producto Escalar** es independiente de la base en la cual se exprese $\langle a|\, b\rangle = a_i b^i = \tilde{a}_j \tilde{b}^j = g_{ij} a^i b^j = \tilde{g}_{ij} \tilde{a}^i \tilde{b}^j$
- **El Producto Vectorial** se expresa como $|c\rangle = c^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k\,|\mathrm{e}_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\tilde{c}\rangle = \tilde{c}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle = |\tilde{a}\rangle \times \left|\tilde{b}\right\rangle = \tilde{\epsilon}^{ijk} \tilde{a}_j \tilde{b}_k\,|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle$.
  ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas, y $\tilde{\epsilon}^{ijk}$ está expresado en las coordenadas curvilíneas
- De la relación anterior es claro que, el tensor de Levi-Civita transformará como un tensor, es decir
  $\tilde{\epsilon}^{ijk} = \epsilon^{lmn} \frac{\partial q^i}{\partial x^l} \frac{\partial q^j}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^n} = J\,\epsilon^{ijk} = \sqrt{g}\,\epsilon^{ijk}$
  donde J es el determinante de la matriz jacobiana,
- Con lo cual $|c\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \underbrace{a_j b_k \epsilon^{ijk}}_{c^i}\,|\mathrm{e}_i\rangle = \underbrace{\tilde{a}_m \tilde{b}_n \tilde{\epsilon}^{lmn}}_{\tilde{c}^l}\,|\tilde{\mathrm{e}}_l\rangle =$

  $J\,\epsilon^{lmn} \tilde{a}_m \tilde{b}_n\,|\tilde{\mathrm{e}}_l\rangle = \sqrt{g}\,\epsilon^{lmn} \tilde{a}_m \tilde{b}_n\,|\tilde{\mathrm{e}}_l\rangle$

Recapitulando

- Coordenadas curvilíneas generalizadas $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \Leftrightarrow q^i = q^i(\tilde{q}^j)$
  - Métrica: $\mathrm{d}s^2 \equiv \langle \mathrm{d}r \, | \mathrm{d}r \rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \, \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q^j = g_{ij} \mathrm{d}q^i \mathrm{d}q^j$
  - Los factores de escala: $h_j = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|$
  - Los vectores Base: $|\mathrm{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j}$

Recapitulando

- Coordenadas curvilíneas generalizadas $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \Leftrightarrow q^i = q^i(\tilde{q}^j)$
  - Métrica: $\mathrm{d}s^2 \equiv \langle \mathrm{d}r \, |\mathrm{d}r\rangle = \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j} \, \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q^j = g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j$
  - Los factores de escala: $h_j = \left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j} \right\|$
  - Los vectores Base: $|\mathrm{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial|r\rangle}{\partial q^j}$
- Construimos vectores y tensores para cualquier sistema de coordenadas $\left\{q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right\}$.

Recapitulando

- Coordenadas curvilíneas generalizadas $\tilde{q}^i = \tilde{q}^i(q^j) \Leftrightarrow q^i = q^i(\tilde{q}^j)$
  - Métrica: $\mathrm{d}s^2 \equiv \langle \mathrm{d}r \,|\mathrm{d}r\rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \otimes \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \, \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q^j = g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j$
  - Los factores de escala: $h_j = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|$
  - Los vectores Base: $|\mathrm{e}_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j}$
- Construimos vectores y tensores para cualquier sistema de coordenadas $\left\{q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)\right\}$.
- Construimos la tríada $\{\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\}$, un sistema de ortonormal anclado en cada punto sobre una curva de Γ, donde s es la longitud de arco.
  - $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathrm{d}\mathbf{r}(s)/\mathrm{d}s$ es un vector unitario tangente a una curva Γ
  - $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \left| \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} \right| \hat{\boldsymbol{n}} = \kappa \hat{\boldsymbol{n}}$, será perpendicular a $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, κ es *curvatura* de Γ
  - Construimos $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$, un vector *binormal* a Γ.
  - Dedujimos las fórmulas de Frenet-Serret
    $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \hat{\boldsymbol{n}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{b}}}{\mathrm{d}s} = -\tau \hat{\boldsymbol{n}}\,, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{n}}}{\mathrm{d}s} = \tau \hat{\boldsymbol{b}} - \kappa \hat{\boldsymbol{\tau}}.$
  - La curvatura κ y $\rho = 1/\kappa$ (el *radio de curvatura*) nos indican cuan lejos está una curva de ser una linea recta
  - La *torsión* τ mide que lejos está una curva de permanecer en un plano.