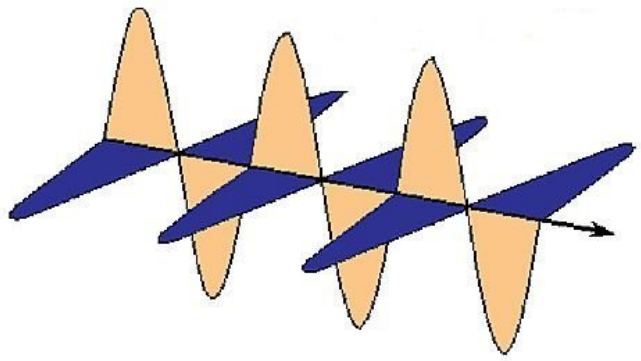
Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Mario Cosenza

Electromagnetismo



Notas de Clase - Versión A-12

Electromagnetismo

Versión A-12

© Dr. Mario Cosenza
Centro de Fisica Fundamental
Area de Caos y Sistemas Complejos
www.ciens.ula.ve/cff/caoticos

Y Dios dijo:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J},
\end{aligned}
$$

y se hizo la luz.

Fórmulas vectoriales

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{C}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \phi(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla\phi)$$

$$\nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \phi(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot\nabla\phi$$

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla\times(\nabla\phi) = 0$$

$$\nabla\times[\hat{\mathbf{r}}f(r)] = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{r} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$$

$$\int_V(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,d^3r = \oint_S(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da \qquad \text{Teorema de Green}$$

$$\int_V(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d^3r = \oint_S\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da \qquad \text{Teorema de Gauss (divergencia)}$$

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = \oint_C\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad \text{Teorema de Stokes}$$

$$\int_V\nabla\times\mathbf{A}\,d^3r = \oint_S\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{A}\,da$$

$$\int_S\hat{\mathbf{n}}\times(\nabla\psi)\,da = \oint_C\psi\,d\mathbf{l}$$

$$\int_V\nabla\psi\,d^3r = \oint_S\psi\hat{\mathbf{n}}\,da$$

Contenido

1 Electrostática. **1**
1.1 Ecuaciones de Maxwell. 1
1.2 Campo electrostático. 6
1.3 Potencial escalar eléctrico. 17
1.4 Expansión multipolar del potencial eléctrico. 27
1.5 Interacción de una distribución de carga con un campo externo. 35
1.6 Ecuaciones de Poisson y de Laplace. 39
1.7 Energía electrostática. 40
1.8 Potencial y campo eléctrico en conductores. 45
1.9 Capacitancia. 48
1.10 Problemas. 53

2 Problemas de frontera en Electrostática **57**
2.1 Teorema de Green. 57
2.2 Función de Green. 60
2.3 Método de imágenes. 65
2.4 Funciones ortogonales. 75
2.5 Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas. 78
2.6 Ecuación de Laplace en coordenadas polares. 83
2.7 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. 87
2.8 Problemas de frontera con simetría azimutal. 91
2.9 Armónicos esféricos. 100
2.10 Expansión de la función de Green en coordenadas esféricas. 105
2.11 Aplicaciones de la expansión esférica de la función de Green. 113
2.12 Problemas. 121

3 Campos eléctricos en la materia **125**
3.1 Polarizabilidad molecular. 125
3.2 Modelos estadísticos de polarizabilidad molecular. 128
3.3 Electrostática en medios dieléctricos. 134
3.4 Problemas de frontera con dieléctricos. 139
3.5 Energía electrostática en medios dieléctricos. 144
3.6 Problemas. 148

4 Magnetostática **149**
4.1 Ecuaciones de la Magnetostática. 149
4.2 Ley de Biot-Savart y Ley de Ampère. 155
4.3 Expansión multipolar del potencial vector. 162
4.4 Momento magnético. 166
4.5 Magnetostática en medios materiales. 170
4.6 Problemas. 178

5 Campos electromagnéticos dependientes del tiempo. **181**
5.1 Ley de Faraday y ecuaciones de Maxwell. 181
5.2 Transformaciones de calibre. 187
5.3 Energía del campo magnético. 189
5.4 Conservación de energía del campo electromagnético. 194
5.5 Momento del campo electromagnético. 196
5.6 Momento angular del campo electromagnético. 200
5.7 Ondas electromagnéticas. 203
5.8 Polarización, reflexión y refracción de ondas electromagnéticas. 210
5.9 Problemas. 217

6 Transformaciones relativistas de campos electromagnéticos. **221**
6.1 Revisión de Relatividad Especial. 221
6.2 Corrimiento Doppler relativista. 235
6.3 Transformaciones de campos electromagnéticos. 241
6.4 Problemas. 253

Capítulo 1

Electrostática.

1.1 Ecuaciones de Maxwell.

Los fenómenos electromagnéticos macroscópicos están descritos por las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{1.4}$$

Estas ecuaciones corresponden a fuentes y campos en el vacío, en el sistema de unidades CGS. En medios materiales, aparecen algunos factores adicionales, pero la forma de las ecuaciones es la misma.

Las cantidades físicas que aparecen en las ecuaciones de Maxwell y sus unidades en el sistema CGS son

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}: &\ \text{campo eléctrico [statvolt/cm]},\\
\mathbf{B}: &\ \text{campo magnético [Gauss]},\\
\rho: &\ \text{densidad de carga eléctrica [Coulomb/cm}^3\text{]},\\
\mathbf{J}: &\ \text{densidad de corriente eléctrica [Ampère/cm}^2\text{]},\\
c: &\ \text{velocidad constante de la luz en el vacío [cm/s]}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Las ecuaciones de Maxwell describen leyes de la naturaleza descubiertas experimentalmente en una serie de trabajos monumentales debidos a Oersted, Coulomb, Faraday, Ampère, Biot, Savart y otros grandes físicos.

La Ec. (1.1) también se conoce como la ley de Gauss para el Electromagnetismo, y es consecuencia de la ley de Coulomb para las fuerzas entre cargas eléctricas. La Ec. (1.2) corresponde a la ley de inducción de Faraday. La Ec. (1.3) describe la ausencia de cargas (monopolos) magnéticas, mientras que la Ec. (1.4) contiene la ley de Ampère para el campo magnético producido por una corriente eléctrica, es decir, por cargas eléctricas en movimiento.

Maxwell dió forma matemática a estas leyes e introdujo una notación conveniente. La inclusión del término $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (denominado *corriente de desplazamiento*) en la Ec. (1.4), mediante un requerimiento de simetría en relación con la Ec. (1.2), constituye la contribución fundamental de Maxwell al Electromagnetismo. Con la adición de este término, las ecuaciones de Maxwell pemitieron la predicción de ondas electromagnéticas cuya velocidad de propagación es igual a la velocidad de la luz.

Las ecuaciones de Maxwell expresan la relación física entre los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, y de éstos con sus fuentes ρ y $\mathbf{J}$. Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de ocho ecuaciones diferenciales acopladas, en derivadas parciales de primer orden con respecto al espacio y al tiempo, para las seis componentes los campos vectoriales $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$; dadas las fuentes $\rho(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$.

Para aplicar estas ecuaciones en situaciones físicas se requiere un sistema de coordenadas (cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.) apropiado para el problema considerado.

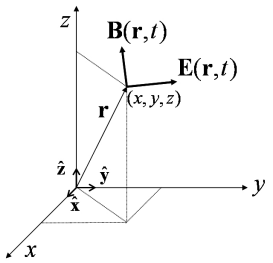


Figura 1.1: Campos $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ en un sistema de coordenadas cartesianas.

En coordenadas cartesianas, el vector de posición en el espacio tridimensional con respecto a un origen dado O es $\mathbf{r} = (x,y,z) = (x_1,x_2,x_3)$, y el campo eléctrico (o

magnético) en el punto $\mathbf{r}$ y en el instante t es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (E_x(\mathbf{r},t), E_y(\mathbf{r},t), E_z(\mathbf{r},t)), \tag{1.6}$$

donde $E_x(\mathbf{r},t) = E_x(x,y,z,t)$, etc. En general, escribimos las componentes cartesianas $E_i(\mathbf{r},t) = E_i(x_1,x_2,x_3,t)$, $i = 1,2,3$. El vector unitario en la dirección x_i se denota por $\hat{\mathbf{x}}_i$.

Los operadores diferenciales vectoriales en las ecuaciones de Maxwell, en coordenadas cartesianas, son:

Gradiente:

$$\nabla\phi(x,y,z) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right). \tag{1.7}$$

Divergencia:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right). \tag{1.8}$$

Rotacional:

$$\nabla\times\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ E_x & E_y & E_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.9}$$

Derivada temporal:

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t}\right). \tag{1.10}$$

Una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Maxwell es la conservación de la carga eléctrica. Para ver esto, consideremos la siguiente derivada parcial con respecto a t, tomando en cuenta que las coordenadas de $\mathbf{r}$ y t son independientes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{E}) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial t} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial t} \\ &= \nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Derivando parcialmente la Ec. (1.1) con respecto a t, tenemos

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{1.12}$$

Sustituyendo el término $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ de la Ec. (1.4), tenemos

$$c\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - 4\pi \nabla \cdot \mathbf{J} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{1.13}$$

Pero $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ (identidad vectorial). Luego,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{1.14}$$

Esta es la ecuación de continuidad para el flujo de carga eléctrica, similar a la ecuación de continuidad de un fluido incompresible. Si la densidad de carga disminuye en una region, debemos tener $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ en esa region; mientras que la divergencia de la corriente eléctrica debe ser $\nabla \cdot \mathbf{J} > 0$; es decir, hay un flujo de corriente (cargas en movimiento) que sale de dicha región. Por otro lado, un aumento de carga en una región, $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$, está asociado a una divergencia negativa de la corriente, $\nabla \cdot \mathbf{J} < 0$; es decir, las cargas eléctricas deben entrar a esa región.

La Ec. (1.14) expresa la conservación de la carga eléctrica.

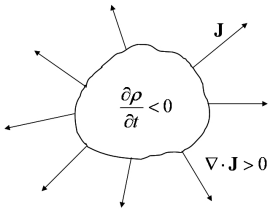


Figura 1.2: Conservación de la carga eléctrica: la disminución de la densidad de carga ρ en una región del espacio está asociada a la divergencia positiva de la densidad de corriente $\mathbf{J}$ en esa región.

En el Electromagnetismo clásico las distribuciones de cargas y de corrientes se asumen continuas en el espacio, aunque con frecuencia consideramos distribuciones de cargas localizadas como puntos. Sabemos que la carga eléctrica está cuantizada a nivel microscópico; toda carga q es un múltiplo entero de la carga fundamental del electrón, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb.

Las ecuaciones de Maxwell describen la dinámica de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ producidos por cargas y corrientes eléctricas; no describen el movimiento de cargas sujetas a esos campos. La dinámica de una carga eléctrica q que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en presencia de campos electromagnéticos externos $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ (es decir, no producidos por q) es un resultado experimental adicional a las ecuaciones de Maxwell, y está descrita por la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right). \tag{1.15}$$

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ contribuyen diferentemente a la fuerza de Lorentz sobre una carga en movimiento. La fuerza que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ produce en un punto del espacio donde está ubicada la carga permite medir $\mathbf{E}$ en ese punto y, similarmente, la componente magnética de la fuerza determina $\mathbf{B}$.

Los campos $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ tienen significado propio independiente de las fuentes que los producen; ellos pueden existir en regiones lejos de sus fuentes en forma de ondas, y pueden llevar energía, momento lineal y momento angular.

Las ecuaciones de Maxwell se simplifican considerablemente si las cantidades son estacionarias, es decir, si $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ρ y $\mathbf{J}$, no dependen del tiempo,

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.16}$$

En este caso, los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ se desacoplan y las ecuaciones de Maxwell se pueden separar en dos pares de ecuaciones, correspondientes a la Electrostática y a la Magnetostática,

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho && (1.17) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 && (1.18) \end{aligned}\right\} \text{Electrostática}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (1.19) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. && (1.20) \end{aligned}\right\} \text{Magnetostática}$$

1.2 Campo electrostático.

Consideremos dos cargas puntuales q_1 y q_2 ubicadas en las posiciones $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respectivamente.

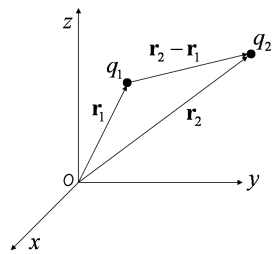


Figura 1.3: Dos cargas puntuales en el espacio.

La fuerza sobre q_2 debida a la interacción con q_1 está dada experimentalmente por la *Ley de Coulomb*,

$$\mathbf{F}_{\text{sobre } q_2} = k\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right), \tag{1.21}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades; en el sistema CGS, $k \equiv 1$. Debido a la Tercera Ley de Newton, tenemos

$$\mathbf{F}_{\text{sobre } q_2} = -\mathbf{F}_{\text{sobre } q_1}. \tag{1.22}$$

La fuerza entre cargas eléctricas debida a la Ley de Coulomb puede ser atractiva o repulsiva. Esto permite distinguir dos tipos de cargas existentes en la Naturaleza, designadas como positivas o negativas; cargas de signos opuestos se atraen y cargas de signos iguales se repelen.

El campo electrostático $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en un punto $\mathbf{r}$ del espacio se mide en términos de la fuerza ejercida sobre una carga de prueba puntual q colocada en la posición $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{1.23}$$

La fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ experimentada por la carga q es debida a su interacción con otras cargas que producen el campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

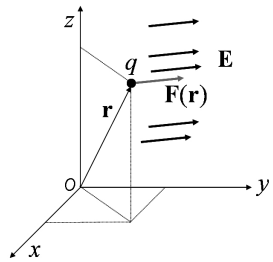


Figura 1.4: Campo eléctrico $\mathbf{E}$ externo en la posición de una carga q.

El campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ se define cuando el campo creado por la carga de prueba en $\mathbf{r}$ es despreciable; es decir, cuando $q \to 0$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q}. \tag{1.24}$$

El campo eléctrico producido en la posición $\mathbf{r}_2$ por una carga q_1, cuando $q_2 \to 0$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \lim_{q_2 \to 0} \frac{\mathbf{F}_{\text{sobre } q_2}}{q_2} = \frac{q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{1.25}$$

La dirección de $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2)$ depende del signo de la carga q_1. En general, el campo producido en la posición $\mathbf{r}$ por una carga q ubicada en $\mathbf{r}_1$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \tag{1.26}$$

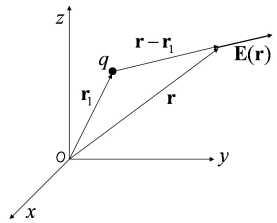


Figura 1.5: Campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ producido en la posición $\mathbf{r}$ por una carga q ubicada en $\mathbf{r}_1$.

Una carga q ubicada en el origen O ($\mathbf{r}_1 = 0$) produce un campo radial

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^3}\mathbf{r} = \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{1.27}$$

donde usamos la notación $r = |\mathbf{r}|$.

Las ecuaciones de Maxwell son lineales para los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Los campos cumplen el principio de superposición: si $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ son campos independientes que satisfacen las ecuaciones de Maxwell, entonces su suma $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ también satisface estas ecuaciones. Luego, el campo total en la posición $\mathbf{r}$ debido a un conjunto de cargas puntuales q_i ubicadas en los puntos $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \tag{1.28}$$

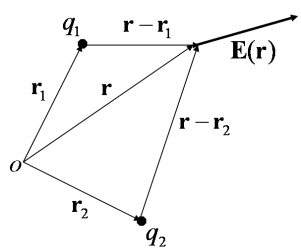


Figura 1.6: Campo eléctrico creado en la posición $\mathbf{r}$ por un conjunto de cargas q_i ubicadas en $\mathbf{r}_i$.

Si las cargas son muy pequeñas ($q_i \to 0$) y N es muy grande ($N \to \infty$), tenemos el límite de una distribución continua de carga ρ, tal que $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}'$ y $q_i \to dq = \rho(\mathbf{r}')d^3r'$, donde denotamos el elemento infinitesimal de volumen por d^3r'. En el límite continuo, la sumatoria sobre las cargas se convierte en una integral de la densidad de carga sobre el volumen. El campo eléctrico producido por una densidad de carga resulta en

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'\,, \tag{1.29}$$

donde empleamos la notación:

$$\mathbf{r} \;:\; \text{punto de observación fijo.} \tag{1.30}$$

$$\mathbf{r}' \;:\; \text{posición de fuentes, variable de integración.} \tag{1.31}$$

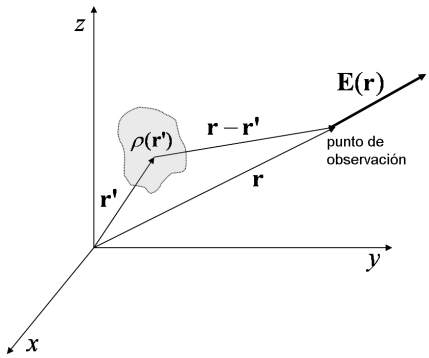


Figura 1.7: Campo eléctrico producido por una densidad de carga. La coordenada de integración es $\mathbf{r}'$ y la de observación es $\mathbf{r}$.

El campo eléctrico en la Ec. (1.29) constituye una expresión de la Ley de Coulomb para distribuciones continuas de carga. La Ec. (1.29) es compatible con las dos ecuaciones de la Electrostática, como veremos.

Dada una distribución arbitraria de carga, la Ec. (1.29) permite, en principio, calcular el campo eléctrico producido por esa carga en cualquier punto del espacio. En la práctica, el cálculo de la integral en la Ec. (1.29) puede resultar difícil, salvo en configuraciones geométricas que posean mucha simetría.

Una alternativa útil para calcular el campo eléctrico producido por ciertas distribuciones simétricas de carga es la *fórmula integral de la Ley de Gauss*.

La ecuación de la Electrostática $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ constituye la Ley de Gauss escrita en forma diferencial. Esta ecuación se puede expresar en forma integral empleando el *teorema de la divergencia*:

> Si $\mathbf{A}$ es un campo vectorial definido dentro de un volumen V y sobre la superficie S que encierra a V, y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario normal a cada punto de S, entonces
>
> $$\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, d^3r. \tag{1.32}$$
>
> La integral sobre la superficie se denomina *flujo* de $\mathbf{A}$ a través de S.

Si integramos la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ sobre un volumen V que contenga a ρ, tenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, d^3r = 4\pi \int_V \rho(\mathbf{r})\, d^3r, \tag{1.33}$$

y el teorema de la divergencia implica que

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 4\pi q_{\text{enc}}\,, \tag{1.34}$$

donde q_{enc} es la carga total encerrada por la superficie S. La Ec. (1.34) es la Ley de Gauss en forma integral.

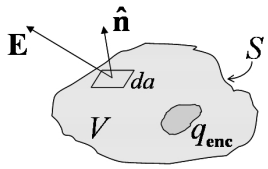


Figura 1.8: Ley de Gauss.

Note que solamente se consideran las cargas encerradas por S, aunque el campo eléctrico $\mathbf{E}$ usado en la evaluación del flujo a través de S contenga contribuciones de otras fuentes ubicadas fuera de S. El flujo neto a través de S, debido a campos producidos fuera de S, es cero.

Ejemplos.

1. Calcular el campo eléctrico de un plano infinito con densidad uniforme de carga superficial σ.

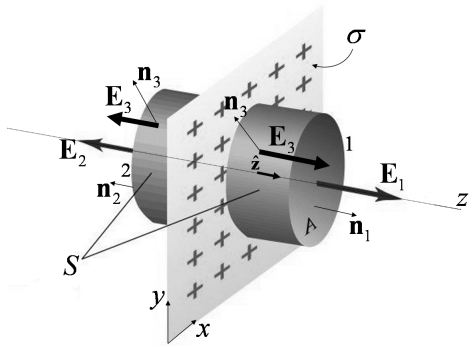


Figura 1.9: Aplicación de la Ley de Gauss para un plano infinito con carga superficial uniforme.

Por simetría, $\mathbf{E}$ es perpendicular al plano y paralelo al eje z. Usamos la Ley de Gauss en su forma integral para una superficie cilíndrica S, como se muestra en la figura.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 4\pi q_{\text{enc}}. \tag{1.35}$$

La integral del flujo a través de S contiene contribuciones de tres integrales de superficie: dos términos correspondientes a las tapas del cilindro, de área A cada una, indicadas como 1 y 2; y un término correspondiente al lado del cilindro, identificado con 3.

Sobre el lado 3 del cilindro, el campo eléctrico $\mathbf{E}_3$ es perpendicular a la normal $\hat{\mathbf{n}}_3$ asociada a ese lado. Luego, $\mathbf{E}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 = 0$, y la contribución del término 3 al flujo a través de S, es nula. Sobre la tapa 1, $\mathbf{E}_1 = E\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1} = \hat{\mathbf{z}}$; mientras que sobre la tapa 2, $\mathbf{E}_2 = -E\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{2} = -\hat{\mathbf{z}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da &= \int_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, da + \int_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, da \\
&= \int_1 E\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}}\, da + \int_2 E(-\hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{\mathbf{z}})\, da \\
&= 2EA \\
&= 4\pi q\ [\text{total sobre } A] = 4\pi\sigma A \\
\Rightarrow\ E &= 2\pi\sigma.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Luego,

$$\mathbf{E}_1 = 2\pi\sigma\hat{\mathbf{z}}\,, \qquad \mathbf{E}_2 = -2\pi\sigma\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.37}$$

2. Superficie con densidad superficial de carga no uniforme $\sigma(\mathbf{r}')$.

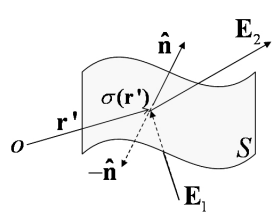


Figura 1.10: Discontinuidad del campo eléctrico a través de una superficie cargada.

La densidad superficial de carga en la posición $\mathbf{r}'$ es $\sigma(\mathbf{r}')$. Sean $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ los campos eléctricos en la posición $\mathbf{r}'$ sobre la superficie S en el lado 1 y en el lado 2, respectivamente. Sea $\hat{\mathbf{n}}$ la normal a S que apunta hacia el lado 2.

Para evaluar la discontinuidad en los campos producida por la carga superficial σ en el punto $\mathbf{r}'$, usamos la ley de Gauss con una superficie S' cilíndrica que atraviesa transversalmente a la superficie cargada S.

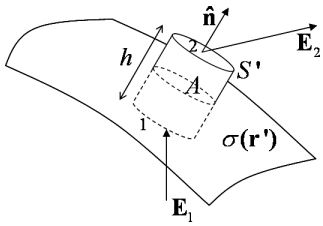


Figura 1.11: Superficie gaussiana para evaluar la discontinuidad del campo eléctrico a través de una superficie cargada.

Tomando el límite $h \to 0$ en la superficie cilíndrica S', tenemos

$$\oint_{S'} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = \int_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da + \int_1 \mathbf{E}_1 \cdot (-\hat{\mathbf{n}})\, da = 4\pi q_{\text{enc}} \tag{1.38}$$

Esto es,

$$\int_A (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 4\pi \int_A \sigma(\mathbf{r}')\, da. \tag{1.39}$$

En el límite $A \to 0$, tenemos en el punto $\mathbf{r}'$,

$$\big[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}')\big] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}'). \tag{1.40}$$

La Ec. (1.40) expresa la discontinuidad de la componente normal del campo eléctrico a través de una superficie cargada.

Función delta de Dirac.

Muchas distribuciones de carga eléctrica de interés en Electrostática están localizadas en superficies, planos, líneas, o puntos; es decir, corresponden a distribuciones confinadas en algunas dimensiones. La función *delta de Dirac* resulta útil para expresar este tipo de distribuciones.

La función delta de Dirac en un intervalo real I se define mediante las propiedades:

1. $\delta(x-a) = 0, \quad \text{si} \;\; x \neq a$
2. $\int_I \delta(x-a)dx = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in I \\ 0, & \text{si } a \notin I \end{cases}$
3. $\int_I f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$
4. $\int_I f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a)$.

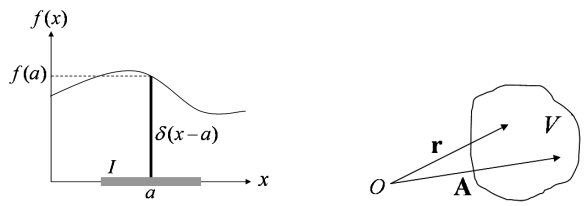


Figura 1.12: Ilustración de la función delta de Dirac en una y en tres dimensiones.

La función delta de Dirac también se puede definir en tres dimensiones y posee las siguientes propiedades:

1. $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{A}) = \delta(x-A_x)\delta(y-A_y)\delta(z-A_z)$
2. $\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{A})d^3r = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{A} \in V \\ 0, & \text{si } \mathbf{A} \notin V \end{cases}$
3. $\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{A})d^3r = f(\mathbf{A})$

Note que las unidades de la función delta de Dirac definida en un espacio de dimensión d son $[\text{distancia}^{-d}]$.

Ejemplos.

1. Expresar ρ para una distribución de N cargas puntuales q_i situadas en posiciones $\mathbf{r}_i$.

   La densidad es

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \; \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i). \tag{1.41}$$

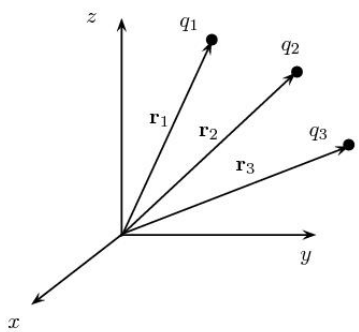


Figura 1.13: Distribución de cargas puntuales.

Una carga ubicada en el origen se puede expresar como $\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r})$.

Empleando la Ec. (1.29), el campo eléctrico en la posición $\mathbf{r}$ debido a un conjunto de cargas puntuales se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3r' \\
&= \sum_{i=1}^{N} q_i \int \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3r' \\
&= \sum_{i=1}^{N} q_i\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\,. \qquad (1.42)
\end{aligned}$$

2. Expresar ρ para un plano infinito con densidad superficial de carga σ.

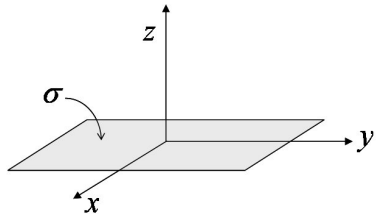


Figura 1.14: Plano $z = 0$ con densidad superficial de carga σ.

Escojamos el plano en $z = 0$. La densidad de carga en coordenadas cartesianas

es $\rho(x, y, z) = \sigma\delta(z)$. El elemento de volumen en coordenadas cartesianas es $d^3r = dx\,dy\,dz$. La integral de ρ sobre todo el volumen debe dar la carga total,

$$\int \rho\, d^3r = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)dz = \sigma \times [\text{ área del plano}] \times 1 = q \text{ total.}$$

3. Expresar ρ en coordenadas esféricas para una carga q distribuida uniformemente sobre un cascarón esférico de radio a.

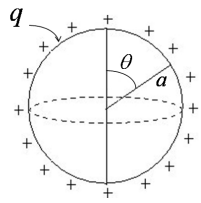


Figura 1.15: Cascarón esférico cargado.

Solamente hay carga en $r = a$; superficie de la esfera. Proponemos la forma $\rho(r, \theta, \phi) = k\,q\,\delta(r - a)$, donde k es un factor de proporcionalidad que debe contener información sobre la geometría, tal que

$$\int \rho(\mathbf{r})d^3r = q, \tag{1.43}$$

donde $d^3r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$ en coordenadas esféricas. Luego,

$$k\,q \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} r^2\delta(r - a)dr = q \tag{1.44}$$

$$kq \times 2\pi \times 2 \times a^2 = q \Rightarrow k = \frac{1}{4\pi a^2} \tag{1.45}$$

$$\Rightarrow \rho(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi a^2}\delta(r - a). \tag{1.46}$$

4. Expresar la función delta de Dirac

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \tag{1.47}$$

en coordenadas esféricas.

Tenemos, en coordenadas cartesianas,

$$\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d^3r = \int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dx\, dy\, dz = \int_V \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\, dx\, dy\, dz \tag{1.48}$$

En coordenadas esféricas $d^3r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$, y tenemos

$$\int_V \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) d^3r = \int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') r^2 dr\, d\phi\, \sin\theta\, d\theta \;=\; \int_V \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) r^2 dr\, d\phi\, d(\cos\theta). \tag{1.49}$$

La Ec. (1.49) posee la misma forma que la Ec. (1.48) si, en coordenadas esféricas, tenemos

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r^2}\, \delta\left(r-r'\right) \delta\left(\phi-\phi'\right) \delta\left(\cos\theta - \cos\theta'\right). \tag{1.50}$$

5. Expresar ρ en coordenadas cilíndricas para una densidad lineal de carga uniforme λ distribuida sobre un cilindro de radio b.

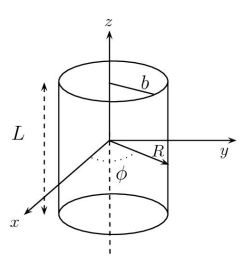


Figura 1.16: Cilindro con densidad lineal de carga.

Proponemos la forma $\rho(R,\phi,z) = k\,\lambda\,\delta(R-b)$, donde $\lambda = q/L$. Determinamos el factor k tal que

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3r = q, \tag{1.51}$$

donde $d^3r = R\ d\phi\ dz\ dR$ en coordenadas cilíndricas. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \rho\, d^3r &= k\lambda \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \delta(R-b) R\ dR \\
&= k\,\lambda\, 2\,\pi\, L\, b = q \\
&\Rightarrow\ k = \frac{1}{2\pi b} \\
&\Rightarrow\ \rho(R,\phi,z) = \frac{\lambda}{2\pi b}\delta(R-b).
\end{aligned}$$

1.3 Potencial escalar eléctrico.

De la ley de Coulomb, obtuvimos el campo eléctrico en $\mathbf{r}$ creado por una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d^3r' \tag{1.52}$$

donde la integral se extiende a todo el volumen donde exista ρ.

Este campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell correspondientes a la Electrostática,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{1.53}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{1.54}$$

Para demostrar que $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ satisface $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, calculemos primero la siguiente expresión,

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right), \tag{1.55}$$

donde

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}, \tag{1.56}$$

y el operador ∇ actúa sobre las coordenadas de $\mathbf{r}$, no de $\mathbf{r}'$.

Tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} \right) &= -\frac{1}{2}\, 2\, (x-x') \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{(x-x')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-1}\right) &= -\frac{(y-y')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-1}\right) &= -\frac{(z-z')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3},\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) &= -\left[\frac{(x-x')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3},\frac{(y-y')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3},\frac{(z-z')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}\right]\\ &= -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}\,. \qquad (1.57)\end{aligned}$$

En particular, si $\mathbf{r}'=0$,

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}=-\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\,. \qquad (1.58)$$

Un cálculo relacionado es ∇r, donde

$$r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\,. \qquad (1.59)$$

Tenemos,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}\,2\,x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}=\frac{x}{r}\,. \qquad (1.60)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r} \qquad ; \qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r} \qquad (1.61)$$

Luego,

$$\nabla r=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}(x,y,z)=\frac{\mathbf{r}}{r}=\hat{\mathbf{r}}\,. \qquad (1.62)$$

El campo eléctrico puede expresarse entonces como

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right)=\int\rho\left(\mathbf{r}'\right)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}\,d^3r'=-\int\rho(\mathbf{r}')\,\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d^3r'. \qquad (1.63)$$

Recordemos que el operador diferencial ∇ actúa sobre $\mathbf{r}$, no sobre la variable de integración $\mathbf{r}'$. Luego, podemos escribir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \right). \tag{1.64}$$

La expresión entre paréntesis es una función que depende del punto de observación $\mathbf{r}$. Denotamos esta función por

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'. \tag{1.65}$$

La función $\varphi(\mathbf{r})$ se denomina *potencial escalar eléctrico*. Entonces, podemos escribir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}). \tag{1.66}$$

Esto es, el campo electrostático se puede expresar como (menos) el gradiente de un potencial escalar.

El campo $\mathbf{E}$ expresado en la Ec. (1.66) satisface la ecuación de la Electrostática

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla\varphi(\mathbf{r})) = 0, \tag{1.67}$$

lo cual es una identidad vectorial.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla \cdot \nabla \left(\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \right) \\ &= -\nabla^2 \left(\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \right) \\ &= -\int \rho(\mathbf{r}')\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r'. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Luego, la otra ecuación de la Electrostática

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}), \tag{1.69}$$

se puede expresar como

$$\int \rho(\mathbf{r}')\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \tag{1.70}$$

lo cual implica que

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi\delta \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}' \right) . \tag{1.71}$$

Esta relación es una propiedad general de la función delta de Dirac y se puede tomar como una definición de esta función. Si $\mathbf{r}' = 0$, tenemos la relación

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\mathbf{r}} \right) = -4\pi\delta \left(\mathbf{r} \right) . \tag{1.72}$$

En general, si se conoce la densidad de carga $\rho(\mathbf{r}')$ en todo el espacio, el cálculo de $\varphi(\mathbf{r})$ a partir de la Ec. (1.65) resulta más fácil que la determinación directa del campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ usando la Ec. (1.52). En la práctica, se calcula el campo eléctrico a partir de $\varphi(\mathbf{r})$, mediante la relación $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$.

Note que para calcular la integral de $\varphi\left(\mathbf{r}\right)$, hay que conocer $\rho\left(\mathbf{r}'\right)$ sobre todo el espacio; esto implica que $\mathbf{r}' \to \infty$ y que el punto de observación incluye $\mathbf{r} \to \infty$.

Ejemplos.

1. El potencial escalar eléctrico producido por un conjunto de cargas puntuales q_i colocadas en las posiciones $\mathbf{r}_i$ puede expresarse mediante la densidad de carga

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_i q_i \, \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \, , \tag{1.73}$$

esto es,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \int \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d^3r' = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \, . \tag{1.74}$$

El potencial producido por una carga q colocada en el origen ($\mathbf{r}_1 = 0$) es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} \, . \tag{1.75}$$

2. Potencial producido por un plano infinito con densidad superficial de carga uniforme σ.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = 2\pi\sigma\hat{\mathbf{z}} &= -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \qquad (z > 0) \\ \Rightarrow 2\pi\sigma &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \Rightarrow \varphi(z) &= -2\pi\sigma z + \text{cte.} \end{aligned} \tag{1.76}$$

3. Potencial producido por plano $z = 0$ con densidad superficial de carga $\sigma(x, y)$.

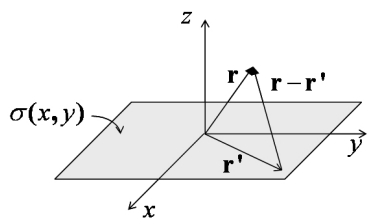


Figura 1.17: Plano $z = 0$ con densidad de carga no uniforme.

$$\rho\left(\mathbf{r}'\right) = \sigma\left(x', y'\right)\delta\left(z'\right). \tag{1.77}$$

$$\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| = \left[\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2 + \left(z - z'\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.78}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\mathbf{r}\right) &= \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} d^3r' = \int \frac{\sigma\left(x', y'\right)\delta\left(z'\right)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} dx'dy'dz'. \\
&= \int \sigma\left(x', y'\right) dx'dy' \int \frac{\delta\left(z'\right) dz'}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} \\
&= \int \frac{\sigma\left(x', y'\right)\ dx'dy'}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|_{z'=0}} \\
&= \int \frac{\sigma\left(x', y'\right)\ dx'dy'}{\left[\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2 + z^2\right]^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{1.79}$$

4. Potencial producido por un disco de radio a, cargado con σ uniforme.

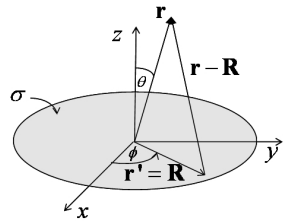


Figura 1.18: Disco con densidad de carga uniforme.

La densidad superficial de carga es

$$\sigma(x', y') = \begin{cases} \sigma, & \text{si } R = \left(x'^2 + y'^2\right)^{1/2} \leq a \\ 0, & \text{si } R = (x'^2 + y'^2)^{1/2} > a. \end{cases} \tag{1.80}$$

Podemos usar la Ec. (1.79) para calcular el potencial. La simetría del problema sugiere el empleo de coordenadas polares; $dx'dy' \to R\,dR\,d\phi$. Entonces,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{R\,dR\,d\phi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{z'=0}}. \tag{1.81}$$

Cuando $z' = 0$, la variable de integración en coordenadas polares es $\mathbf{r}' = \mathbf{R}$; luego

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|_{z'=0} = |\mathbf{r} - \mathbf{R}| &= \left[r^2 + R^2 - 2\,r\,R\,\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[r^2 + R^2 - 2\,r\,R\,\sin\theta\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[z^2 \sec^2\theta + R^2 - 2zR\tan\theta\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

donde hemos usado

$$z = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r = z\sec\theta. \tag{1.82}$$

Luego,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(z, \theta) = 2\pi\,\sigma \int_0^a \frac{R\,dR}{\left[z^2 \sec^2\theta + R^2 - 2zR\tan\theta\right]^{1/2}}. \tag{1.83}$$

Las coordenadas θ y z del punto de observación $\mathbf{r}$ son fijas. El potencial Ec. (1.83) producido por el disco en el espacio posee simetría azimutal (no depende del ángulo ϕ). La evaluación de la integral en la Ec. (1.83) para todos los valores de θ es difícil. Sin embargo, podemos calcular el potencial sobre el eje z, que corresponde al caso especial $\theta = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 2\pi\sigma \int_0^a \frac{R\,dR}{\left[z^2 + R^2\right]^{1/2}} \\ &= 2\pi\sigma \left[z^2 + R^2\right]^{\frac{1}{2}}\Big|_{R=0}^{R=a} \\ &= 2\pi\sigma \left[\left(z^2 + a^2\right)^{1/2} - |z|\right]. \end{aligned} \tag{1.84}$$

Consideremos los casos límites:

(a) $|z| \ll a$, muy cerca del disco $\rightarrow |z|/a \ll 1$

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma \left[a \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{1/2} - |z| \right]. \tag{1.85}$$

Empleamos la expansión de Taylor,

$$(1 \pm x)^m \approx 1 \pm mx \ldots, \qquad \text{si } |x| \ll 1. \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\approx 2\pi\sigma \left[a \left(1 + \frac{z^2}{2a^2} \right) - |z| \right] \\ &\approx 2\pi\sigma \left[a - |z| \right] \\ &= \begin{cases} 2\pi\sigma\,(a - z)\ ,\ z > 0 \\ 2\pi\sigma\,(a + z)\ ,\ z < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

El campo eléctrico es

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \begin{cases} 2\pi\sigma\ ,\ z > 0 \\ -2\pi\sigma\ ,\ z < 0 \end{cases}, \qquad E_x = 0, \qquad E_y = 0, \tag{1.87}$$

es decir; muy cerca del disco, $\mathbf{E}$ es perpendicular a la superficie de éste, similar al campo de un plano infinito con densidad uniforme de carga σ.

(b) $|z| \gg a$, muy lejos del disco $\rightarrow a/|z| \ll 1$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 2\pi\sigma\,|z| \left[\left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \\ &\approx 2\pi\sigma\,|z| \left[1 + \frac{a^2}{2z^2} - 1 \right] \\ &= \pi\sigma \frac{a^2}{|z|} = \frac{q}{|z|}, \end{aligned} \tag{1.88}$$

lo cual corresponde al potencial de una carga puntual. Es decir, para distancias grandes comparadas con el tamaño del disco, la estructura del disco o del objeto que produce el campo es irrelevante; sólo importa su carga total.

Interpretación física del potencial escalar eléctrico.

Consideremos una carga q en una región donde existe un campo eléctrico $\mathbf{E}$.

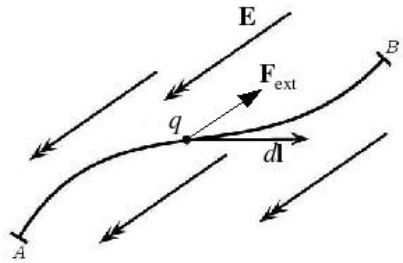


Figura 1.19: Carga q llevada por fuerza externa entre puntos A y B en un campo eléctrico.

La fuerza que ejerce el campo sobre la carga q es

$$\mathbf{F}_{\text{elect}} = q\,\mathbf{E}. \tag{1.89}$$

Consideremos el trabajo que debe realizar una fuerza externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ para llevar una carga q en equilibrio desde un punto A a otro punto B en esa región,

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l}, \tag{1.90}$$

donde $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ es el vector tangente en cada punto de la trayectoria que une los puntos A y B. La fuerza externa debe ser

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}_{\text{elect}}\,. \tag{1.91}$$

Luego,

$$W_{AB} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.92}$$

Pero

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i = d\varphi(x, y, z). \tag{1.93}$$

Luego,

$$W_{AB} = q \int_A^B d\varphi = q\,(\varphi_B - \varphi_A)\,. \tag{1.94}$$

El trabajo depende solamente de la diferencia de la función potencial evaluada en los puntos A y B, no de la trayectoria entre esos puntos. Entonces,

$$(\varphi_B - \varphi_A) = \frac{W_{AB}}{q}\,, \tag{1.95}$$

es decir, la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos es el trabajo por unidad de carga que debe realizar un agente externo para llevar una carga entre esos puntos.

Adicionalmente, la integral de linea

$$\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B \tag{1.96}$$

es independiente del camino entre A y B. Si el camino es cerrado, $A = B$; entonces

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0, \tag{1.97}$$

por lo tanto,

$$\oint \mathbf{F}_{\text{elect}}\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{1.98}$$

lo cual significa que las fuerzas electrostáticas son *conservativas* (el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es cero).

Recordemos el *Teorema de Stokes* para un campo vectorial $\mathbf{A}$ definido sobre una superficie S y en el contorno C que encierra esa superficie,

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da. \tag{1.99}$$

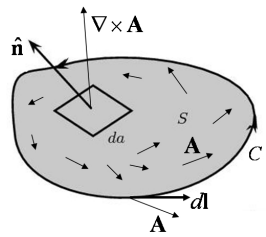


Figura 1.20: Teorema de Stokes.

