#### Monedas y Conos

#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



26 de noviembre de 2024

#### Agenda



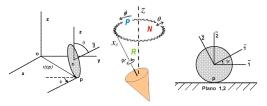
- Moneda que rueda sin deslizar
  - Ligaduras
  - El Lagrangeano
  - Energías cinética y potencial
  - Simetrías y Constantes de movimiento
- Moneda en un plano inclinado
  - Planteamiento del problema
  - Coordenadas y ligaduras
  - Integración de ligaduras
  - Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano
- Un cono que rueda en un plano horizontal
  - Coordenadas y ligaduras
  - Rodar sin deslizar y energía cinética



Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg



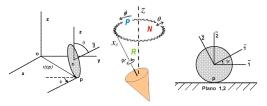
• En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.



Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg



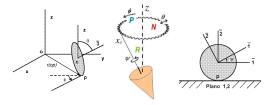
• En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.



Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg



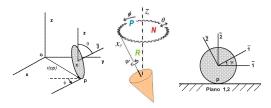
- En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto *p*, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.



Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg



- En principio tendremos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ : tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto *p*, en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es:  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$



• Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .



- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\sec \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sec \phi);$   $y_{op} = y + a(\sec \psi \sec \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sec \theta$



- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\operatorname{sen} \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \operatorname{sen} \phi);$   $y_{op} = y + a(\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \operatorname{sen} \theta$
- Por su parte,  $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$



- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\operatorname{sen} \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \operatorname{sen} \phi);$   $y_{op} = y + a(\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \operatorname{sen} \theta$
- $\bullet \ \, \text{Por su parte, } \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\mathsf{r}}_{cp} = \left| \begin{array}{ccc} \boldsymbol{\hat{x}}_1 & \boldsymbol{\hat{x}}_2 & \boldsymbol{\hat{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{array} \right| = a(\tilde{\Omega}^3 \, \boldsymbol{\hat{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \, \boldsymbol{\hat{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$



- Como  $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$ , al proyectar la primera ecuación tendremos  $x_{op} = x a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ ,  $y_{op} = y a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$  y  $0 = z a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ .
- Que se convierten en  $x_{op} = x + a(\operatorname{sen} \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \operatorname{sen} \phi);$   $y_{op} = y + a(\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$  y  $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \operatorname{sen} \theta$
- Por su parte,  $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- Es decir  $\dot{x} + a\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta a\dot{\theta}\sin\phi\sin\theta + a\dot{\psi}\cos\phi = 0;$  $\dot{y} + a\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta + a\dot{\theta}\cos\phi\sin\theta + a\dot{\psi}\sin\phi = 0;$   $\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$

4 / 12



• La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \operatorname{sen} \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.



- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \operatorname{sen} \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$



- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \operatorname{sen} \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi$   $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi$  y  $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$



- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \operatorname{sen} \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi$   $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi$  y  $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- y  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .



- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \operatorname{sen} \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi$   $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- y  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Tendremos  $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$



- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \operatorname{sen} \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi$   $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi$  y  $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- y  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Tendremos  $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  $+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2 + \dot{\psi}\right)^2\right]$
- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras  $T = \frac{1}{32} a^2 M \left( \dot{\phi}^2 (\cos 4\theta + 13) + 32 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta + 2 \dot{\phi} (5 \dot{\phi} + 4 \dot{\psi}) \cos 2\theta \right)$

$$+8\dot{\phi}\dot{\psi}+24\dot{\psi}^{2}+20\dot{\theta}^{2}$$



- La tercera ecuación es integrable y nos da  $z = a \operatorname{sen} \theta$ , las otras ecuaciones constituyen vínculos no integrables.
- La energía cinética será  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Como  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi$  $\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \quad \text{v} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- $y I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2 y I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Tendremos  $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  $+\frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2+2\left(\dot{\phi}\cos\theta^2+\dot{\psi}\right)^2\right]$
- Que se simplifica a cuando incorporamos las ligaduras  $T = \frac{1}{32} a^2 M \left( \dot{\phi}^2 (\cos 4\theta + 13) + 32 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta + 2 \dot{\phi} (5 \dot{\phi} + 4 \dot{\psi}) \cos 2\theta \right)$  $+8\dot{\phi}\dot{\psi}+24\dot{\psi}^{2}+20\dot{\theta}^{2}$
- Por su parte, la energía potencial  $V = mgz = mga \operatorname{sen} \theta$



