Hamilton Jacobi

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

3 de diciembre de 2024

Agenda

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \rightarrow \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \rightarrow \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))\,, P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q\left(q_j(0), p_j(0)\right), P_i = p\left(q_j(0), p_j(0)\right)$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q\left(q_j(0), p_j(0), t\right), \quad p_i = p\left(q_j(0), p_j(0), t\right)$.

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i\left(q_j, p_j, t\right), P_i = P_i\left(q_j, p_j, t\right)$ lleva $\mathcal{H}\left(q_j, p_j, t\right) \to \mathcal{H}'\left(Q_i, P_i, t\right)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q\left(q_j(0), p_j(0)\right), P_i = p\left(q_j(0), p_j(0)\right)$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q\left(q_j(0), p_j(0), t\right), \quad p_i = p\left(q_j(0), p_j(0), t\right)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, tal que $\mathcal{H}'\left(Q_i, P_i\right) = 0$, entonces existe una función generadora $\mathcal{F}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$

Ecuación de Hamilton Jacobi

- Una transformación canónica $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)\,, P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ lleva $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \to \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$ un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada Q_j o/y P_j son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica $\{q_i, p_i, t\} \to \{P_i, Q_i, t\}$ tal que, (P_i, Q_i), las $2s$ nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas $2s$ constantes Q_i y P_i pueden expresarse en función de las $2s$ condiciones iniciales: $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))\,, P_i = p(q_j(0), p_j(0))$.
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento, $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)\,, \quad p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$.
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes, $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$, $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$, tal que $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$, entonces existe una función generadora $\mathcal{F}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
- Esta condición es la ecuación de Hamilton-Jacobi, para una $\mathcal{F}$.

El Principio de Mínima Acción 1/2

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$

El Principio de Mínima Acción 1/2

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$

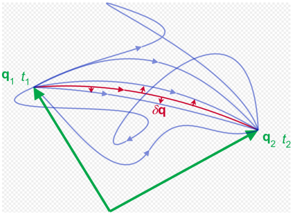
El Principio de Mínima Acción 1/2

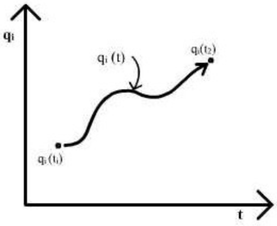
- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.

El Principio de Mínima Acción 1/2

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.

- Consideremos la acción $S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$
- El valor de la acción S (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de S.
- Supongamos que el tiempo t_2 es variable, i.e, $t_2 = t$.
- La acción dependerá de las trayectorias y del tiempo, $S = S\left(q_i, t\right)$.





El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.

El Principio de Mínima Acción 2/2

- La derivada temporal de la acción es $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$.
- Por otro lado, si $t_2 = t$ (variable), la definición de la acción implica que $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - H\left(p_i, q_i, t\right)$.
- Comparando obtenemos $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\left(q_i, t\right)$ y $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(p_i, q_i, t\right) = 0$
- Las cuales se pueden expresar como $\frac{\partial S}{\partial t}\left(q_i, t\right) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$
- La acción S puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción S puede interpretarse como una función generadora tipo $\mathcal{F}_2\left(q_i, P_i, t\right)$, tal que $P_i = \alpha_i =$ cte, $Q_i = \beta_i =$ cte.