Aplicando este teorema al campo electrostático $\mathbf{E}$ que satisface la Ec. (1.97), tenemos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{1.100}$$

Luego, la ecuación de la Electrostática $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ expresa el hecho de que las fuerzas electrostáticas son conservativas.

La Ec. (1.65) implica que el potencial $\varphi(\mathbf{r})$ debido a cualquier distribución localizada de carga tiende a cero cuando $\mathbf{r} \to \infty$. Si el punto A es $\mathbf{r} \to \infty$, entonces $\varphi_A = \varphi(r \to \infty) = 0$. Luego, la Ec. (1.94) implica que el trabajo para traer una carga q desde un punto A en $\mathbf{r} = \infty$ hasta un punto B correspondiente a un $\mathbf{r}$ finito es

$$W(\mathbf{r}) = q\,\varphi_B = q\,\varphi(\mathbf{r}). \tag{1.101}$$

En la práctica, el infinito se refiere a un reservorio con potencial fijo $\varphi = 0$ desde el cual se pueden extraer cargas indefinidamente. Con una buena aproximación, la Tierra funciona como un reservorio inagotable de cargas y se le asigna potencial cero.

Supongamos que el potencial $\varphi(\mathbf{r})$ es producido por una carga puntual q' colocada en $\mathbf{r}'$; entonces

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,. \tag{1.102}$$

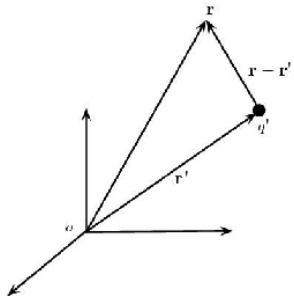


Figura 1.21: Potencial producido en $\mathbf{r}$ por carga q' ubicada en $\mathbf{r}'$.

El trabajo que debe hacer un agente externo para traer una carga q desde $\mathbf{r} = \infty$ hasta $\mathbf{r}$ en presencia de una carga q' colocada en $\mathbf{r}'$ es

$$W(\mathbf{r}) = q\,\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q\,q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv U. \tag{1.103}$$

Este trabajo está acumulado en forma de energía potencial U en el campo electrostático de la configuración de las dos cargas.

1.4 Expansión multipolar del potencial eléctrico.

En el espacio libre, el potencial producido por una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$ en un punto $\mathbf{r}$ es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{1.104}$$

El cálculo analítico de esta integral, salvo en situaciones que posean suficientes simetrías, es en general difícil. Sin embargo, es posible obtener una expresión del potencial en el espacio libre para distancias alejadas de la fuente $r > r'$ en forma de serie de potencias de r'/r.

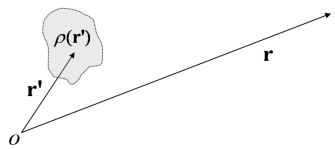


Figura 1.22: Potencial producido por una distribución de carga lejos de la fuente, $r > r'$.

En tal sentido, podemos escribir

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}} = \frac{1}{r\sqrt{1-\left(\dfrac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' - r'^2}{r^2}\right)}}. \tag{1.105}$$

donde $r'/r < 1$. Definamos

$$x \equiv \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' - r'^2}{r^2} < 1, \tag{1.106}$$

y recordemos la siguiente expansión en serie de Taylor válida para $x < 1$,

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots \tag{1.107}$$

Entonces podemos expresar,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{4(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^4} - \frac{4(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')r'^2}{r^4} + \frac{r'^4}{r^4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{r'^6}{r^6}\right)\right]. \tag{1.108}$$

Manteniendo los términos hasta orden $\mathcal{O}\left(1/r^3\right)$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3}-\frac{r'^2}{2r^3}+\frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^2}{r^5}+\cdots \\ &\approx \frac{1}{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3}+\frac{1}{2r^5}\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2-r'^2r^2\right]. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Sustituyendo en la Ec. (1.104), tenemos el potencial para $r > r'$,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &\approx \int \rho(\mathbf{r}')\left\{\frac{1}{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3}+\frac{1}{2r^5}\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2-r'^2r^2\right]\right\}d^3r' \qquad (1.110)\\ &\approx \frac{1}{r}\int\rho(\mathbf{r}')\,d^3r'+\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int\rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}'\,d^3r'+\frac{1}{2r^5}\int\rho(\mathbf{r}')\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2-r'^2r^2\right]d^3r'.\end{aligned}$$

El primer término en la Ec. (1.110) equivale a $\dfrac{q}{r}$, donde

$$q=\int\rho(\mathbf{r}')\,d^3r'\,, \tag{1.111}$$

es la carga total, que también se denomina *momento monopolar* de la distribución de carga.

El segundo término en la Ec. (1.110) se puede expresar como

$$\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3}\,, \tag{1.112}$$

donde se define el vector *momento dipolar* de la distribución de carga como

$$\mathbf{p}=\int\rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}'\,d^3r'. \tag{1.113}$$

Para expresar el tercer término en la Ec. (1.110), consideremos

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 = \left(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'\right)^2=\sum_{i,j=1}^{3}x_ix_jx_i'x_j' \tag{1.114}$$

$$r^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sum_{i,j=1}^{3}x_ix_j\delta_{ij}\,. \tag{1.115}$$

Entonces,

$$3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = 3\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j x'_i x'_j - r'^2 \sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \delta_{ij} \tag{1.116}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \left(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}\right). \tag{1.117}$$

Luego, el tercer término se puede escribir

$$\frac{1}{2r^5}\int \rho(\mathbf{r}')\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - r'^2 r^2\right] d^3r' = \frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \int \rho(\mathbf{r}')\left(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}\right) d^3r'. \tag{1.118}$$

Definimos los *momentos cuadripolares* de la distribución de carga como

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}')\left(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}\right) d^3r'. \tag{1.119}$$

Los momentos cuadripolares son simétricos, $Q_{ij} = Q_{ji}$.

Entonces, el tercer término se puede expresar como

$$\frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j\, Q_{ij}\,. \tag{1.120}$$

Los *momentos multipolares* son una propiedad de la fuente que produce el potencial y de su geometrìa; es decir, dependen de la forma como está distribuida la carga en el espacio con respecto a un sistema de coordenadas particular. El momento monopolar es un escalar, el momento dipolar es un vector y el momento cuadripolar es un tensor.

Reuniendo los resultados, podemos expresar la expansión del potencial para $r > r'$ en términos de los momentos multipolares de la distribución de carga en la siguiente forma,

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j\, Q_{ij}\,. \tag{1.121}$$

Note que el potencial del monopolo va como $\frac{1}{r}$, el del dipolo va como $\frac{1}{r^2}$, el del cuadripolo cae como $\frac{1}{r^3}$.

El momento dipolar está asociado a una distribución de carga a lo largo de una dirección espacial. El dipolo más simple está constituido por dos cargas q y $-q$ separadas por una distancia a. Podemos escoger el eje z en la dirección de la línea que une las dos cargas y el origen de coordenadas en el punto medio de esa línea.

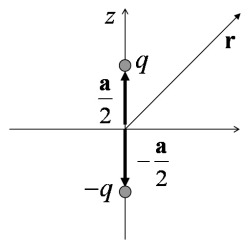


Figura 1.23: Dipolo elemental.

La densidad de carga del dipolo está dada por

$$\rho(\mathbf{r}') = q\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{a}/2) - q\,\delta(\mathbf{r}' + \mathbf{a}/2). \tag{1.122}$$

El potencial en $\mathbf{r}$ es

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r' && (1.123)\\
&= \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}/2|} \\
&= \frac{q}{\sqrt{r^2 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} + a^2/4}} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} + a^2/4}} \\
&= \frac{q}{r}\left[\left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}\right]. && (1.124)
\end{aligned}$$

Consideremos el punto de observación muy alejado de la fuente; es decir, $a/r \ll 1$. Empleamos las siguientes expansiones en serie, válidas para $x < 1$,

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \cdots \tag{1.125}$$

Haciendo $x = \dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{r^2} < 1$, podemos expresar

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r}\left[\left(1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{2r^2}\right)-\left(1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{2r^2}\right)\right]+\mathcal{O}\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \tag{1.126}$$

$$\approx q\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{1.127}$$

El momento dipolar de la distribución de carga es

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{r}'\,d^3r' = q\,\mathbf{a} = qa\hat{\mathbf{z}}. \tag{1.128}$$

Note que la dirección del vector $\mathbf{p}$ va de la carga negativa a la carga positiva. Luego, el potencial para $r > a$ se puede escribir como

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\,. \tag{1.129}$$

Esta expresión es exacta en el límite $a \to 0$, manteniendo $\mathbf{p}$ constante y corresponde al potencial de un dipolo elemental. Si tomamos $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$, el potencial del dipolo en coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) se puede expresar como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{r^2}\,, \tag{1.130}$$

el cual es independiente del ángulo ϕ; es decir el potencial de un dipolo posee simetría azimutal. El campo eléctrico producido por un dipolo puede calcularse en coordenadas esféricas, a partir de

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right). \tag{1.131}$$

Luego,

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{r^3} \tag{1.132}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{r^3} \tag{1.133}$$

$$E_\phi = 0. \tag{1.134}$$

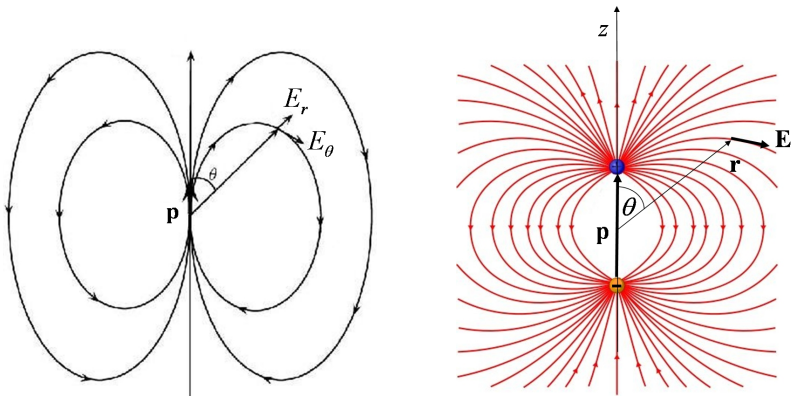


Figura 1.24: Campo eléctrico de un dipolo.

En coordenadas cartesianas, el campo eléctrico puede calcularse a partir de

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right). \tag{1.135}$$

La componente E_i es

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\sum_j p_j x_j}{r^3}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\sum_j p_j x_j}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\right] \\ &= -\left[\frac{\sum_j p_j \delta_{ij}}{r^3} - \frac{3}{2}\,\frac{2x_i\,\sum_j p_j x_j}{r^5}\right] \\ &= \frac{3x_i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{p_i}{r^3}\,. \end{aligned} \tag{1.136}$$

Luego, empleando la notación $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, el campo eléctrico del dipolo se puede escribir como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{r^3}\,. \tag{1.137}$$

Un ejemplo común de dipolos eléctricos son muchas moléculas. Las moléculas no tienen carga eléctrica neta; sin embargo; muchas de ellas poseen momentos dipolares debido a la distribución preferencial de los electrones en la dirección de los enlaces interatómicos presentes.

Los momentos cuadripolares Q_{ij} se pueden interpretar como componentes de un tensor o matriz 3×3,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} . \tag{1.138}$$

Debido a la simetría $Q_{ij} = Q_{ji}$, solamente 6 componentes de la matriz Q son independientes. Por otro lado,

$$\sum_i Q_{ii} = \int \rho(\mathbf{r}') \sum_i \left(3x_i'^2 - r'^2\right) d^3r' \tag{1.139}$$

$$= \int \rho(\mathbf{r}') \left(3\sum_i x_i'^2 - \sum_i r'^2\right) d^3r' \tag{1.140}$$

$$= \int \rho(\mathbf{r}') \left(3r'^2 - 3r'^2\right) d^3r' = 0 . \tag{1.141}$$

Es decir, solamente 2 de las componentes diagonales Q_{ii} son independientes. Luego, el tensor de momento cuadripolar Q posee 5 componentes independientes.

La distribución de carga más simple que da lugar a momentos cuadripolares consiste en un arreglo de cuatro cargas puntuales muy cercanas, con signos alternativos, formando un cuadrado. Note que, para esta configuración, $q = 0$ y $\mathbf{p} = 0$.

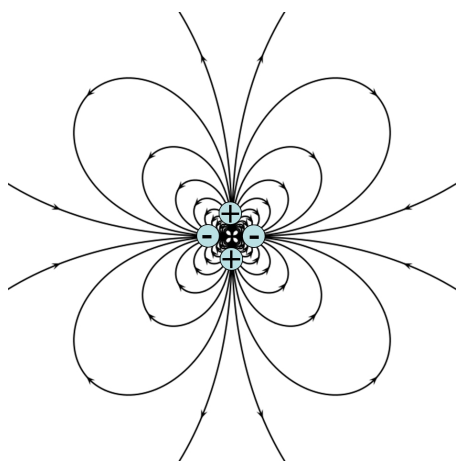


Figura 1.25: Campo eléctrico del cuadripolo más simple.

Ejemplo.

1. Calcular los momentos multipolares de una distribución de carga esféricamente simétrica.

   La densidad de carga depende sólo de la coordenada radial; $\rho(\mathbf{r}') = \rho(r')$. El momento monopolar, o la carga total, es

$$q = \int \rho(\mathbf{r}')\, d^3r' = \int \rho(\mathbf{r}')\, r'^2\, dr' \int_0^{2\pi} d\phi \int_\pi \sin\theta'\, d\theta' = 4\pi \int \rho(r') r'^2 dr' \neq 0,$$

   donde hemos empleado el elemento de volumen $d^3r' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$.

   El momento dipolar es

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}')\, \mathbf{r}'\, d^3r'\,.$$

   Las componentes de $\mathbf{r}'$ en coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned} x' &= r' \sin\theta' \cos\phi' \\ y' &= r' \sin\theta' \sin\phi' \\ z' &= r' \cos\theta'. \end{aligned}$$

   Entonces,

$$p_x = \int \rho(r') x'\, d^3r' = \int \rho(r') r'^3\, dr' \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos\phi'\, d\phi'} \int_0^\pi \sin^2\theta'\, d\theta' = 0$$

$$p_y = \int \rho(r') y'\, d^3r' = \int \rho(r') r'^3\, dr' \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \sin\phi'\, d\phi'} \int_0^\pi \sin^2\theta'\, d\theta' = 0$$

$$p_z = \int \rho(r') z'\, d^3r' = \int \rho(r') r'^3\, dr' \int_0^{2\pi} d\phi' \cancelto{0}{\int_0^\pi \cos\theta' \sin\theta'\, d\theta'} = 0.$$

   Luego, $\mathbf{p} = 0$.

   La componente Q_{12} del momento cuadripolar es

$$\begin{aligned} Q_{12} &= 3 \int \rho(\mathbf{r}')\, x' y' d^3r' = 3 \int \rho(r') r'^4 dr' \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \sin\phi' \cos\phi' d\phi'} \int_0^\pi \sin^3\theta' d\theta' \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Similarmente, las otras componentes $Q_{ij} = 0$.

1.5 Interacción de una distribución de carga con un campo externo.

Supongamos una región del espacio donde existe un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ y un potencial externo dado por $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. Recordemos que el trabajo para traer una carga q desde $\mathbf{r} = \infty$ hasta una posición $\mathbf{r}$, donde existe un potencial externo φ_{ext}, es

$$W(\mathbf{r}) = q\,\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = U, \tag{1.142}$$

donde U es la energía potencial de la interacción de la carga con el campo externo.

Para un conjunto de N cargas q_i en posiciones $\mathbf{r}_i$ en presencia de un potencial externo φ_{ext}, no producido por las cargas, la energía potencial de interacción es

$$U = \sum_i^N q_i\,\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i). \tag{1.143}$$

Para una distribución continua de carga $\rho(\mathbf{r})$ en presencia de un potencial externo $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, la energía potencial de la interacción corresponde a

$$U = \int \rho(\mathbf{r})\,\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})\,d^3r. \tag{1.144}$$

Esta es la energía potencial de una distribución de cargas ya formada, interactuando con un campo externo. No es el trabajo para ensamblar la distribución de las cargas en contra de sus propios campos.

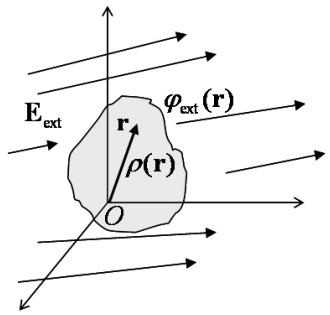


Figura 1.26: Distribución de carga en un campo eléctrico externo.

Supongamos que la distribución de carga $\rho(\mathbf{r})$ en el espacio incluye el origen $\mathbf{r} = 0$ y que el potencial externo varía sobre la extensión de la distribución. Entonces, podemos hacer una expansión de Taylor del potencial alrededor de $\mathbf{r} = 0$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) &= \varphi(0) + \sum_i^3 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_0 x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right|_0 x_i x_j + \cdots \\ &= \varphi(0) + (\nabla\varphi)_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\right|_0 x_i x_j + \cdots \qquad (1.145)\end{aligned}$$

donde hemos suprimido la notación "ext", por simplicidad.

Utilizando la relación $\mathbf{E}_{\text{ext}} = -\nabla\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, podemos escribir

$$\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \varphi(0) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 x_i x_j + \cdots \qquad (1.146)$$

Sustitución en la Ec. (1.144) permite obtener la expansión de la energía potencial

$$U = \varphi(0)\int \rho(\mathbf{r})\, d^3r - \mathbf{E}(0)\cdot\int \rho(\mathbf{r})\,\mathbf{r}\, d^3r - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int \rho(\mathbf{r})\, x_i x_j \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 d^3r + \cdots \qquad (1.147)$$

lo cual se puede escribir como

$$U = q\,\varphi(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int \rho(\mathbf{r})\, x_i x_j \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 d^3r + \cdots \qquad (1.148)$$

donde hemos usado las definiciones de los momentos monopolar q y dipolar $\mathbf{p}$.

El tercer término se puede poner en forma cuadripolar usando el hecho de que el campo electrostático externo, lejos de sus fuentes y en la región donde se localiza la distribución $\rho(\mathbf{r})$, satisface $\nabla\cdot\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$. Luego,

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \sum_i\left(\sum_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\delta_{ij}\right) = \sum_{i,j}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\delta_{ij} = 0\,. \qquad (1.149)$$

En particular, en $\mathbf{r} = 0$, el campo externo satisface

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(0) = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 \delta_{ij} = 0\,. \qquad (1.150)$$

Restando la cantidad nula $\frac{1}{6}\nabla\cdot\mathbf{E}(0)\,r^2$ en el integrando, el tercer término puede escribirse como

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int\rho(\mathbf{r})\,x_ix_j\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 d^3r &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int\rho(\mathbf{r})\left[x_ix_j\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 r^2\delta_{ij}\right]d^3r\\
&= -\frac{1}{6}\sum_{i,j}\int\rho(\mathbf{r})\left[3x_ix_j-r^2\delta_{ij}\right]\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 d^3r\\
&= -\frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 Q_{ij} \qquad (1.151)
\end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de los momentos cuadripolares

$$Q_{ij}=\int\rho(\mathbf{r}')\left(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij}\right)d^3r'. \qquad (1.152)$$

Finalmente, podemos expresar la energía de una distribución de carga en presencia de un campo eléctrico externo como la siguiente expansión multipolar,

$$U=q\,\varphi(0)-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0)-\frac{1}{6}\sum_{i,j}Q_{ij}\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0+\cdots \qquad (1.153)$$

El primer término corresponde a la interacción del monopolo con el potencial externo; el segundo término expresa la interacción del dipolo de la distribución de carga con el campo eléctrico externo; y el tercer término describe la interacción del momento cuadripolar de la distribución con el gradiente del campo.

La interacción de un dipolo con un campo externo corresponde en general a

$$U=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}\,, \qquad (1.154)$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo externo evaluado en la posición del dipolo.

En particular, si tenemos un dipolo $\mathbf{p}_1$ en presencia del campo $\mathbf{E}_2$ producido por un dipolo $\mathbf{p}_2$, entonces la energía de interacción será

$$U=-\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{E}_2. \qquad (1.155)$$

Si $\mathbf{r}$ es la posición del dipolo $\mathbf{p}_1$ con respecto al dipolo $\mathbf{p}_2$, el campo $\mathbf{E}_2$ producido por $\mathbf{p}_2$ en la posición de $\mathbf{p}_1$ está dado por la Ec. (1.137),

$$\mathbf{E}_2=\frac{3(\mathbf{p}_2\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}_2}{r^3}\,. \qquad (1.156)$$

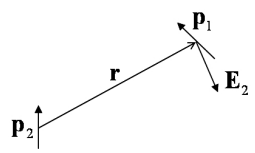


Figura 1.27: Campo eléctrico de un dipolo $\mathbf{p}_2$ en la posición de un dipolo $\mathbf{p}_1$.

Luego, la energía de interacción de los dos dipolos es

$$\begin{aligned} U_{\text{dip}} &= -\mathbf{p}_1 \cdot \left(\frac{3(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}_2}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^3} \,. \end{aligned} \tag{1.157}$$

En general, si $\mathbf{p}_1$ está en la posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{p}_2$ está en $\mathbf{r}_2$, la energía potencial de interacción de los dos dipolos es

$$U_{\text{dip}} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \,, \tag{1.158}$$

donde $\hat{\mathbf{r}} \equiv \dfrac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$.

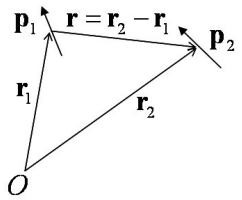


Figura 1.28: Interacción entre dos dipolos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$.

La fuerza de interacción entre dos dipolos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ está dada por $\mathbf{F}_{\text{dip}} = -\nabla U_{\text{dip}}$. Note que la fuerza entre dos dipolos eléctricos depende de la distancia como $1/r^4$, mientras que la fuerza entre dos cargas puntuales varía como $1/r^2$ (Ley de Coulomb).

1.6 Ecuaciones de Poisson y de Laplace.

La ecuación de la Electrostática

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

implica que el campo eléctrico se puede expresar como el gradiente de un potencial escalar

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi\left(\mathbf{r}\right), \tag{1.159}$$

el cual debe satisfacer también la otra ecuación de la Electrostática,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho\,. \tag{1.160}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla\varphi) &= -4\pi\rho \\ \nabla^2\varphi &= -4\pi\rho. \end{aligned} \tag{1.161}$$

Esta es la *ecuación de Poisson.*

En sitios donde no hay cargas ($\rho = 0$), el potencial escalar satisface

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{1.162}$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación de Laplace.*

En coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2\varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right). \tag{1.163}$$

Las ecuaciones de Poisson y de Laplace son ecuaciones diferenciales parciales en derivadas espaciales de segundo orden. En general, la solución φ de la ecuación de Poisson o de Laplace en regiones del espacio limitadas por superficies o fronteras S requiere conocer ciertas condiciones sobre esas fronteras; especificamente, el conocimiento del valor del potencial y de su derivada en la dirección normal sobre S:

$$\varphi|_S\,, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S. \tag{1.164}$$

En principio, el cálculo directo del potencial a través de la integral de la densidad de carga es posible si se conoce ésta en todo el espacio. Sin embargo, hemos visto que este método es limitado. La alternativa para calcular el potencial en regiones donde se conocen las condiciones de frontera Ec. (1.164) es resolver la ecuación de Poisson o de Laplace en esa region. En el Capítulo 2 estudiaremos varios métodos de solución de estas ecuaciones con condiciones de frontera. La solución de la ecuación de Poisson en una región del espacio que contiene una densidad de carga ρ puede obtenerse utilizando la función de Green o método de imágenes. La solución de la ecuación de Laplace puede encontrarse en muchos casos mediante separación de variables y expansión en series de funciones ortogonales.

Algunas consecuencias de las ecuaciones de Poisson y Laplace son:

1. En un punto donde $\rho(\mathbf{r}) = 0$, no existe máximo o mínimo local de $\varphi(\mathbf{r})$. Si existe un extremo (máximo o mínimo), cada término $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$ tendría el mismo signo ($+$ ó $-$), de modo que $\sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \neq 0$.

2. En una región donde $\rho = 0$, φ no puede ser simultáneamente periódico en todas las tres dimensiones (puede ser periódico en una o dos dimensiones). Si φ es periódico en la dirección x_i, entonces tiene la forma $\varphi \propto \sin(k_i x_i)$ ó $\varphi \propto \cos(k_i x_i)$, donde k_i es una constante, y por lo tanto, satisface $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = -k_i^2 \phi$. Si φ es periódico es las tres dimensiones, tendríamos $\nabla^2 \varphi = -\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right) \varphi \neq 0$, incompatible con la ecuación de Laplace.

1.7 Energía electrostática.

Consideremos el trabajo total W_{total} para ensamblar una configuración de N cargas q_i en las posiciones $\mathbf{r}_i$, trayendo sucesivamente cada carga desde el infinito hasta su correspondiente posición en presencia de las cargas precedentes. Esto es,

$$W_{\text{total}} = W_{q_1} + W_{q_2} + W_{q_3} + \ldots + W_{q_N} \tag{1.165}$$

donde W_{q_i} significa el trabajo para traer la carga q_i a la posición $\mathbf{r}_i$, en presencia de las anteriores cargas $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}$.

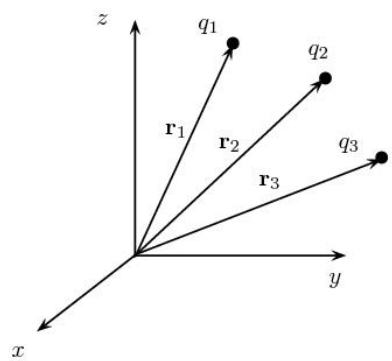


Figura 1.29: Configuración de N cargas q_i en posiciones $\mathbf{r}_i$.

Tenemos,

$$\begin{aligned}
W_{q_1} &= 0 \qquad \text{(no hay otras cargas presentes, ni campos externos.)} \\
W_{q_2} = q_2\varphi(\mathbf{r}_2) &= \frac{q_2 q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\
W_{q_3} = q_3\varphi(\mathbf{r}_3) &= \frac{q_3 q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_3 q_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \\
W_{q_4} = q_4\varphi(\mathbf{r}_4) &= \frac{q_4 q_1}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_4 q_2}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_4 q_3}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|}
\end{aligned} \tag{1.166}$$

Sumando todos los términos,

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i\,,\,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\,, \tag{1.167}$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ se introduce para no repetir la suma de términos simétricos $i \leftrightarrow j$.

El trabajo W_{total} es equivalente a la energía potencial total almacenada en esta configuración,

$$U = W_{\text{total}}. \tag{1.168}$$

Para una distribución continua de carga, sustituimos los elementos de carga infinitesimales $q_i \to dq = \rho d^3r$ y $q_j \to dq' = \rho d^3r'$ en el límite continuo de la suma:

$$
\begin{aligned}
W_{\text{total}} = U &= \frac{1}{2}\int d^3r \int \frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \\
&= \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\mathbf{r}) \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \\
&= \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\; d^3r\,, \qquad (1.169)
\end{aligned}
$$

donde la integral de volumen se extiende a todo el espacio ($\mathbf{r} \to \infty$). La Ec. (1.169) es el trabajo para ensamblar la distribución de cargas en contra de sus propio campos; mientras que la Ec. (1.144) expresa el trabajo para colocar una distribución de cargas ya formada en un campo externo.

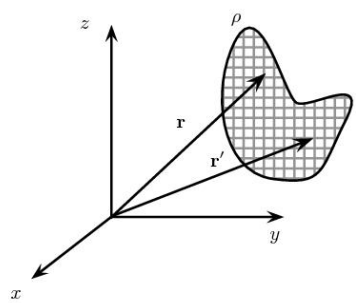


Figura 1.30: Energía electrostática de una distribución de carga.

Utilizamos la ecuación de Poisson $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, de donde $\rho(\mathbf{r}) = -\nabla^2\varphi/4\pi$. Sustituyendo en Ec. (1.169), tenemos

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\nabla^2\varphi\, d^3r. \qquad (1.170)$$

Empleamos la identidad vectorial

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\varphi + \varphi\,\nabla\cdot\mathbf{a}, \qquad (1.171)$$

y haciendo $\mathbf{a} = \nabla\varphi$, obtenemos

$$\varphi\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi) - |\nabla\varphi|^2\,. \qquad (1.172)$$

Sustituyendo en la Ec. (1.170)

$$U = \frac{1}{8\pi}\int |\nabla\varphi|^2 \, d^3r - \frac{1}{8\pi}\int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)\, d^3r. \tag{1.173}$$

Evaluamos la segunda integral mediante el teorema de la divergencia:

$$\int_V \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)\, d^3r = \oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot\hat{\mathbf{n}}\, da. \tag{1.174}$$

Tomemos S como una esfera de radio $R \to \infty$, dentro de la cual se encuentra la densidad de carga ρ que produce el potencial φ en todo el espacio. La normal $\hat{\mathbf{n}}$ apunta en la dirección radial.

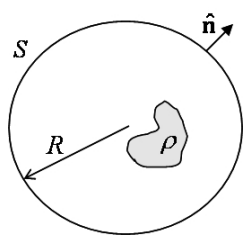


Figura 1.31: Integral de volumen se extiende a todo el espacio cuando la superficie tiende a infinito.

Entonces,

$$\varphi_{\text{sobre S}} \approx \frac{Q}{R} \qquad (Q = \text{carga total encerrado en } S) \tag{1.175}$$

$$\nabla\varphi\cdot\hat{\mathbf{n}}|_S = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = \frac{\partial\varphi}{\partial R} \approx \frac{Q}{R^2} \tag{1.176}$$

$$da = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi = R^2\, d\Omega \tag{1.177}$$

Luego,

$$\oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot\hat{\mathbf{n}}\, da = \oint_S \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, da \sim \oint_S \frac{R^2}{R^3}\, d\Omega = \oint_S \frac{1}{R}\, d\Omega \tag{1.178}$$

En el límite $R \to \infty$ obtenemos

$$\int_V \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)\, d^3r = \oint_S \varphi\nabla\varphi\cdot\hat{\mathbf{n}}\, da = 0. \tag{1.179}$$

Luego, tenemos la energía potencial

$$U = \frac{1}{8\pi} \int |\nabla\varphi|^2 \, d^3r \,. \tag{1.180}$$

Usando $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, también se puede expresar

$$U = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}|^2 \, d^3r \,, \tag{1.181}$$

lo que describe la energía potencial almacenada en todo el espacio donde existe un campo eléctrico $\mathbf{E}$. Puesto que ésta es una integral sobre un volumen, se define la expresión

$$u = \frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi} \,, \tag{1.182}$$

como la *densidad de energía* [energía/volumen] de un campo electrostático $\mathbf{E}$.

Ejemplos.

1. Calcular la fuerza por unidad de área entre dos planos infinitos paralelos, con densidades superficiales de carga σ y $-\sigma$, respectivamente.

   Sea x la dirección perpendicular entre los planos. El campo eléctrico en el espacio entre los planos es $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\hat{\mathbf{x}}$.

   La densidad de energía electrostática entre los planos es

   $$u = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 = 2\pi\sigma^2. \tag{1.183}$$

   Consideremos un desplazamiento dx de uno de los planos en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$, tal que el volumen entre los planos aumenta en una cantidad $A\,dx$. Consequentemente, la energía electrostática del sistema aumenta en

   $$dU = uA\,dx = 2\pi\sigma^2 A\,dx. \tag{1.184}$$

   La fuerza sobre un plano es $\mathbf{F} = -\dfrac{dU}{dx}\,\hat{\mathbf{x}}$, y la fuerza por unidad de área es

   $$\frac{\mathbf{F}}{A} = -\frac{1}{A}\frac{dU}{dx}\,\hat{\mathbf{x}} = -2\pi\sigma^2\hat{\mathbf{x}} \tag{1.185}$$

   es decir, la fuerza entre los planos es atractiva.

1.8 Potencial y campo eléctrico en conductores.

La solución de la ecuación de Poisson o de Laplace en una región del espacio limitada por objetos o fronteras, denotadas por S, requiere conocer las siguientes condiciones para el potencial φ sobre las fronteras:

$$\varphi|_S \ , \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S \ . \tag{1.186}$$

Estas condiciones son particularmente simples en fronteras constituidas por materiales conductores, los cuales además tienen muchas aplicaciones prácticas.

Un *conductor* es un material donde las cargas son capaces de moverse libremente en su interior y sobre su superficie. En Electrostática, las distribuciones de cargas y los campos en un conductor deben alcanzar un estado de equilibrio (independiente del tiempo).

Los conductores poseen las siguientes propiedades:

i. Toda carga neta en un conductor debe estar en su superficie.
Consideremos una densidad de carga neta ρ colocada inicialmente dentro de un conductor. La carga ρ neta corresponde a partículas con carga de un mismo signo; es decir que se repelen (si hay cargas con signos opuestos, se atraen hasta anularse; el exceso corresponde a ρ). Puesto que tienen la posibilidad de moverse libremente dentro del conductor, las cargas alcanzarán su máxima separación. Esto implica que las cargas deben alcanzar la superficie del conductor. Luego, si un conductor posee una carga neta, ésta debe estar justo en su superficie, distribuida como una densidad superficial de carga σ.

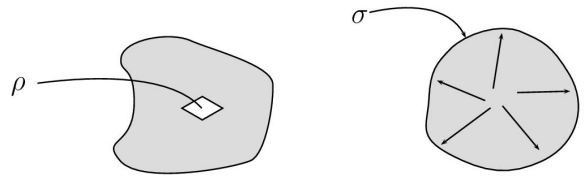


Figura 1.32: La carga neta se encuentra en la superficie de un conductor.

ii. El campo eléctrico dentro de un conductor es cero.
Apliquemos la Ley de Gauss dentro del conductor. Tomemos una superficie

gaussiana S justo debajo y arbitrariamente cerca de la superficie del conductor. Puesto que no hay carga encerrada dentro de S, tenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = 0 \quad \text{dentro de } S. \tag{1.187}$$

Puesto que S está arbitrariamente cerca de la superficie del conductor, esto implica que $\mathbf{E} = 0$ en todo punto dentro del conductor. Luego, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ implica, a su vez, que φ es constante dentro de un conductor.

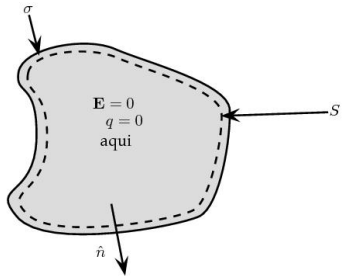


Figura 1.33: El campo eléctrico dentro de un conductor es cero.

iii. Un conductor es una superficie *equipotencial.*
Consideremos un conductor en campo eléctrico externo $\mathbf{E}$. El campo externo mueve las cargas libres dentro del conductor e induce una densidad de carga σ no uniforme en la superficie del conductor.

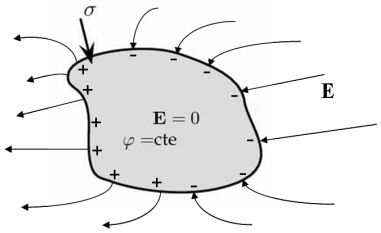


Figura 1.34: Campo eléctrico en la superficie de un conductor.

El campo dentro del conductor es $\mathbf{E}_1 = 0$, mientras que el campo en un punto sobre la superficie se puede escribir como

$$\mathbf{E}_2 = E_n \hat{\mathbf{n}} + E_t \hat{\mathbf{t}}, \tag{1.188}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ son el vector normal y el vector tangente a la superficie, respectivamente.

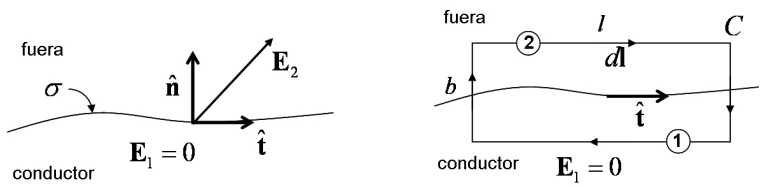


Figura 1.35: Campo eléctrico e integral de línea a través de la superficie de un conductor.

La integral de línea del campo eléctrico a lo largo de un rectángulo C de lados b y l que atraviesa la superficie del conductor satisface

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{1.189}$$

En el límite $b \to 0$,

$$\lim_{b \to 0} \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_2 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{1.190}$$

y haciendo $l \to 0$, tenemos que $d\mathbf{l} \to \hat{\mathbf{t}}\, dl$; luego

$$\lim_{l \to 0} \int_2 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}\, dl = 0 \tag{1.191}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t = 0, \tag{1.192}$$

es decir, la componente del campo eleć́trico tangente a la superficie de un conductor es cero. El potencial sobre la superficie S del conductor satisface

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\nabla \varphi_{|S} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_S = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{constante sobre } S. \tag{1.193}$$

Luego, tanto el interior como la superficie de un conductor poseen un potencial φ constante.

iv. El campo eléctrico en la superficie S de un conductor siempre es normal a S y su magnitud es $E_n = 4\pi\sigma$.

Vimos que los campos interno $\mathbf{E}_1$ y externo $\mathbf{E}_2$ en un punto sobre una superficie con densidad de carga σ están relacionados localmente por

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma. \tag{1.194}$$

Pero $\mathbf{E}_1 = 0$ (dentro del conductor). Luego,

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = E_n = 4\pi\sigma. \tag{1.195}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} &= -\nabla\varphi_{|S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \Rightarrow E_n &= -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 4\pi\sigma. \end{aligned} \tag{1.196}$$

En general, resolver la ecuación de Poisson o de Laplace en regiones limitadas por conductores requiere encontrar un φ que satisface las condiciones de frontera Ec. (1.193) y Ec. (1.196) sobre los conductores.

1.9 Capacitancia.

Supongamos un sistema de N conductores con cargas q_i y potenciales φ_i, $i = 1, \ldots, N$, colocados en el espacio libre.

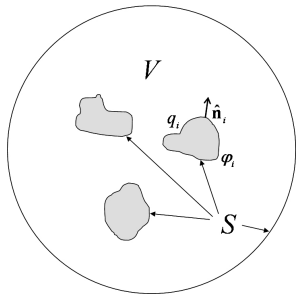


Figura 1.36: Sistema de conductores con cargas q_i y potenciales φ_i.

La energía electrostática total del sistema es

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V |\mathbf{E}|^2 \, d^3r \,, \tag{1.197}$$

donde el volumen V se extiende a todo el espacio, excluyendo el volumen ocupado por los conductores donde el campo eléctrico es cero. Usando la relación $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, podemos escribir

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E} \cdot \nabla\varphi \, d^3r \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_V \left[\nabla \cdot (\mathbf{E}\varphi) - \varphi(\nabla \cdot \mathbf{E})\right] \, d^3r \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint_S (\mathbf{E}\varphi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da, \end{aligned} \tag{1.198}$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para el primer término en la Ec. (1.198) y la Ley de Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (puesto no hay cargas en el volumen V), en el segundo término de dicha ecuación. La superficie S que delimita al volumen V incluye el infinito ($S \to \infty$) y las superficies S_i de los conductores, mientras que el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ apunta hacia fuera de toda la S; en particular, hacia dentro de la superficie de cada conductor. Luego,

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int_{S\to\infty} (\mathbf{E}\varphi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da - \frac{1}{8\pi} \sum_i \oint_{S_i} (\mathbf{E}\varphi_i) \cdot (-\hat{\mathbf{n}}_i) \, da_i \,, \tag{1.199}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_i$ es la normal sobre cada S_i ($-\hat{\mathbf{n}}_i$ apunta hacia dentro del conductor). La integral en el primer término tiende a cero en el límite $S \to \infty$; entonces,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \, da_i \quad (\varphi_i \text{ es constante sobre cada } S_i), \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_i \varphi_i (4\pi q i) \quad (\text{usando la Ley de Gauss sobre cada } S_i), \\ &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \,. \end{aligned} \tag{1.200}$$

Las cargas q_i y los potenciales φ_i en la Ec. (1.200) no son independientes. El potencial del conductor i se debe a la carga q_i y a las contribuciones de todas las cargas en los

demás conductores. Supongamos que tenemos una carga $q_k \neq 0$ y $q_i = 0$, $\forall i \neq k$; entonces el potencial en cada conductor debe ser simplemente proporcional a q_k, es decir, $\varphi_i = p_{ik} q_k$. Puesto que las ecuaciones de la Electrostática son lineales, podemos escribir los potenciales para un conjunto de cargas mediante la superposición lineal

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, q_j \,, \tag{1.201}$$

donde los a_{ij} son coeficientes de proporcionalidad. Las Ecs. (1.201) constituyen un conjunto de N ecuaciones lineales que se pueden invertir para obtener

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\, \varphi_j \,. \tag{1.202}$$

La matriz C_{ij} se denomina *tensor de capacitancia*. Sus elementos poseen dimensiones de longitud y dependen de factores geométricos, tales como la forma de los conductores y la posición relativa entre éstos. Si tenemos solamente un conductor con carga q, el único elemento C se denomina la *capacidad* del conductor,

$$q = C\varphi \,. \tag{1.203}$$

La capacidad C expresa la cantidad de carga que el conductor puede contener cuando está sujeto a un potencial dado. La capacidad está relacionada con el tamaño del conductor. Por ejemplo, para una esfera de radio R que tiene una carga q, el potencial sobre su superficie es $\varphi = q/R$. Comparando con la definición Ec. (1.203), obtenemos $C = R$ para una esfera conductora.

La *capacitancia* de un sistema formado por dos conductores que poseen cargas iguales y opuestas se define como el cociente entre la carga de un conductor y la diferencia de potencial entre ellos. Se pueden diseñar diversas configuraciones de conductores para almacenar carga eléctrica sujetos a potenciales; tales dispositivos se llaman *capacitores* o *condensadores*.

Usando el tensor de capacitancia, la energía potencial electrostática del sistema de conductores, Ec. (1.200), se puede expresar como

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij}\, \varphi_i\, \varphi_j. \tag{1.204}$$

La energía almacenada en un capacitor con capacitancia C sujeto a un potencial φ es

$$U = \frac{1}{2} C\varphi^2. \tag{1.205}$$

Resumen.

