

# Hamilton Jacobi

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



3 de diciembre de 2024

- 1 Ecuación de Hamilton Jacobi
- 2 Hamilton-Jacobi y el Principio de Mínima Acción
- 3 Sección

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las  $2s$  nuevas coordenadas y momentos son constantes.

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las  $2s$  nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas  $2s$  constantes  $Q_i$  y  $P_i$  pueden expresarse en función de las  $2s$  condiciones iniciales:  $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$ ,  $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$ .

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las  $2s$  nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas  $2s$  constantes  $Q_i$  y  $P_i$  pueden expresarse en función de las  $2s$  condiciones iniciales:  $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$ ,  $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$ .
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento,  $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$ ,  $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$ .

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las  $2s$  nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas  $2s$  constantes  $Q_i$  y  $P_i$  pueden expresarse en función de las  $2s$  condiciones iniciales:  $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$ ,  $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$ .
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento,  $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$ ,  $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$ .
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes,  $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$ ,  $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$ , tal que  $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$ , entonces existe una función generadora  $\mathcal{F}$  tal que  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + H = 0$



- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las  $2s$  nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas  $2s$  constantes  $Q_i$  y  $P_i$  pueden expresarse en función de las  $2s$  condiciones iniciales:  $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$ ,  $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$ .
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento,  $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$ ,  $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$ .
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes,  $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$ ,  $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$ , tal que  $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$ , entonces existe una función generadora  $\mathcal{F}$  tal que  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + H = 0$
- Esta condición es la ecuación de Hamilton-Jacobi, para una  $\mathcal{F}$ .

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de  $S$ .

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de  $S$ .
- Supongamos que el tiempo  $t_2$  es variable, i.e,  $t_2 = t$ .

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de  $S$ .
- Supongamos que el tiempo  $t_2$  es variable, i.e,  $t_2 = t$ .
- Entonces, la acción dependerá de las trayectorias y del tiempo,  $S = S(q_i, t)$ .

# Título transparencia

