Campos Tensoriales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

4 de febrero de 2021

Agenda: Campos Tensoriales

1. Generalidades
2. Ejemplos de Campos Tensoriales
3. Campos escalares y superficies
4. Campos vectoriales y curvas integrales
5. Flujo de campos vectoriales
6. Recapitulando

- La dependencia funcional de los vectores puede recaer en sus componentes, su base o en ambas
  $\mathbf{a}(t) = a^k(t)\mathbf{e}_k(t) = \tilde{a}^m\tilde{\mathbf{e}}_m(t) = \bar{a}^n(t)\bar{\mathbf{e}}_n$.

- La dependencia funcional de los vectores puede recaer en sus componentes, su base o en ambas
  $\mathbf{a}(t) = a^k(t)\mathbf{e}_k(t) = \tilde{a}^m\tilde{\mathbf{e}}_m(t) = \bar{a}^n(t)\bar{\mathbf{e}}_n$.
- Lo generalizamos para tensores y distinguimos los mismos tres casos:
  1. **bases constantes y componentes variables** $T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)\ \left\langle w^i(1)\right| \otimes \left\langle u^j(2)\right| \otimes \cdots \otimes \left\langle v^k(m)\right| \otimes \left|x_m(1)\right\rangle \otimes \left|y_n(2)\right\rangle \otimes \cdots \otimes \left|z_l(n)\right\rangle$;
  2. **bases variables y componentes constantes** $\check{T}^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}\ \left\langle \check{w}^i(1)\right|_{(t)} \otimes \left\langle \check{u}^j(2)\right|_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left\langle \check{v}^k(m)\right|_{(t)} \otimes \left|\check{x}_m(1)\right\rangle_{(t)} \otimes \left|\check{y}_n(2)\right\rangle_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left|\check{z}_l(n)\right\rangle_{(t)}$,
  3. y, finalmente **ambas (bases y componentes) variables** $T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)\ \left\langle \check{w}^i(1)\right|_{(t)} \otimes \left\langle \check{u}^j(2)\right|_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left\langle \check{v}^k(m)\right|_{(t)} \otimes \left|\check{x}_m(1)\right\rangle_{(t)} \otimes \left|\check{y}_n(2)\right\rangle_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left|\check{z}_l(n)\right\rangle_{(t)}$.

  Al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese.

- La dependencia funcional de los vectores puede recaer en sus componentes, su base o en ambas
$\mathbf{a}(t) = a^k(t)\mathbf{e}_k(t) = \tilde{a}^m\tilde{\mathbf{e}}_m(t) = \bar{a}^n(t)\bar{\mathbf{e}}_n$.
- Lo generalizamos para tensores y distinguimos los mismos tres casos:
  1. **bases constantes y componentes variables** $T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)\ \left\langle w^i(1)\right| \otimes \left\langle u^j(2)\right| \otimes \cdots \otimes \left\langle v^k(m)\right| \otimes \left|x_m(1)\right\rangle \otimes \left|y_n(2)\right\rangle \otimes \cdots \otimes \left|z_l(n)\right\rangle$;
  2. **bases variables y componentes constantes** $\check{T}^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}\ \left\langle \check{w}^i(1)\right|_{(t)} \otimes \left\langle \check{u}^j(2)\right|_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left\langle \check{v}^k(m)\right|_{(t)} \otimes \left|\check{x}_m(1)\right\rangle_{(t)} \otimes \left|\check{y}_n(2)\right\rangle_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left|\check{z}_l(n)\right\rangle_{(t)}$,
  3. y, finalmente **ambas (bases y componentes) variables** $T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)\ \left\langle \check{w}^i(1)\right|_{(t)} \otimes \left\langle \check{u}^j(2)\right|_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left\langle \check{v}^k(m)\right|_{(t)} \otimes \left|\check{x}_m(1)\right\rangle_{(t)} \otimes \left|\check{y}_n(2)\right\rangle_{(t)} \otimes \cdots \otimes \left|\check{z}_l(n)\right\rangle_{(t)}$.

  Al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese.
- Si el tensor NO depende de un solo parámetro
$\mathbf{T}\left[\circ,\circ,\cdots;\bullet,\bullet,\cdots\right]_{(t)}$, sino es función de otro tensor :
$\mathbf{T}\left[\circ,\circ,\cdots;\bullet,\bullet,\cdots\right]_{(\mathbf{G}[\circ,\circ,\cdots;\bullet,\bullet,\cdots])}$, será un **un campo tensorial**.