1. Función delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \int_I f(x)\delta(x-a)dx &= f(a). \\ \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) &= -4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right). \end{aligned}$$

2. Ecuaciones de la Electrostática:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho. \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

3. Forma integral de la ley de Gauss:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 4\pi q_{\text{enc}}.$$

4. Discontinuidad del campo eléctrico sobre una superficie cargada:

$$[\mathbf{E}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}')] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}').$$

5. Potencial escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi. \\ \varphi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'. \end{aligned}$$

6. Diferencia de potencial entre dos puntos A y B:

$$(\varphi_B - \varphi_A) = \frac{W_{AB}}{q}.$$

7. Ecuaciones de Poisson y de Laplace,

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= -4\pi\rho \quad \text{(Ec. Poisson).} \\ \nabla^2\varphi &= 0 \quad \text{(Ec. Laplace).} \end{aligned}$$

8. Energía electrostática de una configuración de cargas puntuales:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i\,,\,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

9. Energía de un campo electrostático:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{E}|^2 \, d^3r.$$

10. Expansión del potencial de una distribución de carga para $r > r'$,

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \, Q_{ij} \,. \tag{1.206}$$

11. Momento dipolar de una distribución de carga,

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \, \mathbf{r}' \, d^3r'.$$

12. Potencial de un dipolo,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

13. Campo eléctrico de un dipolo,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{r^3} \,.$$

14. Energía de un dipolo en un campo eléctrico externo,

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \,.$$

15. Energía potencial de interacción de dos dipolos,

$$U_{\text{dip}} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \,.$$

16. Propiedades de conductores:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 0, && \text{dentro del conductor.} \\ \varphi &= \text{cte}, && \text{dentro y sobre la superficie del conductor.} \\ E_n = -\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S &= 4\pi\sigma, && \text{en la superficie del conductor.} \end{aligned}$$

17. Capacidad de un conductor:

$$q = C\varphi.$$

1.10 Problemas.

1. Usando funciones delta de Dirac en las coordenadas indicadas, exprese las siguientes densidades de carga:
   a) Una carga q uniformemente distribuida sobre un cascarón esférico de radio a, en coordenadas esféricas.
   b) Una carga uniforme por unidad de longitud λ distribuida sobre una superficie cilíndrica de radio b, en coordenadas cilíndricas.
   c) Una carga q distribuida uniformemente sobre un disco de radio R y espesor despreciable, en coordenadas cilíndricas.
   d) Igual que c), pero en coordenadas esféricas.

2. Dos planos conductores paralelos e infinitos se encuentran en $x = 0$ y $x = b$, y tienen potenciales V_1 y V_2, respectivamente. Hay un plasma con densidad de carga constante ρ_o en el espacio entre los planos.
   a) Encuentre el potencial en todo punto entre los planos.
   b) Encuentre la densidad de carga superficial sobre el plano en $x = 0$.
   c) Calcule el campo eléctrico entre los planos.

3. Una carga Q se distribuye en una esfera no conductora de radio a. Encuentre la energía electrostática de la configuración en los siguientes casos:
   a) La carga se distribuye uniformemente en el volumen de la esfera.
   b) La carga se distribuye uniformemente en la superficie de la esfera.
   c) Explique por qué los resultados a) y b) son diferentes.

4. El potencial promedio de un átomo de hidrógeno se puede expresar como

$$\varphi = q\,\frac{e^{-2r/a_o}}{r}\left(1 + \frac{r}{a_o}\right),$$

   donde q es la magnitud de la carga del electrón y a_o es el radio de Bohr.
   a) Encuentre la distribución de carga que produce este potencial.
   b) Calcule la carga orbital total del átomo de hidrógeno.
   c) Interprete físicamente los resultados.

5. Tres esferas conductoras concéntricas de radios R_1, R_2, y R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) poseen potenciales V_1, V_2, y V_3, respectivamente. Determine la carga de cada esfera.

6. Una carga q se distribuye uniformemente sobre un anillo de radio a. Calcule la frecuencia para pequeñas oscilaciones de una partícula de masa m y carga $-q$ que se mueve sobre el eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro.

7. Considere tres esferas de igual radio a y con la misma carga total q. Una esfera es conductora; otra tiene una densidad uniforme de carga; y la tercera posee una densidad de carga que varía radialmente como r^n, con $n > -3$.
a) Calcule el campo eléctrico dentro y fuera de cada esfera.
b) Dibuje esquemáticamente el campo eleć trico en función de r en los dos primeros casos; y para $n = 2$ y $n = -2$ en el caso de la tercera esfera.

8. Un cable coaxial infinito está formado por un conductor cilíndrico interior de radio a sujeto a un potencial V_o y otro conductor cilíndrico exterior de radio b, conectado a tierra. Encuentre la densidad de carga lineal λ en el conductor interior.

9. Una esfera de radio R posee una densidad de carga uniforme ρ y tiene una cavidad esférica no concéntrica de radio a ($a < R$). El centro de la cavidad se encuentra a una distancia b del centro de la esfera. Calcule la energía electrostática en la cavidad.

10. Dos cilindros conductores muy largos y paralelos, ambos de radio a, están separados por una distancia $d \gg a$. Calcule la capacitancia por unidad de longitud de este sistema.

11. La densidad de carga correspondiente a los estados $m = \pm 1$ del nivel $2p$ del átomo de hidrógeno es
$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta \,.$$
a) Calcule la expansión multipolar del potencial eléctrico debido a esta densidad de carga, incluyendo términos cuadrupolares.
b) Demuestre que el potencial cerca del origen, correcto hasta orden r^2, es aproximadamente
$$\varphi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta) \,.$$

12. Calcule la capacitancia de un sistema formado por dos esferas conductoras concéntricas, de radios R_1 y R_2.

Capítulo 2

Problemas de frontera en Electrostática

2.1 Teorema de Green.

Muchos problemas en Electrostática involucran la determinación del potencial (o el campo) eléctrico en regiones finitas del espacio que pueden contener distribuciones de carga y que se encuentran limitadas por superficies sujetas a determinadas condiciones de frontera. Para encontrar la solución a este tipo de problemas, resulta útil el *Teorema de Green*, el cual derivamos a continuación.

Consideremos el teorema de la divergencia para un campo vectorial $\mathbf{A}$ en un volumen V, limitado por una superficie cerrada S,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, d^3r = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da\,. \tag{2.1}$$

Supongamos $\mathbf{A} = \theta \nabla \psi$; donde θ y ψ son funciones escalares arbitrarias de $\mathbf{r}$. Usamos la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\theta \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \theta + \theta \nabla \cdot \mathbf{a}. \tag{2.2}$$

Haciendo $\mathbf{a} = \nabla \psi$, obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\theta \nabla \psi) = \nabla \psi \cdot \nabla \theta + \theta \nabla^2 \psi. \tag{2.3}$$

Por otro lado

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \theta \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \theta\, \frac{\partial \psi}{\partial n}\,, \tag{2.4}$$

donde $\nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial\psi}{\partial n}$ es la derivada de ψ en la dirección normal $\hat{\mathbf{n}}$ a la superficie S, que apunta hacia fuera de S.

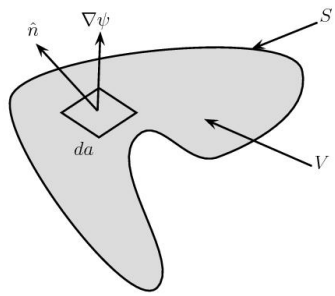


Figura 2.1: Volumen V encerrado por superficie S; vector normal a la superficie $\hat{\mathbf{n}}$.

Sustituyendo en la Ec. (2.1),

$$\int_V \left(\theta\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\theta\right) d^3r = \oint_S \theta\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,da. \tag{2.5}$$

La Ec. (2.5) se denomina la *primera identidad de Green.*

Intercambiando θ y ψ en la Ec. (2.5), tenemos

$$\int_V \left(\psi\nabla^2\theta + \nabla\theta\cdot\nabla\psi\right)\, d^3r = \oint_S \psi\,\frac{\partial\theta}{\partial n}\,da. \tag{2.6}$$

Restando la Ec. (2.6) de la Ec. (2.5), obtenemos

$$\int_V \left(\theta\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\theta\right) d^3r = \oint_S \left(\theta\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\theta}{\partial n}\right) da\,. \tag{2.7}$$

La Ec. (2.7) se conoce como el *Teorema de Green*, y se puede considerar como una generalización del teorema de la divergencia.

Puesto que ψ y θ son funciones escalares arbitrarias, en particular podemos usar

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, \tag{2.8}$$

tal que $\mathbf{r}$ sea un punto de observación y $\mathbf{r}'$ la variable de integración. Entonces,

$$\nabla^2\psi = \nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{2.9}$$

Además, podemos tomar $\theta = \varphi$, el potencial escalar que satisface la ecuación de Poisson, $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, en V. Sustituyendo estas funciones escalares en la Ec. (2.7), empleando $\mathbf{r}'$ como variable de integración, tenemos

$$\int_V \left(-4\pi\varphi\left(\mathbf{r}'\right)\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) + \frac{4\pi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho\left(\mathbf{r}'\right)\right) d^3r' = \oint_S \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right] da' \,. \tag{2.10}$$

Si $\mathbf{r}$ está dentro del volumen V, la Ec. (2.10) da

$$-4\pi\varphi\left(\mathbf{r}\right) + 4\pi\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r' = \oint_S \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right] da' \tag{2.11}$$

luego,

$$\varphi\left(\mathbf{r}\right) = \int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right] da'. \tag{2.12}$$

Si $\mathbf{r}$ está fuera del volumen V, el lado izquierdo de la Ec. (2.12) es igual a 0.

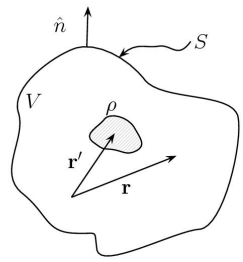


Figura 2.2: Densidad de carga $\rho(\mathbf{r}')$ en el volumen V, superficie S y normal $\hat{\mathbf{n}}$.

La Ec. (2.12) implica que $\varphi(\mathbf{r})$ está determinado en un volumen V limitado por una superficie S, si se conocen la distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$ en V y los valores de φ y/o de su derivada normal sobre S. Es decir, la función $\varphi(\mathbf{r})$ en la Ec. (2.12) es solución de la ecuación de Poisson $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$, en V, con condiciones de frontera $\varphi|_S$ y $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$ sobre S .

Note que en la superficie S,

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = \nabla\varphi\cdot\hat{\mathbf{n}} = -\,E_n|_S \,, \tag{2.13}$$

esto es, la condición de frontera $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$ es equivalente a dar el valor de la componente del campo eléctrico normal sobre S.

La condición de contorno $\varphi|_S$ se llama condición tipo *Dirichlet*, mientras que $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$, se denomina tipo *Neumann*. Se puede demostrar que la solución φ de la Ec. (2.12) que satisface un tipo dado de condición de frontera, Dirichlet o Neumann, es única.

El potencial en el espacio libre se puede obtener considerando el límite $S \to \infty$, para el cual $r' \to \infty$. Puesto que $\varphi \sim \frac{1}{r'}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial n'} \sim \frac{1}{r'^2}$, los términos del integrando en la integral sobre S van como $\frac{1}{r'} \times \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{r'^3}$, y el elemento de area crece como $da' \sim r'^2$. Luego, en el límite $S \to \infty$, la integral $\oint_S \to 0$, y la Ec. (2.12) da

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \,, \tag{2.14}$$

lo cual corresponde al potencial φ en el espacio libre, si se conoce la ρ en todo el espacio, ya obtenido en el Capítulo 1.

2.2 Función de Green.

Vimos que la solución de la ecuación de Poisson o de Laplace en un volumen finito V, con condiciones de frontera tipo Dirichlet ($\varphi|_S$) o Newmann ($\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$) sobre la superficie S que encierra el volumen, se puede obtener por medio del Teorema de Green, Ec. (2.7), utilizando la función

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.15}$$

que satisface

$$\nabla^2\psi = \nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\,\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) \,, \tag{2.16}$$

y la función $\theta = \varphi$, tal que $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ en V. Sustituyendo estas funciones en el Teorema de Green, obtenemos

$$\varphi\left(\mathbf{r}\right) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right] da'. \tag{2.17}$$

Se puede interpretar ψ como el potencial producido en la posición $\mathbf{r}$ por una carga $q = 1$ ubicada en $\mathbf{r}'$, cuya densidad corresponde a $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, tal que ψ satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \psi = -4\pi\rho. \tag{2.18}$$

La función $\psi = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ pertenece a una clase de funciones llamadas *funciones de Green*, que poseen la forma general

$$G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right), \tag{2.19}$$

y que satisfacen las siguientes propiedades

i) $\nabla^2 G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) = -4\pi\, \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right)$.

ii) $\nabla^2 F\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) = 0$ (F satisface la Ec. de Laplace dentro de V).

iii) $G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) = G\left(\mathbf{r}', \mathbf{r}\right)$ (representa la equivalencia física de intercambiar el punto de observación $\mathbf{r}$ y la fuente $\mathbf{r}'$).

Si sustituimos $\psi = G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right)$ en el Teorema de Green, tenemos

$$\varphi\left(\mathbf{r}\right) = \int_V \rho\left(\mathbf{r}'\right) G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi\left(\mathbf{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) \right] da' \tag{2.20}$$

Hay que recordar que los términos en la integral cerrada de superficie deben ser evaluados sobre toda la superficie S. En general, la superficie total S que encierra al volumen V puede consistir en dos superficies no conexas, una exterior S_{ext} y una interior S_{int}.

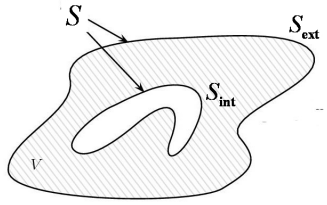


Figura 2.3: Volumen V encerrado por superficies S_{ext} y S_{int}.

Existe libertad para escoger la función $F\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right)$ en la función de Green $G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right)$. Esto permite diseñar $G\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right)$ para adaptarse a los dos tipos de condiciones de frontera sobre S:

i) Condiciones tipo Dirichlet $\varphi|_S$: requerir $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')|_S = 0$.
Esto da la solución

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') d^3r' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'. \tag{2.21}$$

En particular, si S es una superfice de un conductor, $\varphi(\mathbf{r}')|_S = \varphi_0 = \text{cte}$.
Si S es conductor conectado a tierra, $\varphi(\mathbf{r})_S = 0$. En este caso, el potencial tiene una expresión simple

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r},\mathbf{r}') d^3r'. \tag{2.22}$$

ii) Condiciones tipo Neumann $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$: requerir $\left.\frac{\partial G_N}{\partial n'}\right|_S = -\frac{4\pi}{\mathcal{S}}$ donde $\mathcal{S}$ es el área total de S.

Esta es la condición más simple para la derivada normal de $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ sobre S en el problema de Neumann. Para ver esto, consideremos

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.23}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.24}$$

Luego, aplicando el teorema de la divergencia,

$$\int_V \nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') d^3r' = \int_V \nabla\cdot(\nabla G) d^3r' = \oint_S \nabla G\cdot\hat{\mathbf{n}}' da' = \oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da'.$$

Por otro lado,

$$\int_V \nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') d^3r' = -4\pi\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3r' = -4\pi \tag{2.25}$$

Luego,

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi. \tag{2.26}$$

La relación no trivial más simple que se puede tomar en la Ec. (2.26) es cuando el integrando es constante; esto da

$$\mathcal{S}\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S = -4\pi, \tag{2.27}$$

que corresponde a la condición escogida para G en el problema de frontera tipo Neumann.

Esto conduce a la solución

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} da' + \frac{1}{\mathcal{S}} \oint_S \varphi(\mathbf{r}') da'. \tag{2.28}$$

Definimos la cantidad

$$\langle \varphi \rangle_S \equiv \frac{1}{\mathcal{S}} \oint_S \varphi(\mathbf{r}') da' \tag{2.29}$$

como el valor promedio de φ sobre S.

Un problema típico de Newmann consiste en un volumen V limitado por dos superficies, una exterior S_{ext} y una interior S_{int}; tal que la superficie exterior S_{ext} en el infinito.

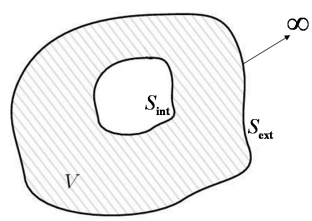


Figura 2.4: Volumen V limitado por superficies S_{int} y $S_{\text{ext}} \to \infty$.

En este caso, la superficie total $S \to \infty$, y $\langle \varphi \rangle_S \to 0$. Entonces,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S_{\text{int}}} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} da' \tag{2.30}$$

donde la integral de área se refiere a la superficie interior de V.

En ambos tipos de problemas de frontera, la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa una especie de modulación de la acción de la fuente $\rho(\mathbf{r}')$ en el punto $\mathbf{r}$. La función $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ no depende de $\rho(\mathbf{r}')$, sino de la geometría de la superficie S solamente; por lo que se puede ver como una función de respuesta de la geometría del sistema ante el campo creado por la fuente.

La función $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ satisface la ecuación de Laplace dentro de V, por lo que representa el potencial de un conjunto de cargas fuera de V. Luego, la función de Green

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \quad \text{tal que} \begin{cases} G = 0 & \text{sobre} \quad S \\ \frac{\partial G}{\partial n} = 0 & \text{sobre} \quad S \to \infty \end{cases} \tag{2.31}$$

se puede interpretar físicamente como el potencial de una carga puntual ubicada en $\mathbf{r}'$ combinado con el potencial $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ de una distribución de cargas fuera de V, de modo que resulte en un potencial total G igual a 0 sobre S (o derivada normal $\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right) = 0$) cuando $S \to \infty$.

Ejemplo.

1. Encontrar $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ en un volumen limitado por una única superfice S, tal que $S \to \infty$. Esto incluye a puntos de observación tales que $|\mathbf{r}| \to \infty$; es decir, todo el espacio.

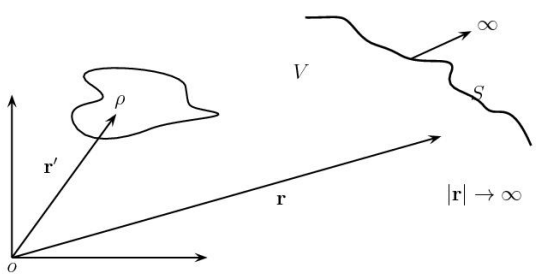


Figura 2.5:

Tenemos la condición $\varphi|_{S\to\infty} = 0$, tipo Dirichlet. Luego,

$$\varphi\left(\mathbf{r}\right) = \int_V \rho\left(\mathbf{r}'\right) G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) d^3r'. \tag{2.32}$$

Recordemos que el potencial $\varphi(\mathbf{r})$ de una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$ en el espacio libre es

$$\varphi(\mathbf{r}') = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'. \tag{2.33}$$

Comparando estas dos expresiones para φ, tenemos

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{2.34}$$

que satisface $\nabla^2 G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=-4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)$.

Luego, la función $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ tiene la forma

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+F\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \tag{2.35}$$

con

$$F\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=0 \tag{2.36}$$

y satisface la condición de frontera $G_D\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=0$ sobre S, cuando $|\mathbf{r}|\to\infty$.

2.3 Método de imágenes.

El método de imágenes permite construir la función de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ en determinados casos; por ejemplo cuando $\rho(\mathbf{r}')$ describe cargas puntuales en presencia de fronteras conductoras S, donde $\varphi|_S=$ cte, ó $\varphi|_S=0$.

Este método consiste en inferir, a partir del conocimiento de la geometría del sistema, una distribución de carga ρ_I denominada carga imagen, o carga virtual, externa al volumen V de interés, tal que simule las condiciones de frontera que satisface el potencial φ sobre S. Esta distribución de carga imagen externa a V satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 F=0$ en V; mientras que la densidad de carga $\rho(\mathbf{r}')$ satisface la ecuación de Poisson $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$ en V, con condiciones de frontera $\varphi|_S$.

Ejemplos.

1. Consideremos una distribución de carga ρ ubicada en $z>0$ frente a plano conductor infinito en $z=0$, conectado a tierra. Calcular el potencial φ producido en el espacio $z>0$.

   Conductor a tierra significa $\varphi|_S=0$ sobre la superficie S correspondiente al plano $z=0$, es decir una condición de frontera tipo Dirichlet.

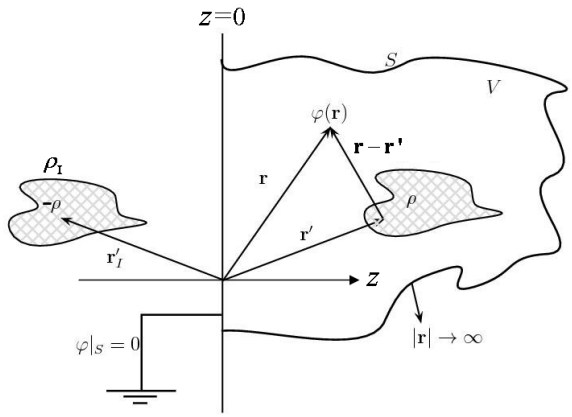


Figura 2.6: Método de imágenes para una distribución de carga ρ en $z > 0$ frente al plano conductor $z = 0$.

El volumen V de interés está constituido por el subespacio $z > 0$, encerrado por la superficie S infinita que incluye al plano $z = 0$. Usando el teorema de Green con condición de frontera tipo Dirichlet, el potencial está dado por

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi|_S \frac{\partial G_D}{\partial n'} da' \tag{2.37}$$

donde $\varphi|_S = 0$ y el volumen V es el subespacio $z > 0$.

La función $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para este problema debe satisfacer las siguientes propiedades

(a) $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ para $\mathbf{r}$ en $z = 0$, tal que $\varphi(\mathbf{r})|_{z=0} = 0$.

(b) $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \to 0$, para $|\mathbf{r}| \to \infty$, tal que $\varphi(\mathbf{r} \to \infty) \to 0$, en V.

(c) $\nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ($\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$), en V.

Probemos con la siguiente forma para $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_I|}, \tag{2.38}$$

donde $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, dentro de V ($z > 0$); y $\mathbf{r}'_I = (x', y', -z')$, fuera de V ($z < 0$). Note que el vector $\mathbf{r}'_I = (x', y', -z')$ corresponde a la imagen especular del vector $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ con respecto al plano $z = 0$.

Luego,

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| = \left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.39}$$

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_I\right| = \left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z+z'\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.40}$$

Vemos que $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ satisface $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')|_{z=0}=0$ y $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\to 0$, para $|\mathbf{r}|\to\infty$. Además,

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')+4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'_I\right), \tag{2.41}$$

pero el punto de observación $\mathbf{r}$ está en V y $\mathbf{r}'_I$ está fuera de V. Luego, en V siempre tenemos $\mathbf{r}'_I\neq\mathbf{r}$, y la segunda función delta siempre es 0 en V.

Entonces, el potencial para $z>0$ es

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \int_{z>0}\rho(\mathbf{r}')G_D\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)d^3r' \\ &= \int_{z>0}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' - \int_{z>0}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_I\right|}\,d^3r'.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Explícitamente tenemos,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\mathbf{r}\right) &= \int_{z>0}\frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)d^3r'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}} \\ &- \int_{z>0}\frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)d^3r'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right]^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Este potencial puede interpretarse como el potencial resultante de dos contribuciones: el primer término corresponde al potencial producido por la densidad dada ρ en el volumen V $(z>0)$, y el segundo término proviene del potencial asociado a una densidad de carga virtual o imagen $\rho_I=-\rho$, ubicada fuera de V $(z<0)$ y correspondiente a la imagen especular de ρ con respecto al plano $z=0$.

En el subespacio $z<0$ no hay carga. Luego, por la ley de Gauss, $\mathbf{E}=0$ y, por tanto, φ es constante alli. Por continuidad con la condición de frontera $\varphi|_{z=0}=0$, debemos tener $\varphi=0$ para $z<0$.

2. Calcular el potencial producido para $z > 0$ por una carga puntual q colocada en $\mathbf{r}_o = (0, 0, z_o)$ frente al plano conductor $z = 0$, conectado a tierra.

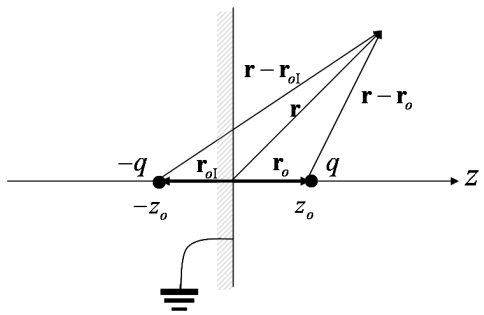


Figura 2.7: Método de imágenes para una carga q ubicada en $\mathbf{r}_o = (0, 0, z_o)$ frente al plano conductor $z = 0$.

El volumen V es el subespacio $z > 0$. En este caso, $\rho(\mathbf{r}') = q\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_o) = q\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z' - z_o)$ y $\mathbf{r}_I = (0, 0, -z_o)$.

Sustituyendo $\rho(\mathbf{r}')$ en la Ec. (2.43), obtenemos

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\left[x^2 + y^2 + (z - z_o)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{q}{\left[x^2 + y^2 + (z + z_o)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{2.44}$$

Vemos que el potencial satisface la condición de frontera $\varphi(x, y, 0) = 0$ sobre $z = 0$, y $\varphi = 0$ para $|\mathbf{r}| \to \infty$. Este potencial se puede expresar también como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|}\,, \tag{2.45}$$

donde

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \left[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.46}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I| = \left[x^2 + y^2 + (z + z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.47}$$

y se puede interpretar como el potencial resultante de la carga q colocada en $\mathbf{r}_0$, más el potencial de una carga virtual $-q$ ubicada en $\mathbf{r}_I$ como la imagen especular de q con respecto al plano $z = 0$.

Podemos calcular el campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ para $z > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q\,(z-z_0)}{\left[x^2+y^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{q\,(z+z_0)}{\left[x^2+y^2+(z+z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q\,x}{\left[x^2+y^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{q\,x}{\left[x^2+y^2+(z+z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{q\,y}{\left[x^2+y^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{q\,y}{\left[x^2+y^2+(z+z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

El campo eléctrico sobre $z = 0$ es

$$E_z|_{z=0} = \frac{-2\,q\,z_0}{[x^2+y^2+{z_0}^2]^{\frac{3}{2}}}, \qquad E_x|_{z=0} = E_y|_{z=0} = 0. \tag{2.48}$$

Luego, $\mathbf{E}|_{z=0} = E_z|_{z=0}\,\hat{\mathbf{z}}$. La normal al plano hacia fuera del volumen V es $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{z}}$; es decir $\mathbf{E}|_{z=0}$ es normal a la superficie, como debe ser sobre un conductor. El campo eléctrico normal sobre el conductor satisface

$$E_n = E_z|_{z=0} = 4\pi\,\sigma|_{z=0}\,. \tag{2.49}$$

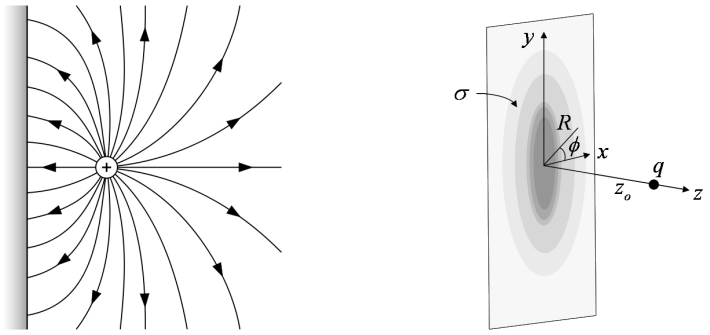


Figura 2.8: Izquierda: campo eléctrico para $z \geq 0$. Derecha: densidad de carga inducida sobre el plano $z = 0$.

Podemos calcular la densidad de carga superficial inducida sobre el plano $z = 0$,

$$\sigma|_{z=0} = \sigma\,(x,y) = \frac{E_n}{4\pi} = -\frac{q\,z_0}{2\pi\,(x^2+y^2+{z_0}^2)^{3/2}}. \tag{2.50}$$

La carga total inducida sobre el conductor es

$$Q_{\text{total}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \sigma\,(x, y)\,. \tag{2.51}$$

Esta integral se puede evaluar más fácilmente en coordenadas polares (R, ϕ), donde $R^2 = x^2 + y^2$, y $dx\, dy = R\, dR\, d\phi$. Entonces,

$$\sigma(R, \phi) = -\frac{q\, z_0}{2\pi\, (R^2 + {z_0}^2)^{3/2}} \tag{2.52}$$

y

$$\begin{aligned} Q_{\text{total}} &= -\frac{q\, z_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{R\, dR}{(R^2 + {z_0}^2)^{3/2}} \\ &= +q\, z_0 \left(R^2 + {z_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{\infty} \\ &= -q\,, \end{aligned} \tag{2.53}$$

donde hemos usado la integral

$$\int \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\left(x^2 + a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{2.54}$$

Luego, la carga total inducida sobre el plano conductor es igual y opuesta a la carga q colocada frente al plano. Esta carga proviene de la Tierra, a la cual el plano está conectado.

La carga inducida sobre el plano ejerce una fuerza atractiva sobre la carga q, equivalente a la fuerza eléctrica entre q y una carga imagen $q_I = -q$ colocada en $z = -z_o$; esto es

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4z_o^2}\, \hat{\mathbf{z}}\,. \tag{2.55}$$

El trabajo que debe realizar un agente externo para traer la carga q desde el infinito a su posición z_o frente al plano requiere una fuerza $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\mathbf{F}$. Luego,

$$W_{\text{ext}} = \int_{\infty}^{z_o} \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q^2}{4} \int_{\infty}^{z_o} \frac{1}{z^2}\, dz = -\frac{q^2}{4}\, \frac{1}{z^2}\Big|_{\infty}^{z_o} = -\frac{q^2}{4z_o}\,. \tag{2.56}$$

Este trabajo es la mitad de la energía potencial eléctrica almacenada en un sistema de dos cargas q y $-q$ separadas por una distancia $2z_o$.

3. Carga puntual q colocada a una distancia r_o del centro de una esfera conductora de radio $a < r_o$ conectada a tierra. Calcular el potencial fuera de la esfera.

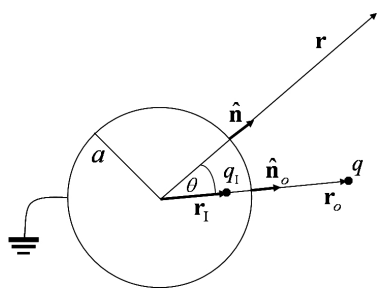


Figura 2.9: Método de imágenes para una carga q frente a una esfera conductora conectada a tierra.

El volumen V donde se busca el potencial corresponde a todo el espacio exterior a la esfera conductora, $r > a$. Puesto que la esfera está conectada a tierra, la condición de frontera sobre ella es $\varphi(r = a) = 0$.

Supongamos una carga imagen q_I ubicada en la posición $\mathbf{r}_I$ dentro de la esfera, es decir, fuera de V. Por simetría, $\mathbf{r}_I$ debe estar en la dirección de $\mathbf{r}_o$. El problema consiste en encontrar $|\mathbf{r}_I|$ y q_I tal que $\varphi(r = a) = 0$. Definimos los siguientes vectores normales a la superficie S de la esfera,

$$\hat{\mathbf{n}}_o = \text{vector unitario en dirección } \mathbf{r}_o. \tag{2.57}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \text{vector unitario en dirección } \mathbf{r}. \tag{2.58}$$

El potencial total en un punto $\mathbf{r}$ fuera de la esfera es el resultado de las contribuciones de los potenciales de la carga q y de la carga virtual q_I, esto es

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|} + \frac{q_I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|} \\
&= \frac{q}{|r\hat{\mathbf{n}} - r_o\hat{\mathbf{n}}_o|} + \frac{q_I}{|r\hat{\mathbf{n}} - r_I\hat{\mathbf{n}}_o|} \\
&= \frac{q}{r\left|\hat{\mathbf{n}} - \dfrac{r_o}{r}\hat{\mathbf{n}}_o\right|} + \frac{q_I}{r_I\left|\hat{\mathbf{n}}_o - \dfrac{r}{r_I}\hat{\mathbf{n}}\right|}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Evaluamos en $r = a$,

$$\varphi\,(r=a) = \frac{q}{a\left|\hat{\mathbf{n}} - \dfrac{r_o}{a}\hat{\mathbf{n}}_o\right|} + \frac{q_I}{r_I\left|\hat{\mathbf{n}}_o - \dfrac{a}{r_I}\hat{\mathbf{n}}\right|} = 0. \tag{2.60}$$

La Ec. (2.60) debe satisfacerse para todos los posibles ángulos θ entre $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_o$, en particular para $\theta = 0$ cuando $\hat{\mathbf{n}}$ es paralelo a $\hat{\mathbf{n}}_o$. En ese caso $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_o$, y de la Ec. (2.60) obtenemos

$$\frac{q}{a\left|\hat{\mathbf{n}}_o - \dfrac{r_o}{a}\hat{\mathbf{n}}_o\right|} = -\frac{q_I}{r_I\left|\hat{\mathbf{n}}_o - \dfrac{a}{r_I}\hat{\mathbf{n}}_o\right|}\,. \tag{2.61}$$

La relación (2.61) requiere satisfacer simultáneamente las siguientes condiciones

$$\frac{q}{a} = -\frac{q_I}{r_I} \tag{2.62}$$

$$\frac{r_o}{a} = \frac{a}{r_I}\,, \tag{2.63}$$

lo que conduce a

$$r_I = \frac{a^2}{r_o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_I = r_I\,\hat{\mathbf{n}}_o = \frac{a^2}{r_o^2}\,\mathbf{r}_o \tag{2.64}$$

$$q_I = -\frac{a}{r_o}\,q\,. \tag{2.65}$$

Luego,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_o|} - \frac{q\,a}{r_o\left|\mathbf{r} - \dfrac{a^2}{r_0^2}\mathbf{r}_o\right|}\,. \tag{2.66}$$

El potencial (2.66) se puede expresar en coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \frac{q}{[r^2 - 2rr_o\cos\theta + r_o^2]^{1/2}} \\ &\quad - \frac{q\,(a/r_o)}{\left[r^2 - 2\left(\dfrac{a}{r_o}\right)^2 rr_o\cos\theta + \left(\dfrac{a}{r_o}\right)^4 r_o^2\right]^{1/2}}\,,\end{aligned} \tag{2.67}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_o$.

El potencial (2.66) corresponde a la solución del problema de Dirichlet

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' \tag{2.68}$$

en el volumen $r > a$, con condición de frontera $\varphi(r = a) = 0$. La densidad de carga corresponde a la carga puntual ubicada en $\mathbf{r}_o$,

$$\rho(\mathbf{r}') = q\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_o). \tag{2.69}$$

Comparando con la solución (2.66), vemos que la función de Green para este problema es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'\left|\mathbf{r} - \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'\right|}. \tag{2.70}$$

La fuerza entre la carga q y la esfera corresponde a la fuerza atractiva entre q y la carga virtual q_I, separadas por una distancia

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I| = r_o - \frac{a^2}{r_o}. \tag{2.71}$$

Luego, la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{q\,q_I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|^2} = \frac{a r_o q^2}{(r_o^2 - a^2)^2}. \tag{2.72}$$

La densidad de carga superficial inducida sobre la superficie S de la esfera conductora puede ser calculada mediante la relación

$$E_n|_S = 4\pi\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}. \tag{2.73}$$

A partir de la Ec. (2.67), calculamos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{q(r - r_o\cos\theta)}{[r^2 - 2rr_o\cos\theta + r_o^2]^{3/2}} + \frac{q\left(\frac{a}{r_o}\right)\left(r - \left(\frac{a}{r_o}\right)^2 r_o\cos\theta\right)}{\left[r^2 - 2\left(\frac{a}{r_o}\right)^2 rr_o\cos\theta + \left(\frac{a}{r_o}\right)^4 r_o^2\right]^{3/2}}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{q\left(\dfrac{a}{r_o}-\cos\theta\right)}{r_o^2\left[1-2\dfrac{a}{r_o}\cos\theta+\dfrac{a^2}{r_o^2}\right]^{3/2}} + \frac{q\left(\dfrac{r_o}{a}\right)\left(1-\dfrac{a}{r_o}\cos\theta\right)}{r_o^2\left[1-2\dfrac{a}{r_o}\cos\theta+\dfrac{a^2}{r_o^2}\right]^{3/2}}.$$

Después de algunas simplificaciones, obtenemos

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a^2}\left(\frac{a}{r_o}\right)\frac{\left(1-\dfrac{a^2}{r_o^2}\right)}{\left[1-2\dfrac{a}{r_o}\cos\theta+\dfrac{a^2}{r_o^2}\right]^{3/2}}. \tag{2.74}$$

Se puede verificar que la integral de área de σ sobre la superficie de la esfera da el valor de la carga imagen $q_I = -\dfrac{a}{r_o}q$.

4. Carga puntual q colocada a una distancia r_o del centro de una esfera conductora aislada, de radio $a < r_o$ y con carga total Q. Calcular el potencial fuera de la esfera.

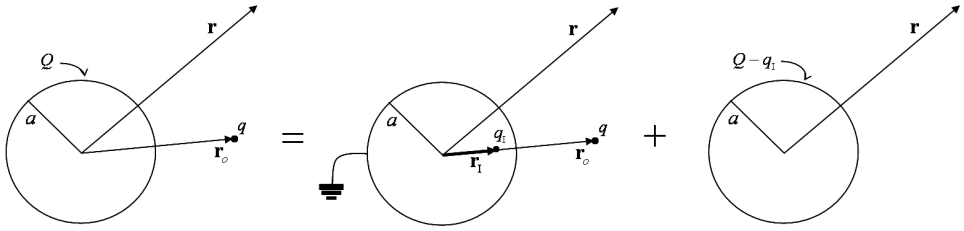


Figura 2.10: Principio de superposición para el problema 4.

Este problema se resuelve usando el principio de superposición. El potencial en un punto $\mathbf{r}$ fuera de la esfera se puede considerar como la composición de dos procesos:

(a) el potencial producido por una carga q frente a una esfera conductora conectada a tierra, con carga q_I en equilibrio electrostático.

(b) se corta la conexión a tierra y se agrega una carga $Q - q_I$, la cual se distribuye uniformemente sobre la esfera debido al equilibrio electrostático. Por el teorema de Gauss, para $r > a$ esto es equivalente al potencial producido por una carga $Q - q_I$ colocada en el centro de la esfera.

Luego, tenemos

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_o|} - \frac{q\,a}{r_o\left|\mathbf{r}-\frac{a^2}{r_o^2}\mathbf{r}_o\right|} + \frac{\left(Q+\frac{qa}{r_o}\right)}{r}. \tag{2.75}$$

2.4 Funciones ortogonales.

En muchas situaciones, las soluciones de problemas de potencial que involucran la ecuación de Laplace se pueden expresar mediante expansiones en series de funciones ortogonales. El conjunto de funciones ortogonales apropiado para un problema dado depende de la geometría y de las simetrías presentes en el sistema.

Se dice que una función real o compleja $f(\xi)$, para $\xi \in (a,b)$, es de *cuadrado integrable* en el intervalo (a,b), si

$$\int_a^b f^*(\xi)f(\xi)\,d\xi = \int_a^b |f(\xi)|^2\,d\xi \qquad \text{es finito.} \tag{2.76}$$

Consideremos un conjunto de funciones reales o complejas $\{u_n(\xi)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de cuadrado integrable y ortonormales en el intervalo (a,b).

Ortonormalidad significa que

$$\int_a^b u_n^*(\xi)u_m(\xi)\,d\xi = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad m = n \\ 0, & \text{si} \quad m \neq n. \end{cases} \tag{2.77}$$

El concepto de ortogonalidad de funciones es análogo al de ortogonalidad de vectores: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Cualquier función $f(\xi)$ de cuadrado integrable en el intervalo (a,b) puede representarse mediante una expansión en serie de las funciones ortonormales $\{u_n(\xi)\}$,

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(\xi), \tag{2.78}$$

donde los coeficientes a_n están unívocamente determinados. Para ver esto, multi-

pliquemos la Ec. (2.78) por $u_m^*(\xi)$ e integremos en el intervalo (a, b),

$$\begin{aligned}\int_a^b u_m^*(\xi)\, f(\xi)\, d\xi &= \int_a^b u_m^*(\xi) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(\xi) \right) d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_a^b u_m^*(\xi)\, u_n(\xi)\, d\xi \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, \delta_{mn} = a_m. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Luego,

$$a_n = \int_a^b u_n^*(\xi)\, f(\xi)\, d\xi\,. \tag{2.80}$$

Se dice que las funciones $u(\xi)$ forman una *base completa* en el intervalo (a, b) para las funciones cuyo cuadrado es integrable en ese intervalo.

Sustituyendo los coeficientes a_n de la Ec. (2.80) en la Ec. (2.78), obtenemos

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_n \left(\int_a^b u_n^*(\xi')\, f(\xi')\, d\xi' \right) u_n(\xi) \\ &= \int_a^b f(\xi') \left(\sum_n u_n^*(\xi')\, u_n(\xi) \right) d\xi', \end{aligned} \tag{2.81}$$

lo cual implica que

$$\sum_n u_n^*(\xi')\, u_n(\xi) = \delta(\xi - \xi')\,. \tag{2.82}$$

La Ec. (2.82) se denomina la relación de *clausura* o *completitud* del conjunto $\{u_n(\xi)\}$.

Si una función de cuadrado integrable $f(\xi, \eta)$ depende de dos variables, $\xi \in (a, b)$ y $\eta \in (c, d)$, se puede representar mediante una doble expansión en serie de conjuntos de funciones ortogonales $\{u_n(\xi)\}$ definidas en (a, b) y $\{v_n(\eta)\}$ definidas en (c, d),

$$f(\xi, \eta) = \sum_n \sum_m a_{nm} u_n(\xi)\, v(\eta), \tag{2.83}$$

$$\text{donde} \qquad a_{nm} = \int_a^b d\xi \int_c^d d\eta\; u_n^*(\xi)\, v_m^*\, f(\xi, \eta). \tag{2.84}$$

Ejemplos.