• El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$   $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 - 8g\sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi} (4\cos\theta + \cos2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2 (10\cos2\theta + \cos4\theta + 13) \right)$ 



- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T V \Rightarrow$   $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 8g\sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi} (4\cos\theta + \cos2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2 (10\cos2\theta + \cos4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$ cte y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte



- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T V \Rightarrow$   $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 8g\sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi} (4\cos\theta + \cos2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2 (10\cos2\theta + \cos4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} =$ cte y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{16} a^2 M \left( \dot{\phi} (10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4 \dot{\psi} (4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$



- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T V \Rightarrow$   $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 8g\sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi} (4\cos\theta + \cos2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2 (10\cos2\theta + \cos4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{16} a^2 M \left( \dot{\phi} (10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4 \dot{\psi} (4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left( \dot{\phi} (4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6 \dot{\psi} \right) = C_2$



- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T V \Rightarrow$   $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 8g\sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi} (4\cos\theta + \cos2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2 (10\cos2\theta + \cos4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{16} a^2 M \left( \dot{\phi} (10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4 \dot{\psi} (4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left( \dot{\phi} (4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6 \dot{\psi} \right) = C_2$
- Por lo tanto  $\dot{\phi} \to \frac{\csc^2(\frac{\theta}{2})(-6C_1+4C_2\cos\theta+C_2\cos2\theta+C_2)}{a^2M(-2\cos2\theta+\cos3\theta-5)}$  $\dot{\psi} \to \frac{\csc^2(\frac{\theta}{2})(4(2C_1-5C_2)\cos2\theta+32C_1\cos\theta+8C_1-2C_2\cos4\theta-26C_2)}{8a^2M(-2\cos2\theta+\cos3\theta-5)}$

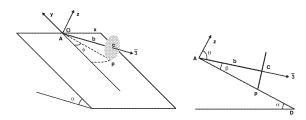


- El Lagrangeano  $\mathcal{L} = T V \Rightarrow$   $\mathcal{L} = \frac{1}{32} aM \left( 4 \left( 6a\dot{\psi}^2 + 5a\dot{\theta}^2 8g\sin\theta \right) + 8a\dot{\phi}\dot{\psi} (4\cos\theta + \cos2\theta + 1) + a\dot{\phi}^2 (10\cos2\theta + \cos4\theta + 13) \right)$
- Las coordenadas  $\psi$  y  $\phi$  son cíclicas y por lo tanto sus momentos conjugados serán constantes  $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte y  $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} =$ cte
- $p_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{16} a^2 M \left( \dot{\phi} (10 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 13) + 4 \dot{\psi} (4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) \right) = C_1$
- $p_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4} a^2 M \left( \dot{\phi} (4 \cos \theta + \cos 2\theta + 1) + 6 \dot{\psi} \right) = C_2$
- Por lo tanto  $\dot{\phi} \to \frac{\csc^2(\frac{\theta}{2})(-6C_1+4C_2\cos\theta+C_2\cos2\theta+C_2)}{a^2M(-2\cos2\theta+\cos3\theta-5)}$  $\dot{\psi} \to \frac{\csc^2(\frac{\theta}{2})(4(2C_1-5C_2)\cos2\theta+32C_1\cos\theta+8C_1-2C_2\cos4\theta-26C_2)}{8a^2M(-2\cos2\theta+\cos3\theta-5)}$
- La ecuación de movimiento para  $\theta$  es  $10\ddot{\theta} + 4\dot{\phi}\dot{\psi}\sin^3\theta\csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dot{\phi}^2(5\sin2\theta + \sin4\theta) + \frac{8g}{a}\cos\theta = 0$

#### Planteamiento del problema



Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b. El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O, eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema  $\tilde{S}$  origen también en O y eje  $\tilde{3}$  en la direción AC. Encontrar las ecuaciones de movimiento para





ullet Tenemos seis grados de libertad  $(x,y,z,\phi,\psi,\theta)$  y cinco ligaduras



- Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante implica } \theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{a}{b}$



- ullet Tenemos seis grados de libertad  $ig(x,y,z,\phi,\psi, hetaig)$  y cinco ligaduras
- $\bullet \ \theta = \text{constante implica} \ \theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b \left[ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \right]$ ,



- Tenemos seis grados de libertad  $(x,y,z,\phi,\psi,\theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante implica } \theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b \left[ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \right]$ ,
- Entonces  $x = b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ ;  $y = -b \operatorname{cos} \phi \operatorname{sen} \theta$  y  $z = b \operatorname{cos} \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$



- Tenemos seis grados de libertad  $(x,y,z,\phi,\psi,\theta)$  y cinco ligaduras
- $\bullet \ \theta = \text{constante implica} \ \theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b \left[ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \right]$ ,
- Entonces  $x = b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ ;  $y = -b \operatorname{cos} \phi \operatorname{sen} \theta$  y  $z = b \operatorname{cos} \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con  $\theta = \text{const.}$ , se obtiene:  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\sin{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{z} = 0$



- Tenemos seis grados de libertad  $(x,y,z,\phi,\psi,\theta)$  y cinco ligaduras
- $\bullet \ \theta = \text{constante implica} \ \theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan\frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b \left[ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \right]$ ,
- Entonces  $x = b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ ;  $y = -b \operatorname{cos} \phi \operatorname{sen} \theta$  y  $z = b \operatorname{cos} \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con  $\theta = \text{const.}$ , se obtiene:  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\sin{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$ .



- ullet Tenemos seis grados de libertad  $(x,y,z,\phi,\psi, heta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante implica } \theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b \left[ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \right]$ ,
- Entonces  $x = b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ ;  $y = -b \cos \phi \operatorname{sen} \theta$  y  $z = b \cos \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con  $\theta = \text{const.}$ , se obtiene:  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\sin{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$ .
- ullet Respecto al sistema centro de masa,  $ilde{S}$  tenemos  ${f r}_{cp}=-a{f \hat x}_2$ , y

$$ilde{\mathbf{\Omega}} imes \mathbf{r}_{cp} = \left| egin{array}{ccc} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \ ilde{\Omega}^1 & ilde{\Omega}^2 & ilde{\Omega}^3 \ 0 & -a & 0 \end{array} 
ight| = a( ilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 - ilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$$



- Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante implica } \theta + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \beta = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$ . Más aún,  $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b \left[ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{x}} \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \right]$ ,
- Entonces  $x = b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ ;  $y = -b \cos \phi \operatorname{sen} \theta$  y  $z = b \cos \theta$  que cumplen con la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con  $\theta = \text{const.}$ , se obtiene:  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\sin{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :  $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$ .
- Respecto al sistema centro de masa,  $\tilde{S}$  tenemos  $\mathbf{r}_{cp}=-a\mathbf{\hat{x}}_{2}$ , y

$$ilde{\mathbf{\Omega}} imes \mathbf{r}_{cp} = \left| egin{array}{ccc} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \ ilde{\Omega}^1 & ilde{\Omega}^2 & ilde{\Omega}^3 \ 0 & -a & 0 \end{array} 
ight| = a( ilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 - ilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$$

• Con cual  $b\dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3\,\hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1\,\hat{\mathbf{x}}_3) = 0$ 

#### Integración de ligaduras



• Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$ 

#### Integración de ligaduras



- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en  $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta \dot{\theta}\sin\phi\sin\theta) = 0$   $\dot{y} + a(\dot{\psi}\sin\phi + \dot{\phi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\sin\theta) = 0$  $\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$

#### Integración de ligaduras



- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en  $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta \dot{\theta}\sin\phi\sin\theta) = 0$   $\dot{y} + a(\dot{\psi}\sin\phi + \dot{\phi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\sin\theta) = 0$  $\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\sin{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{z} = 0$ , obtenemos  $\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a}\sin{\theta} + \cos{\theta}\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$