Si consideramos la base constante, y un único parámetro tendremos:

- **Campos homogéneos**:

  Función : $\varphi = \varphi(t)$

  Vector : $|r\rangle_{(t)} \Longleftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \rightsquigarrow r^{i}(t)$

  Tensor : $\mathbf{T} = \mathbf{T}\left[\circ, \circ, \cdots, \circ; \bullet, \bullet, \cdots, \bullet\right]_{(t)} \rightsquigarrow T_{ij\cdots k}^{mn\cdots l}(t)$

Ejemplos de Campos Tensoriales

Si consideramos la base constante, y un único parámetro tendremos:

- **Campos homogéneos**:
  Función : $\varphi = \varphi(t)$
  Vector : $|r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \leadsto r^i(t)$
  Tensor : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \cdots, \circ; \bullet, \bullet, \cdots, \bullet]_{(t)} \leadsto T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)$
- **Campos constantes o estacionarios**: $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}(t)$
  Campo Escalar : $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$
  Campo Vectorial : $|a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \leadsto a^i(\mathbf{r})$
  Campo Tensorial : $\mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \cdots, \circ; \bullet, \bullet, \cdots, \bullet]_{(|r\rangle)} \leadsto T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(\mathbf{r})$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Si consideramos la base constante, y un único parámetro tendremos:

- **Campos homogéneos**:

  Función $:\ \varphi = \varphi(t)$

  Vector $:\ |r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \rightsquigarrow r^i(t)$

  Tensor $:\ \mathbf{T} = \mathbf{T}\left[\circ, \circ, \cdots, \circ; \bullet, \bullet, \cdots, \bullet\right]_{(t)} \rightsquigarrow T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}(t)$

- **Campos constantes o estacionarios**: $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}(t)$

  Campo Escalar $:\ \varphi = \varphi\left(\mathbf{r}\right)$

  Campo Vectorial $:\ |a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}\left(\mathbf{r}\right) \rightsquigarrow a^i\left(\mathbf{r}\right)$

  Campo Tensorial $:\ \mathbf{T} = \mathbf{T}\left[\circ, \circ, \cdots, \circ; \bullet, \bullet, \cdots, \bullet\right]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}\left(\mathbf{r}\right)$

- **Campos variables o no estacionarios**

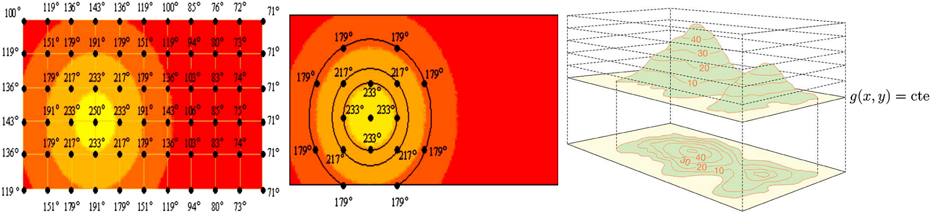
  Campo Escalar $:\ \varphi = \varphi\left(\mathbf{r}(t), t\right)$

  Campo Vectorial $:\ |a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}\left(\mathbf{r}(t), t\right) \rightsquigarrow a^i\left(\mathbf{r}(t), t\right)$

  Campo Tensorial $:\ \mathbf{T} = \mathbf{T}\left[\circ, \circ, \cdots, \circ; \bullet, \bullet, \cdots, \bullet\right]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T^{mn\cdots l}_{ij\cdots k}\left(\mathbf{r}(t), t\right.$

Campos escalares y superficies

- Un campo escalar es toda función escalar, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de argumento vectorial $\phi = \phi\left(\mathbf{r}\right) \quad \Rightarrow \phi = \phi\left(x^i\right) = \phi\left(\tilde{x}^i\right)$.

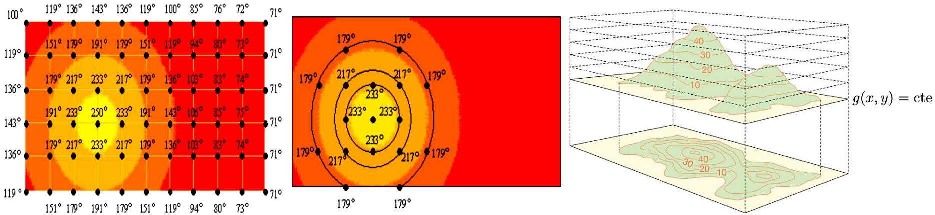


$$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10-(y-2)^2/10},$$ ilustra un campo escalar

Mapa o diagrama de temperaturas.