1. Las series de Fourier constituyen uno de los ejemplos más conocidos de expansión de funciones $f(x)$ en un intervalo $x \in [-c, c]$ (ó $x \in [0, 2c]$), en términos del conjunto de funciones ortonormales

$$\{u_n(x)\}_{n=1,2,\ldots} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right), \frac{1}{\sqrt{c}} \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \right\}. \tag{2.85}$$

Se expresa

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) \tag{2.86}$$

$$a_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx \tag{2.87}$$

$$b_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx \tag{2.88}$$

2. Integrales de Fourier. Si el intervalo (a, b) es $(-\infty, \infty)$, las funciones ortogonales $u_n(\xi)$ son no contables $n \neq 1, 2, \ldots$. Este es el caso de las funciones $u(x) = e^{ikx}$, que permiten la expansión

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k)\, e^{ikx} dk \tag{2.89}$$

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx. \tag{2.90}$$

Ortonormalidad:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta\left(k - k'\right). \tag{2.91}$$

Clausura:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta\left(x - x'\right). \tag{2.92}$$

2.5 Ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas.

La ecuación de Laplace

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.93}$$

en coordenadas cartesianas es

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{2.94}$$

La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial homogénea en derivadas parciales. El método de separación de variables consiste en transformar una ecuación de este tipo en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como ejemplo de este método, buscamos una solución de la Ec. (2.94) en la forma de un producto de funciones con variables independientes,

$$\varphi\left(\mathbf{r}\right) = \varphi\left(x, y, z\right) = X(x)Y(y)Z(z). \tag{2.95}$$

Sustitución en la Ec. (2.94) da

$$YZX'' + XZY'' + XYZ'' = 0. \tag{2.96}$$

Dividiendo por XYZ, obtenemos

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0\,. \tag{2.97}$$

La Ec. (2.97) contiene la suma de tres términos independientes y se debe satisfacer $\forall\, x, y, z$. Luego, cada término por separado debe ser constante, tal que la suma sea cero,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2 \qquad \Rightarrow \qquad X'' + \alpha^2 X = 0 \tag{2.98}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2 \qquad \Rightarrow \qquad Y'' + \beta^2 Y = 0 \tag{2.99}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \qquad \Rightarrow \qquad Z'' - \gamma^2 Z = 0 \tag{2.100}$$

donde

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2. \tag{2.101}$$

Escogemos las constantes α y β reales, tales que $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$.

Las ecuaciones para X y Y son análogas a la ecuación de un oscilador armónico. Sus soluciones tienen la forma

$$X = A\cos(\alpha x) \pm B\sin(\alpha x) \to e^{\pm i\alpha x} \tag{2.102}$$

$$Y = A\cos(\beta x) \pm B\sin(\beta x) \to e^{\pm i\beta y} \tag{2.103}$$

mientras que la ecuación para Z tiene solución de la forma

$$Z = Ae^{\gamma z} \pm Be^{-\gamma z} = A'\sinh(\gamma z) \pm B''\cosh(\gamma z) \to e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}. \tag{2.104}$$

La solución $\varphi = XYZ$ es una solución particular de la ecuación de Laplace. Los coeficientes y la forma específica de la solución particular para un problema dado se determinan mediante las condiciones de frontera del sistema. La solución general se encuentra por superposición de todas las soluciones particulares que satisfacen las condiciones de frontera.

Ejemplos.

1. Encontrar el potencial dentro de una caja rectangular de lados a, b y c, cuyas caras están todas conectadas a tierra, excepto la cara superior $z = c$, que está sujeta a un potencial $V(x, y)$.

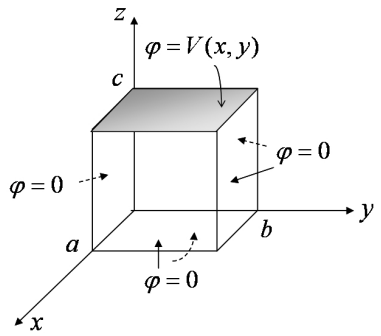


Figura 2.11: Caja rectangular con potencial $\varphi(x, y, c) = V(x, y)$ y demas lados con potencial cero.

Puesto que no hay cargas dentro de la caja, se cumple la ecuación de Laplace en la región donde se busca el potencial escalar. Se trata de encontrar la solución

en la forma $\varphi = XYZ$. Para determinar las funciones X, Y y Z, examinamos las condiciones de frontera en cada coordenada x, y y z.

Condiciones de frontera para $X(x)$:

$$\varphi = 0 \quad \text{en } x = 0 \Rightarrow X(0) = 0. \quad \text{Sugiere la forma: } X \sim \sin(\alpha x). \tag{2.105}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{en } x = a \Rightarrow X(a) = 0. \quad \text{Luego, } X \sim \sin(\alpha a) = 0. \tag{2.106}$$

Entonces, debemos tener

$$\alpha a = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.107}$$

La forma de X que satisface las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = a$ es

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \tag{2.108}$$

Similarmente, evaluando las condiciones de frontera para Y, tenemos

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \ y = 0 \Rightarrow Y(0) = 0. \quad \rightarrow \ Y \sim \sin(\beta y). \tag{2.109}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \ y = b \Rightarrow Y(b) = 0. \quad \rightarrow \ Y \sim \sin(\beta b) = 0. \tag{2.110}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.111}$$

$$\Rightarrow Y(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \tag{2.112}$$

Condición de frontera en $z = 0$,

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \ z = 0 \Rightarrow Z(0) = 0. \quad \text{Sugiere la forma: } Z \sim \sinh(\gamma z). \tag{2.113}$$

Esto conduce a

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \tag{2.114}$$

$$Z(z) = \sinh(\gamma_{nm} z). \tag{2.115}$$

Entonces, la solución parcial para el potencial tiene la forma

$$\varphi_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh(\gamma_{nm} z). \tag{2.116}$$

La solución general se obtiene como la combinación lineal de todas las soluciones parciales; es decir, sumando sobre todos los índices n y m,

$$\varphi(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sinh(\gamma_{nm} z) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \tag{2.117}$$

donde a_{nm} son coeficientes que se pueden obtener evaluando la condición de frontera faltante en $z = c$,

$$\varphi(x,y,c) = V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sinh(\gamma_{nm} c) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \tag{2.118}$$

Los factores $a_{nm}\sinh(\gamma_{nm}c)$ pueden interpretarse como coeficientes de la expansión de $V(x,y)$ en una doble serie de Fourier en $x \in (0,a)$ y $y \in (0,b)$. Luego,

$$a_{nm}\sinh(\gamma_{nm}c) = \frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a dx \int_0^b dy\, V(x,y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \tag{2.119}$$

$$a_{nm} = \frac{4}{ab\sinh(\gamma_{nm}c)}\int_0^a dx \int_0^b dy\, V(x,y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \tag{2.120}$$

Luego, la solución general $\varphi(x,y,z)$ dada en la Ec. (2.117) está determinada.

2. Ecuación de Laplace en dos dimensiones.

   En ciertos problemas, el potencial escalar eléctrico no depende de alguna coordenada espacial. En esos casos, la ecuación de Laplace en dos dimensiones, en coordenadas cartesianas, es

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.121}$$

   El potencial debe tener la forma $\varphi(x,y) = X(x)Y(y)$, independiente de z. Sustituyendo en la ecuación de Laplace bidimensional y dividiendo por XY, obtenemos

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0. \tag{2.122}$$

Cada término debe ser constante por separado, es decir,

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \quad \rightarrow \quad X = A\sin(\alpha x) \pm B\cos(\alpha x) \tag{2.123}$$
$$Y'' - \alpha^2 Y = 0 \quad \rightarrow \quad Y = Ae^{\alpha y} \pm Be^{-\alpha y}. \tag{2.124}$$

Como ejemplo, calculemos el potencial dentro de un canal rectangular de ancho a en la dirección x, que se extiende infinitamente en la dirección z y en la dirección y. El potencial es cero en las paredes laterales y el piso inferior en $y = 0$ está sujeto a un potencial constante V.

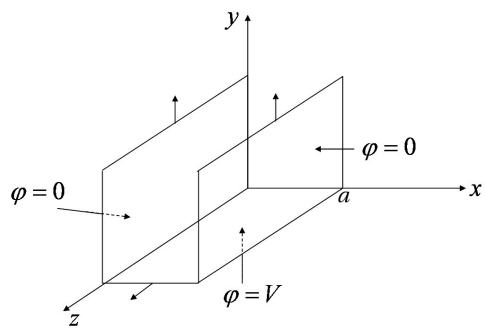


Figura 2.12: Problema de potencial en dos dimensiones en coordenadas catersianas.

Las condiciones de frontera para $X(x)$ son

$$\varphi = 0 \quad \text{en} \;\; x = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad X \sim \sin(\alpha x). \tag{2.125}$$
$$\varphi = 0 \quad \text{en} \;\; x = a \Rightarrow X(a) = 0 \quad \rightarrow \quad X \sim \sin(\alpha a) = 0. \tag{2.126}$$
$$\Rightarrow \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.127}$$

La condición de frontera para $Y(y)$ en $y = \infty$ es

$$Y(\infty) = 0 \quad \rightarrow \quad Y \sim e^{-\alpha y}. \tag{2.128}$$

Luego, tenemos la solución parcial

$$\varphi_n = e^{-\alpha_n y} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right). \tag{2.129}$$

La solución general es

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\alpha_n y} \, \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \tag{2.130}$$

Los coeficientes a_n se obtienen evaluando la condición de frontera en $y = 0$,

$$\varphi(x,0) = V = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \tag{2.131}$$

lo que representa la expansión en serie de Fourier de la función constante V en el intervalo $x \in (0,a)$. Luego,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a}\int_0^a V \, \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \frac{2V}{a}\left(\frac{a}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\Big|_a^0 \\ &= \frac{2V}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right] \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{4V}{n\pi}, & n \text{ impar.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.132}$$

Entonces, la solución general se puede expresar como

$$\varphi(x,y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \, e^{-\frac{n\pi}{a}y} \, \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \tag{2.133}$$

2.6 Ecuación de Laplace en coordenadas polares.

La ecuación

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{2.134}$$

para $\varphi(r,\phi)$ en coordenadas polares tiene la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \tag{2.135}$$

Buscamos una solución por separación de variables, tal que

$$\varphi(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi). \tag{2.136}$$

La función $\Phi(\phi)$ debe ser periódica para $\phi \in [0, 2\pi]$ con periodo 2π; es decir, $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$. Sustitución de (2.136) en la Ec. (2.135) da

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0. \tag{2.137}$$

Multiplicamos la Ec. (2.137) por $\dfrac{r^2}{R\Phi}$ y obtenemos

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}(rR') + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0. \tag{2.138}$$

Cada término por separado en la Ec. (2.138) debe ser constante; es decir

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(rR'\right) = n^2 \tag{2.139}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -n^2. \tag{2.140}$$

Si $n \neq 0$, buscamos una solución de la ecuación para R en la forma $R = r^\alpha$, lo cual conduce a $\alpha = \pm n$. Luego, $R = r^n$ y $R = r^{-n}$ son soluciones. Por otro lado, la ecuación para Φ corresponde a un oscilador armónico. Luego, las soluciones para $n \neq 0$ se pueden expresar como

$$R(r) = ar^n + br^{-n} \tag{2.141}$$

$$\Phi(\phi) = A\cos(n\phi) + B\sin(n\phi). \tag{2.142}$$

La condición de periodicidad para Φ debe cumplirse $\forall\, A, B$. En particular, debemos tener $\sin(n2\pi) = 0$. Esta condición implica que $n \neq 0$ debe ser un número entero.

Si $n = 0$, la ecuación para R tiene la forma

$$rR' = \text{cte}, \tag{2.143}$$

y su solución es

$$R = c_1 \ln r + c_2, \tag{2.144}$$

donde c_1, c_2 son constantes, mientras que la ecuación para Φ se convierte en

$$\Phi'' = 0, \tag{2.145}$$

cuya solución es

$$\Phi = A_0 + B_0\phi. \tag{2.146}$$

Para que Φ sea periódica en ϕ, debemos tener $B_0 = 0$. Juntando los resultados para $n \neq 0$ y $n = 0$, podemos expresar la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares como

$$\varphi(r,\phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{-n}\right) \left[A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)\right]. \tag{2.147}$$

Si el origen $r = 0$ se incluye en el volumen donde no hay carga, todos los coeficientes $b_n = 0$ y solamente las potencias positivas de r aparecen en la solución. Si se excluye el origen, los b_n pueden ser diferentes de cero. En particular, el término $\ln r$ representa el potencial de una línea de carga ubicada en $r = 0$.

Ejemplo.

1. Encontrar el potencial dentro de un tubo infinitamente largo, de radio a, separado en dos mitades longitudinales mantenidas a potenciales constantes V y $-V$, respectivamente, y separadas por una brecha muy estrecha.

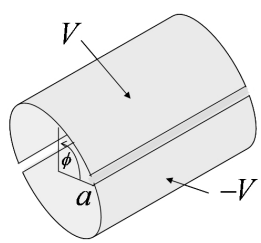


Figura 2.13: Problema de potencial en coordenadas polares.

Puesto que el origen se incluye en la región $r < a$, debemos tener $b_n = 0$, $\forall n$. Medimos el ángulo ϕ como se indica en la figura. Las condiciones de frontera

para el potencial φ son

$$\varphi(a,\phi) = R(a)\Phi(\phi) = \begin{cases} V, & \phi \in (0,\pi) \\ -V, & \phi \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \tag{2.148}$$

Note que $\Phi(\phi) = -\Phi(-\phi)$. Luego, Φ debe ser una función impar, es decir $A_n = 0$. La solución general queda

$$\varphi(r,\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \sin(n\phi). \tag{2.149}$$

En $r = a$,

$$\varphi(a,\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^n \sin(n\phi), \tag{2.150}$$

lo que equivale a una serie de Fourier para la función $\varphi(a,\phi)$, y cuyos coeficientes se determinan como

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a,\phi)\, d\phi = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi} d\phi - \frac{V}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} d\phi = 0. \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned} C_n a^n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a,\phi)\, \sin(n\phi)\, d\phi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} V\sin(n\phi)d\phi - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} V\sin(n\phi)d\phi \\ &= \frac{V}{\pi n}\cos(n\phi)|_{\pi}^{0} - \frac{V}{\pi n}\cos(n\phi)|_{2\pi}^{\pi} \\ &= \frac{V}{\pi n}\left[1 - \cos(n\pi) - \cos(n\pi) + \cos(2n\pi)\right] \\ &= \frac{2V}{\pi n}\left[1 - \cos(n\pi)\right] = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{4V}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.152}$$

Luego,

$$\varphi(r,\phi) = \frac{4V}{\pi}\sum_{n=1} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \sin[(2n-1)\phi]. \tag{2.153}$$

2.7 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

La ecuación de Laplace, $\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = 0$, en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0\,. \tag{2.154}$$

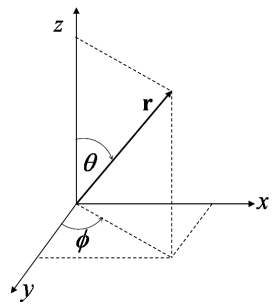


Figura 2.14: Coordenadas esféricas.

Buscamos solución $\varphi(r,\theta,\phi)$ por separación de variables:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{U(r)}{r}\,Y(\theta,\phi), \tag{2.155}$$

donde

$$Y(\theta,\phi) = P(\theta)\,Q(\phi). \tag{2.156}$$

Sustitución da

$$\frac{Y}{r}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{U}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{U}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} = 0\,. \tag{2.157}$$

Multiplicamos por $\dfrac{r^3}{UY}$,

$$r^2\frac{U''}{U} + \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] = 0 \tag{2.158}$$

El primer término es función sólo de r, y los términos restantes dependen de θ y ϕ. Luego,

$$\begin{aligned} r^2 \frac{U''}{U} &= \text{cte} \equiv l\,(l+1) \\ U'' - \frac{l\,(l+1)}{r^2}\,U &= 0 \end{aligned} \tag{2.159}$$

donde l es una constante. Buscamos una solución de la forma $U = r^n$; sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} n\,(n-1)\cancel{r^{(n-2)}} - l\,(l+1)\cancel{r^{(n-2)}} &= 0 \\ n^2 - n - l\,(l+1) &= 0 \\ n &= \frac{1 \pm (2l+1)}{2} \\ n &= \begin{cases} l+1 \\ -l \end{cases} . \end{aligned} \tag{2.160}$$

Luego,

$$U(r) = Ar^{(l+1)} + Br^{-l}. \tag{2.161}$$

Entonces, la función $Y(\theta, \phi)$ satisface la siguiente ecuación para las variables angulares,

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + l\,(l+1)\,Y + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} = 0\,. \tag{2.162}$$

Sustituyendo $Y(\theta, \phi) = P(\theta)\,Q(\phi)$ y multiplicando por $\dfrac{\sin^2\theta}{PQ}$, obtenemos

$$\frac{\sin\theta}{P}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP}{d\theta}\right) + l\,(l+1)\sin^2\theta + \frac{1}{Q}\,\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0\,. \tag{2.163}$$

El tercer término depende sólo de ϕ, por lo que podemos escribir

$$\frac{Q''}{Q} = -m^2 \quad \rightarrow \quad Q'' + m^2\,Q = 0 \tag{2.164}$$

$$\Rightarrow \quad Q(\phi) = e^{\pm i\,m\phi} = A\cos(m\phi) + B\sin(m\phi) \tag{2.165}$$

donde m es una constante real.

La ecuación resultante para θ es

$$\frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta-m^2=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[l\,(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P=0. \tag{2.166}$$

La Ec. (2.166) es la ecuación satisfecha por la función $P(\theta)$. Haciendo el cambio de variable $x=\cos\theta$, tal que

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta,\quad \frac{dP}{d\theta}=\frac{dP}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\,\frac{dP}{dx}\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=-\frac{d}{dx}\,, \tag{2.167}$$

la Ec. (2.166) adquiere la forma

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right]+\left[l\,(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0. \tag{2.168}$$

La Ec. (2.168) tiene la forma de la *ecuación generalizada de Legendre*.

Consideremos el caso particular $m=0$; es decir, $Q=$ cte y por lo tanto, φ es independiente del ángulo ϕ. Entonces, la Ec. (2.168) queda

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right]+l\,(l+1)\,P=0. \tag{2.169}$$

La Ec. (2.169) se conoce como la *ecuación de Legendre*. Esta ecuación tiene solución en serie convergente en el intervalo $x\in[-1,1]$, si el valor de l es entero. Las soluciones para valores enteros de l son los *polinomios de Legendre* $P_l(x)$, definidos por la *fórmula de Rodrigues*:

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l\,. \tag{2.170}$$

donde $l=0,1,2,\ldots$. $P(_l(x)$ es un polinomio de grado l. Los primeros polinomios de Legendre son

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2\ \ -1)\\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3\ \ -3x)\\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).
\end{aligned} \tag{2.171}$$

Los polinomios $P_l(x)$ son un conjunto de funciones de cuadrado integrable y ortogonales en el intervalo $x \in [-1, 1]$; esto es

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2}{(2l+1)} \delta_{l\,l'}. \tag{2.172}$$

Note que los polinomios P_l son ortogonales, pero no ortonormales.

Los polinomios de Legendre constituyen una base ortogonal para funciones $f(x)$ de cuadrado integrable definidas en el intervalo $x \in [-1, 1]$,

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \tag{2.173}$$

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x) dx. \tag{2.174}$$

En términos de la variable angular $\theta \in [0, \pi]$, tal que $x = \cos\theta$, tenemos

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) \tag{2.175}$$

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2} \int_{0}^{\pi} f(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \tag{2.176}$$

Algunas propiedades de los polinomios de Legendre son

i) $P_l(x)$ es par, si l es par. $P_l(x)$ es impar, si l es impar.

ii) $P_l(1) = 1, \forall\, l$. $P_l(-1) = (-1)^l$.

iii) $P_l(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ es impar.} \\ (-1)^{l/2} \dfrac{(l-1)!!}{l!!}, & \text{si } l \text{ es par.} \end{cases}$

donde

$$\begin{aligned} (l-1)\,!! &= 1 \times 3 \times 5 \times 7 \cdots \times (l-1)\,. \\ l\,!! &= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times l. \end{aligned}$$

iv) $\int_0^1 P_l(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } l \text{ es par.} \\ (-1)^{\frac{(l-1)}{2}} \dfrac{(l-2)!!}{(l+1)!!}, & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases}$

Luego, una solución parcial de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal (independiente del ángulo ϕ, ó $m = 0$) es

$$\varphi_l = \frac{U(r)}{r} P_l(\cos\theta). \tag{2.177}$$

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal tiene la forma

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta). \tag{2.178}$$

Los coeficientes A_l y B_l se determinan mediante las condiciones de frontera del problema.

2.8 Problemas de frontera con simetría azimutal.

A continuación, presentamos algunas aplicaciones de la solución de la ecuación de Laplace en problemas de frontera con simetría azimutal, Ec. (2.178).

1. Encontrar la expresión del potencial producido dentro y fuera de una esfera no conductora de radio a, que posee un potencial $V(\theta)$ sobre su superficie.

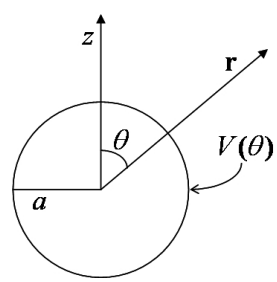


Figura 2.15: Esfera con potencial $V(\theta)$ sobre su superficie.

Para $r < a$, dentro de la esfera, no hay cargas eléctricas. Luego, el potencial φ debe ser no singular (finito) para $r \to 0$, lo que implica que $B_l = 0$, $\forall l$. Es decir, la solución interna debe poseer la forma

$$\varphi_{\text{in}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), \qquad r < a. \tag{2.179}$$

Para $r > a$, fuera de la esfera, debemos tener $\varphi \to 0$ para $r \to \infty$. Esto implica que $A_l = 0$ para $r > a$. Por lo tanto, la solución externa debe tener la forma

$$\varphi_{\text{ex}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), \qquad r > a. \tag{2.180}$$

Las soluciones interna y externa deben coincidir en $r = a$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = V(\theta), \tag{2.181}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} A_l a^l &= B_l a^{-(l+1)} \\ \Rightarrow B_l &= A_l a^{2l+1}. \end{aligned} \tag{2.182}$$

En $r = a$, la solución interna da

$$\varphi_{\text{in}}(a,\phi) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta). \tag{2.183}$$

La Ec. (2.183) representa la expansión de la función $V(\theta)$ en una serie de polinomios de Legendre para $\theta \in [0,\pi]$. Luego,

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \tag{2.184}$$

Entonces el potencial puede escribirse

$$\varphi(r,\theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), & r < a. \\ \sum_{l=0}^{\infty} A_l \dfrac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r > a. \end{cases} \tag{2.185}$$

donde el coeficiente A_l determinado por la Ec. (2.184).

2. Encontrar el potencial dentro de una esfera de radio a, la cual está dividida en dos hemisferios sujetos a potenciales constantes V y $-V$, respectivamente.

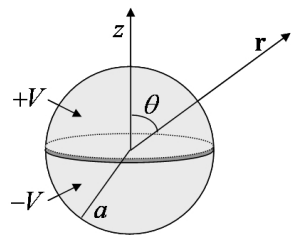


Figura 2.16: Esfera dividida en hemisferios sujetos a potenciales V y $-V$.

En este caso,

$$V(\theta) = \begin{cases} V, & 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ -V, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \tag{2.186}$$

El coeficiente A_l en la Ec. (2.184) puede calcularse explícitamente

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{(2l+1)}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \\ &= \frac{(2l+1)}{2a^l} V \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \right] \end{aligned} \tag{2.187}$$

En términos de la variable $x = \cos\theta$, las integrales definidas corresponden a

$$\int_0^1 P_l(x)\, dx - \int_{-1}^0 P_l(x)\, dx = 2 \int_0^1 P_l(x)\, dx, \qquad \text{para } l \text{ impar.} \tag{2.188}$$

Luego,

$$A_l = \frac{(2l+1)}{a^l} V \int_0^1 P_l(x)\, dx, \qquad \text{para } l \text{ impar,} \tag{2.189}$$

mientras que $A_l = 0$ para l par. Usando la propiedad (iv) de los polinomios de Legendre, obtenemos

$$A_l = \frac{(2l+1)}{a^l} (-1)^{\frac{(l-1)}{2}} \frac{(l-2)!!}{(l+1)!!} V, \qquad l \text{ impar,} \tag{2.190}$$

donde

$$(l-2)!! \equiv (l-2)(l-4)(l-6)\ldots 4\times 2 \tag{2.191}$$
$$(l+1)!! \equiv (l+1)(l-1)(l-3)\ldots 5\times 3\times 1. \tag{2.192}$$

Luego, el potencial para $r < a$ está dado por la Ec. (2.179) con los coeficientes A_l dados en la Ec. (2.190),

$$\varphi(r,\theta) = V \sum_{l \text{ impar}} (-1)^{\frac{(l-1)}{2}} (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l \frac{(l-2)!!}{(l+1)!!} P_l(\cos\theta), \quad r < a. \tag{2.193}$$

Los primeros términos de esta expresión son

$$\varphi(r,\theta) = V\left[\frac{3}{2}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \ldots\right]. \tag{2.194}$$

3. Calcular el potencial fuera de una esfera conductora aislada de radio a, sin carga, en presencia de un campo eléctrico externo uniforme.

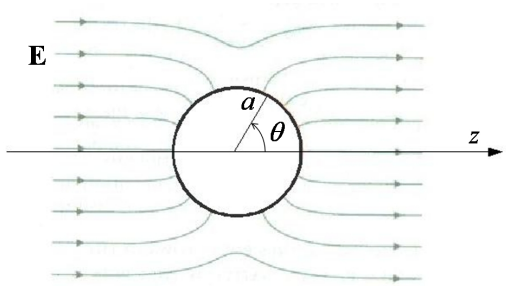


Figura 2.17: Esfera conductora en un campo eléctrico externo uniforme.

Tomemos el campo eléctrico externo en la dirección z, $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$. El sistema tiene simetría azimutal, por lo que buscamos una solucion de la forma

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta). \tag{2.195}$$

Las condiciones de frontera son

(a) En $r = a$, $\varphi(a, \theta) = \text{cte}$, puesto que la esfera es conductora.

(b) Para $r \to \infty$, φ debe corresponder al potencial del campo externo $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$.

La condición $\varphi(a, \theta) = \text{cte}$ significa que en $r = a$ el potencial no depende de θ. Luego, el único polinomio de Legendre que debe aparecer en el potencial Ec. (2.195) evaluado en $r = a$ es el término correspondiente a $l = 0$, para el cual $P_0(\cos\theta) = 1$. Esto implica que

$$A_l a^l + B_l a^{-(l+1)} = 0, \quad \forall l > 0 \tag{2.196}$$

$$\Rightarrow B_l = -A_l a^{2l+1}, \quad \forall l > 0. \tag{2.197}$$

Puesto que $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = E$, la condición para el potencial en $r \to \infty$ debe tener la forma $\varphi = -Ez$, donde $z = r\cos\theta$. Es decir, la condición de frontera en $r \to \infty$ es

$$\varphi(r \to \infty, \theta) = -Er\cos\theta. \tag{2.198}$$

lo cual significa que solamente los términos $A_l r^l P_l(\cos\theta)$ sobreviven en la solución Ec. (2.195) para poder satisfacer esta condición para $r \to \infty$. De estos términos, sólo el término $l = 1$, que tiene la forma $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, satisface la condición de φ para $r \to \infty$. Los demás términos debe ser cero,

$$A_l = 0, \quad B_l = 0, \quad \text{si } l \neq 1. \tag{2.199}$$

Manteniendo sólo el término $l = 1$ para $r \to \infty$ en la Ec. (2.195), tenemos

$$\varphi(r \to \infty, \theta) = A_1 r\cos\theta = -Er\cos\theta, \tag{2.200}$$

lo que implica que

$$A_1 = -E, \tag{2.201}$$

$$B_1 = -A_1 a^3 = Ea^3. \tag{2.202}$$

Entonces, la solución Ec. (2.195) para $r > a$, con el único término sobreviviente $l = 1$, queda

$$\varphi(r, \theta) = -Er\cos\theta + \frac{Ea^3}{r^2}\cos\theta. \tag{2.203}$$

Esta solución satisface ambas condiciones de frontera en $r = a$ y en $r \to \infty$.

El primer término corresponde al potencial asociado al campo externo, si no hubiera esfera presente, y el segundo término corresponde al potencial producido por la carga inducida sobre la esfera conductora.

La densidad de carga inducida sobre la esfera se puede calcular mediante la relación $E_n = 4\pi\sigma$ para una superficie conductora; esto conduce a

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi} E_r\Big|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=a} \tag{2.204}$$

$$= \frac{3E}{4\pi}\cos\theta. \tag{2.205}$$

Note que

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) > 0, &\quad 0 \le \theta < \tfrac{\pi}{2} \\ \sigma(\theta) < 0, &\quad \tfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \end{aligned}$$

La carga total inducida sobre la esfera aislada es

$$\begin{aligned} Q_{\text{total}} &= \int \sigma da \\ &= \frac{3E}{4\pi}a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{3E}{2}a^2\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d(\sin^2\theta) = \frac{3E}{4}a^2\,\sin^2\theta\Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned} \tag{2.206}$$

4. Expansión del potencial de una carga puntual en polinomios de Legendre.

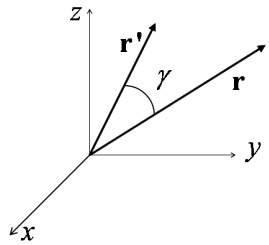


Figura 2.18: Expansión de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ en polinomios de Legendre.

Consideremos el potencial producido en la posición $\mathbf{r}$ por una carga puntual $q = 1$ ubicada en $\mathbf{r}'$,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \,. \tag{2.207}$$

Si escogemos $\mathbf{r}'$ en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, el sistema tiene simetría azimutal con respecto al eje z. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta\right)^{1/2}} \\ &= \varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l\left(\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{2.208}$$

donde $\theta = \gamma$ es el ángulo entre $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}$. Esta relación es válida $\forall\theta$, en particular para $\theta = 0$, lo cual da

$$\varphi(r,0) = \frac{1}{|r - r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] . \tag{2.209}$$

La expresión para $\varphi(r,0)$ se puede interpretar como una condición de frontera para el potencial cuando $\theta = 0$.

Supongamos $r' < r$, es decir, $r'/r \equiv x < 1$. Entonces,

$$\frac{1}{|r - r'|} = (r - r')^{-1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{r'}{r}\right)^{-1} . \tag{2.210}$$

Utilizamos la siguiente expansión en serie para $x < 1$,

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \tag{2.211}$$

Luego, para $r' < r$,

$$\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] , \tag{2.212}$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^l = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}. \tag{2.213}$$

Entonces, para $r' < r$ y $\forall\ \theta$, la Ec. (2.208) da

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta). \tag{2.214}$$

Si $r' > r$, una expansión similar se puede obtener intercambiando $r \leftrightarrow r'$.

En general, si γ es el ángulo entre $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}$, podemos escribir la expansión

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\gamma), \tag{2.215}$$

donde $r_<$ es el menor entre r y r', y $r_>$ es el mayor entre r y r'.

5. Calcular el potencial producido en todo el espacio por una carga q uniformemente distribuida sobre un aro de radio a.

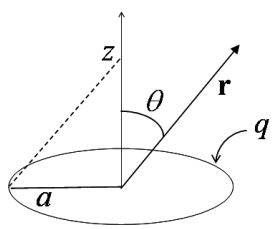


Figura 2.19: Potencial producido por un aro cargado.

Tomemos el eje z perpendicular al plano del aro y que pasa por su centro. Este sistema posee simetría azimutal. El diferencial de potencial producido sobre el eje z por un elemento del aro de longitud ds es

$$d\varphi(z) = \frac{q}{2\pi a}\,\frac{ds}{(a^2+z^2)^{1/2}}. \tag{2.216}$$

El potencial total para una distancia z sobre el eje es

$$\varphi(z) = \frac{q}{(a^2+z^2)^{1/2}}\,, \tag{2.217}$$

el cual, en coordenadas esféricas con simetría azimutal, corresponde a la condición de frontera para $\theta = 0$,

$$\varphi(r,0) = \frac{q}{(a^2+r^2)^{1/2}}\,. \tag{2.218}$$

La solución para el potencial en todo el espacio tiene la forma

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta). \tag{2.219}$$

Para $\theta = 0$ debemos tener,

$$\frac{q}{(a^2+r^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]. \tag{2.220}$$

Para determinar los coeficientes A_l y B_l, debemos expandir la función en el lado izquierdo de la Ec. (2.220) en serie de potencias de r, y comparar esa serie con la expresión en el lado derecho. En tal sentido, consideremos la siguiente expansión válida para $x < 1$,

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \cdots \tag{2.221}$$

Supongamos $r > a$, y definamos $x \equiv a^2/r^2 < 1$. Entonces, la función en el lado izquierdo de la Ec. (2.220) puede expandirse en serie como

$$\frac{q}{(a^2+r^2)^{1/2}} = \frac{q}{r}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$
$$= \frac{q}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{a}{r}\right)^8 + \cdots\right]$$
$$= \frac{q}{r}\sum_{l\ \mathrm{par}}^{\infty}(-1)^{l/2}\,\frac{(l-1)!!}{l!!}\,\left(\frac{a}{r}\right)^l, \quad l = 0,2,4,\ldots \tag{2.222}$$

Comparando la Ec. (2.222) con la Ec. (2.220) para $\theta = 0$, tenemos

$$q\sum_{l\ \mathrm{par}}^{\infty}(-1)^{l/2}\frac{a^l}{r^{l+1}}\,\frac{(l-1)!!}{l!!} = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] \tag{2.223}$$

lo que implica que

$$A_l = 0 \tag{2.224}$$

$$B_l = q\,(-1)^{l/2}\,a^l\,\frac{(l-1)!!}{l!!}, \qquad l = 0, 2, 4, \ldots \tag{2.225}$$

Luego, el potencial para $r > a$ es

$$\varphi(r,\theta) = q\sum_{l\ \mathrm{par}}^{\infty}(-1)^{l/2}\frac{a^l}{r^{l+1}}\,\frac{(l-1)!!}{l!!}\,P_l(\cos\theta)\,. \tag{2.226}$$

Similarmente, intercambiando $r \leftrightarrow a$, obtenemos para $r < a$,

$$\varphi(r,\theta) = q\sum_{l\ \mathrm{par}}^{\infty}(-1)^{l/2}\frac{r^l}{a^{l+1}}\,\frac{(l-1)!!}{l!!}\,P_l(\cos\theta). \tag{2.227}$$

Ambos resultados pueden expresarse en la siguiente forma

$$\varphi(r,\theta) = q\sum_{l\ \mathrm{par}}^{\infty}(-1)^{l/2}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,\frac{(l-1)!!}{l!!}\,P_l(\cos\theta)\,, \tag{2.228}$$

donde $r_<$ es el menor entre r y a, y $r_>$ es el mayor entre r y a.

2.9 Armónicos esféricos.

Hemos visto que la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas puede encontrarse en la forma

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{U(r)}{r}\,Y(\theta,\phi). \tag{2.229}$$

donde $Y(\theta,\phi) = P(\theta)\,Q(\phi)$, y $Q(\phi) = e^{\pm im\phi}$.

El método de separación de variables, empleando la solución Ec. (2.229), conduce a la Ec. (2.166) para la función $P(\theta)$, esto es,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l\,(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0 \tag{2.230}$$

En particular, si $m = 0$, el potencial no depende del ángulo ϕ; es decir el sistema posee simetría azimutal. En ese caso, vimos que la solución para el potencial puede expresarse mediante una expansión en serie de los polinomios de Legendre,

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\theta). \tag{2.231}$$

La Ec. (2.230) con el cambio de variables $x = \cos\theta$, se puede expresar como la ecuación generalizada de Legendre,

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right) \frac{dP(x)}{dx} \right] + \left[l\,(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0. \tag{2.232}$$

Las soluciones de la Ec. (2.232) para $m \neq 0$ corresponden a los *polinomios asociados de Legendre*, definidos por la *formula generalizada de Rodrigues*,

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!} \left(1-x^2\right)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left(x^2-1\right)^l , \tag{2.233}$$

con

$$l = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.234}$$

$$m = -l, -(l-1), \ldots, 0, \ldots, (l+1), l\,. \tag{2.235}$$

Luego, la parte angular de la solución Ec. (2.229) de la ecuación de Laplace tiene la forma $Y(\theta,\phi) = P(\theta)Q(\phi) = P_l^m(\cos\theta)\, e^{\pm im\phi}$. La dependencia angular puede expresarse mediante las funciones *armónicos esféricos*, definidas como

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}\,. \tag{2.236}$$

La forma explícita de los primeros armónicos esféricos es la siguiente,

$$l = 0 \qquad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{2.237}$$

$$l = 1 \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\, \sin\theta\, e^{i\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\, \cos\theta \\ Y_{1,-1} = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\, \sin\theta\, e^{-i\phi}. \end{cases} \tag{2.238}$$

Algunas propiedades de los armónicos esféricos son

i) Conjugación:

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m\, Y^*_{lm}(\theta,\phi). \tag{2.239}$$

ii) Ortonormalidad:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\, Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{l'l}\, \delta_{m'm}\,. \tag{2.240}$$

iii) Completitud:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta(\phi-\phi')\, \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,. \tag{2.241}$$

iv) *Teorema de la adición*:
Si γ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{r}' = (r',\theta',\phi')$ y $\mathbf{r} = (r,\theta,\phi)$, en coordenadas esféricas, entonces

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi)\,. \tag{2.242}$$

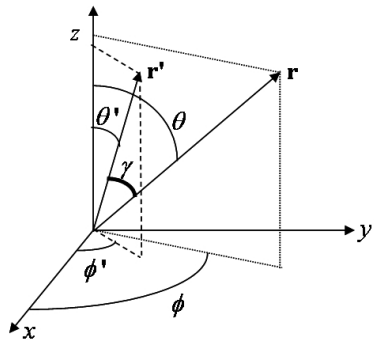


Figura 2.20: Teorema de la adición para armónicos esféricos.

En particular, si $\gamma = 0$, tenemos $\theta' = \theta$ y $\phi' = \phi$; entonces

$$\sum_{m=-l}^{l} |Y_{lm}(\theta,\phi)|^2 = \frac{(2l+1)}{4\pi}\,. \tag{2.243}$$

Los armónicos esféricos forman una base completa para expresar cualquier función $f(\theta,\phi)$, definida en $\theta \in [0,\pi]$, $\phi \in [0,2\pi]$:

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\, Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{2.244}$$

donde los coeficientes está determinados por

$$A_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{lm}(\theta,\phi)\, f(\theta,\phi). \tag{2.245}$$

Los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta,\phi)$ satisfacen la ecuación para las variables angulares,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + l\,(l+1)\,Y_{lm} - \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} = 0\,. \tag{2.246}$$

La solución general Ec. (2.229) de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas puede escribirse en términos de potencias de r y de los armónicos esféricos como

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A_{lm}\, r^l + B_{lm}\, r^{-(l+1)}\right] Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{2.247}$$

Los coeficientes A_{lm} y B_{lm} se determinan mediante las condiciones de frontera del problema particular.

Note que para $m = 0$, la solución general Ec. (2.247) corresponde a la solución con simetría azimutal, Ec. (2.231).

Ejemplos.

1. Vimos que el potencial producido en $\mathbf{r}$ por una carga puntual $q = 1$ ubicada en $\mathbf{r}'$ se puede expresar en la forma

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\gamma). \tag{2.248}$$

Empleando el teorema de la adición para los esféricos armónicos, podemos escribir

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)}\,\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\, Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{2.249}$$

Supongamos $r_> = r$, y $r_< = r'$. Entonces, comparando la expansión anterior con la solución general Ec. (2.247), obtenemos

$$A_{lm} = 0 \tag{2.250}$$

$$B_{lm} = \frac{4\pi r'^l}{(2l+1)} Y^*_{lm}(\theta', \phi'), \tag{2.251}$$

de modo que el potencial Ec. (2.247) se hace cero en el infinito.

2. Expansión del potencial $\varphi(\mathbf{r})$ de una distribución de carga $\rho(\mathbf{r}')$, para $r > r'$, en serie de armónicos esféricos.

   Recordemos la siguiente expansión para $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$ y $\mathbf{r}' = (r', \theta', \phi')$,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \phi') \, Y_{lm}(\theta, \phi). \tag{2.252}$$

   En este caso, $r_< = r'$, $r_> = r$. Entonces,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, d^3r' = 4\pi \int \rho(\mathbf{r}') \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \phi') \, Y_{lm}(\theta, \phi) \right] d^3r'$$

   lo cual se puede escribir

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)} \left[\int \rho(\mathbf{r}') r'^l \, Y^*_{lm}(\theta', \phi') \, d^3r' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{q_{lm}}{(2l+1)} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \end{aligned} \tag{2.253}$$

   donde hemos denotado los *momentos multipolares generalizados* como

$$q_{lm} = \int \rho(\mathbf{r}') \, r'^l \, Y^*_{lm}(\theta', \phi') \, d^3r' \, . \tag{2.254}$$

Las cantidades q_{lm} se pueden expresar en términos de los momentos q, $\mathbf{p}$, Q_{ij}, etc. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
q_{00} = \int \rho(\mathbf{r}') Y_{00}^*(\theta', \phi')\, d^3r' &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}')\, d^3r' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, q. \\
q_{10} = \int \rho(\mathbf{r}')\, r'\, Y_{10}^*(\theta', \phi')\, d^3r' &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}')\, r' \cos\theta'\, d^3r' \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}')\, z'\, d^3r' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, p_z. \\
q_{11} = \int \rho(\mathbf{r}')\, r'\, Y_{11}^*(\theta', \phi')\, d^3r' &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}')\, r' \sin\theta\, e^{i\phi}\, d^3r' \\
&= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \rho(\mathbf{r}')\, (x - iy)\, d^3r' \\
&= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, (p_x - ip_y).
\end{aligned}$$

2.10 Expansión de la función de Green en coordenadas esféricas.

Vimos que la solución de la ecuación de Poisson, $\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho$, dentro de un volumen V con condiciones de frontera tipo Dirichlet $\varphi|_S$ sobre la superficie S que encierra a V, se puede expresar como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho\left(\mathbf{r}'\right) G_D\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\right) d^3r' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi\left(\mathbf{r}'\right) \frac{\partial G_D}{\partial n'} da', \tag{2.255}$$

donde la función de Green satisface $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_S = 0$.