#### Integración de ligaduras



- Al proyectar la ecuación de ligadura  $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$  respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- que se convierte en  $\dot{x} + a(\dot{\psi}\cos\phi + \dot{\phi}\cos\phi\cos\theta \dot{\theta}\sin\phi\sin\theta) = 0$   $\dot{y} + a(\dot{\psi}\sin\phi + \dot{\phi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi\sin\theta) = 0$  $\dot{z} - a\dot{\theta}\cos\theta = 0$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura  $\dot{x} = b\dot{\phi}\cos{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{y} = b\dot{\phi}\sin{\phi}\sin{\theta}, \quad \dot{z} = 0$ , obtenemos  $\dot{\psi} + \dot{\phi}\left[\frac{b}{a}\sin{\theta} + \cos{\theta}\right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\phi$
- Donde hemos sustituido el valor de  $\theta$  que implica sen  $\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ .



Como siempre la energía cinética se construye como

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$



- Como siempre la energía cinética se construye como  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .



- Como siempre la energía cinética se construye como  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$



- Como siempre la energía cinética se construye como  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$ .



- Como siempre la energía cinética se construye como  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$ .
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional  $\mathbf{F} = -Mg(\operatorname{sen} \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$



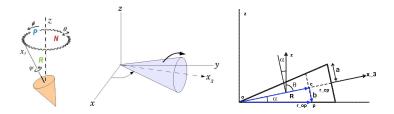
- Como siempre la energía cinética se construye como  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$ .
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional  $\mathbf{F} = -Mg(\operatorname{sen} \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será  $V = Mg(y \operatorname{sen} \alpha + z \cos \alpha) \equiv Mgb(-\cos \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$



- Como siempre la energía cinética se construye como  $T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$
- Los momentos de inercia son:  $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4} Ma^2$  y  $I_{33} = \frac{1}{2} Ma^2$ .
- Las componentes de la velocidad angular son  $\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi; \quad \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi;$  $\tilde{\Omega}_3 = \psi + \phi \cos \theta$ .
- Finalmente la energía cinética queda como  $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$ .
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional  $\mathbf{F} = -Mg(\operatorname{sen} \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será  $V = Mg(y \operatorname{sen} \alpha + z \cos \alpha) \equiv Mgb(-\cos \phi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$
- La ecuación de movimiento será  $\ddot{\phi}=-g \sin \alpha \frac{4\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{a^2+6k^2} \sin \phi$

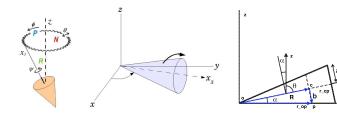


Un cono circular uniforme de altura h, ángulo de vértice  $\alpha$  y masa m rueda sobre su lado sin deslizar sobre el plano horizontal (x, y).



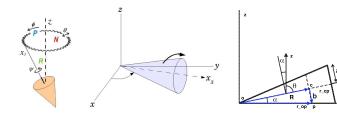
• Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras.





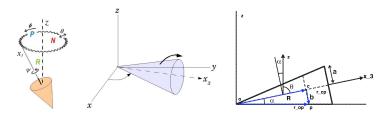
- Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras.
- $\bullet \ \theta = {\rm const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha = \frac{{\it cp}}{{\it oc}}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{{\it cp}}{{\it oc}}$





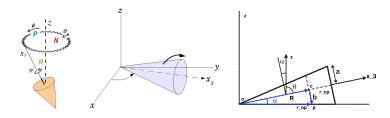
- Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras.
- $\bullet \ \theta = {\rm const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha = \frac{{\it cp}}{{\it oc}}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{{\it cp}}{{\it oc}}$





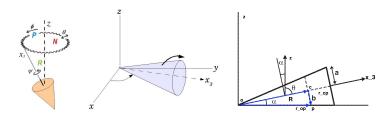
- Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \alpha = \frac{cp}{oc}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{cp}{oc}$
- Entonces  $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \alpha \hat{\mathbf{y}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}],$
- Es decir  $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4}[\cos\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}],$





- Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras.
- $\theta = \text{const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \alpha = \frac{cp}{oc}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{cp}{oc}$
- Entonces  $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} \left[ \cos \phi \cos \alpha \, \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \alpha \, \hat{\mathbf{y}} + \sin \alpha \, \hat{\mathbf{z}} \right]$
- Es decir  $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos \phi \sin \theta \, \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \theta \, \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \, \hat{\mathbf{z}}],$
- Con lo cual  $x = \frac{3h}{4}\cos\phi\sin\theta$ ,  $y = \frac{3h}{4}\sin\phi\sin\theta$   $z = \frac{3h}{4}\cos\theta$ ,





- Tenemos seis grados de libertad  $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$  y cinco ligaduras.
- $\bullet \ \theta = {\rm const} \Rightarrow \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \alpha = \frac{{\it cp}}{{\it oc}}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \arctan \frac{{\it cp}}{{\it oc}}$
- Entonces  $\mathbf{R} = \frac{3h}{4} \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} \left[ \cos \phi \cos \alpha \, \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \cos \alpha \, \hat{\mathbf{y}} + \sin \alpha \, \hat{\mathbf{z}} \right]$
- Es decir  $\mathbf{R} = \frac{3h}{4}\hat{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{3h}{4} [\cos\phi \sin\theta \,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi \sin\theta \,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \,\hat{\mathbf{z}}],$
- Con lo cual  $x = \frac{3h}{4}\cos\phi \sin\theta$ ,  $y = \frac{3h}{4}\sin\phi \sin\theta$   $z = \frac{3h}{4}\cos\theta$ ,
- Derivando  $\dot{x} = -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta$   $\dot{y} = \frac{3h}{4}\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta$   $\dot{z} = 0$



• La ligadura de rodar sin deslizar implica  $\dot{\mathbf{r}}_{op}=0=\dot{\mathbf{R}}+\tilde{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{r}_{cp}.$ 



ullet La ligadura de rodar sin deslizar implica  $\dot{f r}_{op}=0=\dot{f R}+ ilde{f \Omega} imes{f r}_{cp}.$ 

• Por su parte, 
$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$$



• La ligadura de rodar sin deslizar implica  $\dot{\mathbf{r}}_{op}=0=\dot{\mathbf{R}}+\tilde{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{r}_{cp}.$ 

• Por su parte, 
$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$$

• Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$ 



ullet La ligadura de rodar sin deslizar implica  $\dot{f r}_{op}=0=\dot{f R}+ ilde{f \Omega} imes{f r}_{cp}.$ 

• Por su parte, 
$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- Por otro lado para el centro de masa  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{cos} \psi \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \operatorname{cos} \theta$



- La ligadura de rodar sin deslizar implica  $\dot{\mathbf{r}}_{op}=0=\dot{\mathbf{R}}+\tilde{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{r}_{cp}.$
- Por su parte,  $\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$   $a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- Por otro lado para el centro de masa  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{cos} \psi \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \operatorname{cos} \theta$
- Entonces, rodar sin deslizar se convierte en  $\dot{x} + b\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\cos\phi = 0$   $\dot{y} + b\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\sin\phi = 0$



• La ligadura de rodar sin deslizar implica  $\dot{\mathbf{r}}_{op}=0=\dot{\mathbf{R}}+\tilde{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{r}_{co}$ .

• Por su parte, 
$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix} = b(\tilde{\Omega}^3 \, \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \, \hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos  $\dot{x} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$ ;  $\dot{y} + b(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0, \quad a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$
- Por otro lado para el centro de masa  $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi \quad \tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- Entonces, rodar sin deslizar se convierte en  $\dot{x} + b\dot{\phi}\cos\phi\cos\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\cos\phi = 0$   $\dot{y} + b\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta + b\dot{\psi}\sin\phi = 0$
- Finalmente la energía cinética es 
  $$\begin{split} T &= T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{I_{11}}{2}\left[(\Omega^1)^2 + (\Omega^2)^2\right] + \frac{I_{33}}{2}(\Omega^3)^2 \\ T &= \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{I_{11}}{2}I\dot{\phi}^2\cos^2\alpha + \frac{I_{33}}{2}(\dot{\phi}\sin\alpha + \dot{\psi})^2 \end{split}$$