

Coordenadas Generalizas

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



30 de abril de 2025

- 1 Coordinadas Generalizadas
- 2 Vínculos holónomos y anholónomos
- 3 Recapitulando
- 4 Para la discusión

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por $3N$ coordenadas.

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por $3N$ coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas:
 $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t),$

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por $3N$ coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas:
 $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t),$
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano ($z = cte$), o sobre un círculo ($x^2 + y^2 = cte$), sobre una esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = cte$), etc.

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por $3N$ coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas:
 $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t),$
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano ($z = cte$), o sobre un círculo ($x^2 + y^2 = cte$), sobre una esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = cte$), etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por $3N$ coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas:
 $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t),$
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano ($z = cte$), o sobre un círculo ($x^2 + y^2 = cte$), sobre una esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = cte$), etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.
- Los grados de libertad definen las **coordenadas generalizadas**, $\{q(t)_1, q(t)_2, \dots, q(t)_s\}$.

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por $3N$ coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas:
 $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t),$
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano ($z = cte$), o sobre un círculo ($x^2 + y^2 = cte$), sobre una esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = cte$), etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.
- Los grados de libertad definen las **coordenadas generalizadas**, $\{q(t)_1, q(t)_2, \dots, q(t)_s\}$.
- La evolución temporal de estas coordenadas definen las **velocidades generalizadas** $\{\dot{q}(t)_1, \dot{q}(t)_2, \dots, \dot{q}(t)_s\}$.

- Consideremos un sistema de N partículas, $i = 1, 2, \dots, N$, con vectores posición son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ tal que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El sistema está descrito por $3N$ coordenadas.
- Pueden existir restricciones, ligaduras o vínculos entre coordenadas, i.e. relaciones algebraicas o funcionales entre coordenadas:
 $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t),$
- Por ejemplo, el movimiento ocurre sobre un plano ($z = cte$), o sobre un círculo ($x^2 + y^2 = cte$), sobre una esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = cte$), etc.
- La cantidad $s = 3N - k$ es el número de **grados de libertad del sistema**, o el número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el movimiento del sistema.
- Los grados de libertad definen las **coordenadas generalizadas**, $\{q(t)_1, q(t)_2, \dots, q(t)_s\}$.
- La evolución temporal de estas coordenadas definen las **velocidades generalizadas** $\{\dot{q}(t)_1, \dot{q}(t)_2, \dots, \dot{q}(t)_s\}$.
- En Mecánica Clásica, el tiempo t es un parámetro.

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$.

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l , la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l , la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l , la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.
- Los vínculos anholónomos son $g(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \leq 0$ o también $g(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l , la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.
- Los vínculos anholónomos son $g(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \leq 0$ o también $g(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$
- En un disco que rueda sin deslizar sobre un plano se tiene una restricción que involucra las velocidades del centro de masa y la velocidad angular: $\dot{x}_{cm} - R\dot{\theta} = 0$.

- Los vínculos holónomos son funciones de las coordenadas generalizadas y, posiblemente, del tiempo $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$.
- Estas restricciones reducen el número de coordenadas independientes.
- En un péndulo simple de longitud l , la posición de la masa en coordenadas (x, y) debe satisfacer la restricción: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, reduciendo los grados de libertad de dos a uno.
- Los vínculos holónomos son integrables y permiten describir el movimiento del sistema con menos coordenadas.
- Los vínculos anholónomos son $g(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \leq 0$ o también $g(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$
- En un disco que rueda sin deslizar sobre un plano se tiene una restricción que involucra las velocidades del centro de masa y la velocidad angular: $\dot{x}_{cm} - R\dot{\theta} = 0$.
- Los vínculos anholónomos no pueden integrarse e involucran relaciones entre coordenadas y velocidades.

- 1 **Sistema Mecánico:** Un sistema con N partículas con $3N$ coordenadas cartesianas $\{\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)\}$.

- 1 **Sistema Mecánico:** Un sistema con N partículas con $3N$ coordenadas cartesianas $\{\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)\}$.
- 2 **Restricciones (Vínculos):**
 k restricciones independientes $\Rightarrow s = 3N - k$ grados de libertad.
 - **Holónomos:** Relaciones algebraicas $f_j(\mathbf{r}_1, \dots, t) = 0$.
 - **Anholónomos:** Involucran velocidades, son no integrables. Ejemplo rodar sin deslizar.

- 1 **Sistema Mecánico:** Un sistema con N partículas con $3N$ coordenadas cartesianas $\{\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)\}$.
- 2 **Restricciones (Vínculos):**
 k restricciones independientes $\Rightarrow s = 3N - k$ grados de libertad.
 - **Holónomos:** Relaciones algebraicas $f_j(\mathbf{r}_1, \dots, t) = 0$.
 - **Anholónomos:** Involucran velocidades, son no integrables. Ejemplo rodar sin deslizar.
- 3 **Coordenadas Generalizadas:**
 - Conjunto mínimo $\{q_1(t), \dots, q_s(t)\}$ que describe el sistema.
 - Velocidades generalizadas: $\{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s\}$.

- 1 **Sistema Mecánico:** Un sistema con N partículas con $3N$ coordenadas cartesianas $\{\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)\}$.
- 2 **Restricciones (Vínculos):**
 k restricciones independientes $\Rightarrow s = 3N - k$ grados de libertad.
 - **Holónomos:** Relaciones algebraicas $f_j(\mathbf{r}_1, \dots, t) = 0$.
 - **Anholónomos:** Involucran velocidades, son no integrables. Ejemplo rodar sin deslizar.
- 3 **Coordenadas Generalizadas:**
 - Conjunto mínimo $\{q_1(t), \dots, q_s(t)\}$ que describe el sistema.
 - Velocidades generalizadas: $\{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s\}$.
- 4 **Transformaciones:** $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) \Leftrightarrow q_j = q_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$