Consideremos un volumen V limitado por dos esferas concéntricas que constituyen la superficie S. Sean a el radio de la esfera interior y b el radio de la esfera exterior. Entonces, la magnitud de $\mathbf{r}$ en la región de interés para la solución es tal que $a \leq r \leq b$.

Para este tipo de problemas que poseen simetría esférica, es conveniente expresar la función de Green en coordenadas esféricas. En esta sección, mostraremos que la función de Green $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ se puede representar como una expansión en serie de armónicos esféricos.

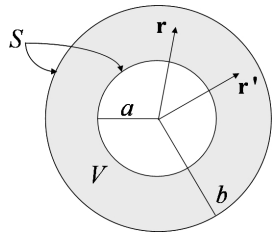


Figura 2.21: Volumen V para la expansión de la función de Green en coordenadas esféricas.

La función $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ satisface

$$\nabla_r^2 G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \;=\; -4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right), \tag{2.256}$$

donde el subíndice del Laplaciano indica derivadas con respecto a las coordenadas de $\mathbf{r}$, con condición de frontera $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')|_S = 0$, para $\mathbf{r}$ ó $\mathbf{r}'$ en $r=a$ y en $r=b$.

Vimos en el Cap. 1 que la función delta de Dirac $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ se puede expresar en coordenadas esféricas como

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r^2}\,\delta\left(r-r'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right)\delta\left(\cos\theta-\cos\theta'\right). \tag{2.257}$$

Usando la relación de completitud de los armónicos esféricos,

$$\delta\left(\phi-\phi'\right)\delta\left(\cos\theta-\cos\theta'\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\phi\right), \tag{2.258}$$

podemos escribir

$$\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) = \frac{1}{r^2}\,\delta\left(r-r'\right)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\phi\right). \tag{2.259}$$

Luego,

$$\nabla_r^2 G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = -\frac{4\pi}{r^2}\,\delta\left(r-r'\right)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\phi\right). \tag{2.260}$$

Supongamos una solución $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, como función de $\mathbf{r}(r,\theta,\phi)$, en forma de expansión en armónicos esféricos:

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=G\left(r,r',\theta,\theta',\phi,\phi'\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\phi\right). \tag{2.261}$$

Para determinar los coeficientes A_{lm}, debemos sustituir esta expansión en la Ec. (2.260) y comparar ambos lados de la relación resultante.

El lado izquierdo de la Ec. (2.260) conduce a

$$\begin{aligned}\nabla_r^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,G\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{\partial\phi^2}\\ &= \sum_l\sum_m\left\{\frac{Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)\right)+\right.\\ &\left.\frac{A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2.262}$$

Recordemos que $Y_{lm}(\theta,\phi)$ satisface la ecuación angular

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right)+l\left(l+1\right)Y_{lm}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)=0. \tag{2.263}$$

Sustitución de esta relación en la Ec. (2.262) da

$$\begin{aligned}\nabla_r^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \sum_{l,m}\left[\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)\right)-\frac{A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)}{r^2}l\left(l+1\right)Y_{lm}(\theta,\phi)\right]\\ &= \sum_{l,m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)\right)-\frac{l\left(l+1\right)A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)}{r^2}\right]Y_{lm}(\theta,\phi).\end{aligned} \tag{2.264}$$

Luego, comparando con la Ec. (2.260), debemos tener la siguiente relación entre los coeficientes de $Y_{lm}(\theta,\phi)$,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)\right)-\frac{l\left(l+1\right)A_{lm}\left(r,r',\theta',\phi'\right)}{r^2}=-\frac{4\pi}{r^2}\delta\left(r-r'\right)Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right). \tag{2.265}$$

La Ec. (2.265) constituye una ecuación en derivadas parciales para $A_{lm}(r, r', \theta', \phi')$. Su forma sugiere buscar una solución por separación de variables, tal como

$$A_{lm}\left(r, r', \theta', \phi'\right) = g_l\left(r, r'\right) Y^*_{lm}\left(\theta', \phi'\right). \tag{2.266}$$

Sustitución en la Ec. (2.265) da la siguiente ecuación para $g_l(r, r')$:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\, g_l\left(r, r'\right)\right) - \frac{l\,(l+1)}{r^2} g_l\left(r, r'\right) = -\frac{4\pi}{r^2}\delta\left(r - r'\right). \tag{2.267}$$

Consideremos primero la Ec. (2.267) para el caso $r \neq r'$,

$$(rg)'' - \frac{l\,(l+1)}{r}\, g = 0. \tag{2.268}$$

Si hacemos la sustitución $U = rg$, se obtiene la ecuación

$$U'' - \frac{l\,(l+1)}{r^2} U = 0. \tag{2.269}$$

cuya solución ya fue encontrada como

$$U = A\, r^{l+1} \,+\, B\, r^{-l} \tag{2.270}$$

Por lo tanto,

$$g(r, r') = A\, r^l + B\, r^{-(l+1)}. \tag{2.271}$$

La función $g(r, r')$ corresponde a la parte radial de la función de Green en la Ec. (2.261), y por lo tanto debe satisfacer las condiciones de frontera

$$G|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g(a, r') = 0\ ,\ r = a \\ g(b, r') = 0\ ,\ r = b. \end{cases} \tag{2.272}$$

Evaluando la función $g(r, r')$ de la Ec. (2.271) en $r = a$, obtenemos

$$A\, a^l + B\, a^{-(l+1)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = -A\, a^{2l+1}, \tag{2.273}$$

luego,

$$g\left(r, r'\right) = A\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right), \qquad \text{válida para } r < r'. \tag{2.274}$$

Similarmente, en $r = b$ obtenemos

$$A = -B\, b^{-(2l+1)}, \tag{2.275}$$

luego,

$$g(r, r') = B\left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}}\right), \qquad \text{válida para } r > r'. \tag{2.276}$$

Puesto que la función de Green debe tener simetría ante el intercambio $r \leftrightarrow r'$, la función $g(r, r')$ se puede expresar en general como

$$g\left(r, r'\right) = C\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right), \tag{2.277}$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y r', y $r_<$ es el menor entre r y r'.

Para determinar la constante C, consideramos la Ec. (2.267) para $g\left(r, r'\right)$, en el caso $r \to r'$ tal que $\delta(r - r') \neq 0$,

$$\frac{d^2}{dr^2} r g\left(r, r'\right) - \frac{l\left(l+1\right)}{r} g\left(r, r'\right) = -\frac{4\pi}{r}\delta\left(r - r'\right). \tag{2.278}$$

Integramos todos los términos de esta ecuación desde $r = r' - \varepsilon$ hasta $r = r' + \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{d^2}{dr^2}\left(r g\left(r, r'\right)\right) dr \quad &- \quad l\left(l+1\right)\int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{g\left(r, r'\right)}{r} dr \\ &= \quad -4\pi \int_{r=r'-\varepsilon}^{r=r'+\varepsilon} \frac{\delta\left(r - r'\right)}{r} dr \end{aligned} \tag{2.279}$$

y tomamos el límite $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left[r g\left(r, r'\right)\right]\Big|_{r=r'+\varepsilon} \quad &- \quad \frac{d}{dr}\left[r g\left(r, r'\right)\right]\Big|_{r=r'-\varepsilon} \\ &= \quad -\frac{4\pi}{r'}. \end{aligned} \tag{2.280}$$

Existe una discontinuidad en la derivada de $r g\left(r, r'\right)$ en $r = r'$.

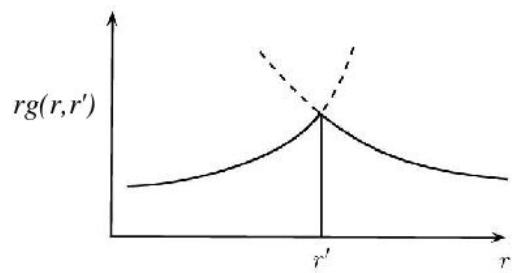


Figura 2.22: Discontinuidad en la derivada de la parte radial de la función de Green en $r = r'$.

Debemos evaluar las derivadas $(rg)'\big|_{r=r'+\varepsilon}$ y $(rg)'\big|_{r=r'-\varepsilon}$, y tomar el límite $\varepsilon \to 0$:

i) Para $r = r' + \varepsilon$, tenemos $r > r'$, y por lo tanto, $r_< = r'$, $r_> = r$. Luego, utilizando la Ec. (2.277),

$$rg\left(r, r'\right) = C\left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}}\right). \tag{2.281}$$

Evaluamos la derivada en $r = r' + \varepsilon$, y hacemos $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}(rg)\bigg|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} &= -C\left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right)\left[\frac{l}{r^{l+1}} + \frac{(l+1)\,r^l}{b^{2l+1}}\right]\bigg|_{r=r'} \\
&= -C\left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right)\left[\frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)\,r'^l}{b^{2l+1}}\right] \\
&= -Cr'^l\left(1 - \frac{a^{2l+1}}{r'^{2l+1}}\right)\frac{1}{r'^{l+1}}\left[l + (l+1)\,\frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}}\right] \\
&= -\frac{C}{r'}\left[1 - \left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[l + (l+1)\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]. \qquad (2.282)
\end{aligned}$$

ii) Para $r = r' - \varepsilon$, tenemos $r < r'$, y por lo tanto $r_< = r$, $r_> = r'$. Luego, utilizando la Ec. (2.277),

$$rg\left(r, r'\right) = C\left(r^{l+1} - \frac{a^{2l+1}}{r^l}\right)\left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}}\right). \tag{2.283}$$

Evaluamos la derivada en $r = r' - \varepsilon$, y hacemos $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dr}(rg)\right|_{\substack{r=r'+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} &= C\left[(l+1)\,r^l + \frac{l\,a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right]\left.\left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}}\right)\right|_{r=r'} \\
&= C\frac{r'^l}{r'^{l+1}}\left[(l+1) + \frac{l\,a^{2l+1}}{r'^{2l+1}}\right]\left(1 - \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}}\right) \\
&= \frac{C}{r'}\left[(l+1) + l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[1 - \left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]. \qquad (2.284)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (2.280), tenemos

$$\begin{aligned}
&- \frac{C}{r'}\left[1 - \left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[l + (l+1)\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right] \\
&- \frac{C}{r'}\left[(l+1) + l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[1 - \left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right] \\
&= -\frac{4\pi}{r'}, \qquad (2.285)
\end{aligned}$$

de donde podemos obtener C,

$$\begin{aligned}
C\Bigg[l + (l+1)\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1} - l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1} - (l+1)\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1} \\
+ (l+1) - (l+1)\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1} + l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1} - l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\Bigg] &= \frac{4\pi}{r'} \\
C\left[l - (l+1)\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1} + (l+1) - l\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right] &= \frac{4\pi}{r'} \\
C\,(2l+1)\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right] &= \frac{4\pi}{r'} \\
\Rightarrow C = \frac{4\pi}{(2l+1)\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} &. \qquad (2.286)
\end{aligned}$$

Luego, la función $g(r,r')$ en la Ec. (2.277) es

$$g(r,r') = \frac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]}\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right). \tag{2.287}$$

Entonces, la función de Green en la Ec. (2.261)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\left(r,r',\theta,\theta',\phi,\phi'\right) Y_{lm}\left(\theta,\phi\right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_l\left(r,r'\right) Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right) Y_{lm}\left(\theta,\phi\right), \end{aligned} \tag{2.288}$$

se puede expresar, sustituyendo $g(r,r')$, como

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} Y_{lm}^*(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi). \tag{2.289}$$

La Ec. (2.289) constituye la expansión de la función de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ en coordenadas esféricas, donde $r_>$ es el mayor entre r y r', y $r_<$ es el menor entre r y r'.

Algunos casos particulares de interés son

i) Potencial de una carga puntual en el espacio libre, que corresponde al caso $a \to 0$, $b \to \infty$,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(2l+1)}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*\left(\theta',\phi'\right) Y_{lm}\left(\theta,\phi\right) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{2.290}$$

ii) Problema interior de la esfera, que corresponde a $a \to 0$, b finito, igual al radio de la esfera.

iii) Problema exterior de la esfera, que corresponde a a finito, igual al radio de la esfera, y $b \to \infty$.

2.11 Aplicaciones de la expansión esférica de la función de Green.

La solución general de la ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Dirichlet es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, d^3r' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi(\mathbf{r}')\,\frac{\partial G}{\partial n}\, da'. \tag{2.291}$$

En problemas de potencial con simetría esférica, podemos emplear la función de Green en términos de su expansión esférica, Ec. (2.289).

Ejemplos.

1. Calcular el potencial dentro de esfera radio b, sin carga en su interior, sujeta a un potencial $V(\theta,\phi)$ en su superficie.

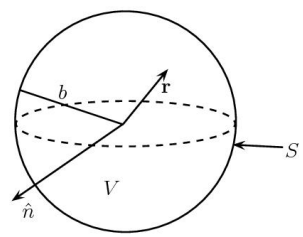


Figura 2.23: Esfera sujeta a potencial $V(\theta,\phi)$ en su superficie.

Para este problema, tomamos $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ en la Ec. (2.289) con $a = 0$,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y^*_{lm}(\theta',\phi')\,Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)}\,r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \tag{2.292}$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y r'; $r_<$ es el menor entre r y r', y la sustituimos en la solución para φ en la Ec. (2.291). Puesto que no hay cargas dentro del volumen V correspondiente a la esfera de radio b, tenemos $\rho = 0$ en V y, por lo tanto,

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi(\mathbf{r}')\,\frac{\partial G}{\partial n}\, da' \tag{2.293}$$

donde $\varphi|_S = V(\theta,\phi)$.

Calculamos

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S = \left.\frac{\partial G}{\partial r'}\right|_{r'=b}. \tag{2.294}$$

Cuando $r' = b$, tenemos $r' > r$; luego $r_< = r$ y $r_> = r'$. Entonces, la forma de la función de Green que se debe tomar en la frontera $r' = b$ es

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)}\, r^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right). \tag{2.295}$$

Luego,

$$\frac{\partial G}{\partial r'} = -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)}\, r^l \left(\frac{l+1}{r'^{l+2}} + \frac{l\, r'^{l-1}}{b^{2l+1}} \right). \tag{2.296}$$

En la superficie de la esfera,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial G}{\partial r'}\right|_{r'=b} &= -4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)}\, r^l \left(\frac{l+1}{b^{l+2}} + \frac{l b^{l-1}}{b^{2l+1}} \right) \\ &= -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi) \left(\frac{r}{b}\right)^l. \end{aligned} \tag{2.297}$$

Sustituyendo en la Ec. (2.293), con diferencial de área $da' = b^2\, d\phi' \sin\theta' d\theta'$, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{b^2} \oint_S V(\theta', \phi') \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi) \left(\frac{r}{b}\right)^l \right] b^2\, d\phi' \sin\theta'\, d\theta' \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} \left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi), \end{aligned} \tag{2.298}$$

donde

$$A_{lm} = \left[\int V(\theta', \phi') Y^*_{lm}(\theta', \phi')\, d\phi' \sin\theta'\, d\theta' \right]. \tag{2.299}$$

Note que el potencial Ec. (2.298) tiene la misma forma que la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, Ec. (2.247), para el interior de una esfera sin cargas.

2. Calcular φ dentro de una esfera conductora de radio b, conectada a tierra, y en cuyo centro se encuentra un aro de radio $a < b$ que posee una carga q uniformemente distribuida.

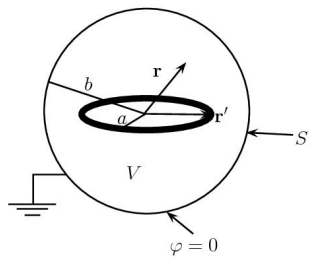


Figura 2.24: Esfera conectada a tierra, con un aro cargado en su interior.

Debemos expresar la densidad de carga del aro en términos de funciones delta de Dirac. Esto es, $\rho(\mathbf{r}') \propto q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Recordemos que la función delta de Dirac, en coordenadas esféricas, corresponde a (Cap. 1, Ec. (1.50))

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r^2}\,\delta\left(r-r'\right)\delta\left(\phi-\phi'\right)\delta\left(\cos\theta-\cos\theta'\right). \tag{2.300}$$

La carga está localizada en $r = a$, $\theta = \pi/2$, $\forall\,\phi$. Luego,

$$\rho(\mathbf{r}') = k\,\frac{q}{a^2}\,q\,\delta\left(r'-a\right)\delta\left(\cos\theta\right), \tag{2.301}$$

donde k es una constante que se determina mediante la condición

$$\int \rho\left(\mathbf{r}'\right) d^3r' = q\,. \tag{2.302}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \rho(\mathbf{r}')d^3r' &= k\frac{q}{a^2}\int \delta(r'-a)\delta(\cos\theta)r'^2\,dr\,d\phi\,d(\cos\theta) \\
&= k\frac{q}{a^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^b \delta(r'-a)r'^2 dr \int_0^{\pi} \delta(\cos\theta)d(\cos\theta) \\
&= kq\,2\pi = q \quad\Rightarrow\quad k = \frac{1}{2\pi}\,.
\end{aligned} \tag{2.303}$$

Luego,

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{2\pi a^2}\,\delta\left(r'-a\right)\delta\left(\cos\theta\right)\,. \tag{2.304}$$

La solución para el potencial dentro del volumen V de la esfera es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,d^3r' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi(\mathbf{r}')\,\frac{\partial G}{\partial n}\,da'\,, \tag{2.305}$$

con las siguientes condiciones de frontera

(a) $\varphi|_S = 0$ sobre la la superficie S de la esfera. Luego, la integral sobre la superficie S es cero, y el potencial dentro de la esfera es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}')\,G(\mathbf{r},\mathbf{r}')d^3r'. \tag{2.306}$$

(b) $a = 0$ en la función de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ expandida en coordenadas esféricas.

(c) Simetría azimutal: $\varphi(\mathbf{r})$ independiente de ϕ; esto implica que $m = 0$ en la expansión de $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ en coordenadas esféricas.

Estas condiciones implican que la función de Green debe tener la forma

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y^*_{l0}(\theta',\phi')Y_{l0}(\theta,\phi)}{(2l+1)}\,r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right). \tag{2.307}$$

donde

$$Y_{l0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l\left(\cos\theta\right). \tag{2.308}$$

Luego,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos\theta'\right)P_l\left(\cos\theta\right)r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right). \tag{2.309}$$

Consideremos el caso $r > r'$. Entonces $r_> = r$, $r_< = r'$, y el potencial

Ec. (2.306)) resulta en

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{2\pi a^2}\int \delta(r'-a)\delta(\cos\theta')\left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta)r'^l\left(\frac{1}{r^{l+1}}-\frac{r^l}{b^{2l+1}}\right)\right]\times \\
&\quad \times r'^2 dr' d\phi' d\left(\cos\theta'\right) \\
&= \frac{q}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^b \delta(r'-a)r'^{2+l}dr' \int_0^{\pi}\delta(\cos\theta')P_l(\cos\theta')d(\cos\theta')\right]\times \\
&\quad \times \left(\frac{1}{r^{l+1}}-\frac{r^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(\cos\theta).
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\varphi(\mathbf{r}) = q\sum_{l=0}^{\infty} a^l\, P_l(0)\left(\frac{1}{r^{l+1}}-\frac{r^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(\cos\theta). \tag{2.310}$$

En el caso $r < r'$, tenemos $r_< = r$, $r_> = r'$, y

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{2\pi a^2}\int_V \delta(r'-a)\delta(\cos\theta')\left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta')P_l(\cos\theta)r^l\left(\frac{1}{r'^{l+1}}-\frac{r'^l}{b^{2l+1}}\right)\right]\times \\
&\quad \times r'^2 dr' d\phi' d(\cos\theta')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{2\pi a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^b \delta(r'-a)r'^2\left(\frac{1}{r'^{l+1}}-\frac{r'^l}{b^{2l+1}}\right)dr' \int \delta(\cos\theta')P_l(\cos\theta')d(\cos\theta')\right]\times \\
&\quad \times r^l P_l(\cos\theta).
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\varphi(\mathbf{r}') = q\sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(0)\left(\frac{1}{a^{l+1}}-\frac{a^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(\cos\theta). \tag{2.311}$$

Ambos casos se pueden expresar como

$$\varphi(\mathbf{r}) = q\sum_{l=0}^{\infty} r_<^l\, P_l(0)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(\cos\theta). \tag{2.312}$$

Sustituyendo

$$P_l(0) = \begin{cases} 0, & l \text{ impar} \\ (-1)^{l/2}\,\dfrac{(l-1)!!}{l!!}, & l\text{par}, \end{cases} \tag{2.313}$$

podemos escribir

$$\varphi(\mathbf{r}) = q\sum_{l\,\text{par}}^{\infty}(1)^{l/2}\,\frac{(l-1)!!}{l!!}\,r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(\cos\theta), \tag{2.314}$$

donde $r_>$ es el mayor entre r y a, y $r_<$ es el menor entre r y a.

En el límite $b \to \infty$, tenemos un aro cargado en el espacio libre, y el potencial da

$$\varphi(\mathbf{r}) = q\sum_{l\text{par}}^{\infty}(-1)^{l/2}\,\frac{(l-1)!!}{l!!}\,\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,P_l(\cos\theta), \tag{2.315}$$

el cual es el mismo resultado obtenido anteriormente en la Sec. 2.8.

Resumen

1. Potencial con condiciones de frontera tipo Dirichlet $\varphi|_S$,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3r' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'.$$

2. Serie de Fourier para $f(x)$, $x \in [-c, c]$, ó $x \in [0, 2c]$,

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx$$

3. Solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas, $\varphi(x, y, z) = XYZ$,

$$\begin{aligned} X &= A\cos(\alpha x) \pm B\sin(\alpha x) \to e^{\pm i\alpha x} \\ Y &= A\cos(\beta x) \pm B\sin(\beta x) \to e^{\pm i\beta y} \\ Z &= A'\sinh(\gamma z) \pm B''\cosh(\gamma z) \to Ae^{\gamma z} \pm Be^{-\gamma z} \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

4. Solución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares,

$$\varphi(r, \phi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{-n}\right) \left[A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)\right].$$

5. Solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal,

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta).$$

Los coeficientes A_l y B_l se determinan mediante las condiciones de frontera del problema.

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta)$$

$$A_l = \frac{(2l+1)}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

6. Solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas,

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A_{lm}\, r^{l} + B_{lm}\, r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta,\phi).$$

Los coeficientes A_{lm} y B_{lm} se determinan mediante las condiciones de frontera del problema,

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\, Y_{lm}(\theta,\phi),$$

$$A_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{lm}(\theta,\phi)\, f(\theta,\phi).$$

7. Expansión de la función de Green en armónicos esféricos,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\left(r_<^{l} - \dfrac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}} \right) \left(\dfrac{1}{r_>^{l+1}} - \dfrac{r_>^{l}}{b^{2l+1}} \right)}{(2l+1) \left[1 - \left(\dfrac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} Y^*_{lm}(\theta',\phi')\, Y_{lm}(\theta,\phi)\,.$$

2.12 Problemas.

1. Demuestre que el potencial eléctrico en cualquier punto dentro de una region libre de cargas es igual al promedio del potencial sobre cualquier superficie esférica centrada en ese punto.

2. Si φ es el potencial dentro de un volumen V, debido a una densidad de carga ρ dentro de V y a una densidad de carga superficial σ sobre una superficie conductora que encierra a V, mientras que Ψ es el potencial debido a otras densidades de cargas ρ' y σ' en V y S, respectivamente, demuestre que

$$\int_V \rho\Psi d^3r + \int_S \sigma\Psi da = \int_V \rho'\varphi d^3r + \int_S \sigma'\varphi da.$$

3. Suponga que los planos xy y zy son conductores conectados a tierra. Calcule el trabajo para traer una carga $+q$ desde el infinito hasta un punto ubicado a una igual distancia d perpendiclar a cada uno de estos planos.

4. Un cubo conductor está definido por los seis planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y $x = a$, $y = a$, $z = a$. Los lados $z = 0$ y $z = a$ se mantienen a un potencial constante V, mientras que los otros lados están conectados a tierra.
   a) Encontrar el potencial en todo punto dentro del cubo.
   b) Determinar la carga superficial inducida en la cara $z = a$.

5. Un hemisferio de radio a sobresale de un plano conductor infinito conectado a tierra. Una carga q se encuentra a una distancia $b > a$ del plano, sobre el eje de simetría azimutal del hemisferio.
   a) Encuentre la distribución superficial de carga inducida en el conductor.
   b) Calcule la fuerza sobre la carga q.
   c) Calcule el trabajo necesario para traer la carga q desde el infinito hasta su ubicación.

6. El espacio entre dos esferas conductors concéntricas de radios R_1 y $R_2 > R_1$ se encuentra lleno de un plasma con densidad constante de carga ρ. Las esferas están a potenciales constantes V_1 y V_2, respectivamente. Encuentre el potencial en cualquier punto entre las esferas.

7. Una esfera de radio a tiene un potencial constante V_o. Encuentre la fuerza sobre una carga q colocada a una distancia R del centro de la esfera en los casos $R > a$ y $R < a$.

8. Dos cargas $+q$ y $-q$ se encuentran en las posiciones $(x = a, y = 0, z = a)$ y $(x = -a, y = 0, z = a)$, respectivamente. Suponga que el plano $z = 0$ es un conductor conectado a tierra. Encuentre:
a) la fuerza sobre la carga $+q$;
b) el trabajo realizado por un agente externo para ensamblar esta configuración de cargas;
c) la densidad superficial de carga en el punto $(a, 0, 0)$.

9. Tres cargas puntuales q,$-2q$ y q están localizadas sobre el eje z en $z = a$, $z = 0$ y $z = -a$, respectivamente. Encuentre el potencial eléctrico lejos de las cargas.

10. Un cilindro conductor sin carga, de radio a y longitud infinita, se coloca en un campo eléctrico uniforme de magnitud E dirigido perpendicularmente al eje del cilindro.
a) Encuentre el potencial eléctrico dentro y fuera del cilindro.
b) Calcule la densidad de carga superficial inducida en el cilindro.

11. Dos mitades longitudinales de un tubo cilíndrico hueco, de longitud infinita y radio b, están sujetas a potenciales constantes V_1 y V_2, respectivamente. Calcule el potencial dentro del tubo.

12. Dos cargas iguales $+q$ están separadas una distancia d. Una esfera conductora conectada a tierra se coloca justo en la mitad de la distancia entre las cargas.
a) Calcule el radio que debe tener la esfera para que las cargas permanezcan en equilibrio.
b) Encuentre el potencial fuera de la esfera en el caso (a).
c) Calcule la fuerza entre las cargas si la esfera, con el radio determinado en (a), ahora se mantiene a un potencial constante V.

13. Un dipolo $\mathbf{p}$ se coloca a una distancia h de un plano conductor infinito, formando un ángulo α con respecto a la normal al plano.
a) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza sobre el dipolo.
b) Calcule el trabajo requerido para llevar el dipolo al infinito.

14. Dos cargas puntuales q y $-q$ están ubicadas sobre el eje z en $z = a$ y $z = -a$, respectivamente. Encontrar el potencial en el espacio para $r < a$ y $r > a$.

15. Un condensador está formado por dos conductores planos, uno de los cuales tiene una pequeña protuberancia hemisférica de radio a en su superficie interna, y el cual está conectado a tierra. El conductor plano se encuentra a un potencial tal que el campo eléctrico en el condensador, lejos del hemisferio, es uniforme y de magnitud E_o. Calcule la densidad de carga inducida en el hemisferio.

16. Un disco de radio a posee una carga q uniformemente distribuida en su superficie. Determine el potencial eléctrico para distancias mayores que a.

17. El potencial de una esfera de radio a es $V = V_o \cos\theta$, donde θ es el ángulo con respecto al eje z en coordenas esféricas. Encuentre el potencial en todo punto del espacio, dentro y fuera de la esfera.

18. Un disco delgado de radio a posee una densidad de carga superficial $\sigma = k(a^2 - R^2)^{-1/2}$, donde k es una constante y R es la distancia desde el centro del disco. Encuentre el potencial eléctrico para distancias mayores que a.

19. Una varilla infinita con densidad lineal de carga λ uniforme se coloca paralela y a una distancia R del eje de un cilindro conductor infinito de radio $b < R$, conectado a tierra.
    a) Calcule el potencial en todo punto del espacio.
    b) Encuentre la densidad superficial de carga inducida sobre el cilindro.
    c) La fuerza por unidad de longitud ejercida sobre la varilla.

20. Una esfera de radio a tiene una densidad de carga superficial $\sigma(\theta) = \sigma_o \cos\theta$, con σ_o constante. Calcule el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

21. Una varilla de longitud L posee una densidad lineal uniforme de carga λ. Calcule el potencial para distancias mayores que L.

22. Dos cargas puntuales q y $-q$ están localizadas sobre el eje z en $z = a$ y $z = -a$, respectivamente. Las cargas están dentro de un cascarón esférico conductor conectado a tierra de radio b con centro en el origen de coordenadas. Encontrar el potencial dentro de la esfera.

Capítulo 3

Campos eléctricos en la materia

3.1 Polarizabilidad molecular.

En general, los átomos poseen distribuciones esféricas de carga electrónica, por lo que no exhiben momentos dipolares apreciables. Sin embargo, muchas moléculas tienen momentos dipolares intrínsecos debido a la distribución de los electrones en los enlaces atómicos, o pueden adquirirlo en presencia de un campo eléctrico externo. Como consecuencia, las propiedades eléctricas son afectadas en materiales compuestos por estas moléculas, debido a que, en adición a los potenciales producidos por las cargas netas presentes en el medio, cada dipolo $\mathbf{p}$ contribuye con un potencial

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{3.1}$$

La intensidad de un momento dipolar se mide en unidades denominadas *debyes*; 1 debye= 10^{-18}[Coul]×[cm]. Algunos ejemplos de moléculas intrínsicamente dipolares son HCl (1.03 debye), H_2O (1.86 debye), NH_3 (1.47 debye).

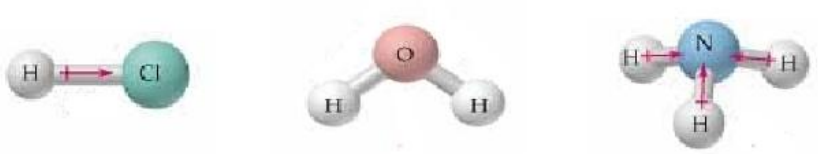


Figura 3.1: Algunas moléculas dipolares.

Un momento dipolar también puede ser inducido en un átomo o molécula con carga total nula en presencia de un campo eléctrico externo. Se observa que el campo externo produce una separaciòn o redistribución de las cargas, tal que el átomo o molécula adquiere un momento inducido $\mathbf{p}_{\text{ind}}$ que es proporcional al campo externo aplicado $\mathbf{E}_{\text{ext}}$, esto es,

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = \gamma\, \mathbf{E}_{\text{ext}}\,, \tag{3.2}$$

donde la constante de proporcionalidad γ se denomina *polarizabilidad* y depende de propiedades físicas o geométricas del objeto.

Ejemplos.

1. Como un ejemplo simple de un elemento polarizable, consideremos el problema de una esfera conductora aislada de radio a, sin carga neta, sujeta a un campo externo uniforme $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$.

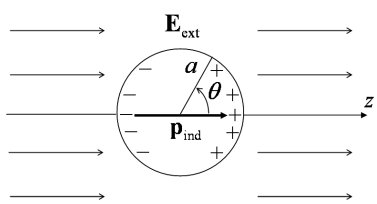


Figura 3.2: Esfera conductora en un campo eléctrico externo.

Recordemos que el potencial resultante fuera de la esfera es

$$\varphi(r,\theta) = -Er\cos\theta + \frac{Ea^3}{r^2}\,\cos\theta. \tag{3.3}$$

El primer término es el potencial asociado al campo externo, $\varphi_{\text{ext}} = Ez$, mientras que el segundo término corresponde al potencial producido por la carga superficial inducida por el campo externo sobre la esfera,

$$\varphi_{\text{ind}} = \frac{Ea^3}{r^2}\,\cos\theta = \frac{Ea^3}{r^3}\,\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{p}_{\text{ind}}\cdot\mathbf{r}}{r^3}, \tag{3.4}$$

el cual describe el potencial de un dipolo inducido

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = E\,a^3\hat{\mathbf{z}} = \gamma\,\mathbf{E}_{\text{ext}}, \tag{3.5}$$

donde la polarizabilidad de la esfera conductora está dada por $\gamma = a^3$.

Este ejemplo sirve para ilustrar el comportamiento de un átomo neutro en un campo externo. El resultado permite estimar la polarizabilidad típica de un átomo como $\gamma \sim$ (radio atómico)$^3 \sim (10^{-8}\text{cm})^3 = 10^{-24}$ cm^3.

2. Modelo simple de polarizabilidad de un átomo o molécula.

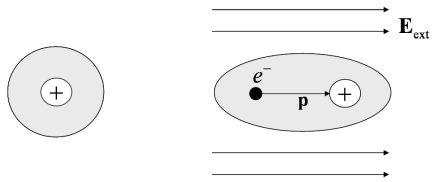


Figura 3.3: Momento dipolar inducido en un átomo por un campo eléctrico externo.

Consideremos un átomo con una distribución electrónica, sujeto a un campo externo $\mathbf{E}_{\text{ext}}$. Supongamos que la interacción núcleo-electrón se puede describir como una fuerza restauradora de constante $m\omega^2$, es decir, $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}$, donde m es la masa del electrón, ω es la frecuencia típica átómica y $\mathbf{r}$ es el desplazamiento de la nube electrónica desde su posición de equilibrio. La fuerza sobre una carga e debida al campo es $\mathbf{F}_{\text{ext}} = e\mathbf{E}_{\text{ext}}$. Entonces, en el equilibrio de fuerzas debemos tener

$$e\,\mathbf{E}_{\text{ext}} - m\omega^2\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \frac{e\,\mathbf{E}_{\text{ext}}}{m\omega^2}. \tag{3.6}$$

El momento dipolar inducido es

$$\mathbf{p}_{\text{ind}} = e\mathbf{r} = \frac{e^2}{m\omega^2}\,\mathbf{E}_{\text{ext}} = \gamma\,\mathbf{E}_{\text{ext}} \tag{3.7}$$

y la polarizabilidad del átomo es

$$\gamma = \frac{e^2}{m\omega^2} \approx 6 \times 10^{-24}\,\text{cm}^3\,, \tag{3.8}$$

donde hemos empleado $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coul (carga del electrón); $m = 10^{-27}$ gr; $\omega = 2\pi c/\lambda$; $\lambda = 4000$ Å (visible).

Los medios materiales pueden contener muchos momentos dipolares, tanto permanentes como inducidos por campos externos. En general, ambos tipos de dipolos tienden a alinearse con un campo externo aplicado. El momento dipolar promedio por átomo o molécula es proporcional al campo externo,

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \gamma \, \mathbf{E}_{\text{ext}} \, , \tag{3.9}$$

donde γ es la polarizabilidad molecular característica.

La *polarización* $\mathbf{P}$ de un medio se define como el momento dipolar por unidad de volumen. Si n es el número de moléculas por unidad de volumen, entonces $\mathbf{P} = n \, \langle \mathbf{p} \rangle$. En un medio isotrópico, cuyas propiedades son iguales en todas las direcciones, se observa experimentalmente que $\mathbf{P}$ es proporcional al campo externo aplicado,

$$\mathbf{P} = \chi_e \, \mathbf{E}_{\text{ext}}, \tag{3.10}$$

donde la constante de proporcionalidad χ_e se llama *susceptibilidad eléctrica* del medio.

Un *dieléctrico* es un medio material no conductor que puede ser polarizado mediante un campo eléctrico externo. Cuando un dieléctrico es colocado en un campo eléctrico, las cargas no fluyen libremente como en un conductor, sino que se separan ligeramente desde sus posiciones de equilibrio promedio, causando polarización en el medio.

3.2 Modelos estadísticos de polarizabilidad molecular.

En un medio material aislado pueden existir muchos dipolos permanentes a nivel molecular. El momento dipolar promedio del material es cero, puesto que los dipolos permanentes a temperaturas finitas están orientados al azar.

Sin embargo, si el material está sujeto a un campo eléctrico externo, los dipolos moleculares intrínsecos tienden a alinearse con el campo; y éste a su vez puede inducir momentos dipolares adicionales en otras moléculas presentes, dando lugar a un momento dipolar resultante distinto de cero en el medio. Luego, el momento dipolar promedio resultante en un medio sometido a un campo externo $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ proviene tanto de los momentos dipolares permanentes como de los momentos inducidos.

Calculemos cada una de estas contribuciones al momento dipolar promedio de un material a temperatura T, basados en la Física Estadística.

i) Dipolos permanentes en presencia de un campo externo.
Consideremos que el medio es homogéneo, es decir que sus dipolos poseen igual magnitud p_0. A temperatura T, estos dipolos están orientados al azar.

Supongamos el campo externo uniforme $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$. Entonces, la energía de interacción de un dipolo con el campo es $U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}} = p_0 E \cos\theta$. Puesto que la orientación de los dipolos permanentes en el medio es aleatoria debido a la agitaci'on térmica, existe una distribución de ángulos θ que se debe tomar en cuenta para calcular el momento dipolar promedio resultante $\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{per}}$ al aplicar $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ a una temperatura T.

En Mecánica Estadística, la distribución de probabilidad de partículas en el espacio de fase $(\tilde{q}, \tilde{p})$ de un sistema a una temperatura T, donde $\tilde{q}$ representa el conjunto de las coordenadas y $\tilde{p}$ el conjunto de los correspondientes momentos conjugados del sistema, es una función de la forma Maxwell-Boltzmann

$$f(H) = e^{-H/k_B T}\,, \tag{3.11}$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema y $k_{\text{B}} = 1.4 \times 10^{-16}$ erg/^{o}K es la constante de Boltzmann.

El Hamiltoniano o la energía de una molécula con dipolo $\mathbf{p}_0$ en el material sujeto al campo externo es

$$H = H_0 - p_0 E \cos\theta, \tag{3.12}$$

donde H_0 sólo depende de coordenadas internas de la molécula. Entonces, utilizando la distribución de probabilidad de Maxwell-Boltzmann y puesto que las variables angulares son continuas, podemos calcular el promedio estadístico $\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{per}}$ en el espacio de fase, correspondiente al momento dipolar permanente promedio por molécula en el medio,

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{per}} = \frac{\int d^3\tilde{p} \int d^3r\, \mathbf{p}\, \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}{\int d^3\tilde{p} \int d^3r \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}, \tag{3.13}$$

donde $d^3\tilde{q} \equiv d^3r = r^2\, dr\, d\phi\, \sin\theta\, d\theta$ es el elemento de volumen de las coordenadas $\tilde{q}$ y $d^3\tilde{p}$ es el elemento de volumen de los momentos $\tilde{p}$. El factor

exponencial se puede expresar como

$$\exp\left(-\frac{H}{k_BT}\right) = \exp\left(-\frac{H_0}{k_BT}\right)\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{k_BT}\right). \tag{3.14}$$

Las componentes de $\langle\mathbf{p}\rangle_{\text{per}}$ están definidas como

$$\begin{aligned}
\langle p_x\rangle_{\text{per}} &= p_0\sin\theta\cos\phi && (3.15)\\
\langle p_y\rangle_{\text{per}} &= p_0\sin\theta\sin\phi && (3.16)\\
\langle p_z\rangle_{\text{per}} &= p_0\cos\theta. && (3.17)
\end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\langle p_x\rangle_{\text{per}} &= \frac{p_0\,\cancel{\exp\left(-\frac{H_0}{k_BT}\right)}\cancel{\int d^3p}\int d^3r\sin\theta\,\cos\phi\,\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{k_BT}\right)}{\cancel{\exp\left(-\frac{H_0}{k_BT}\right)}\cancel{\int d^3p}\int d^3r\,\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{k_BT}\right)}\\
&= \frac{p_0\,\cancel{\int r^2dr}\,\cancel{\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi}^{\,0}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{k_BT}\right)d\theta}{\cancel{\int r^2dr}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{k_BT}\right)d\theta}\\
&= 0. && (3.18)
\end{aligned}$$

Similarmente, $\langle p_y\rangle_{\text{per}}$ contiene un factor $\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\phi = 0$ en su numerador, por lo que $\langle p_y\rangle_{\text{per}} = 0$. Para $\langle p_z\rangle_{\text{per}}$ obtenemos

$$\langle p_z\rangle_{\text{per}} = \frac{p_0\,\cancel{\int r^2dr}\,\cancel{\int_0^{2\pi}d\phi}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{k_BT}\right)d\theta}{\cancel{\int r^2dr}\,\cancel{\int_0^{2\pi}d\phi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{k_BT}\right)d\theta}. \tag{3.19}$$

Hacemos el cambio de variable $x = \cos\theta$, y obtenemos

$$\langle p_z\rangle_{\text{per}} = p_0\,\frac{\int_{-1}^{1}x\,\exp\left(\frac{p_0E}{k_BT}x\right)dx}{\int_{-1}^{1}\exp\left(\frac{p_0E}{k_BT}x\right)dx}. \tag{3.20}$$

Para la temperatura ambiente, $T = 300\text{K}^\circ$, tenemos el factor $\dfrac{p_0E}{k_BT} \ll 1$. Luego, podemos hacer la expansión

$$\exp\left(\frac{p_0E}{k_BT}x\right) \simeq 1 + \frac{p_0E}{k_BT}\,x + \cdots \tag{3.21}$$

despreciando términos de orden superior, que son muy pequeños. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\langle p_z \rangle_{\text{per}} &\simeq p_0 \frac{\int_{-1}^{1} x \left[1 + \frac{p_0 E}{k_B T} x\right] dx}{\int_{-1}^{1} \left[1 + \frac{p_0 E}{k_B T} x\right] dx} \\
&= \frac{1}{2} \frac{{p_0}^2 E}{k_B\, T} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{3} \frac{{p_0}^2 E}{k_B\, T}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{per}} = \langle p_z \rangle_{\text{per}}\, \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{3} \frac{{p_0}^2 E}{k_B\, T} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{3} \frac{{p_0}^2}{k_B\, T}\, \mathbf{E}_{\text{ext}}. \qquad (3.23)$$

Esta expresión no es válida para $T \to 0$, puesto que en ese límite no se cumple la condición $\dfrac{p_0 E}{k_B T} \ll 1$.

ii) Medio sin dipolos permanentes sujeto a un campo externo.

