Transferencia Hohmann y la asitencia gravitacional

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



11 de septiembre de 2024

Agenda



- Transferencia Hohmann
 - ¿Qué es?
 - ¿Cómo ocurre?
 - Los cálculos
 - Eficiente en energía, no en tiempo
- Asistencia gravitacional
 - Marte: ida y vuelta con el "empujón" de Venus
 - Dispersión elástica con el planeta

Transferencia Hohmann ¿Qué es?

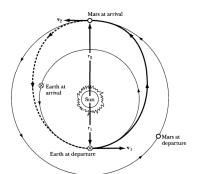


 La transferencia Hohmann es una maniobra orbital que emplea dos encendidos de motor para trasladar una nave espacial entre dos órbitas circulares mediante una trayectoria elíptica.

Transferencia Hohmann ¿Qué es?



- La transferencia Hohmann es una maniobra orbital que emplea dos encendidos de motor para trasladar una nave espacial entre dos órbitas circulares mediante una trayectoria elíptica.
- Este método minimiza el consumo de combustible y es comúnmente utilizado en misiones satelitales e interplanetarias debido a su bajo requerimiento energético.





• La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste



• La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste



- La nave espacial comienza en una órbita circular v₁ estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.



- La nave espacial comienza en una órbita circular v₁ estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.
- ullet Es la transferencia entre la órbita circular y una órbita elíptica, con el incremento de velocidad Δv_1



- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.
- ullet Es la transferencia entre la órbita circular y una órbita elíptica, con el incremento de velocidad Δv_1
- La nave espacial se deja llevar por la trayectoria elíptica hasta alcanzar el cuerpo objetivo.



- La nave espacial comienza en una órbita circular v_1 estable alrededor de un cuerpo celeste
- La nave espacial enciende sus motores e incrementa su velocidad para lograr una velocidad v_{t1} se una trayectoria elíptica que une al cuerpo de partida con el de llegada.
- ullet Es la transferencia entre la órbita circular y una órbita elíptica, con el incremento de velocidad Δv_1
- La nave espacial se deja llevar por la trayectoria elíptica hasta alcanzar el cuerpo objetivo.
- La nave espacial vuelve a encender sus motores para lograr la velocidad necesaria para permanecer en una órbita circular alrededor del cuerpo objetivo



 Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol



- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.



- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica con el Sol en uno de sus focos los valores r_{\min} y r_{\max} constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con E < 0, y corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\rm ef} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \Rightarrow Er^2 + kr \frac{l^2}{2\mu} = 0$



- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica con el Sol en uno de sus focos los valores $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con E < 0, y corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\text{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \Rightarrow Er^2 + kr \frac{l^2}{2\mu} = 0$

• Con lo cual
$$r_{\text{mín}} = -\frac{k}{2E} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right) = \frac{k}{2|E|} (1 - e)$$

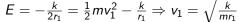
$$r_{\text{máx}} = -\frac{k}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right) = \frac{k}{2|E|} (1 + e)$$



- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica con el Sol en uno de sus focos los valores $r_{\text{mín}}$ y $r_{\text{máx}}$ constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con E < 0, y corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\text{ef}} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \Rightarrow Er^2 + kr \frac{l^2}{2\mu} = 0$
- Con lo cual $r_{\text{mín}} = -\frac{k}{2E} \left(1 \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right) = \frac{k}{2|E|} (1 e)$ $r_{\text{máx}} = -\frac{k}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right) = \frac{k}{2|E|} (1 + e)$
- El semieje mayor de la elipse es $r_{\mathsf{min}} + r_{\mathsf{max}} = 2a$, luego, $a = \frac{k}{2|E|}$



- Primero se determina la velocidad de la nave espacial en la órbita (circular) terrestre alrededor del Sol
- Luego se calcula la velocidad adicional requerida para "impulsarla" hacia una órbita elíptica que alcance la órbita de Marte.
- En esa trayectoria elíptica con el Sol en uno de sus focos los valores r_{\min} y r_{\max} constituyen los puntos de retorno del movimiento radial con E < 0, y corresponden a las raíces de la ecuación $E = V_{\rm ef} = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2ur^2} \Rightarrow Er^2 + kr \frac{l^2}{2\mu} = 0$
- Con lo cual $r_{\text{mín}} = -\frac{k}{2E} \left(1 \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right) = \frac{k}{2|E|} (1 e)$ $r_{\text{máx}} = -\frac{k}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right) = \frac{k}{2|E|} (1 + e)$
- El semieje mayor de la elipse es $r_{\min} + r_{\max} = 2a$, luego, $a = \frac{k}{2|E|}$
- Para la trayectoria circular alrededor del Sol tenemos







• La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 - \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.



- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1} \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es

$$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) > 0$$



- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es

$$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) > 0$$

• Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2 , tenemos $\Delta v_2 = v_2 - v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) > 0$



- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1} \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es $\Delta v_1 = v_{t1} v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} 1\right) > 0$
- Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2 , tenemos $\Delta v_2 = v_2 v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}} \left(1 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) > 0$
- El tiempo para realizar la transferencia T_t es un semiperiodo de la órbita de transferencia $T_t = \frac{\tau_t}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} a_t^{3/2}$



- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1} \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es $\Delta v_1 = v_{t1} v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} 1\right) > 0$
- Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2 , tenemos $\Delta v_2 = v_2 v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}} \left(1 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) > 0$
- El tiempo para realizar la transferencia T_t es un semiperiodo de la órbita de transferencia $T_t = \frac{\tau_t}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} a_t^{3/2}$
- La trayectoria de transferencia de Hohmann representa el menor gasto energético, no representa el menor tiempo.

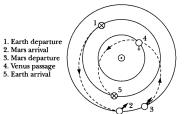


- La energía de la trayectoria elíptica será $E_t = \frac{-k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{t1}^2 \frac{k}{r_1}$, con v_{t1} la nueva velocidad.
- Con lo cual $v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{mr_1} \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)}$ y el incremento de velocidad para iniciar la trayectoria elíptica es $\Delta v_1 = v_{t1} v_1 = \sqrt{\frac{k}{mr_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} 1\right) > 0$
- Para la transferencia de la elipse a la órbita circular de radio r_2 , tenemos $\Delta v_2 = v_2 v_{t2} = \sqrt{\frac{k}{mr_2}} \left(1 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) > 0$
- El tiempo para realizar la transferencia T_t es un semiperiodo de la órbita de transferencia $T_t = \frac{\tau_t}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} a_t^{3/2}$
- La trayectoria de transferencia de Hohmann representa el menor gasto energético, no representa el menor tiempo.
- Para un viaje de ida y vuelta de la Tierra a Marte, la nave espacial tendría que permanecer en Marte durante 460 días hasta que la Tierra y Marte estuvieran posicionados para el viaje de vuelta. El viaje total (259+460+259=978 días =2,7 años)

Marte: ida y vuelta con el "empujón" de Venus



 Una misión de ida y vuelta a Marte podría realizarse en menos de 2 años, con sólo unas pocas semanas cerca (o sobre) Marte con el "empujón" de Venus





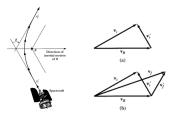
• Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, *B*, con el cual interactúa con *B* y retrocede. La trayectoria es una hipérbola



- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, *B*, con el cual interactúa con *B* y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- ullet Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v_i' y v_f' .

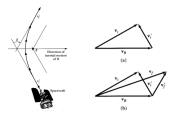


- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, *B*, con el cual interactúa con *B* y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v'_i y v'_f .
- El módulo de esas velocidades es el mismo y el efecto neto sobre la nave espacial es un ángulo de desviación de δ con respecto a B.





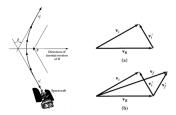
- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, B, con el cual interactúa con B y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v'_i y v'_f .
- El módulo de esas velocidades es el mismo y el efecto neto sobre la nave espacial es un ángulo de desviación de δ con respecto a B.



 Respecto al Sol la nave ha aumentado su velocidad y ha cambiado su dirección. Un aumento en la velocidad ocurre cuando la nave espacial pasa por detrás de la dirección de movimiento de B.



- Una nave espacial desde el infinito se aproxima a un cuerpo, *B*, con el cual interactúa con *B* y retrocede. La trayectoria es una hipérbola
- Las velocidades inicial y final, respecto a B, se denotan por v'_i y v'_f .
- El módulo de esas velocidades es el mismo y el efecto neto sobre la nave espacial es un ángulo de desviación de δ con respecto a B.



- Respecto al Sol la nave ha aumentado su velocidad y ha cambiado su dirección. Un aumento en la velocidad ocurre cuando la nave espacial pasa por detrás de la dirección de movimiento de B.
- Del mismo modo, una disminución de la velocidad se produce cuando la nave espacial pasa por delante de *B*.