Integrales y campos vectoriales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

15 de febrero de 2021

1. Integrales de línea
    - Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$
    - Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
2. Integrales de superficie
3. YYYYYY
4. YYYYYY
5. YYYYYY
6. YYYYYY
7. Recapitulando

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Estas integrales requieren especificar las curvas C, las trayectorias, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Estas integrales requieren especificar las curvas C, las trayectorias, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.
- Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Estas integrales requieren especificar las curvas C, las trayectorias, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.
- Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Estas integrales requieren especificar las curvas C, las trayectorias, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.
- Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x,y,z)\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x,y,z)\, (\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k})$, es decir $\int_C \phi(x,y,z)\, \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_C \phi\left(x, y\left(x\right), z\left(x\right)\right) \mathrm{d}x + \mathbf{j}\int_C \phi\left(x\left(y\right), y, z\left(y\right)\right) \mathrm{d}y + \mathbf{k}\int_C \phi\left(x\left(z\right), y\left(z\right), z\right) \mathrm{d}z$

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Estas integrales requieren especificar las curvas C, las trayectorias, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.
- Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x,y,z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x,y,z) \, (\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k})$, es decir $\int_C \phi(x,y,z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_C \phi\left(x, y\left(x\right), z\left(x\right)\right) \mathrm{d}x + \mathbf{j} \int_C \phi\left(x\left(y\right), y, z\left(y\right)\right) \mathrm{d}y + \mathbf{k} \int_C \phi\left(x\left(z\right), y\left(z\right), z\right) \mathrm{d}z$
- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, por lo tanto: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $\quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.

Integrales de línea $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Estas integrales requieren especificar las curvas C, las trayectorias, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.
- Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x, y, z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x, y, z) \, (\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k})$, es decir $\int_C \phi(x, y, z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_C \phi\left(x, y\left(x\right), z\left(x\right)\right) \mathrm{d}x + \mathbf{j} \int_C \phi\left(x\left(y\right), y, z\left(y\right)\right) \mathrm{d}y + \mathbf{k} \int_C \phi\left(x\left(z\right), y\left(z\right), z\right) \mathrm{d}z$
- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, por lo tanto: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $\quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.
- en coordenadas esféricas es: $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_r = \hat{\mathbf{e}}_r \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r \mathrm{d}\theta$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \operatorname{sen}(\theta) \mathrm{d}\varphi$,

  mientras que en cilíndricas $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho \mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_z = \hat{\mathbf{e}}_z \mathrm{d}z$.

- Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos: $\int_C \phi \, \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$
- Estas integrales requieren especificar las curvas C, las trayectorias, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración.
- Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.
- La curva puede estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender del camino.
- Para integrales del tipo $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}$, en coordenadas cartesianas, $\int_C \phi(x,y,z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(x,y,z) \, (\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k})$, es decir $\int_C \phi(x,y,z) \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_C \phi\left(x, y\left(x\right), z\left(x\right)\right) \mathrm{d}x + \mathbf{j}\int_C \phi\left(x\left(y\right), y, z\left(y\right)\right) \mathrm{d}y + \mathbf{k}\int_C \phi\left(x\left(z\right), y\left(z\right), z\right) \mathrm{d}z$
- En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, por lo tanto: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i$, con $\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$, $\quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|$.
- en coordenadas esféricas es: $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_r = \hat{\mathbf{e}}_r \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r \mathrm{d}\theta$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \,\mathrm{sen}(\theta) \mathrm{d}\varphi$,

  mientras que en cilíndricas $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho \mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{\iota}_z = \hat{\mathbf{e}}_z \mathrm{d}z$.
- Con lo cual, en coordenadas curvilíneas generalizadas tendremos: $\int_C \phi(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \phi(\mathbf{r}(q^j)) \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i\right) =$ $\hat{\mathbf{e}}_1 \int_C \phi(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1)) h_1 \mathrm{d}q^1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \int_C \phi(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2)) h_2 \mathrm{d}q^2 + \hat{\mathbf{e}}_3 \int_C \phi(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3) h_3 \mathrm{d}q^3$.

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta
  $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z \,.$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}\times \mathrm{d}\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\cdot[\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $$\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x,y(x),z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $$\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x,y(x),z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j))\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} h_i\hat{\mathbf{e}}_i\mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$

  $$\int_C A_{q^1}(q^1,q^2(q^1),q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2),q^2,q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3),q^2(q^3),q^3)h_3\mathrm{d}q^3.$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j)) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$ $\int_C A_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3)h_3\mathrm{d}q^3$.

- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right] \times [\mathrm{d}x\ \mathbf{i} + \mathrm{d}y\ \mathbf{j} + \mathrm{d}z\ \mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\int_C A_j\ \mathrm{d}x_k\ \epsilon^{ijk}\right) |\mathrm{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j\ h_i\ \mathrm{d}q^i\ \tilde{\epsilon}^{ijk}\right) |\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\cdot [\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x,y(x),z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$

- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.

- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j))\cdot\left(\sum_{i=1}^3 h_i\hat{\mathbf{e}}_i\mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} =$

  $\int_C A_{q^1}(q^1,q^2(q^1),q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2),q^2,q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3),q^2(q^3),q^3)h_3\mathrm{d}q^3.$

- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A}\times \mathrm{d}\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería

  $\int_C \mathbf{A}\times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\times [\mathrm{d}x\ \mathbf{i} + \mathrm{d}y\ \mathbf{j} + \mathrm{d}z\ \mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A}\times \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\int_C A_j\ \mathrm{d}x_k\ \epsilon^{ijk}\right)|\mathrm{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j\ h_i\ \mathrm{d}q^i\ \tilde{\epsilon}^{ijk}\right)|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle$

- Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifian a través dek parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $\mathrm{d}\mathbf{r}$ serán $\mathrm{d}x = f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, $\mathrm{d}y = g'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ y $\mathrm{d}z = h'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial

$$
\mathbf{A}(x^i) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} A^1(x,y,z) = & A_x(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & F(\lambda) \\ A^2(x,y,z) = & A_y(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & G(\lambda) \\ A^3(x,y,z) = & A_z(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & H(\lambda) \end{array} \right.
$$

Integrales de línea $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ y $\int_C \mathbf{A}\times d\mathbf{r}$

- La segunda familia de integrales de linea otro escalar: $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Otra vez en coordenadas cartesianas resulta $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\cdot[\mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}] \Rightarrow$

  $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x(x,y(x),z(x))\mathrm{d}x + \int_C A_y(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_C A_z(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$
- Cuando el contorno cerrado, tenemos $\oint_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, la *circulación* del campo vectorial $\mathbf{A}$ a lo largo del contorno C.
- En coordenadas curvilíneas generalizadas $\int_C \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}(q^j))\cdot\left(\sum_{i=1}^3 h_i\hat{\mathbf{e}}_i \mathrm{d}q^i\right)$, resulta que $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$

  $\int_C A_{q^1}(q^1,q^2(q^1),q^3(q^1))h_1\mathrm{d}q^1 + \int_C A_{q^2}(q^1(q^2),q^2,q^3(q^2))h_2\mathrm{d}q^2 + \int_C A_{q^3}(q^1(q^3),q^2(q^3),q^3)h_3\mathrm{d}q^3.$
- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial. $\int_C \mathbf{A}\times \mathrm{d}\mathbf{r}$. En coordenadas cartesianas sería

  $\int_C \mathbf{A}\times \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \left[A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}\right]\times[\mathrm{d}x\ \mathbf{i} + \mathrm{d}y\ \mathbf{j} + \mathrm{d}z\ \mathbf{k}]$ y formalmente en coordenadas

  curvilineas generalizadas $\int_C \mathbf{A}\times \mathrm{d}\mathbf{r} = \left(\int_C A_j\ \mathrm{d}x_k\ \epsilon^{ijk}\right)|\mathrm{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{A}_j\ h_i\ \mathrm{d}q^i\ \tilde{\epsilon}^{ijk}\right)|\tilde{\mathrm{e}}_k\rangle$
- Podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva y entonces las integrales de linea se especifian a través dek parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano $x = f(\lambda)$, $y = g(\lambda)$ y $z = h(\lambda)$. Las componentes del vector desplazamiento, para el $\mathrm{d}\mathbf{r}$ serán $\mathrm{d}x = f'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, $\mathrm{d}y = g'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ y $\mathrm{d}z = h'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$, mientras que las componentes del campo vectorial

$$\mathbf{A}(x^i) \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} A^1(x,y,z) = & A_x(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & F(\lambda) \\ A^2(x,y,z) = & A_y(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & G(\lambda) \\ A^3(x,y,z) = & A_z(f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)) \equiv & H(\lambda) \end{array}\right.$$

- por lo tanto: $\int_C \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda$

Integrales de superficie

- LZZZZZZ

YYYYYY

- LZZZZZZ

YYYYYY

- LZZZZZZ

YYYYYY

- LZZZZZZ

YYYYYY

- LZZZZZZ

Recapitulando

- LZZZZZZ