En este caso, el campo externo $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$ induce momentos dipolares $\mathbf{p}_{\text{ind}} = e\mathbf{r}$ en las partículas presentes en el medio, con $\mathbf{r}$ variable, de modo que $\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{ind}} \neq 0$.

El Hamiltoniano de una molécula, correspondiente al modelo simple de polarizabilidad molecular, es

$$H = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + e\varphi_{\text{ext}}, \qquad (3.24)$$

donde $\varphi_{\text{ext}} = -E\, z$. Luego,

$$H = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - eEz. \qquad (3.25)$$

El promedio estadístico $\langle \mathbf{p} \rangle_{\text{ind}}$ corresponde a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} \rangle_{\text{ind}} &= \frac{\int d^3\tilde{p} \int d^3r\, \mathbf{p}_{\text{ind}} \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}{\int d^3\tilde{p} \int d^3r\, \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)} && (3.26) \\ &= \frac{e \int d^3\tilde{p} \int d^3r\, \mathbf{r}\, \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}{\int d^3\tilde{p} \int d^3r \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}. && (3.27) \end{aligned}$$

Calculemos la componente

$$\langle p_z \rangle_{\text{ind}} = \frac{e \int d^3\tilde{p} \int d^3r\, z\, \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}{\int d^3\tilde{p} \int d^3r\, \exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}. \tag{3.28}$$

Hagamos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \frac{eE}{m\omega^2}\hat{\mathbf{z}} && (3.29) \\ \Rightarrow \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \frac{eE}{m\omega^2}\hat{\mathbf{z}} && (3.30) \\ \Rightarrow r^2 &= r'^2 + 2\frac{eE}{m\omega^2}\, z' + \left(\frac{eE}{m\omega^2}\right)^2, && (3.31) \end{aligned}$$

donde $z' = \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{z}}$. En las nuevas variables, el Hamiltoniano Ec. (3.25) se puede expresar como

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left[r'^2 + \frac{2eE}{m\omega^2}z' + \left(\frac{eE}{m\omega^2}\right)^2\right] - eE\left[z' + \frac{eE}{m\omega^2}\right] \\ &= \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r'^2 - \frac{1}{2}\frac{e^2E^2}{m\omega^2}. && (3.32) \end{aligned}$$

Escribimos la Ec. (3.28) en las nuevas variables,

$$\langle p_z \rangle_{\text{ind}} = \frac{e \int d^3\tilde{p} \int d^3r\, \left(z' + \frac{eE}{m\omega^2}\right) \exp\left[-\frac{1}{k_B T}\left(\frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r'^2\right)\right]}{\int d^3\tilde{p} \int d^3r'\, \exp\left[-\frac{1}{k_B T}\left(\frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r'^2\right)\right]}, \tag{3.33}$$

donde el factor $\exp\left[\frac{1}{k_B T}\left(\frac{e^2E^2}{m\omega^2}\right)\right]$ se simplifica en el denominador y el numerador de la Ec. (3.33). Entonces,

$$\langle p_z\rangle_{\text{ind}} = \frac{e^2E}{m\omega^2} + e\,\frac{\cancel{\int d^3\tilde{p}\,\exp\left[-\frac{1}{k_bT}\frac{\tilde{p}^2}{2m}\right]}\int d^3r'\,z'\,\exp\left[-\frac{m\omega^2r'^2}{2k_BT}\right]}{\cancel{\int d^3\tilde{p}\,\exp\left[-\frac{1}{k_bT}\frac{\tilde{p}^2}{2m}\right]}\int d^3r'\,\exp\left[-\frac{m\omega^2r'^2}{2k_BT}\right]}. \tag{3.34}$$

Si expresamos $z' = r'\cos\theta'$, la integral en el numerador del segundo término resulta en

$$\int r'^3\exp\left[-\frac{m\omega^2r'^2}{k_BT}\right]dr'\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = 0. \tag{3.35}$$

puesto que, haciendo $x = \cos\theta$, tenemos $\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \int_{-1}^{1}x\,dx = 0$.
Luego,

$$\langle p_z\rangle_{\text{ind}} = \frac{e^2E}{m\omega^2}. \tag{3.36}$$

Se puede demostrar que, al igual que el caso de un medio con dipolos permanentes, las componentes $\langle p_x\rangle_{\text{ind}}$ y $\langle p_y\rangle_{\text{ind}}$ se anulan. Entonces,

$$\langle\mathbf{p}\rangle_{\text{ind}} = \langle p_z\rangle\,\hat{\mathbf{z}} \quad = \quad \frac{e^2E}{m\omega^2}\hat{\mathbf{z}} = \frac{e^2}{m\omega^2}\,\mathbf{E}_{\text{ext}}. \tag{3.37}$$

En general, en un medio sujeto a un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ coexisten dipolos permanentes e inducidos. Por lo tanto, el momento dipolar promedio por molécula tendrá contribuciones de ambas fuentes, es decir,

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{p}\rangle &= \langle\mathbf{p}\rangle_{\text{ind}} + \langle\mathbf{p}\rangle_{\text{per}}\\ &= \frac{e^2}{m\omega^2}\mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{{p_0}^2}{3\,k_B\,T}\mathbf{E}_{\text{ext}}\\ &= \left(\frac{e^2}{m\omega^2} + \frac{{p_0}^2}{3\,k_B\,T}\right)\mathbf{E}_{\text{ext}}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Comparando con la definición $\langle\mathbf{p}\rangle = \gamma\mathbf{E}_{\text{ext}}$, vemos que la polarizabilidad molecular a temperatura T es

$$\gamma = \frac{e^2}{m\omega^2} + \frac{{p_0}^2}{3\,k_B\,T}. \tag{3.39}$$

3.3 Electrostática en medios dieléctricos.

Consideremos un material dieléctrico en el cual existe una densidad de carga libre $\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}')$ y una polarización $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$. El potencial producido en la posición $\mathbf{r}$ (dentro o fuera del dieléctrico) por un volumen ΔV ubicado en $\mathbf{r}'$ se debe a las contribuciones de la carga libre y del momento dipolar contenido en ΔV,

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}')\Delta V}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\Delta V \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{3.40}$$

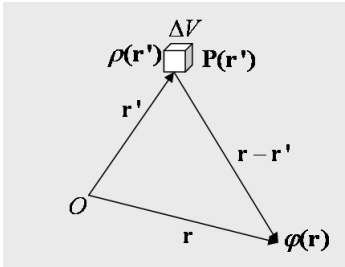


Figura 3.4: Contribuciones al potencial en un medio dieléctrico.

El potencial total en $\mathbf{r}$ se obtiene integrando sobre todo el volumen donde existan carga y polarización,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' + \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\, d^3r'. \tag{3.41}$$

Para evaluar el segundo término en la Ec. (3.41), consideremos el siguiente gradiente

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\hat{\mathbf{x}}_i\,. \tag{3.42}$$

Calculamos las componentes la Ec. (3.42),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) &= \frac{\partial}{\partial x'}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{x-x'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,, \\
\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) &= \frac{x_i-x_i'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Luego,

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \,. \tag{3.44}$$

Entonces, podemos expresar el potencial en la Ec. (3.41) como

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, d^3r' + \int \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r'. \tag{3.45}$$

Para evaluar la segunda integral en la Ec. (3.45), usamos la identidad vectorial

$$\mathbf{a} \cdot \nabla\psi = \nabla \cdot (\psi\mathbf{a}) - \psi\nabla \cdot \mathbf{a} \,, \tag{3.46}$$

que permite escribir esa integral como

$$\int \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' = \int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'. \tag{3.47}$$

Usamos el teorema de la divergencia para evaluar

$$\int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d^3r' = \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da' \,. \tag{3.48}$$

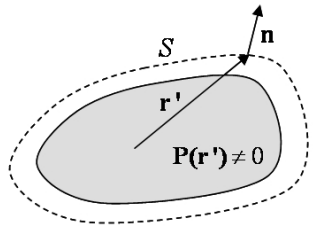


Figura 3.5: Superficie que justo encierra al medio dieléctrico.

Si tomamos la superficie S tal que encierre a todo el material dieléctrico y justo por encima de éste, tenemos $\mathbf{P} = 0$ sobre S y, por lo tanto, esta integral se anula. Entonces, nos queda

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, d^3r' - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, d^3r' \\ &= \int \frac{\rho_{\text{ef}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \, d^3r' \,, \end{aligned} \tag{3.49}$$

donde hemos definido la *densidad efectiva o equivalente* de carga en el medio,

$$\rho_{\text{ef}} \equiv \rho_{\text{libre}} - \nabla \cdot \mathbf{P}. \tag{3.50}$$

La Ec. (3.49) implica que el medio dieléctrico contribuye al potencial de la misma forma que lo haría una densidad de carga asociada a la polarización, dada por

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \tag{3.51}$$

La existencia del potencial en la Ec. (3.49) implica que se puede definir el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi\,, \tag{3.52}$$

el cual debe satisfacer las ecuaciones de la Electrostática en el medio

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{3.53}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{ef}}\,. \tag{3.54}$$

Se define el vector de *desplazamiento eléctrico* como

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \tag{3.55}$$

En medio isotrópico, $\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$, por lo que podemos escribir

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E} = \epsilon\,\mathbf{E}\,, \tag{3.56}$$

donde se ha definido la *permitividad eléctrica* o la *constante dieléctrica* del medio como

$$\epsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e\,. \tag{3.57}$$

Note que $\epsilon > 1$ en un medio material. El vacío corresponde a $\epsilon = 1$, mientras que un conductor perfecto posee $\epsilon \to \infty$. Un conductor puede considerarse como un medio altamente polarizable, hasta el punto en que las cargas pueden separarse y desplazarse hasta su superficie.

El desplazamiento eléctrico satisface

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \nabla \cdot \mathbf{E} + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} \\
&= 4\pi\rho_{\text{ef}} + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} \\
&= 4\pi(\rho_{\text{libre}} - \nabla \cdot \mathbf{P}) + 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} \\
&= 4\pi\rho_{\text{libre}}\,.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Las ecuaciones de la Electrostática en un medio dieléctrico se pueden expresar en términos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ como

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{3.59}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{libre}} \,. \tag{3.60}$$

Note que $\mathbf{D}$ está relacionado con ρ_{libre}, mientras que $\mathbf{E}$ está asociado con ρ_{ef}.

Consideremos las condiciones de frontera en una interfase entre dos medios dieléctricos, caracterizados por constantes ϵ_1 y ϵ_2, respectivamente. Denominamos $\hat{\mathbf{n}}$ al vector normal a la interfase, dirigido de (1) hacia (2), y $\hat{\mathbf{t}}$ al vector unitario tangente a la interfase. Sean $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ los campos eléctricos en el medio 1 y en el medio 2, respectivamente, justo sobre la interfase.

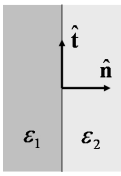


Figura 3.6: Direcciones normal y tangencial en la frontera entre dos medios dieléctricos.

i. Condición de frontera para la componente tangencial de $\mathbf{E}$.

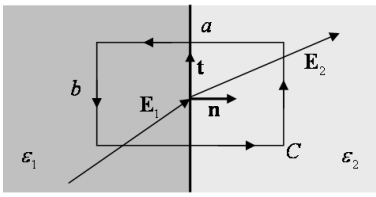


Figura 3.7: Evaluación de la componente tangencial de $\mathbf{E}$ en la frontera entre dos dieléctricos.

La integral de línea del campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre un rectángulo C, de lados a y b, que atraviesa la interfase satisface

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{s}}\, da = 0. \tag{3.61}$$

donde $\hat{\mathbf{s}}$ es el vector normal a la superficie S encerrada por C.

En el límite $a \to 0$,

$$\lim_{a\to 0} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^b (\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}})\, dl = 0\,, \tag{3.62}$$

lo cual es válido $\forall b$; luego localmente tenemos

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}\,. \tag{3.63}$$

Es decir, la componente tangencial de $\mathbf{E}$ es continua en la frontera entre dos medios dieléctricos.

ii. Condición de frontera para la componente normal de $\mathbf{D}$.

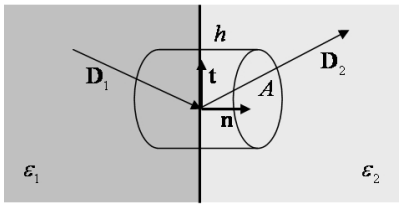


Figura 3.8: Evaluación de la componente normal de $\mathbf{D}$ en la frontera entre dos dieléctricos.

Aplicamos la ley de Gauss en un cilindro de longitud h y área A que atraviesa la interfase,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, d^3r = 4\pi \int_V \rho_{\text{libre}}\, d^3r, \tag{3.64}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi q_{\text{libre}}\,. \tag{3.65}$$

Tomamos el límite $h \to 0$,

$$\int_A (\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}) da = 4\pi \int_A \sigma_{\text{libre}}\, da\,, \tag{3.66}$$

lo cual es válido $\forall A$, luego localmente tenemos

$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma_{\text{libre}}\,. \tag{3.67}$$

Es decir, la componente normal de $\mathbf{D}$ es discontinua si existe una densidad de carga libre superficial σ_{libre} en la frontera entre dos medios dieléctricos.

iii. La relación $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ permite encontrar la densidad de carga superficial de polarización inducida sobre la interfase. Aplicando la ley de Gauss, al igual que en el caso anterior, podemos obtener

$$-\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{\text{pol}} \,. \tag{3.68}$$

3.4 Problemas de frontera con dieléctricos.

Las ecuaciones para la Electrostática en un medio dieléctrico son

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{3.69}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{libre}} \,, \tag{3.70}$$

donde $\mathbf{D} = \epsilon\,\mathbf{E}$ en un medio isotrópico. Estas ecuaciones implican que existe un potencial eléctrico φ que satisface

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \tag{3.71}$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\,\frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon} \,. \tag{3.72}$$

Las condiciones de frontera en la superficie que separa dos medios con constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 son

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} \,, \tag{3.73}$$

$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma_{\text{libre}} \,. \tag{3.74}$$

Ejemplos.

1. Calcular el potencial dentro y fuera de una esfera de radio a y constante dieléctrica ϵ, sin cargas libres, sujeta a un campo eléctrico externo $\mathbf{E}_{\text{ext}} = E\hat{\mathbf{z}}$.

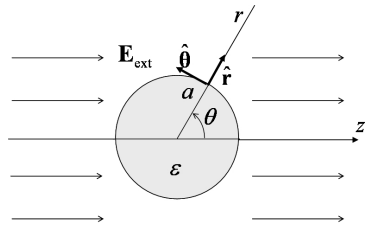


Figura 3.9: Esfera dieléctrica en un campo externo uniforme.

Puesto que $\rho_{\text{libre}} = 0$, el potencial satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$, dentro y fuera de la esfera. Entonces, buscamos soluciones del potencial φ con simetría azimutal para $r < a$, en un medio con constante dieléctrica $\epsilon_1 = \epsilon$, y para $r > a$, en un medio con $\epsilon_2 = 1$, tales que cumplan las condiciones de frontera en $r \to \infty$ y $r = a$.

El potencial dentro de la esfera no debe poseer singularidades en $r = 0$, luego para $r < a$, tenemos

$$\varphi_1(r,\theta) = \sum_{l=0} A_l\, r^l\, P_l(\cos\theta). \tag{3.75}$$

Para $r > a$,

$$\varphi_2(r,\theta) = \sum_{l=0} \left[B_l\, r^l + C_l\, r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta). \tag{3.76}$$

Para $r \to \infty$, la condición de frontera es $\varphi_2 = -Er\cos\theta$. Luego, en $r \to \infty$, tenemos

$$\sum_{l=0} B_l\, r^l P_l(\cos\theta) = -Er P_1(\cos\theta)\,, \tag{3.77}$$

lo cual implica,

$$B_1 = -E \tag{3.78}$$

$$B_l = 0, \quad \forall\, l \neq 1. \tag{3.79}$$

En coordenadas esféricas, el campo eléctrico se puede expresar como

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi}\right). \tag{3.80}$$

En $r = a$, tenemos las siguientes condiciones:

(a) continuidad de la componente tangencial de $\mathbf{E}$, dada por $E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$:

$$-\frac{1}{a}\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\right|_{r=a} = -\frac{1}{a}\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\right|_{r=a} \tag{3.81}$$

$$A_1 a\frac{\partial P_1}{\partial\theta} + \sum_{l\neq 1} A_l a^l \frac{\partial P_l(\cos\theta)}{\partial\theta} = \left(B_1 a + C_1 a^{-2}\right)\frac{\partial P_1}{\partial\theta} + \sum_{l\neq 1} C_l a^{-(l+1)}\frac{\partial P_l(\cos\theta)}{\partial\theta}$$

de donde, comparando coeficientes en ambos lados, obtenemos

$$l = 1, \quad A_1 a = B_1 a + C_1 a^{-2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -E + \frac{C_1}{a^3} \tag{3.82}$$

$$l \neq 1, \qquad 1 A_l a^l = C_l a^{-(l+1)} \quad \Rightarrow \quad A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \,. \tag{3.83}$$

(b) continuidad de la componente normal de $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, correspondiente a $D_n = D_r = -\epsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$, puesto que $\sigma_{\text{libre}} = 0$.

$$-\,\epsilon \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right|_{r=a} = -\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a} \,. \tag{3.84}$$

Calculamos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= A_1 P_1(\cos\theta) + \sum_{l \neq 1} l A_l r^{l-1} P_l(\cos\theta) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= -(E + 2C_1 r^{-3}) P_1(\cos\theta) - \sum_{l \neq 1} (l+1) C_l r^{-(l+2)} P_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (3.84), y comparando coeficientes en ambos lados, obtenemos

$$l = 1, \qquad \epsilon A_1 = -E - 2C_1 a^{-3} \Rightarrow \quad \epsilon A_1 = -E - \frac{2C_1}{a^3} \tag{3.85}$$

$$l \neq 1, \quad \epsilon A_l l a^{(l-1)} = -(l+1) C_l a^{-(l+2)} \Rightarrow \quad \epsilon A_l l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}} \tag{3.86}$$

Comparando las cuatro ecuaciones para las condiciones de frontera de $\mathbf{E}$ tangencial y $\mathbf{D}$ normal en $r = a$, encontramos los coeficientes

$$l = 1, \quad C_1 = \frac{(\epsilon - 1)}{(\epsilon + 2)} E a^3 \tag{3.87}$$

$$A_1 = -\frac{3}{(\epsilon + 2)} E \tag{3.88}$$

$$l \neq 1, \qquad C_l = 0 \tag{3.89}$$

$$A_l = 0. \tag{3.90}$$

Luego, el potencial dentro y fuera de la esfera dieléctrica es

$$\varphi_1(r,\theta) = -\frac{3}{(\epsilon+2)}\,Er\cos\theta, \qquad r<a \tag{3.91}$$

$$\varphi_2(r,\theta) = -Er\cos\theta + \frac{(\epsilon-1)}{(\epsilon+2)}\,E\frac{a^3}{r^2}\cos\theta, \qquad r>a. \tag{3.92}$$

El potencial dentro de la esfera puede expresarse como

$$\varphi_1 = -\frac{3}{(\epsilon+2)}\,Ez, \tag{3.93}$$

luego, el campo eléctrico dentro de la esfera es

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} = \frac{3}{(\epsilon+2)}\,E\hat{\mathbf{z}}. \tag{3.94}$$

Note que la intensidad del campo eléctrico dentro de la esfera diélectrica es menor que la del campo externo, puesto que $\epsilon > 1$. En el límite $\epsilon \to \infty$, tenemos un conductor perfecto, y el campo eléctrico dentro de la esfera es cero, como debe esperarse.

La polarización de la esfera puede calcularse a partir de

$$\mathbf{P}_1 = \chi_e\mathbf{E}_1 = \frac{(\epsilon-1)}{4\pi}\,\mathbf{E}_1 = \frac{3}{4\pi}\,\frac{(\epsilon-1)}{(\epsilon+2)}\,E\hat{\mathbf{z}}. \tag{3.95}$$

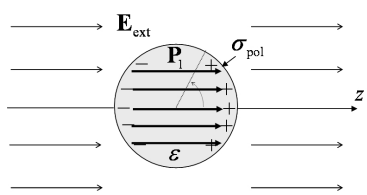


Figura 3.10: Polarización y su densidad de carga asociada de la esfera en un campo externo.

La densidad superficial de carga inducida por la polarización en la superficie de la esfera puede calcularse a partir de la relación

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_1\cdot\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{3.96}$$

puesto que $\mathbf{P}_2 = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pol}} &= \frac{3}{4\pi}\frac{(\epsilon-1)}{(\epsilon+2)}\,E\,\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{3}{4\pi}\frac{(\epsilon-1)}{(\epsilon+2)}\,E\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Note que $\sigma_{\text{pol}} > 0$ para $\theta \in [0, \pi/2)$, y $\sigma_{\text{pol}} < 0$ para $\theta \in (\pi/2, \pi]$.

El momento dipolar total inducido en la esfera es

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{\text{esfera}} \mathbf{P}_1\, d^3r \\ &= \frac{(\epsilon-1)}{(\epsilon+2)}\,Ea^3\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Note que los dos términos en el potencial φ_2, fuera de la esfera dieléctrica, corresponden justamente al potencial de este dipolo $\mathbf{p}$, más el potencial asociado al campo externo.

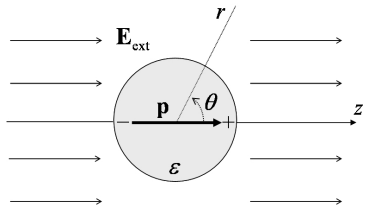


Figura 3.11: Momento dipolar de la esfera inducido por el campo externo.

Recordemos que la polarizabilidad α de un objeto en un campo externo se define como $\mathbf{p} = \gamma\mathbf{E}_{\text{ext}}$. Entonces, la polarizabilidad de la esfera es

$$\gamma = \frac{(\epsilon-1)}{(\epsilon+2)}\,a^3\,. \tag{3.99}$$

En el límite $\epsilon \to \infty$, recobramos la polarizabilidad de una esfera conductora en un campo externo, $\gamma = a^3$.

2. Encontrar el potencial dentro de una cavidad esférica de radio a dentro de un material con constante dieléctrica ϵ, sujeto a un un campo eléctrico externo uniforme.

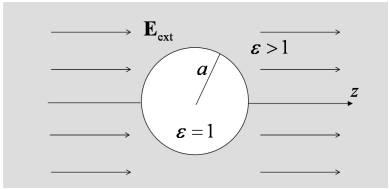


Figura 3.12: Cavidad esférica en un dieléctrico con un campo eléctrico externo uniforme.

Este problema es equivalente al anterior, haciendo ahora $\epsilon = 1$ (vacío) dentro de la esfera y $\epsilon > 1$ fuera de la esfera. La solución se puede obtener directamente de la anterior, sustituyendo $\epsilon \to 1/\epsilon$.

3.5 Energía electrostática en medios dieléctricos.

La energía potencial electrostática de una densidad de carga ρ_{libre} en un potencial externo φ_{ext} es

$$U = \int \rho_{\text{libre}}(\mathbf{r})\, \varphi(\mathbf{r})\, d^3r\,. \tag{3.100}$$

Si el medio es un dieléctrico, la fuente del potencial es la densidad efectiva de carga presente en el medio, $\rho_{\text{ef}} = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{pol}}$.

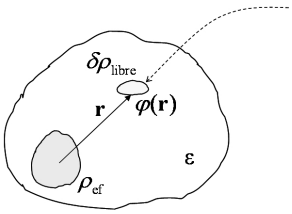


Figura 3.13: Energía electrostática de una densidad carga $\delta\rho_{\text{libre}}$ en un medio dieléctrico.

Supongamos que traemos una pequeña carga libre $\delta\rho_{\text{libre}}$ desde el infinito hasta la posición $\mathbf{r}$ en un medio diélectrico. Entonces, el cambio de energía electrostática

en el sistema es

$$\delta U = \int \delta\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,d^3r\,. \tag{3.101}$$

En el medio diélectrico, el vector de desplazamiento eléctrico satisface $\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{libre}}$. Correspondientemente, $\mathbf{D}$ en el medio cambia en una cantidad $\delta\mathbf{D}$, tal que

$$\nabla\cdot\delta\mathbf{D} = 4\pi\,\delta\rho_{\text{libre}}\,. \tag{3.102}$$

Luego, podemos expresar

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{1}{4\pi}\int \varphi\,\nabla\cdot\delta\mathbf{D}\,d^3r \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \nabla\cdot(\varphi\delta\mathbf{D})\,d^3r - \frac{1}{4\pi}\int \nabla\varphi\cdot\delta\mathbf{D}\,d^3r\,.\end{aligned} \tag{3.103}$$

El primer término es la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial, la cual, mediante el teorema de la divergencia, se puede expresar como una integral sobre la superficie que encierra ese volumen,

$$\int_V \nabla\cdot(\varphi\delta\mathbf{D})\,d^3r = \oint_S \varphi\,\delta\mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da\,. \tag{3.104}$$

Puesto que para $r\to\infty$, $\varphi\sim r^{-1}$ y $\mathbf{D}\sim r^{-2}$, si tomamos $S\to\infty$, la integral de superficie que encierra al volumen$V$ se hace cero. Por lo tanto, el primer término en la Ec. (3.103) se anula, y tenemos

$$\delta U = -\frac{1}{4\pi}\int \nabla\varphi\cdot\delta\mathbf{D}\,d^3r = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}\,d^3r\,, \tag{3.105}$$

donde hemos sustituido $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Suponemos un medio dieléctrico lineal e isotrópico; es decir, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$. Entonces, usando la relación

$$\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon}\,\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon}\,\frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{D})\,, \tag{3.106}$$

podemos escribir

$$\delta U = \frac{1}{8\pi}\int \frac{\delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{D})}{\epsilon}\,d^3r\,. \tag{3.107}$$

La energía eléctrostática total de la configuración de carga en el medio dieléctrico es

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\mathbf{D}} \delta U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \int_0^{\mathbf{D}} \frac{\delta(\mathbf{D}' \cdot \mathbf{D}')}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}{\epsilon} \, d^3r \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, d^3r \,. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Para $\epsilon = 1$, la Ec. (3.108) describe la energía de un campo electrostático en el vacío, encontrada en el Cap. 1.

La Ec. (3.108) también permite inferir la fuerza experimentada por un dieléctrico en las proximidades de una región donde hay un campo eléctrico. Consideremos, por ejemplo, un trozo de un material dieléctrico con constante ϵ, siendo introducido en el espacio entre dos planos paralelos que poseen cargas opuestas, y donde existe un campo eléctrico $\mathbf{E}$.

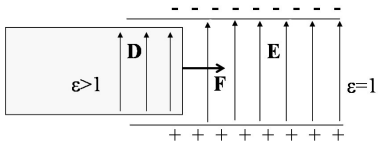


Figura 3.14: Fuerza sobre un dieléctrico introducido en una región donde existe un campo eléctrico.

En el dieléctrico, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, mientras que en el espacio vacío entre las placas, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. La energía electrostática en el espacio ocupado por el dieléctrico es $U_2 \sim \epsilon|E|^2$, y en el vacío es $U_1 \sim |E|^2$. Luego, $U_2 > U_1$ y existe un gradiente ∇U en la dirección desde el vacío (1) hacia el dieléctrico (2). La fuerza sobre el dieléctrico es $\mathbf{F} = -\nabla U$ y está dirigida desde (2) hacia (1). Luego, el dieléctrico es atraído hacia la regíon del campo eléctrico entre las placas.

Resumen

1. Potencial de un dipolo,
$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

2. Momento dipolar en un campo externo,
$$\langle\mathbf{p}\rangle = \gamma\,\mathbf{E}_{\text{ext}}\,,$$

3. Polarización (momento dipolar por unidad de volumen),
$$\mathbf{P} = \chi_e\,\mathbf{E}_{\text{ext}},$$

4. Desplazamiento eléctrico,
$$\mathbf{D} = (1+4\pi\chi_e)\mathbf{E} = \epsilon\,\mathbf{E}\,,$$

5. Ecuaciones de la Electrostática en un medio dieléctrico,
$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E} &= 0\\ \nabla\cdot\mathbf{D} &= 4\pi\rho_{\text{libre}}\,.\end{aligned}$$
o, equivalentemente,
$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\varphi\\ \nabla^2\varphi &= -4\pi\,\frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon}\end{aligned}$$

6. Densidad de carga asociada a la polarización,
$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla\cdot\mathbf{P}$$

7. Condiciones de frontera en la interfase entre dos dieléctricos,
$$\mathbf{E}_2\cdot\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{E}_1\cdot\hat{\mathbf{t}}\,.$$
$$\mathbf{D}_2\cdot\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{D}_1\cdot\hat{\mathbf{n}} = 4\pi\sigma_{\text{libre}}\,.$$

8. Energía eléctrostática en un medio dieléctric,o
$$U = \frac{1}{8\pi}\int\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,d^3r\,.$$

3.6 Problemas.

1. Un polvo compuesto de partículas esféricas de radio $10\,\mu$ y constante dieléctrica igual a 4 se encuentra disperso en el vacío con una concentración de 10^{12} partículas por cm^3. Calcule la constante dieléctrica efectiva de este medio.

2. Una carga puntual q se encuentra a una distancia R del centro de una esfera de radio a $(a < R)$ y constante dieléctrica ϵ.
   a) Encuentre el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera.
   b) Demuestre que en el límite $\epsilon \to \infty$, el resultado anterior corresponde al obtenido con una esfera conductora.

3. Un cilindro muy largo, de radio a, constante dieléctrica ϵ, y con su eje sobre el eje z, se coloca en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E_o\hat{\mathbf{x}}$.
   a) Encuentre el potencial dentro y fuera del cilindro.
   b) Calcule la densidad de carga superficial inducida en el cilindro.

4. El volumen entre dos esferas conductoras concéntricas de radios a y b, $(a < b)$, se encuentra lleno de un medio inhomogéneo con constante dieléctrica $\epsilon(r) = \epsilon_o/(1+kr)$, donde k y ϵ_o son constantes y r es la coordenada radial. Una carga q se coloca sobre la esfera interna, mientras la otra se conecta a tierra.
   a) Encuentre el campo eléctrico entre las dos esferas.
   b) Encuentre el vector de polarización en el medio dieléctrico.

5. Un tubo cilíndrico muy largo, de radio interior a, radio exterior b, y constante dieléctrica ϵ, se coloca en el vacío en un campo eléctrico uniforme de magnitud E, cuya dirección es perpendicular al eje del cilindro. Calcule el potencial y el campo eléctrico en todo el espacio, despreciando efectos en los extremos del tubo.

6. Un capacitor consiste en dos tubos conductores cilíndricos coaxiales, de radios a y b $(b > a)$. El capacitor se baja verticalmente en un líquido dieléctrico cuya densidad es ρ. La superficie del líquido sube una distancia h entre los tubos cuando se aplica una diferencia de potencial V entre ellos. Calcule la susceptibilidad eléctrica del líquido.

Capítulo 4

Magnetostática

4.1 Ecuaciones de la Magnetostática.

Existen medios en los cuales las cargas eléctricas pueden moverse en presencia de un campo eléctrico externo. Por ejemplo, los electrones en un material conductor pueden moverse si se aplica un campo externo. Una carga en movimiento constituye una *corriente eléctrica*.

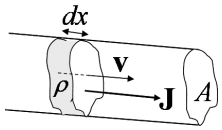


Figura 4.1: Densidad de corriente el'ectrica.

La *densidad de corriente eléctrica* producida por una densidad de carga ρ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ se define como

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Supongamos que un flujo de carga eléctrica con densidad ρ atraviesa un área A con velocidad v en la dirección x, tal que $v = \frac{dx}{dt}$. Entonces, la cantidad de carga que atraviesa el área A en un tiempo dt es $dq = \rho A\, dx$. Luego, podemos expresar la magnitud de $\mathbf{J}$ como

$$J = \frac{dq}{A\, dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{dq}{A\, dt} = \frac{I}{A}\,, \tag{4.2}$$

donde

$$I = \frac{dq}{dt}\,, \tag{4.3}$$

se denomina *intensidad de corriente eléctrica* y es la cantidad de carga eléctrica que pasa por un punto por unidad de tiempo. Es decir, la densidad de corriente eléctrica $\mathbf{J}$ es la cantidad de corriente por unidad de área que se mueve en dirección de $\mathbf{v}$. La unidad de corriente eléctrica en el sistema MKS es el *amperio*, que corresponde a un Coulomb por segundo. En el sistema CGS la unidad de corriente es el *statamperio*; 1 amperio $= 3 \times 10^9$ statamperios.

En muchos materiales conductores se observa experimentalmente que la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico externo aplicado en el medio,

$$\mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E}_{\text{ext}}\,, \tag{4.4}$$

donde la constante de proporcionalidad σ es una propiedad específica del medio y se denomina *conductividad eléctrica*. El inverso de esta cantidad se llama *resistividad*, $\varrho = \sigma^{-1}$. La Ec. (4.4) es la *Ley de Ohm*.

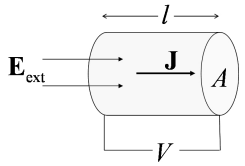


Figura 4.2: Ley de Ohm.

Si tenemos un trozo de material de área A y longitud l sujeto a un campo eléctrico externo uniforme en la dirección de l, entonces $E_{\text{ext}} = \frac{V}{l}$, donde V es la diferencia de potencial entre los extremos. Luego, la Ec. (4.4) puede expresarse en forma escalar como

$$\begin{aligned} \frac{I}{A} &= \sigma \frac{V}{l} \\ \Rightarrow\ I &= \frac{V}{R}\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde la cantidad

$$R \equiv \frac{l}{A\sigma} = \varrho \frac{l}{A} \tag{4.6}$$

se denomina *resistencia* del material y depende de la conductividad y de propiedades geométricas del material. La Ec. (4.5) es una expresión más común de la Ley de Ohm.

El campo externo produce una fuerza sobre las cargas; sin embargo, en general éstas no se aceleran indefinidamente sino que alcanzan una velocidad terminal debido a la resistencia del medio. La resistencia se origina en las interacciones de las cargas con el medio (por ejemplo, con la red cristalina en medios sólidos; o con otras cargas en plasmas). En estas situaciones, la densidad de corriente $\mathbf{J}$ es constante.

Las ecuaciones de Maxwell muestran que las cargas en movimiento producen campo magnético, además de campo eléctrico. Si $\mathbf{J}$ es constante, el campo magnético satisface las ecuaciones de Maxwell para la Magnetostática,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{4.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}. \tag{4.8}$$

El campo $\mathbf{B}$ también se denomina *inducción magnética*. La Ec. (4.7) expresa la ausencia de fuentes monopolares para $\mathbf{B}$; la Ec. (4.8) es la *Ley de Ampère* e indica que una densidad de corriente $\mathbf{J}$ produce un campo magnético $\mathbf{B}$.

Si tomamos la divergencia en ambos lados de la Ec. (4.8), obtenemos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c}\,\nabla \cdot \mathbf{J}. \tag{4.9}$$

Pero $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$, $\forall \mathbf{a}$; luego, en Magnetostática,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{4.10}$$

La Ec. (4.10) es compatible con la ecuación de conservación de la carga eléctrica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{4.11}$$

si la densidad de carga ρ es constante. Como vimos en ese caso, el campo eléctrico satisface las ecuaciones de la Electrostática,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{4.12}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{4.13}$$

La Ec. (4.7) implica que $\mathbf{B}$ se puede expresar como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{4.14}$$

donde el campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ se denomina el *potencial vector*. Sustituyendo en la Ec. (4.8), obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}. \tag{4.15}$$

Usamos la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$, donde

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{3} \nabla^2 A_i(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{x}}_i, \tag{4.16}$$

y

$$\nabla^2 A_i(\mathbf{r}) = \sum_{j}^{3} \frac{\partial^2 A_i(\mathbf{r})}{\partial x_j^2}\,. \tag{4.17}$$

Luego, podemos escribir

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}. \tag{4.18}$$

La determinación del potencial vector asociado a un campo magnético está sujeta a la adición de un gradiente de un campo escalar. Supongamos un vector potencial $\mathbf{A}'$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'. \tag{4.19}$$

Entonces el vector

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla\Lambda, \tag{4.20}$$

donde Λ es un campo escalar arbitrario, está asociado al mismo campo magnético $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} - \cancelto{0}{\nabla \times \nabla\Lambda} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{4.21}$$

La transformación $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ constituye una *transformación de calibre* para el potencial vector, la cual deja invariante el campo magnético $\mathbf{B}$. La invarianza de $\mathbf{B}$ ante esta transformación es análoga a la invarianza del campo eléctrico $\mathbf{E}$ si al potencial escalar φ se le agrega una cantidad constante, $\varphi \to \varphi + c$,

$$\mathbf{E} = -\nabla(\varphi + c) = -\nabla\varphi. \tag{4.22}$$

Puesto que el campo escalar Λ es arbitrario, podemos escogerlo tal que

$$\nabla^2 \Lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}' \tag{4.23}$$

La Ec. (4.23) se conoce como *calibre de Coulomb*. Con esta condición, el potencial vector en la Ec. (4.20) satisface

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \nabla^2 \Lambda = \nabla \cdot \mathbf{A}' - \nabla \cdot \mathbf{A}' = 0. \tag{4.24}$$

Luego, la Ec. (4.14) y la Ec. (4.18) se pueden expresar como las ecuaciones de la Magnetostática en términos de $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{4.25}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}. \tag{4.26}$$

Estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones para la Electrostática en términos del potencial escalar φ,

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \tag{4.27}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \tag{4.28}$$

La componente i de Ec. (4.26) satisface

$$\nabla^2 A_i = -\frac{4\pi}{c}\,J_i\,. \tag{4.29}$$

Esta relación es similar a la ecuación de Poisson $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ para el potencial escalar φ, haciendo las analogías $\varphi \leftrightarrow A_i$, $\rho \leftrightarrow J_i/c$. La solución de la ecuacion de Poisson en el espacio libre es

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'. \tag{4.30}$$

Luego, por analogía, debemos tener

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{J_i\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r' \tag{4.31}$$

y, por lo tanto, la solución de la Ec. (4.26) en el espacio libre es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{4.32}$$

El campo magnético se determina a partir de

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \nabla\times\left(\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r'\,, \tag{4.33}$$

donde el operador ∇ actúa sobre las componentes de $\mathbf{r}$. Para evaluar la Ec. (4.33), definamos

$$\mathbf{a} \equiv \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{4.34}$$

de modo que

$$a_x = \frac{J_x\left(\mathbf{r}'\right)}{\left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}}\,, \tag{4.35}$$

$$a_y = \frac{J_y\left(\mathbf{r}'\right)}{\left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}}\,, \tag{4.36}$$

$$a_z = \frac{J_z\left(\mathbf{r}'\right)}{\left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{1/2}}\,. \tag{4.37}$$

Entonces,

$$(\nabla\times\mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z} = -\frac{J_z\left(\mathbf{r}'\right)\left(y-y'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\frac{J_y\left(\mathbf{r}'\right)\left(z-z'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}|,, \tag{4.38}$$

$$(\nabla\times\mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x} = -\frac{J_x\left(\mathbf{r}'\right)\left(z-z'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\frac{J_z\left(\mathbf{r}'\right)\left(x-x'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,, \tag{4.39}$$

$$(\nabla\times\mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y} = -\frac{J_y\left(\mathbf{r}'\right)\left(x-x'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\frac{J_x\left(\mathbf{r}'\right)\left(y-y'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{4.40}$$

Por otro lado, consideremos el producto vectorial $\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ tal que

$$\left[\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]_x = J_y\left(z-z'\right)-J_z\left(y-y'\right), \tag{4.41}$$

$$\left[\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]_y = J_z\left(x-x'\right)-J_x\left(z-z'\right), \tag{4.42}$$

$$\left[\mathbf{J}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]_z = J_x\left(y-y'\right)-J_y\left(x-x'\right). \tag{4.43}$$

Comparando las componentes de $\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ con las correspondientes componentes de $\nabla \times \mathbf{a}$, vemos que

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{4.44}$$

Luego, la Ec. (4.33), que da el campo magnético en el espacio libre debido a una densidad de corriente $\mathbf{J}$, se puede expresar como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}\,(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, d^3r'. \tag{4.45}$$

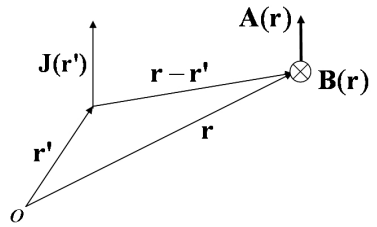


Figura 4.3: Campo magnético $\mathbf{B}$ y potencial vector $\mathbf{A}$ producidos en posición $\mathbf{r}$ por una densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$.

La Ec. (4.45) para $\mathbf{B}$ es análoga a la expresión del campo eléctrico en el espacio libre producido por una distribución de carga ρ (Cap. 1),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, d^3r'\,. \tag{4.46}$$

4.2 Ley de Biot-Savart y Ley de Ampère.

En general, la corriente eléctrica (carga por unidad de tiempo) debida a una densidad de corriente $\mathbf{J}$ que atraviesa una superficie A es

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}\,, \tag{4.47}$$

donde $d\mathbf{s}$ es el elemento de área con vector normal a la superficie A.