Campos escalares y superficies

- Un campo escalar es toda función escalar, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de argumento vectorial $\phi = \phi\left(\mathbf{r}\right) \quad \Rightarrow \phi = \phi\left(x^i\right) = \phi\left(\tilde{x}^i\right)$.
- Un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento.

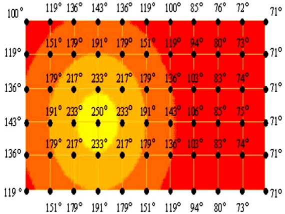


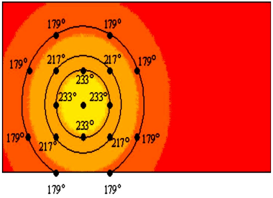
$$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10-(y-2)^2/10}$$, ilustra un campo escalar

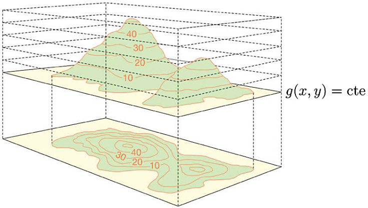
Mapa o diagrama de temperaturas.

Campos escalares y superficies

- Un campo escalar es toda función escalar, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de argumento vectorial $\phi = \phi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \phi = \phi\left(x^i\right) = \phi\left(\tilde{x}^i\right)$.
- Un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento.
- Un campo escalar $\phi = \phi\left(x^1, x^2\right)$ definirá diferentes superficies si la representamos en $\mathbb{R}^3$ de la forma: $x^3 = \phi\left(x^1, x^2\right)$







$$T = T(x,y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10-(y-2)^2/10},$$ ilustra un campo escalar

Mapa o diagrama de temperaturas.

- Un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de varias variables, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A cada punto del espacio se le asigna un vector.

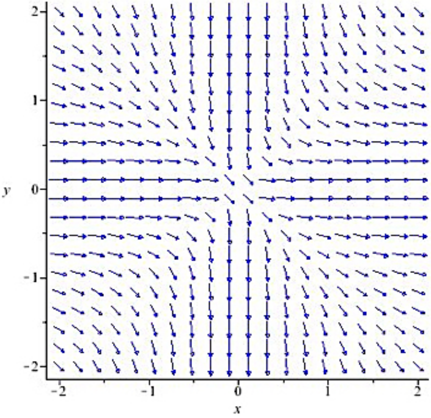
Campos vectoriales y curvas integrales

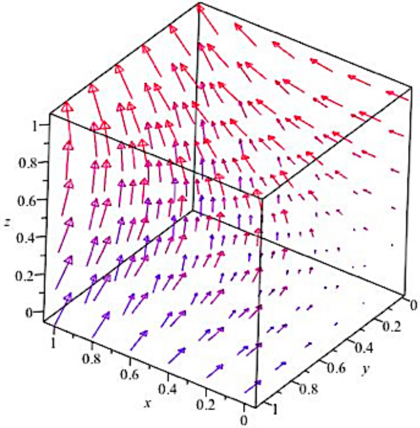
- Un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de varias variables, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A cada punto del espacio se le asigna un vector.
- A las líneas construidas a partir de los vectores tangentes se les dominan *líneas de campo, curvas integrales*, *líneas de flujo* o de *corriente*. Consideremos el caso bidimensional
$\mathrm{d}\mathbf{r} \propto \mathbf{A}(x,y) = A_x(x,y)\,\mathbf{i} + A_y(x,y)\mathbf{j} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{A_x(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y(x,y)}$.
Entonces las *líneas de flujo* o *curvas integrales* del campo serán
$\mathbf{A}(x,y)\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)}\mathrm{d}x$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de varias variables, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A cada punto del espacio se le asigna un vector.
- A las líneas construidas a partir de los vectores tangentes se les dominan *líneas de campo, curvas integrales*, *líneas de flujo* o de *corriente*. Consideremos el caso bidimensional
$\mathrm{d}\mathbf{r} \propto \mathbf{A}(x,y) = A_x(x,y)\,\mathbf{i} + A_y(x,y)\mathbf{j} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{A_x(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y(x,y)}$.
Entonces las *líneas de flujo* o *curvas integrales* del campo serán
$\mathbf{A}(x,y)\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \frac{A_y(x,y)}{A_x(x,y)}\mathrm{d}x$.
- A las trayectorias ortogonales a estas líneas se les denomina *líneas equipotenciales*. $\mathbf{A}^{\perp}(x,y) \cdot \mathbf{A}(x,y) = 0 \quad \Rightarrow$
$A_x(x,y)A_x^{\perp}(x,y) + A_y(x,y)A_y^{\perp}(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \frac{A_x(x,y)}{A_y(x,y)} = -\frac{A_y^{\perp}(x,y)}{A_x^{\perp}(x,y)}$.
Finalmente $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{A_y^{\perp}(x,y)}{A_x^{\perp}(x,y)} \quad \Rightarrow y(x) = -\int \frac{A_y^{\perp}(x,y)}{A_x^{\perp}(x,y)}\mathrm{d}x$.