En muchos casos de interés, $\mathbf{J}$ fluye en materiales en forma de tubos o cables. Un cable se puede describir como un circuito o curva $\mathcal{C}$, con un vector tangente $d\mathbf{l}$, cuya sección transversal de área A posee un vector normal $d\mathbf{s}$. En un cable, $\mathbf{J}$ es paralelo a $d\mathbf{l}$. El elemento de volumen del cable se puede expresar como $d^3r = d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{s}$.

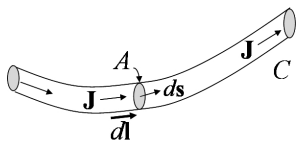


Figura 4.4: Densidad de corriente $\mathbf{J}$ fluyendo a través de un cable $\mathcal{C}$.

Luego, si $\mathbf{J}$ fluye por el cable, tenemos $\mathbf{J}\, d^3r = \mathbf{J}(d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{s}) = d\mathbf{l}(\mathbf{J} \cdot d\mathbf{s})$. La integral de volumen de $\mathbf{J}$ en el cable se puede expresar como

$$\int \mathbf{J}\, d^3r' = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{l}' \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}' = \int_{\mathcal{C}} I\, d\mathbf{l}'. \tag{4.48}$$

La Ec. (4.45) para densidades de corriente fluyendo por cables se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\, d^3r' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \int_A \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s}' \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathcal{C}} \frac{I\, d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

La Ec. (4.49) es la *Ley de Biot-Savart*.

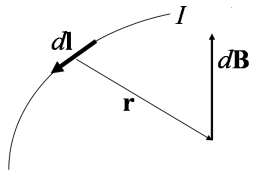


Figura 4.5: Ley de Biot-Savart en forma diferencial.

En forma diferencial, la Ley de Biot-Savart se puede expresar como

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.50}$$

El diferencial de campo magnético $d\mathbf{B}$ en la posición $\mathbf{r}$ es producido por la corriente I que pasa por el elemento de línea $d\mathbf{l}$.

Ejemplos.

1. Calcular el campo magnético producido por un cable recto e infinito, ubicado a lo largo del eje z, por el cual fluye una corriente constante I en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$.

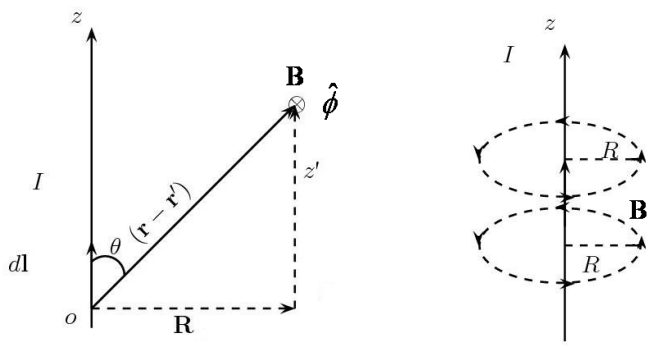


Figura 4.6: Campo magnético $\mathbf{B}$ producido por un cable infinito en la dirección z con corriente I.

Sea R una distancia fija perpendicular al cable. De la figura, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}-\mathbf{r}' &= \mathbf{R}+z'\hat{\mathbf{z}} \\ \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| &= \left(R^2+z'^2\right)^{1/2} \\ d\mathbf{l}' &= dz'\,\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\int_{\mathcal{C}} \frac{I\,d\mathbf{l}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} \\ &= \frac{I}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'\,\hat{\mathbf{z}}\times(\mathbf{R}+z'\hat{\mathbf{z}})}{(R^2+z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{c}\,R\,\hat{\phi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(R^2+z'^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{4.51}$$

donde hemos usado $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{R} = R\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Luego,

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c}\,R\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\frac{z'}{R^2\,(R^2+z'^2)^{1/2}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2I}{cR}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,. \tag{4.52}$$

Las líneas de campo magnético forman circunferencias alrededor del eje z, en la dirección de la regla de la mano derecha.

2. Calcular el campo magnético sobre el eje perpendicular de una espira de radio a que lleva una corriente constante I.

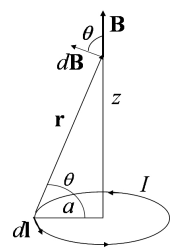


Figura 4.7: Campo magnético $\mathbf{B}$ sobre el eje perpendicular de un aro de radio a con corriente I.

El campo producido en $\mathbf{r}$ por un elemento de corriente de la espira es

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\,\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}\,, \tag{4.53}$$

donde $r = (a^2+z^2)^{1/2}$. El vector tangente $d\mathbf{l}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$. Luego,

$$dB = \frac{I}{c}\,\frac{dl}{r^2}\,. \tag{4.54}$$

La componente de $d\mathbf{B}$ en la dirección z es

$$dB_z = dB\cos\theta = dB\,\frac{a}{r} = \frac{I}{c}\,\frac{a\,dl}{r^3}\,. \tag{4.55}$$

Las componentes de $d\mathbf{B}$ perpendiculares a z se anulan entre sí. Luego,

$$B(z) = \frac{I}{c}\,\frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}\int_{\mathcal{C}} dl = \frac{2\pi I}{c}\,\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,. \tag{4.56}$$

En muchas situaciones que poseen simetrías, el campo magnético también puede ser calculado utilizando la segunda ecuación de la Magnetostática,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}, \tag{4.57}$$

la cual constituye la Ley de Ampère en forma diferencial. Integramos esta ecuación en una superficie S con normal $\hat{\mathbf{n}}$,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da. \tag{4.58}$$

Usando el teorema de Stokes en el lado izquierdo,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \tag{4.59}$$

y la definición de corriente eléctrica, podemos escribir la Ec. (4.58) como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\, I_{\text{enc}}, \tag{4.60}$$

donde I_{enc} es la corriente circundada por el contorno C. La Ec. (4.60) es la Ley de Ampère en forma integral, análoga a la ley de Gauss en forma integral

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 4\pi q_{\text{enc}}. \tag{4.61}$$

Ejemplos.

1. Calcular el campo magnético dentro de un solenoide infinito, con n vueltas por unidad de longitud, por el cual fluye una corriente constante I.

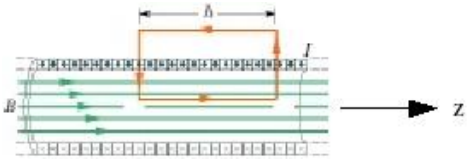


Figura 4.8: Campo magnético $\mathbf{B}$ dentro de un solenoide que lleva una corriente I.

El campo magnético fuera de un solenoide infinito es cero. Por simetría, el campo magnético dentro del solenoide debe estar en la dirección de su eje z. Aplicamos la Ley de Ampère en forma integral al rectángulo C de longitud h, como se muestra en la figura. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B\,h = \frac{4\pi}{c}\,NI, \tag{4.62}$$

donde N es el número de vueltas (espiras) contenidas en la longitud h del solenoide y $n = N/h$. Luego,

$$B = \frac{4\pi}{c}\,nI. \tag{4.63}$$

Experimentalmente sabemos que un campo magnético externo ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento. Por lo tanto, una corriente eléctrica experimenta una fuerza en presencia de un campo magnético externo. Consideremos la fuerza magnética sobre una densidad de carga $dq = \rho\, d^3r'$ en la posición $\mathbf{r}'$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo externo $\mathbf{B}_{\text{ext}}$,

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{\text{mag}} &= \frac{1}{c}\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}')\,d^3r' \\ &= \frac{1}{c}\,\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}')\,d^3r'. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Entonces, la fuerza magnética total sobre una distribución de corriente es

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{1}{c}\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}')\,d^3r'. \tag{4.65}$$

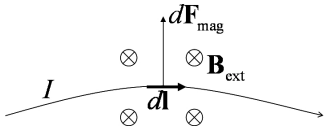


Figura 4.9: Fuerza sobre un elemento de corriente $Id\mathbf{l}$ en un campo magnético externo.

Si $\mathbf{J}$ fluye en un cable, podemos expresar $\mathbf{J}\,d^3r = I\,d\mathbf{l}$. Luego, la fuerza sobre un elemento de corriente $Id\mathbf{l}$ en un cable es

$$d\mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{1}{c}\,Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}\,. \tag{4.66}$$

La fuerza total sobre un circuito $\mathcal{C}$ que lleva una corriente I en un campo magnético externo es

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \frac{1}{c}\int_{\mathcal{C}} I\, d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}'). \tag{4.67}$$

Si el campo externo que actúa sobre un circuito $\mathcal{C}_1$ que lleva una corriente constante I_1 es producido por otro circuito $\mathcal{C}_2$ por el que pasa una corriente constante I_2, la fuerza magnética sobre $\mathcal{C}_1$ será

$$\mathbf{F}_{\text{mag12}} = \frac{I_1\, I_2}{c^2}\int_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{l}_1 \times \int_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}\,, \tag{4.68}$$

donde empleamos la Ley de Biot-Savart, Ec. (4.49), y donde $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es el vector de distancia desde el elemento de línea $d\mathbf{l}_2$ a $d\mathbf{l}_1$. La Ec. (4.68) es la expresión matemática de la fuerza entre dos corrientes que fluyen por respectivos circuitos, descubierta por Ampère.

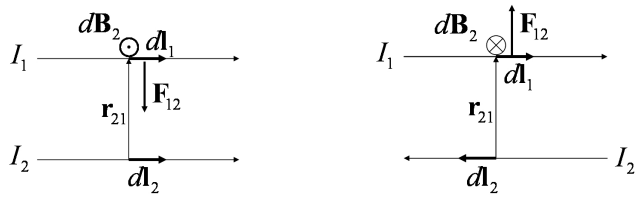


Figura 4.10: Fuerza entre corrientes paralelas (izquierda) y entre corrientes opuestas (derecha).

El triple producto vectorial en la Ec. (4.68) se puede expresar como

$$d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21}) = (d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_{21})d\mathbf{l}_2 - (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{r}_{21}. \tag{4.69}$$

Luego, podemos escribir la integral en la Ec. (4.68) como

$$\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{l}_1 \times \frac{(d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3} = \int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_2}\left(d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}\right) d\mathbf{l}_2 - \int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_2} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}. \tag{4.70}$$

Usando la relación $\nabla(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$, calculamos la primera integral en la Ec. (4.70),

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_2}\left(d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}\right) d\mathbf{l}_2 &= -\int_{\mathcal{C}_1} d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla_1\left(\frac{1}{r_{21}}\right)\int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{l}_2 \\ &= -\int_{\mathcal{C}_1} d\left(\frac{1}{r_{21}}\right)\int_{\mathcal{C}_2} d\mathbf{l}_2 \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.71}$$

puesto que

$$\int_{\mathcal{C}_1} d\left(\frac{1}{r_{21}}\right) = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{r_{21}}\right|_{r_o}^{r_o} = 0, & \text{si } \mathcal{C}_1 \text{ es cerrado,} \\ \\ \left.\dfrac{1}{r_{21}}\right|_{-\infty}^{\infty} = 0, & \text{si } \mathcal{C}_1 \text{ es infinito.} \end{cases} \tag{4.72}$$

Entonces, la fuerza magnética sobre $\mathcal{C}_1$ debido a $\mathcal{C}_2$ se puede escribir como

$$\mathbf{F}_{\text{mag12}} = -\frac{I_1\, I_2}{c^2} \int_{\mathcal{C}_1} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}. \tag{4.73}$$

La correspondiente fuerza magnética que experimenta el cable $\mathcal{C}_2$ debido a la corriente del cable $\mathcal{C}_1$ es $\mathbf{F}_{\text{mag21}} = -\mathbf{F}_{\text{mag12}}$, de acuerdo con la Tercera Ley de Newton. La Ec. (4.73) implica que corrientes paralelas ($d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 > 0$) se atraen, mientras que corrientes antiparalelas ($d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 < 0$) se repelen.

4.3 Expansión multipolar del potencial vector.

Consideremos una densidad de corriente localizada $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$. El potencial vector creado por esta distribución en el espacio libre es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{4.74}$$

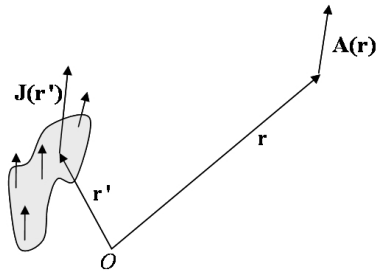


Figura 4.11: Potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ lejos de una distribución de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, $r \gg r'$.

Queremos calcular $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ para distancias $r \gg r'$, lejos de la distribución de corriente. Para ello, utilizamos la expansión de Taylor empleada en el Cap. 1 para la expansión multipolar del potencial escalar,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\left[3\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right)^2 - r'^2 r^2\right] + \cdots . \tag{4.75}$$

Luego, podemos escribir para $r \gg r'$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr}\int \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right) d^3r' + \frac{1}{cr^3}\int \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right) d^3r' + \cdots . \tag{4.76}$$

El primer término en la Ec. (4.76) es la contribución monopolar, mientras que el segundo término constituye la contribución dipolar al potencial vector. Consideremos la componente i del término monopolar,

$$\int J_i(\mathbf{r}')\, d^3r' = \int \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{x}}_i\, d^3r' = \int \mathbf{J}\cdot\nabla x_i\, d^3r', \tag{4.77}$$

donde hemos usado $\nabla x_i = \hat{\mathbf{x}}_i$. Empleando la identidad $\nabla\cdot(\psi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\psi + \psi\nabla\cdot\mathbf{a}$, podemos escribir

$$\int J_i(\mathbf{r}')\, d^3r' = \int \mathbf{J}\cdot\nabla x_i\, d^3r' = \int \nabla\cdot(x_i\mathbf{J})\, d^3r' - \int x_i \cancelto{0}{(\nabla\cdot\mathbf{J})}\, d^3r' \tag{4.78}$$

puesto que, en Magnetostática, $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$. Empleamos el teorema de la divergencia con una superficie S ubicada completamente fuera de la distribución localizada de corriente $\mathbf{J}$, de modo que $\mathbf{J} = 0$ sobre S. Entonces, para tal S tenemos

$$\int \nabla\cdot(x_i\mathbf{J})\, d^3r' = \oint_S (x_i\mathbf{J})\cdot\hat{\mathbf{n}}\, da = 0, \tag{4.79}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal a la superficie S. Luego, la contribución monopolar al potencial $\mathbf{A}$ se anula,

$$\int J_i(\mathbf{r}')d^3r' = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right) d^3r' = 0. \tag{4.80}$$

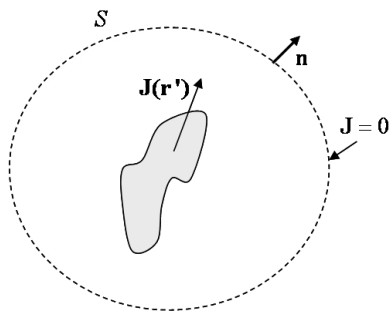


Figura 4.12: Evaluación del término monopolar en la expansión multipolar del potencial vector.

Entonces, el potencial vector lejos de la distribución de corriente se puede expresar, hasta la contribución dipolar, como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{cr^3} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'\right) \, d^3r'. \tag{4.81}$$

La componente i de $\mathbf{A}$ es

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{cr^3} \int \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'\right) J_i(\mathbf{r}') \, d^3r' \\ &= \frac{1}{cr^3} \int \left(\sum_j x_j x_j' \right) J_i(\mathbf{r}') \, d^3r' \\ &= \frac{1}{cr^3} \sum_j x_j \int x_j' J_i(\mathbf{r}') \, d^3r'. \end{aligned} \tag{4.82}$$

El integrando de la Ec. (4.82) puede escribirse como

$$x_j' J_i = \frac{1}{2}(x_j' J_i + x_i' J_j) + \frac{1}{2}(x_j' J_i - x_i' J_j). \tag{4.83}$$

El primer término de la Ec. (4.83) se puede expresar como

$$\begin{aligned} x_j' J_i + x_i' J_j &= x_j' \, \mathbf{J} \cdot \nabla x_i' + x_i' \, \mathbf{J} \cdot \nabla x_j' \\ &= \mathbf{J} \cdot (x_j' \nabla x_i' + x_i' \nabla x_j') \\ &= \mathbf{J} \cdot \nabla (x_i' x_j') \\ &= \nabla \cdot (xi' x_j' \mathbf{J}) - x_i' x_j' \, (\cancelto{0}{\nabla \cdot \mathbf{J}}). \end{aligned} \tag{4.84}$$

puesto que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ en Magnetostática. Luego,

$$\int (x'_j J_i + x'_i J_j)\, d^3r' = \int \nabla \cdot (xi' x'_j \mathbf{J})\, d^3r' \,. \tag{4.85}$$

Puesto que la distribución de $\mathbf{J}$ se encuentra localizada, ésta se puede encerrar completamente con una superficie S tal que $\mathbf{J} = 0$ sobre S. Empleando el teorema de la divergencia para tal S con normal $\hat{\mathbf{n}}$, tenemos

$$\int (x'_j J_i + x'_i J_j)\, d^3r' = \int \nabla \cdot (xi' x'_j \mathbf{J})\, d^3r' = \oint_S (xi' x'_j \mathbf{J}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da' = 0. \tag{4.86}$$

Luego, la Ec. (4.82) se puede escribir como

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{cr^3} \sum_j x_j \int x'_j J_i(\mathbf{r}')\, d^3r' && (4.87)\\ &= \frac{1}{2cr^3} \sum_j x_j \int (x'_j J_i(\mathbf{r}') - x'_i J_j(\mathbf{r}'))\, d^3r' && (4.88)\\ &= \frac{1}{2cr^3} \int \left[\left(\sum_j x_j x'_j \right) J_i(\mathbf{r}') - \left(\sum_j x_j J_j(\mathbf{r}') \right) x'_i \right] d^3r' && (4.89)\\ &= \frac{1}{2cr^3} \int \left[\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'\right) J_i(\mathbf{r}') - \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')\right) x'_i \right] d^3r'. && (4.90) \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2cr^3} \int \left[\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'\right) \mathbf{J}(\mathbf{r}') - \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r}\right) \mathbf{r}' \right] d^3r'. \tag{4.91}$$

Recordemos la identidad vectorial $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. Entonces,

$$\left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'\right) \mathbf{J} - \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}\right) \mathbf{r}' = \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}') = (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r}. \tag{4.92}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2cr^3} \int \left[(\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{r} \right] d^3r' \\ &= \left[\frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, d^3r' \right] \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}. && (4.93) \end{aligned}$$

La integral en la Ec. (4.93) depende solamente de propiedades de la distribución de corriente y se define como el *momento magnético dipolar* (o dipolo magnético) de la distribución,

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, d^3r'. \tag{4.94}$$

Entonces, el potencial vector para $r \gg r'$ se puede escribir como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{4.95}$$

Si $\mathbf{m}$ apunta en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, en coordenadas esféricas tenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{m \sin\theta}{r^2}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{4.96}$$

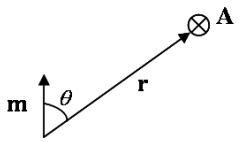


Figura 4.13: Potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ producido por un dipolo magnético $\mathbf{m}$.

La Ec. (4.95) es comparable al potencial escalar de un dipolo eléctrico $\mathbf{p}$, (Cap. 1),

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{4.97}$$

4.4 Momento magnético.

El integrando en la Ec. (4.94) es el momento magnético por unidad de volumen y se denomina *magnetización*,

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2c}\, \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'). \tag{4.98}$$

El campo magnético debido a un dipolo magnético $\mathbf{m}$ se puede calcular mediante $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, empleando el potencial vector de un dipolo, Ec. (4.95),

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right). \tag{4.99}$$

Usamos la identidad vectorial $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$. Haciendo $\mathbf{a} = \mathbf{m}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}/r^3$, vemos que los términos $\mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{m}) = 0$ y $(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{m} = 0$, puesto que $\mathbf{m}$ no depende de las coordenadas del punto de observación $\mathbf{r}$. Entonces,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}\,\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla)\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right). \tag{4.100}$$

Para evaluar el primer término en la Ec. (4.100), recordemos las siguientes relaciones,

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}; \qquad \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \tag{4.101}$$

de manera que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\mathbf{r}). \tag{4.102}$$

Luego,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi\mathbf{m}\,\delta(\mathbf{r}) - (\mathbf{m} \cdot \nabla)\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right). \tag{4.103}$$

Si $\mathbf{r} \neq 0$, el campo magnético del dipolo es

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -(\mathbf{m} \cdot \nabla)\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right). \tag{4.104}$$

La componente i de $\mathbf{B}$ en la Ec. (4.104) es

$$B_i = -\sum_j m_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_i}{r^3}\right), \tag{4.105}$$

donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Obtenemos,

$$\begin{aligned} B_i &= -\sum_j m_j \left[\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5}\right] \\ &= -\frac{m_i}{r^3} + \frac{3x_i}{r^5}\sum_j m_j x_j \\ &= -\frac{m_i}{r^3} + \frac{3x_i}{r^5}\,(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \tag{4.106}$$

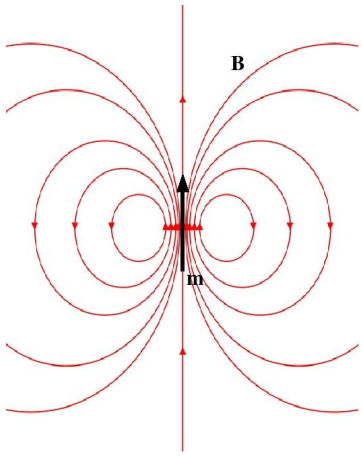


Figura 4.14: Campo magnético $\mathbf{B}$ producido por un dipolo magnético $\mathbf{m}$.

Luego,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\,. \tag{4.107}$$

El campo magnético producido por un dipolo magnético $\mathbf{m}$, Ec. (4.107), tiene la misma forma que el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico $\mathbf{p}$ (Cap. 1),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\,. \tag{4.108}$$

La analogía entre un dipolo magnético y un dipolo eléctrico puede ser extendida a otros fenómenos. En particular, la energía de interacción de un dipolo $\mathbf{m}$ con un campo magnético externo $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ es

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_{\text{ext}}, \tag{4.109}$$

y la fuerza ejercida por el campo externo sobre el dipolo magnético es

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_{\text{ext}}). \tag{4.110}$$

Ejemplos.

1. Momento magnético de un circuito de área A que lleva una corriente I.

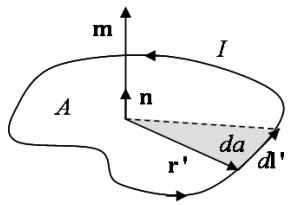


Figura 4.15: Momento magnético $\mathbf{m}$ de un circuito cerrado de corriente.

Para una distribución de corriente que fluye en un cable tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{2c}\int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right) d^3r' \\ &= \frac{I}{2c}\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'. \end{aligned} \tag{4.111}$$

El elemento de área del circuito $\mathcal{C}$ es $da' = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'\right|$. Luego,

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c}\, A\, \hat{\mathbf{n}}, \tag{4.112}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal al área del circuito, en la dirección $\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'$.

2. Momento magnético de un sistema de N partículas con carga q_i y masa μ_i en las posiciones $\mathbf{r}_i$, que se mueven con velocidad $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

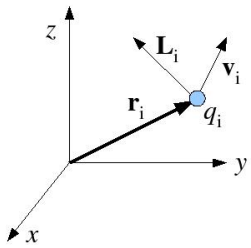


Figura 4.16: Momento angular $\mathbf{L}_i$ de una partícula con carga q_i, velocidad $\mathbf{v}_i$, en la posición $\mathbf{r}_i$.

La densidad de carga es $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ y la densidad de corriente es

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i). \tag{4.113}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} &= \frac{1}{2c}\int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right) d^3r' \\
&= \frac{1}{2c}\int \mathbf{r}' \times \sum_i q_i \mathbf{v}_i\, \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)\, d^3r' \\
&= \frac{1}{2c}\sum_i q_i \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{v}_i)\, \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)\, d^3r' \\
&= \frac{1}{2c}\sum_i q_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2c}\sum_i \frac{q_i}{\mu_i}(\mathbf{r}_i \times \mu_i \mathbf{v}_i) \\
&= \frac{1}{2c}\sum_i \frac{q_i}{\mu_i}\mathbf{L}_i. \qquad (4.114)
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mu_i \mathbf{v}_i$ es el momento angular de la partícula i. Si las partículas son idénticas, $\frac{q_i}{\mu_i} = \frac{q}{\mu}$ es constante. Entonces,

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2\mu c}\mathbf{L}\,, \qquad (4.115)$$

donde $\mathbf{L}$ es el momento angular total del sistema. El momento mágnético y el momento angular de un sistema con carga eléctrica están relacionados clásicamente mediante la Ec. (4.115).

4.5 Magnetostática en medios materiales.

Existen materiales, como la magnetita o los imanes naturales, que poseen magnetización a temperatura ambiente. La presencia de dipolos magnéticos a nivel atómico o molecular contribuye a crear una magnetización macroscópica $\mathbf{M}$ en el medio. Por otro lado, un campo magnético puede contribuir a generar corrientes en un medio material que dan lugar a momentos dipolares magnéticos inducidos. La magnetización, ya sea intrínseca o inducida, produce un campo magnético adicional al campo creado por las corrientes libres en el medio.

El potencial vector debido a una densidad de corriente libre $\mathbf{J}$ es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r'. \qquad (4.116)$$

Igualmente, un dipolo magnético $\mathbf{m}$ puede producir un potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\,. \tag{4.117}$$

El momento dipolar de un elemento de volumen que posee una magnetización $\mathbf{M}$ es $d\mathbf{m} = \mathbf{M}\, d^3r$. Luego, el potencial vector producido en la posición $\mathbf{r}$ por un elemento de volumen d^3r' ubicado en $\mathbf{r}'$ en un medio material donde existen una densidad de corriente $\mathbf{J}$ y una magnetización $\mathbf{M}$ será

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{J}\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r' + \frac{\mathbf{M} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, d^3r'. \tag{4.118}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r' + \int \frac{\mathbf{M} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, d^3r'. \tag{4.119}$$

Consideremos el segundo término en la Ec. (4.119),

$$\int \frac{\mathbf{M} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, d^3r' = \int \mathbf{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) d^3r'. \tag{4.120}$$

Utilizamos la identidad vectorial $\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla\psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a}$. Haciendo $\mathbf{a} = \mathbf{M}$ y $\psi = \dfrac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) d^3r' \quad &= \quad \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r' \\ &\quad - \int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) d^3r'. \end{aligned} \tag{4.121}$$

El segundo término en la Ec. (4.121) se puede convertir en una integral de superficie mediante el teorema integral

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, d^3r = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}\, da, \qquad \forall \mathbf{A}. \tag{4.122}$$

Para demostrar el teorema Ec. (4.122), consideremos un vector constante arbitrario $\mathbf{c}$ y definamos

$$\mathbf{X} = \int_V \nabla \times \mathbf{A}\, d^3r. \tag{4.123}$$

Luego,

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{X} = \int_V (\mathbf{c}\cdot\nabla\times\mathbf{A})\, d^3r. \tag{4.124}$$

Usamos la identidad vectorial $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{c})$. Pero $\nabla\times\mathbf{c} = 0$, puesto que $\mathbf{c}$ es un vector constante. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}\cdot\mathbf{X} &= \int_V \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{c})\, d^3r \\
&= \oint_S (\mathbf{A}\times\mathbf{c})\cdot\hat{\mathbf{n}}\, da \qquad \text{(por el teorema de la divergencia)} \\
&= \mathbf{c}\cdot\oint_S (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{A})\, da. \qquad (4.125)
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario, se cumple el teorema integral Ec. (4.122).

Empleamos este teorema con una superficie S ubicada completamente fuera del medio material, de modo que $\mathbf{M} = 0$ sobre S. Entonces, para tal S tenemos

$$\int \nabla'\times\left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d^3r' = \oint_S \hat{\mathbf{n}}\times\left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) da' = 0. \tag{4.126}$$

Luego, la Ec. (4.119) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' + \int \frac{\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \\
&= \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}') + c\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \\
&= \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}_{\text{ef}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r', \qquad (4.127)
\end{aligned}$$

donde hemos definido una *corriente efectiva*

$$\mathbf{J}_{\text{ef}} \equiv \mathbf{J} + c\nabla\times\mathbf{M}. \tag{4.128}$$

El potencial vector en un medio puede puede considerarse como debido a una densidad de corriente $\mathbf{J}_{\text{ef}}$. El término $\nabla\times\mathbf{M}$ se puede interpretar como una corriente adicional contribuida por la magnetización presente en el medio.

El campo magnético $\mathbf{B}$ correspondiente debe satisfacer la segunda ecuación de la Magnetostática, Ec. (4.8), con $\mathbf{J}_{\text{ef}}$,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}_{\text{ef}}. \tag{4.129}$$

Sustituyendo $\mathbf{J}_{\text{ef}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\,(\mathbf{J} + c\nabla \times \mathbf{M}) \\ \nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}) &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}, \end{aligned} \tag{4.130}$$

donde definimos el *campo magnético* en el medio,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \tag{4.131}$$

En muchos medios isotrópicos se encuentra experimentalmente que la magnetización es proporcional a $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{M} = \chi_{\text{m}}\,\mathbf{H}, \tag{4.132}$$

donde χ_{m} es una propiedad del medio denominada *susceptibilidad magnética*. Luego, se puede expresar

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi_{\text{m}})\mathbf{H} = \mu\,\mathbf{H}. \tag{4.133}$$

donde $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$ se llama *permeabilidad magnética* del medio. La relación $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$ para campos magnéticos es análoga a la relación $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ para campos eléctricos en un medio. Sin embargo, mientras que siempre $\epsilon > 1$ en medios materiales, la permeabilidad magnética puede tener valores

$$\begin{aligned} &\mu > 1, \quad \chi > 0, \quad \text{materiales paramagnéticos,} \\ &\mu < 1, \quad \chi < 0, \quad \text{materiales diamagnéticos.} \end{aligned}$$

Los materiales paramagnéticos se caracterizan por poseer momentos magnéticos permanentes que tienden a alinearse con el campo, de manera que $\mathbf{M}$ es paralelo a $\mathbf{H}$. En materiales diamagnéticos no existen momentos magnéticos permanentes, sino que éstos son inducidos por el campo; en este caso $\mathbf{M}$ es opuesto a $\mathbf{H}$.

Adicionalmente, existen materiales *ferromagnéticos* para los cuales no se cumple la relación $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, sino una relación funcional no lineal

$$\mathbf{B} = F(\mathbf{H}). \tag{4.134}$$

El fenómeno de *histéresis* es un ejemplo de una relación no trivial entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$, donde la función $F(\mathbf{H})$ depende de la historia de la preparación del material.

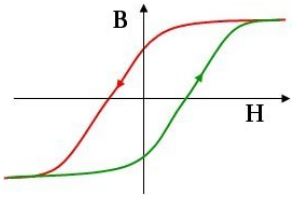


Figura 4.17: Histéresis.

Las ecuaciones de la Magnetostática en medios materiales toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4.135}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{4.136}$$

Estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones para la Electrostática en medios materiales,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \tag{4.137}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{4.138}$$

Las condiciones de frontera en la superficie que separa dos medios caracterizados por permeabilidades magnéticas μ_1 y μ_2 son también análogas a las correspondientes en Electrostática,

$$\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.139}$$

$$\mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{sup}}. \tag{4.140}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ son los vectores normal y tangente a la superficie, respectivamente, y $\mathbf{J}_{\text{sup}}$ es la densidad de corriente sobre la superficie. Si $\mathbf{J}_{\text{sup}} = 0$, tanto la componente normal de $\mathbf{B}$ como la componente tangencial de $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$, son continuas.

Por último, existen materiales *superconductores* que no son penetrados por campos magnéticos ni eléctricos para temperaturas T por debajo de cierto valor crítico T_c. La resistencia de un superconductor se hace cero para temperaturas $T < T_c$. Para el mercurio, $Tc = 4.2^o$K. La corriente eléctrica puede permanecer por largo tiempo (10^5 años) en un circuito superconductor sin fuente externa, una vez establecida. En los últimos años, se han descubierto materiales cerámicos (no metálicos) superconductores a altas temperaturas.

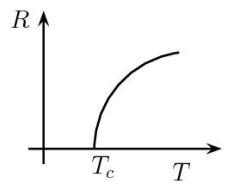


Figura 4.18: Temperatura crítica para superconductividad.

La conductividad en un superconductor $\sigma \propto R^{-1} \to \infty$ para $T < T_c$. Puesto que $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, si hay una corriente finita establecida en un circuito superconductor, debemos tener $\mathbf{E} = 0$ en el superconductor. La ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{4.141}$$

implica entonces que $\mathbf{B}$ debe ser constante dentro del superconductor. Luego, si inicialmente $\mathbf{B} = 0$ cuando $T > Tc$, entonces $\mathbf{B} = 0$ para $T < Tc$, aunque se apliquen campos después. Por otro lado, si inicialmente $\mathbf{B} \neq 0$ cuando $T > Tc$, entonces para $T < Tc$ se observa el *efecto Meissner*: el campo magnético es expulsado del superconductor. El superconductor actúa como un medio diamagnético perfecto. Éste es un efecto de origen cuántico; la explicación completa del fenómeno de superconductividad requiere de la Mecánica Cuántica.

Resumen

1. Ecuaciones de Maxwell para la Magnetostática,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}.$$

2. Densidad de corriente eléctrica,

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}.$$

3. Ley de Ohm,

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}_{\text{ext}}$$

4. Ecuaciones de la Magnetostática en términos del potencial vector $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$
$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}.$$

5. Potencial vector de una distribución de corriente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'.$$

6. Campo magnético debido a una densidad de corriente,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d^3r'.$$

7. Ley de Biot-Savart en forma diferencial,

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c}\,\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}.$$

8. Ley de Ampère en forma integral,

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\,I_{\text{enc}}.$$

9. Fuerza magnética entre dos circuitos,

$$\mathbf{F}_{\text{mag}12} = -\frac{I_1\,I_2}{c^2}\int_{\mathcal{C}_1}\int_{\mathcal{C}_2}\frac{(d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}.$$

10. Dipolo magnético de una distribución de corriente,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, d^3r'.$$

11. Potencial vector de un dipolo magnético,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

12. Campo magnético de un dipolo magnético,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\,.$$

13. Energía de un dipolo en un campo magnético externo.

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_{\text{ext}}$$

14. Ecuaciones de la Magnetostática en medios materiales,

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$
$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}.$$

donde $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$.

15. Condiciones de frontera en la superficie que separa dos medios,

$$\mathbf{B}_2\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{B}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}$$
$$\mathbf{H}_2\cdot\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{H}_1\cdot\hat{\mathbf{t}} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}_{\text{sup}}.$$

4.6 Problemas.

1. Una esfera de radio a y con densidad de carga superficial σ está rotando con velocidad angular constante ω alrededor de un eje que pasa por su centro.
   a) Encuentre el potencial vector fuera de la esfera.
   b) Encuentre el campo magnético fuera de la esfera.

2. Un tubo conductor cilíndrico con radio interior a y radio externo b lleva una corriente uniforme I. Encuentre el campo magnético producido en todo el espacio.

3. Un solenoide de longitud finita L, radio a y con n vueltas por unidad de longitud, lleva una corriente I. Calcule el campo magnético dentro del solenoide en cualquier punto sobre su eje.

4. Tres cables rectos, infinitos y coplanares están igualmente espaciados por una distancia a y llevan una corriente I cada uno. La dirección de la corriente en el cable central es opuesta a la de los cables externos.
   a) Encuentre los puntos del espacio donde el campo magnético se anula.
   b) Si el cable central se desplaza una distancia $x \ll a$ sobre el plano común, calcule la frecuencia de oscilación del movimiento resultante.

5. Un electrón gira con velocidad angular constante ω en un plano ecuatorial alrededor de una esfera conductora de conectada a tierra, a una distancia a del centro de la esfera. El radio de la esfera es $b < a$.
   a) Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en el centro de la esfera.
   b) Calcule el momento magnético resultante.

6. Un conductor cilíndrico de radio a tiene un hueco de radio b paralelo a su eje y centrado a una distancia d del eje del cilindro, con $d + b < a$. Una corriente I fluye a lo largo del cilindro. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en el hueco.

7. Un disco de radio a y densidad de carga superficial uniforme σ rota con velocidad angular constante ω sobre un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro. Calcule el momento magnético resultante.

8. Demuestre que el vector potencial correspondiente a un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}$ se puede expresar como $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

9. Un cascarón cilíndrico muy largo, de radio a, posee una densidad superficial de carga σ y rota sobre su eje con velocidad angular constante ω. Encuentre el campo magnético dentro y fuera del cilindro.

10. a) Demuestre que el campo magnético y la magnetización en un medio material libre de corrientes satisfacen la relación

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l},$$

b) Encuentre el campo magnético dentro de una barra de imán de radio a, infinitamente larga, que posee magnetización uniforme $\mathbf{M}$ a lo largo de su eje.

11. Un cilindro dieléctrico de longitud infinita y radio R posee una polarización eléctrica $\mathbf{P} = kr\hat{\mathbf{r}}$, donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección radial y k es una constante. El cilindro rota alrededor de su eje con velocidad angular constante no relativista ω. Calcule el campo magnético generado dentro y fuera del cilindro.

Capítulo 5

Campos electromagnéticos dependientes del tiempo.

5.1 Ley de Faraday y ecuaciones de Maxwell.

Los experimentos de Faraday constituyen las primeras observaciones cuantitativas de los efectos de campos electromagnéticos dependientes del tiempo. Faraday encontró que una corriente eléctrica transitoria aparece en un circuito C en las siguientes situaciones:

i) se enciende o se apaga una corriente en un circuito cercano;

ii) se mueve un circuito cercano por el cual fluye una corriente;

iii) se mueve un imán en relación a C.

En todos los casos, la aparición de corriente en C ocurre cuando las corrientes adyacentes cambian, o cuando existe movimiento relativo entre C y los fuentes de campos magnéticos. Faraday interpretó que la corriente transiente en C se debía al cambio de flujo del campo magnético Φ_m encerrado por C, definido como

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da, \tag{5.1}$$

donde S es el área encerrada por C, cuya normal es $\hat{\mathbf{n}}$, y $\mathbf{B}$ es el campo magnético en la vecindad de C.

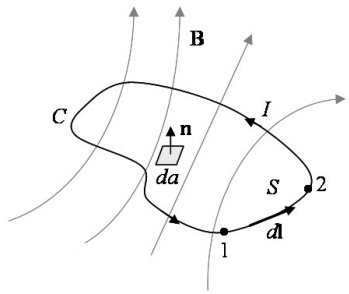


Figura 5.1: Flujo magnético y corriente inducida en un circuito C.

Por otro lado, la aparición de una corriente en C está asociada a la existencia de una diferencia de potencial sobre C. La diferencia de potencial entre dos puntos del circuito C es

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \tag{5.2}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico en la posición del elemento de longitud $d\mathbf{l}$ de C. Si $\varphi_1 > \varphi_2$, la corriente fluye del punto 1 al punto 2 en C. La diferencia de potencial total a lo largo del circuito se denomina *fuerza electromotriz*, y se define como

$$\varepsilon = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \tag{5.3}$$

La *ley de inducción* descubierta por Faraday se expresa matemáticamente de la siguiente forma

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_m}{dt}. \tag{5.4}$$

El signo menos es la expresión de la *ley de Lenz*, que establece que la corriente inducida en C (y el flujo magnético asociada a esa corriente) ocurre en una dirección tal que se opone siempre al cambio de flujo a traves de C. La constante de proporcionalidad depende de la escogencia del sistema de unidades para medir cantidades eléctricas y magnéticas. En el sistema GCS, la constante, medida experimentalmente, es $1/c$, donde c es la velocidad de la luz.

La ley de Faraday Ec. (5.3) se puede escribir como

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da. \tag{5.5}$$

Usando el teorema de Stokes en el lado izquierdo y en un sistema de referencia donde C esté en reposo, podemos escribir

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = -\frac{1}{c} \int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da. \tag{5.6}$$

Calculamos la derivada total de $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del circuito, que es cero en el sistema de referencia empleado. Luego, $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} = \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Entonces, podemos escribir la Ec. (5.6) como

$$\int_S \left[\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 0. \tag{5.8}$$

Puesto que el circuito C y el área encerrada S son arbitrarios, el integrando debe ser cero en todo punto del espacio,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{5.9}$$

La Ec. (5.9) es la ley de inducción de Faraday en forma diferencial. Ambos campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ están definidos en el sistema de referencia donde C está en reposo. Sin embargo, el principio de relatividad implica que la ley de Faraday es válida en cualquier sistema de referencia inercial.

Hasta la época de Maxwell, las ecuaciones que describían los fenómenos electromagnéticos conocidos en un medio material podían escribirse como

(i)	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$	(Ley de Coulomb)
(ii)	$\nabla \times \mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	(Ley de Faraday)
(iii)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(ausencia de monopolos magnéticos)
(iv)	$\nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{J}$	(Ley de Ampère)

donde $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ en un medio isotrópico. Además, se conocía experimentalmente la conservación de la carga eléctrica,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \tag{5.10}$$

la cual puede ser descrita mediante la ecuación de continuidad,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) - \rho\cancelto{0}{(\nabla\cdot\mathbf{v})} \\ &\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0, \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, puesto que la velocidad es independiente de la posición. Sin embargo, la Ley de Ampère en su forma (iv) fue derivada para corrientes estacionarias y da

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c}\nabla\cdot\mathbf{J} = 0, \tag{5.12}$$

lo cual es inconsistente con la ecuación de continuidad, Ec. (5.11), en situaciones dependientes del tiempo, donde $\nabla\cdot\mathbf{J} \neq 0$.