Campos vectoriales y curvas integrales





Flujo de campos vectoriales

- Consideremos una superficie infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{S} = \|\mathrm{d}\mathbf{S}\| \,\hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal esa superficie S. Entonces, lel flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $\mathrm{d}\mathbf{S}$ es $\mathrm{d}F = \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s \,\mathrm{d}S \Rightarrow F = \iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s \,\mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}} \,\mathrm{d}S$.

Flujo de campos vectoriales

- Consideremos una superficie infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{S} = \|\mathrm{d}\mathbf{S}\|\,\hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal esa superficie S. Entonces, lel flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $\mathrm{d}\mathbf{S}$ es $\mathrm{d}F = \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S \Rightarrow F = \iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}S$.
- $F = \iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$, es el flujo total. Un escalar independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas puede expresarse como $\mathrm{d}F = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = A^1\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^1}\right) + A^2\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^2}\right) + A^3\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^3}\right)$.

- Consideremos una superficie infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{S} = \|\mathrm{d}\mathbf{S}\|\,\hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal esa superficie S. Entonces, lel flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $\mathrm{d}\mathbf{S}$ es $\mathrm{d}F = \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S \Rightarrow F = \iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}}\,\mathrm{d}S$.
- $F = \iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$, es el flujo total. Un escalar independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas puede expresarse como $\mathrm{d}F = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\,\mathrm{d}S = A^1\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^1}\right) + A^2\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^2}\right) + A^3\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^3}\right)$.
- El flujo será máximo cuando el campo es paralelo a $\mathrm{d}\mathbf{S}$ y nulo cuando el campo es paralelo a $\mathrm{d}\mathbf{S}$.

Flujo de campos vectoriales

- Consideremos una superficie infinitesimal $\mathrm{d}\mathbf{S} = \|\mathrm{d}\mathbf{S}\|\, \hat{\mathbf{n}}_s$, con $\hat{\mathbf{n}}_s$ el vector unitario normal esa superficie S. Entonces, lel flujo diferencial del campo vectorial a través de la superficie $\mathrm{d}\mathbf{S}$ es $\mathrm{d}F = \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\, \mathrm{d}S \Rightarrow F = \iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\, \mathrm{d}S = \iint_s A_{\hat{\mathbf{n}}}\, \mathrm{d}S$.
- $F = \iint_s \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$, es el flujo total. Un escalar independiente del sistema de coordenadas. En coordenadas cartesianas puede expresarse como $\mathrm{d}F = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\, \mathrm{d}S = A^1\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^1}\right) + A^2\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^2}\right) + A^3\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ A^3}\right)$.
- El flujo será máximo cuando el campo es paralelo a $\mathrm{d}\mathbf{S}$ y nulo cuando el campo es paralelo a $\mathrm{d}\mathbf{S}$.
- la cantidad de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo viene dada por $\mathrm{d}F = \left(\|\mathbf{v}\|\cos\left(\widehat{\hat{\mathbf{n}}_s\ \mathbf{v}}\right)\right)\mathrm{d}S = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\, \mathrm{d}S = \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \Rightarrow$ $F = \iint_s \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}_s\, \mathrm{d}S = \iint_s v_{\hat{\mathbf{n}}}\, \mathrm{d}S$.

Recapitulando

- LZZZZZZ