Utilizando la ley de Coulomb (i), la ecuación de continuidad puede expresarse como

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} &= \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{D}) \\ &= \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) \\ &= \nabla\cdot\left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Maxwell propuso sustituir

$$\mathbf{J} \to \mathbf{J} + \mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{5.14}$$

en la Ley de Ampère (iv) como una generalización para campos dependientes del tiempo. Maxwell llamó *corriente de desplazamiento eléctrico* al término adicional $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$. Entonces, la Ley de Ampère se convierte en

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{5.15}$$

Con la adición de la corriente de desplazamiento, las ecuaciones de Maxwell en medios materiales se convierten en

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \text{(i)}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(iii)}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \qquad \text{(iv)}$$

La ecuación de continuidad Ec. (5.11) es ahora consecuencia de las ecuaciones de Maxwell. La adición del término $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ tiene consecuencias importantes: un campo eléctrico que varía en el tiempo puede dar lugar a un campo magnético, aún en ausencia de corrientes. Por ejemplo, un campo eléctrico que varía en el tiempo entre dos placas de un condensador, produce un campo magnético. Esto es análogo a la ley de Faraday (ii), donde un campo magnético dependiente del tiempo produce un campo eléctrico. De esta manera, los campo eléctricos y magnéticos dependientes del tiempo se acoplan y las ecuaciones de Maxwell permiten la existencia de ondas electromagnéticas. Las ecuaciones de Maxwell forman la base de todos los fenómenos electromagnéticos clásicos.

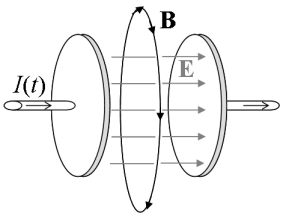


Figura 5.2: Campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético.

En el vacío, donde $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad (1)$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (3)$$
$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \qquad (4)$$

La Ec. (3) implica que $\mathbf{B}$ puede expresarse como el rotacional de un vector,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5.16}$$

El campo vectorial $\mathbf{A}$ se denomina *potencial vector*, como vimos en el Cap. 4. Sustituyendo en la Ec. (2), tenemos

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{5.17}$$

El término entre paréntesis en la Ec. (5.17) puede expresarse como el gradiente de un campo escalar,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla\varphi \\ \Rightarrow \quad \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

La Ec. (5.18) se reduce a la correspondiente expresión en Electrostática cuando los campos son independientes del tiempo. Las Ecs. (5.16 y (5.18) implican que, dados los potenciales $\mathbf{A}$ y φ, se pueden determinar los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden expresar en función de los potenciales $\mathbf{A}$ y φ. Sustituyendo la Ec. (5.18) en la ecuación de Maxwell (1), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) &= 4\pi\rho \\ \nabla^2\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi\rho. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Sustituyendo las Ecs. (5.16) y (5.18) en la ecuación de Maxwell (4), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Las Ecs. (5.19) y (5.20) constituyen cuatro ecuaciones acopladas de segundo orden para el potencial escalar φ y las tres componentes A_i del potencial vectorial $\mathbf{A}$, en función de las fuentes ρ y $\mathbf{J}$. Estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell (1)-(4), que corresponden a ocho ecuaciones de primer orden para las componentes E_i y B_i de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$.

5.2 Transformaciones de calibre.

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales $\mathbf{A}$ y φ,

$$\nabla^2\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -4\pi\rho, \tag{5.21}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{5.22}$$

Las Ecs. (5.21) y (5.22) pueden desacoplarse haciendo uso de la indeterminación implícita en las definiciones de los potenciales $\mathbf{A}$ y φ. Nótese que el campo magnético es invariante si al potencial vector se le añade el gradiente de algún campo escalar Λ,

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda. \tag{5.23}$$

Esto significa que $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}' = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\nabla\Lambda = \nabla\times\mathbf{A}$.

Por otro lado, el campo eléctrico tampoco cambia si el potencial escalar se transforma simultáneamente de la forma

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}. \tag{5.24}$$

En este caso,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = -\nabla\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} &= -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Lambda \\ &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Las transformaciones Ecs. (5.23) y (5.24) que dejan invariantes los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ se llaman *transformaciones de calibre*. La invarianza de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ ante las transformaciones de calibre revela la existencia de simetrías fundamentales en

las ecuaciones de Maxwell. Aunque no es materia correspondiente a este curso, las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar como ecuaciones de movimiento a partir de un Lagrangiano apropiado que describe el campo electromagnético. Por el teorema de Noether, sabemos que una transformación que deja invariante el Lagrangiano y, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de un sistema, está asociada a una cantidad conservada. Se puede demostrar que la simetría de calibre presente en las ecuaciones de Maxwell implica la ecuación de continuidad, Ec. (5.11); es decir, la conservación local de la carga eléctrica.

La libertad que existe en las transformaciones de calibre permite escoger los potenciales $\mathbf{A}$ y φ tal que satisfagan alguna condición específica. En particular, la relación

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{5.26}$$

se llama *calibre de Lorentz* y simplifica las Ecs. (5.19) y (5.20) en la forma

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{5.27}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}. \tag{5.28}$$

Las Ecs. (5.27) y (5.28) constituyen dos ecuaciones de onda inhomogéneas e independientes para $\mathbf{A}$ y φ las cuales, junto con el calibre de Lorentz, son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell. Note que el calibre de Lorentz para los potenciales transformados $\mathbf{A}'$ y φ', en las Ecs. (5.23) y (5.24), implica que el campo escalar Λ satisface una ecuación de onda,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Lambda + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} &= 0 \\ \Rightarrow \quad \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Otra condición sobre las transformaciones de calibres que resulta útil es el *calibre de Coulomb*, donde

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{5.30}$$

Esta condición fue utilizada en Magnetostática, Cap. 4. Con esta escogencia de calibre, la Ec. (5.19) para el potencial $\varphi(\mathbf{r}, t)$ queda

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \tag{5.31}$$

cuya solución es

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \int \frac{\rho\,(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'. \tag{5.32}$$

Si ρ es independiente del tiempo, el potencial φ en la Ec. (5.2) se reduce al potencial de Coulomb en Electrostática, como vimos en el Cap. 1. Con el calibre de Coulomb, la Ec. (5.22) para el potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ conduce a la ecuación inhomogénea de onda,

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{5.33}$$

El calibre de Coulomb para el potencial $\mathbf{A}'$ en la Ec. (5.23), es equivalente a haber escogido un campo Λ tal que $\nabla^2\Lambda = 0$.

5.3 Energía del campo magnético.

Un campo magnético posee una energía almacenada similar a la energía acumulada en un campo eléctrostático (Cap. 1). La energía del campo magnético proviene de la interacción entre distribuciones de corrientes; es equivalente al trabajo realizado para traer circuitos de corriente desde el infinito hasta formar una configuración dada.

El trabajo para traer un primer circuito $\mathcal{C}_1$ desde el infinito hasta una posición dada es cero, puesto que no hay campos magnéticos externos presentes y no contamos auto-energías. Consideremos dos circuitos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ con corrientes constantes I_1 y I_2, respectivamente, en una configuración dada. Sean S_1 y S_2 las áreas encerradas por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, y sean $\hat{\mathbf{n}}_1$ y $\hat{\mathbf{n}}_2$ sus vectores normales correspondientes. Recordemos que la fuerza magnética sobre $\mathcal{C}_2$ debido a $\mathcal{C}_1$ es (Cap. 4),

$$\mathbf{F}_{\mathrm{mag}\,21} = -\frac{I_1\,I_2}{c^2}\oint_{\mathcal{C}_1}\oint_{\mathcal{C}_2}\frac{(d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2)\,\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{5.34}$$

donde hemos denotado $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ como el vector de posición relativa desde $d\mathbf{l}_1$ a $d\mathbf{l}_2$. El trabajo realizado por un agente externo en contra de la fuerza magnética

para traer el circuito $\mathcal{C}_2$ desde el infinito hasta su posición relativa a $\mathcal{C}_1$, es

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= -\int_{\infty}^{r} \mathbf{F}_{\text{mag}\,21}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \frac{I_1\, I_2}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \int_{\infty}^{r} \frac{dr'}{r'^2} \\ &= -\frac{I_1\, I_2}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

El signo negativo en W_{ext} es compatible con el hecho que circuitos con corrientes paralelas; es decir $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 > 0$, se atraen (Cap. 4); por lo tanto se debe hacer un trabajo negativo para acercarlos. Similarmente, se requiere realizar un trabajo negativo en contra de la fuerza eléctrica para acercar dos cargas cuyos signos son opuestos.

Sin embargo, existe una contribución adicional al trabajo necesario para construir el campo magnético en una configuración de dos circuitos de corriente. A medida que se acercan, cada circuito crea un campo que produce un cambio de flujo magnético a través del área encerrada por el otro circuito. La ley de Faraday implica entonces que campos eléctricos son inducidos en los circuitos, los cuales alteran las corrientes en cada circuito. Por lo tanto, el agente externo debe realizar un trabajo adicional en contra de los campos eléctricos inducidos para mantener los valores constantes establecidos para las corrientes en cada circuito, hasta alcanzar la configuración final.

El flujo del campo magnético $\mathbf{B}_2$ del circuito $\mathcal{C}_2$ a través del circuito $\mathcal{C}_1$ es

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{S_1} \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, da_1 \\ &= \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, da_1 \\ &= \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{l}_1 \qquad \text{(usando el teorema de Stokes).} \end{aligned} \tag{5.36}$$

El potencial vector $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1)$ es

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{I_2}{c} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{I_2}{c} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{r}. \tag{5.37}$$

Sustituyendo en la Ec. (5.36), obtenemos

$$\Phi_{21} = \frac{I_2}{c} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}. \tag{5.38}$$

Se acostumbra definir la *inductancia mutua* de dos circuitos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ como la cantidad simétrica

$$M_{12} = M_{21} \equiv \frac{1}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}, \tag{5.39}$$

la cual depende exclusivamente de la geometría y de la disposición relativa de los circuitos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

La fuerza electromotriz inducida en $\mathcal{C}_1$ debido al cambio del flujo magnético Φ_{21} al mover $\mathcal{C}_2$ hacia $\mathcal{C}_1$ es

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{21}}{dt}. \tag{5.40}$$

La potencia (energía por unidad de tiempo) disipada en el circuito $\mathcal{C}_1$ es $I_1^2 R_1 = I_1 \varepsilon_1$, donde $R_1 = \varepsilon_1 / I_1$ es la resistencia de $\mathcal{C}_1$. Luego, el trabajo por unidad de tiempo que debe suministrar el agente externo para contrarrestar la disipación causada por la fuerza electromotriz inducida y mantener I_1 constante es

$$\frac{dW_1}{dt} = -I_1 \varepsilon_1 = \frac{I_1}{c} \frac{d\Phi_{21}}{dt}. \tag{5.41}$$

Integrando con I_1 constante, obtenemos

$$W_1 = \frac{1}{c} I_1 \, \Phi_{21} = I_1 \, I_2 \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}. \tag{5.42}$$

Similarmente, el circuito $\mathcal{C}_2$ disipa una energía $W_2 = \frac{1}{c} I_1 \, \Phi_{12} = W_1$ debido al cambio de flujo Φ_{12}. La energía total disipada debido a las fuerzas electromotrices inducidas mutuamente en ambos circuitos debe ser suministrada por el trabajo realizado por el agente externo que construye la configuración. Este trabajo es

$$\begin{aligned} W_{\text{fem}} &= W_1 + W_2 \\ &= 2 \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Luego, el trabajo total requerido para alcanzar la configuración final de los dos circuitos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es

$$\begin{aligned} W &= W_{\text{ext}} + W_{\text{fem}} \\ &= -\frac{I_1\, I_2}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} + 2\, \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \\ &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Este trabajo total es igual a la energía potencial U_{mag} almacenada en el campo magnético producido por la configuración de los dos circuitos. Por extensión, la energía potencial total almacenada en el campo magnético de una configuración de N circuitos con corrientes I_i $(i = 1, \ldots, N)$ es

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i\,,\,j \\ i \neq j}} \frac{I_i I_j}{c^2} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\,, \tag{5.45}$$

donde el factor $\frac{1}{2}$ se introduce para no repetir la suma de términos simétricos $i \leftrightarrow j$.

La generalización de la Ec. (5.45) para densidades de corriente generales es

$$\begin{aligned} U_{\text{mag}} &= \frac{1}{2c^2} \int\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r\, d^3r' \\ &= \frac{1}{2c^2} \int \mathbf{J}(\mathbf{r})\, d^3r \cdot \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r. \end{aligned} \tag{5.46}$$

donde hemos empleado la equivalencia $I d\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{J} d^3r$ para integrales de corrientes en cables. Utilizando la expresión para el potencial vector

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r \tag{5.47}$$

y la ley de Ampère, $\nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{J}$, podemos escribir la Ec. (5.46) como

$$\begin{aligned} U_{\text{mag}} &= \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}\, d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{A})\, d^3r - \frac{1}{8\pi} \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\, d^3r, \end{aligned} \tag{5.48}$$

donde hemos usado la identidad vectorial $(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

Usamos el teorema de la divergencia para la integral

$$\int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\, d^3r = \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da. \tag{5.49}$$

Puesto que la superficie S es arbitraria, se puede tomar en el infinito, donde los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$ tienden a cero. Luego,

$$\int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\, d^3r = \oint_{S\to\infty} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = 0. \tag{5.50}$$

Entonces, la energía del campo magnetostático queda

$$\begin{aligned} U_{\text{mag}} &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, d^3r \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}\, d^3r \\ &= \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{B}|^2\, d^3r. \end{aligned} \tag{5.51}$$

La densidad de energía del campo magnético se define como

$$u_{\text{mag}} = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{B}|^2. \tag{5.52}$$

Esta expresión es análoga a la correspondiente a la densidad de energía de un campo eléctrico,

$$u_{\text{elec}} = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2. \tag{5.53}$$

En general, la densidad de energía de un campo electromagnético, cuando ambos campos eléctrico y magnético están presentes en una región del espacio, es

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \right). \tag{5.54}$$

5.4 Conservación de energía del campo electromagnético.

El trabajo por unidad de tiempo (potencia) realizado por un campo electromagnético $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, sobre una carga q que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = q\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)\cdot\mathbf{v} = q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \tag{5.55}$$

El campo magnético no realiza trabajo, puesto que la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad. Consideremos un volumen V que contiene una distribución de cargas ρ en movimiento, en presencia de campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. El trabajo por unidad de tiempo hecho por los campos es

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\,d^3r = \int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,d^3r. \tag{5.56}$$

Esta potencia representa la conversión de energía electromagnética en energía mecánica empleada en mover las cargas y producir corrientes. Debe ser balanceada por el cambio de energía del campo electromagnético por unidad de tiempo en el volumen V. Entonces, expresamos la Ec. (5.56) en términos de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, usando las ecuaciones de Maxwell. Sustituimos $\mathbf{J}$ mediante la ley de Ampère,

$$\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J} = \nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{5.57}$$

y obtenemos

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,d^3r = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[c\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]d^3r. \tag{5.58}$$

Usamos la identidad vectorial

$$\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{5.59}$$

para obtener

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,d^3r = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[c\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - c\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right]d^3r. \tag{5.60}$$

Sustituimos la ley de Faraday,

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5.61}$$

de manera que

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\, d^3r = -\frac{1}{4\pi}\int_V \left[c\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right] d^3r. \tag{5.62}$$

Recordemos que la densidad de energía (energía por unidad de volumen) del campo electromagnético es

$$u_{\rm em} = \frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2), \tag{5.63}$$

entonces, su derivada temporal es

$$\frac{\partial u_{\rm em}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right). \tag{5.64}$$

Luego, podemos escribir la Ec. (5.62) como

$$\int_V \left[\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} + \frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \frac{\partial u_{\rm em}}{\partial t}\right] d^3r = 0. \tag{5.65}$$

Puesto que el volumen V es arbitrario, el integrando en la Ec. (5.65) debe ser cero. Se acostumbra escribir

$$\frac{\partial u_{\rm em}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} + \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = 0, \tag{5.66}$$

donde hemos definido el *vector de Poynting* como

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}. \tag{5.67}$$

El vector de Poynting representa el flujo de energía del campo electromagnético por unidad de tiempo (energía/área×tiempo) en la dirección de $\mathbf{S}$. La Ec. (5.56) se conoce como el *teorema de Poynting* y expresa la conservación de energía en una región donde coexisten campos electromagnéticos, cargas y corrientes: el cambio de energía del campo electromagnético por unidad de tiempo en un volumen, más el flujo de energía por unidad de tiempo a través de la superficie que encierra ese volumen, más el trabajo total hecho por los campos dentro de ese volumen, debe ser cero.

Si no hay cargas ni corrientes en V, tenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_{\rm em}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0, \tag{5.68}$$

análoga a la ecuación de conservación de la carga eléctrica,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0. \tag{5.69}$$

5.5 Momento del campo electromagnético.

La fuerza electromagnética sobre una partícula con carga q en presencia de campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ es

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) . \tag{5.70}$$

Si consideramos una distribución de cargas ρ en un volumen V donde existan campos electromagnéticos, la fuerza por unidad de volumen será

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \\ &= \rho\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{5.71}$$

donde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ es la densidad de corriente. La segunda ley de Newton correspondiente al cambio de momento de todas las cargas y corrientes en V se puede expresar como

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt} = \int_V \left(\rho\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}\right) d^3r. \tag{5.72}$$

Usando las ecuaciones de Maxwell, podemos expresar

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \mathbf{E} \tag{5.73}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{5.74}$$

y sustituir en la Ec. (5.72), para obtener

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}\right] d^3r. \tag{5.75}$$

El término con la derivada parcial temporal se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c}\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}), \end{aligned} \tag{5.76}$$

donde hemos empleado la ley de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \tag{5.77}$$

Sustituyendo en la Ec. (5.75), tenemos

$$\frac{d\mathbf{P}_{\rm mec}}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left[(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})\right] d^3r\,.$$

Podemos escribir

$$\frac{d\mathbf{P}_{\rm mec}}{dt} + \frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int_V (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\; d^3r =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_V \left[(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} + (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + (\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{E}\right] d^3r, \tag{5.78}$$

donde hemos sumado el término $(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} = 0$ en el lado izquierdo. Podemos usar la identidad vectorial

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}, \tag{5.79}$$

con $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{E}$, para expresar

$$\begin{aligned} \nabla(E^2) &= 2\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E}) + 2(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E} \\ \Rightarrow (\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{E} &= (\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla(E^2)\,. \end{aligned} \tag{5.80}$$

Similarmente,

$$(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2}\nabla(B^2)\,. \tag{5.81}$$

La integral de volumen de los campos en el lado izquierdo de la Ec. (5.78) puede interpretarse como el *momento total del campo electromagnético* en el volumen V,

$$\mathbf{P}_{\rm em} \equiv \frac{1}{4\pi c}\int_V (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\, d^3r. \tag{5.82}$$

El integrando puede ser interpretado como la *densidad de momento electromagnético*,

$$\mathbf{g} \equiv \frac{1}{4\pi c}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S}\,. \tag{5.83}$$

Sustituyendo en la Ec. (5.78), obtenemos

$$\frac{d\mathbf{P}_{\rm mec}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{\rm em}}{dt} =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_V \left[(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E} + (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \frac{1}{2}\nabla\left(E^2 + B^2\right)\right] d^3r. \tag{5.84}$$

Consideremos las componentes i de los siguientes términos en la Ec. (5.84),

$$\begin{aligned}
[(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}+(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}]_i &= \sum_j E_i\frac{\partial E_j}{\partial x_j}+\sum_j E_j\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\\
[(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}]_i &= \sum_j B_i\frac{\partial B_j}{\partial x_j}+\sum_j B_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\\
\left[\nabla\left(E^2+B^2\right)\right]_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(E^2+B^2\right)=\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(E^2+B^2\right)\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Luego, la componente i de la Ec. (5.84) se puede escribir como

$$\left[\frac{d\mathbf{P}_{\rm mec}}{dt}+\frac{d\mathbf{P}_{\rm em}}{dt}\right]_i=\int_V\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{4\pi}(E_iE_j+B_iB_j)-\frac{1}{8\pi}\delta_{ij}\left(E^2+B^2\right)\right]d^3r.$$

Se define el *tensor de tensiones de Maxwell* para un campo electromagnético como

$$T_{ij}\equiv\frac{1}{4\pi}\left[(E_iE_j+B_iB_j)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E^2+B^2\right)\right], \tag{5.85}$$

de modo que podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{P}_{\rm mec}+\mathbf{P}_{\rm em}\right]_i=\int_V\sum_j\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\,d^3r\,. \tag{5.86}$$

El teorema de la divergencia para un vector $\mathbf{A}$ se puede expresar en la forma

$$\int_V\sum_j\frac{\partial A_j}{\partial x_j}\,d^3r=\oint_S\sum_j A_j\,n_j\,da, \tag{5.87}$$

luego, podemos escribir la Ec. (5.86) como

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{P}_{\rm mec}+\mathbf{P}_{\rm em}\right]_i=\oint_S\sum_j T_{ij}\,n_j\,da. \tag{5.88}$$

La cantidad $\sum_j T_{ij}\,n_j$ es la componente i del flujo de momento por unidad de área que cruza la superficie S hacia el volumen V. En otras palabras, es la fuerza por

unidad de área que se transmite a través de S y que actúa sobre las cargas y campos dentro de V. La Ec. (5.88) representa la conservación de momento lineal del sistema de cargas y campos electromagnéticos en el volumen V encerrado por la superficie S.

La Ec. (5.88) se puede expresar en forma diferencial como

$$\left[\mathbf{f} + \frac{d\mathbf{g}}{dt}\right]_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\,. \tag{5.89}$$

Ejemplo.

1. Fuerza sobre un conductor en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E_o\hat{\mathbf{z}}$.

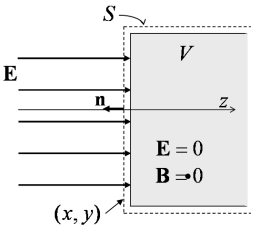


Figura 5.3: Fuerza sobre un conductor en un campo eléctrico.

Puesto que $\mathbf{B} = 0$ en todo el espacio, $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{P}_{\text{em}} = 0$.

La componente z de la fuerza sobre el conductor es

$$F_z = \left[\frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt}\right]_z = \oint_S \sum_j T_{zj}\, n_j\, da. \tag{5.90}$$

Tomamos la superficie S tal que justo encierre el conductor. Considerando el área del plano xy , tenemos $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{z}}$. El tensor de tensiones de Maxwell es

$$\begin{aligned} T_{zj} &= \frac{1}{4\pi}\left[(E_z E_j) - \frac{1}{2}\delta_{zj}\left(E^2\right)\right]; \\ T_{zz} &= \frac{1}{4\pi}(E_o^2 - \frac{1}{2}E_o^2) = \frac{1}{8\pi}E_o^2; \\ T_{zx} &= T_{zy} = 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$F_z = \int_A T_{zz}\, n_z\, da = -\frac{A}{8\pi}E_o^2\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{5.91}$$

donde A es el área perpendicular a $\mathbf{E}$. Luego, la fuerza sobre esta área del conductor es opuesta a $\mathbf{E}$; el conductor tendrá allí una densidad de carga superficial negativa y será atraído por las cargas positivas que producen el campo. La magnitud de la presión ejercida por el campo eléctrico sobre el conductor es

$$\frac{F_z}{A} = \frac{E_o^2}{8\pi}. \tag{5.92}$$

5.6 Momento angular del campo electromagnético.

Del mismo modo que derivamos la ley de conservación del momento lineal, Ec. (5.88), podemos encontrar la conservación del momento angular en un sistema de cargas y campos electromagnéticos contenido en un volumen V. La derivada temporal del momento angular mecánico del sistema es igual al torque total sobre la distribución de cargas y corrientes, dado por

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{mec}}}{dt} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}\, d^3r, \tag{5.93}$$

donde $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{c} \times \mathbf{B}$ es la densidad de fuerza, cuya componente i satisface la Ec. (5.89),

$$\mathbf{f}_i = -\left[\frac{d\mathbf{g}}{dt}\right]_i + \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \tag{5.94}$$

Recordemos que la componente i del producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ puede expresarse como

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k, \tag{5.95}$$

donde utilizamos el tensor de Levi-Civita, definido como

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } i,j,k \text{ son permutaciones pares (o cíclicas) de } 1,2,3. \\ -1, & \text{si } i,j,k \text{ son permutaciones impares de } 1,2,3. \\ 0, & \text{si dos índices son iguales.} \end{cases} \tag{5.96}$$

Empleando esta notación, la componente i de la Ec. (5.93) puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d\mathbf{L}_{\rm mec}}{dt}\right]_i &= \int_V \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, x_j f_k\, d^3r \\
&= \int_V \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, x_j \left[\frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{S}_k}{dt} + \sum_l \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}\right] d^3r \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \mathbf{S}_k\, d^3r + \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int_V x_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}\, d^3r \\
\Rightarrow \left[\frac{d\mathbf{L}_{\rm mec}}{dt}\right]_i &+ \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \mathbf{S}_k\, d^3r = \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int_V x_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}\, d^3r. \qquad (5.97)
\end{aligned}$$

El segundo término del lado izquierdo de la Ec. (5.97) puede interpretarse como la derivada con respecto al tiempo de la componente i de la cantidad

$$\mathbf{L}_{\rm em} \equiv \frac{1}{c^2}\int_V \mathbf{r}\times\mathbf{S}\, d^3r = \int_V \mathbf{r}\times\mathbf{g}\, d^3r, \qquad (5.98)$$

la cual puede identificarse como el *momento angular del campo electromagnético*. El integrando de la Ec. (5.98) corresponde a la *densidad del momento angular del campo electromagnético*,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{g}. \qquad (5.99)$$

Entonces, podemos escribir la Ec. (5.97) en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\mathbf{L}_{\rm mec} + \mathbf{L}_{\rm em}\right]_i &= \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int_V x_j \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}\, d^3r. \\
&= \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{\partial (x_j T_{kl})}{\partial x_l}\, d^3r - \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{\partial x_j}{\partial x_l}\, T_{kl}\, d^3r \qquad (5.100)
\end{aligned}$$

Consideremos el siguiente término en la Ec. (5.100),

$$\begin{aligned}
\sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{\partial x_j}{\partial x_l}\, T_{kl}\, d^3r &= \int_V \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk}\delta_{jl}\, T_{kl}\, d^3r \\
&= \int_V \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, T_{kj}\right) d^3r = 0. \qquad (5.101)
\end{aligned}$$

Este término contiene la suma sobre los índices k, j del producto de ε_{ijk}, que es antisimétrico en el cambio $k \leftrightarrow j$, y T_{kj}, que es simétrico en el cambio $k \leftrightarrow j$. El producto resultante es antisimétrico bajo el cambio $k \leftrightarrow j$. Por lo tanto, la doble suma sobre los índices k, j en la Ec. (5.101) se hace cero.

Luego, la Ec. (5.100) queda

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\mathbf{L}_{\text{mec}} + \mathbf{L}_{\text{em}}\right]_i &= \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \int_V \frac{\partial (x_j T_{kl})}{\partial x_l}\, d^3r \\
&= \int_V \sum_{jkl} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (x_j T_{kl})}{\partial x_l}\, d^3r \\
&= \int_V \sum_{l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, T_{kl} \right) d^3r. \qquad (5.102)
\end{aligned}$$

Se define el *tensor de flujo de momento angular* del campo como

$$M_{il} \equiv \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, T_{kl}. \qquad (5.103)$$

Entonces, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{L}_{\text{mec}} + \mathbf{L}_{\text{em}}\right]_i = \int_V \sum_l \frac{\partial M_{il}}{\partial x_l}\, d^3r. \qquad (5.104)$$

El teorema de la divergencia para un tensor M_{il} se puede expresar en la forma,

$$\int_V \sum_l \frac{\partial M_{il}}{\partial x_l}\, d^3r = \oint_S \sum_l M_{il}\, n_l\, da, \qquad (5.105)$$

donde S es la superficie que encierra al volumen V. Por lo tanto, Ec. (5.104) se puede expresar como

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{L}_{\text{mec}} + \mathbf{L}_{\text{em}}\right]_i = \oint_S \sum_l M_{il}\, n_l\, da. \qquad (5.106)$$

La Ec. (5.106) expresa la conservación de momento angular del sistema de cargas y campos electromagnéticos en el volumen V encerrado por la superficie S. La cantidad $\sum_l M_{il}\, n_l$ es la componente i del flujo de momento angular por unidad de área que cruza la superficie S.

5.7 Ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de Maxwell fuera de las fuentes ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$), en un medio caracterizado por ϵ y μ, son

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 && (1)\\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && (2)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (3)\\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 && (4)
\end{aligned}$$

Si tomamos el rotacional en la Ec. (2), obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c}\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) &= 0\\
\nabla\cancelto{0}{(\nabla \cdot \mathbf{E})} - \nabla^2\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) &= 0 \qquad \text{(usando (1))}\\
-\nabla^2\mathbf{E} + \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \qquad \text{(usando (4))}\\
\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0. \qquad (5.107)
\end{aligned}$$

Igualmente, tomando el rotacional en la Ec. (4), obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\mu\epsilon}{c}\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) &= 0\\
\nabla\cancelto{0}{(\nabla \cdot \mathbf{B})} - \nabla^2\mathbf{B} - \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) &= 0 \qquad \text{(usando (3))}\\
-\nabla^2\mathbf{B} + \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0 \qquad \text{(usando (2))}\\
\nabla^2\mathbf{B} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0. \qquad (5.108)
\end{aligned}$$

Las Ecs. (5.107) y (5.108) muestran que, como consecuencia de las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo, tanto el campo eléctrico como el campo magnético satisfacen una ecuación de onda.

Cada componente de **E** o de **B** satisface la ecuación

$$\nabla^2 E_i - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0, \tag{5.109}$$

que corresponde a la ecuación onda para un campo escalar $u(\mathbf{r}, t)$ en un medio,

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{5.110}$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda en el medio. En una dimensión (por ejemplo, una onda propagándose en una cuerda en la dirección x), la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{5.111}$$

Se puede verificar que la solución general de la Ec. (5.111) tiene la forma

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt), \tag{5.112}$$

donde $f(z)$ y $g(z)$ son funciones arbirarias. El término $f(x - vt)$ describe una perturbación con la forma $f(z)$ moviéndose con velocidad v hacia la dirección $+\hat{\mathbf{x}}$, con $z = x - vt$; mientras que $g(x + vt)$ representa una función $g(z)$ moviéndose con v hacia $-\hat{\mathbf{x}}$, con $z = x + vt$. La velocidad v se denomina *velocidad de fase* de la onda.

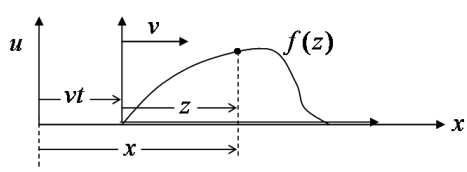


Figura 5.4: Onda moviéndose con velocidad v en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$.

Recordemos que una función $f(z)$, donde $z \in (-\infty, \infty)$, puede expresarse como una integral de Fourier de términos exponenciales de la forma

$$f(z) \propto e^{ikz}, \tag{5.113}$$

donde k es un parámetro tal que el argumento del exponencial es adimensional. Luego, con esta representación podemos encontrar una solución $u(x,t)$ de tipo oscilatorio,

$$u(x,t) = A\, e^{i(kx - \omega t)} + B\, e^{i(kx + \omega t)}, \tag{5.114}$$

donde

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{5.115}$$

corresponde el número de onda y ω es la frecuencia. La longitud de onda λ está dada por la condición

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x+\lambda,t) \\ &\Rightarrow e^{ik\lambda} = 1 \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Similarmente, una solución de la ecuación de onda tridimensional Ec. (5.110) puede expresarse como

$$u(\mathbf{r},t) = A\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + B\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}, \tag{5.117}$$

donde el vector $\mathbf{k}$ indica la dirección de la propagación de la onda con velocidad $v = k/\omega$, y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Las soluciones de este tipo se llaman *ondas planas*.

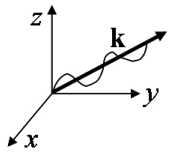


Figura 5.5: Vector de onda $\mathbf{k}$.

Verifiquemos que la onda plana Ec. (5.117) satisface la ecuación de onda Ec. (5.110),

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = ik_j\, u \;\Rightarrow\; \nabla u = i\mathbf{k}\, u, \tag{5.118}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = -k_j^2\, u \;\Rightarrow\; \nabla^2 u = -k^2\, u, \tag{5.119}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2\, u. \tag{5.120}$$

Sustitución en la Ec. (5.110) da

$$-\,k^2\, u + \frac{\omega^2}{v^2}\, u = 0 \qquad \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}. \tag{5.121}$$

Comparando la ecuación de onda general Ec. (5.110) con la ecuación de onda Ec. (5.109) satisfecha por una componente E_i o B_i, vemos que

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \qquad \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}, \tag{5.122}$$

donde hemos definido el *índice de refracción* del medio como

$$n = \sqrt{\mu\epsilon}. \tag{5.123}$$

En el vacío, $\epsilon = 1$, $\mu = 1$, y $n = 1$, por lo que la velocidad de una onda electromagnética en el vacío es igual a la velocidad de la luz c. Luego, para ondas electromagnéticas tenemos

$$k = n\,\frac{\omega}{c}\,. \tag{5.124}$$

Existen medios dispersivos donde el índice de refracción depende de la frecuencia, $n(\omega)$. En estos medios, la forma de la onda puede cambiar a medida que ésta se propaga.

La solución de onda plana de la ecuación de onda para el vector $\mathbf{E}$ se puede expresar como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}_1\,\mathcal{R}e\left[E_o\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right], \tag{5.125}$$

donde $\mathcal{R}e$ indica que se debe tomar la parte real de la expresión entre corchetes, E_o es la amplitud (en general compleja) de la oscilación, $\mathbf{k}$ es la dirección de propagación y $\hat{\mathbf{e}}_1$ es un vector unitario que indica la dirección del campo eléctrico. Similarmente, la solución de la ecuación de onda para $\mathbf{B}$ se puede escribir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}_2\,\mathcal{R}e\left[B_o\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right], \tag{5.126}$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_2$ y B_o son la dirección y la amplitud compleja de $\mathbf{B}$, respectivamente. Ejemplos de ondas electromagnéticas planas son los lásers y la luz proveniente de fuentes muy lejanas, como las estrellas.

Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ que describen ondas planas también deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell. El campo eléctrico en la Ec. (5.125) se puede escribir como $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_1\,u$, con $u = E_o\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ (se acostumbra obviar la notación $\mathcal{R}e$ en los cálculos).

Luego, la ecuación de Mawell $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ conduce a

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1\, u) \\
&= \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla u + u\, \cancelto{0}{\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_1} \\
&= \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot (i\mathbf{k}u) = 0 \\
&\Rightarrow \mathbf{k} \perp \hat{\mathbf{e}}_1
\end{aligned} \tag{5.127}$$

(las derivadas espaciales de los vectores $\hat{\mathbf{e}}_1$ y de $\hat{\mathbf{e}}_2$ son cero, puesto que son fijos en el espacio). Es decir, el campo $\mathbf{E}$ de la onda electromagnética es perpendicular a la dirección de propagación. Por otro lado, si escribimos el campo magnético en la Ec. (5.126) como $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{e}}_2\, u$, la ecuación de Mawell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ conduce a

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\hat{\mathbf{e}}_2\, u) \\
&= \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \nabla u + u\, \cancelto{0}{\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_2} \\
&= \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot (i\mathbf{k}u) = 0 \\
&\Rightarrow \mathbf{k} \perp \hat{\mathbf{e}}_2.
\end{aligned} \tag{5.128}$$

Por lo tanto, la dirección de propagación de la onda $\mathbf{k}$ es perpendicular a ambos campos, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, los cuales deben yacer sobre un mismo plano.

Consideremos la Ley de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5.129}$$

que también deben satisfacer los campos en la onda electromagnética. Tenemos las expresiones

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_1\, u) \\
&= \nabla u \times \hat{\mathbf{e}}_1 - u\, \cancelto{0}{\nabla \times \hat{\mathbf{e}}_1} \\
&= i\mathbf{k}u \times \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= iE_o\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_1 \\
&= i\mathbf{k} \times \mathbf{E}
\end{aligned} \tag{5.130}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i\omega\, \hat{\mathbf{e}}_2 B_o\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = -i\omega\, \mathbf{B}. \tag{5.131}$$

Sustituyendo en la ley de Faraday, obtenemos

$$
\begin{aligned}
E_o\,\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\omega}{c}\,B_o\,\hat{\mathbf{e}}_2 \\
\Rightarrow\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= \frac{E_o}{B_o}\,\frac{c}{\omega}\,k\,\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_1 \\
\hat{\mathbf{e}}_2 &= n\,\frac{E_o}{B_o}\,\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{e}}_1. \qquad (5.132)
\end{aligned}
$$

Luego, el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico y a la dirección de propagación de la onda. Puesto que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ están en un mismo plano, la Ec. (5.132) implica que $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares entre sí. La Ec. (5.132) conduce a $\hat{\mathbf{k}}\propto\hat{\mathbf{e}}_1\times\hat{\mathbf{e}}_2$; es decir que la dirección de $\mathbf{k}$ es la del producto $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$. Las oscilaciones de los campos electromagnéticos son *transversales* con respecto a la dirección de propagación de la onda.

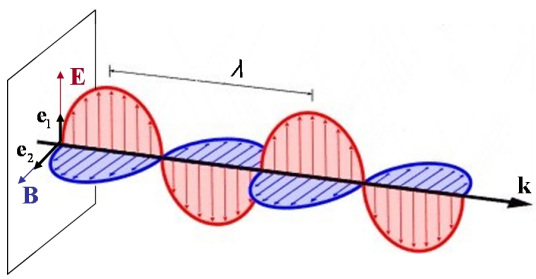


Figura 5.6: Longitud de onda λ, campos $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ y vector $\mathbf{k}$ en una onda electromagnética plana.

Puesto que $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son vectores unitarios, la Ec. (5.132) implica que las amplitudes de los campos en un medio material están relacionadas por

$$B_o = n\,E_o. \qquad (5.133)$$

La dirección del flujo de energía, dada por el vector de Poynting, y el momento lineal de la onda van ambos en la dirección de propagación,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}\propto\mathbf{k}, \qquad (5.134)$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{S}\propto\mathbf{k}. \qquad (5.135)$$

Las ecuaciones de Maxwell permiten la existencia de ondas electromagnéticas. La variación temporal del campo magnetico **B** da origen a un campo eléctrico **E**, cuya variación temporal a su vez produce un **B**. Esto significa que los campos **E** y **B** variando en el tiempo pueden auto-sostenerse en el espacio libre, dando lugar a ondas electromagnéticas.

Para la época de Maxwell, la naturaleza ondulatoria de la luz y su velocidad habían sido establecidas por Huygens, Young, Fresnel, Fizeau y otros, mediante diversos experimentos ópticos y observaciones astronómicas. Por otro lado, las constantes de proporcionalidad en la ley de Faraday y en la Ley de Ampère fueron medidas por Kohlrausch y Weber mediante experimentos puramente eléctricos y magnéticos. La velocidad de las ondas electromagnéticas predichas por las ecuaciones de Maxwell puede ser determinada a partir de dichas constantes, obteniéndose un valor que coincide con la velocidad medida para la luz. Este hecho condujo a Maxwell a inferir que la luz es una onda electromagnética; una predicción verificada posteriormente por los experimentos de Hertz. De este modo, Maxwell unificó la electricidad, el magnetismo y la óptica.

Las ondas electromagnéticas pueden producirse, en principio, con cualquier frecuencia ω. Se denomina *espectro electromagnético* al conjunto de frecuencias de las ondas electromagnéticas. Distintos rangos de frecuencias reciben diferentes nombres y tienen propiedades y aplicaciones específicas.

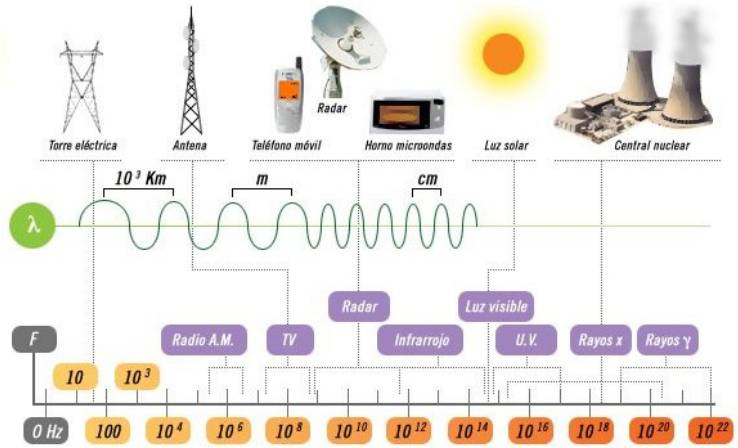


Figura 5.7: Espectro electromagnético.

5.8 Polarización, reflexión y refracción de ondas electromagnéticas.

Las ondas electromagnéticas planas son transversales a la dirección de propagación $\mathbf{k}$. Escojamos $\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{z}}$ y (x, y) como el plano de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Entonces, la forma general del campo eléctrico en una onda plana con frecuencia ω se puede expresar como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_1\hat{\mathbf{x}} + E_2\hat{\mathbf{y}})\, e^{i(kz-\omega t)} = \mathbf{E}_o\, e^{i(kz-\omega t)}, \tag{5.136}$$

donde E_1, E_2 son números complejos y se debe recordar tomar la parte real.

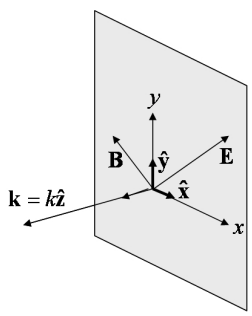


Figura 5.8: Onda electromagnética plana en el plano (x, y).

El campo magnético correspondiente a esta onda está determinado por las ecuaciones de Maxwell. Para calcular $\mathbf{B}$, usamos la ley de Faraday,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\,\nabla \times \mathbf{E}. \tag{5.137}$$

Escribimos $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o u$, con $\mathbf{E}_o = (E_1\hat{\mathbf{x}} + E_2\hat{\mathbf{y}})$ y $u = e^{i(kz-\omega t)}$, y obtenemos, según la Ec. (5.130),

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}. \tag{5.138}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -ic\mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ \Rightarrow\ \mathbf{B} &= \frac{c}{\omega}\,\mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ &= n\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{5.139}$$

donde hemos sustituido $k = n\omega/c$ y $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$. Usando el hecho que $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$ y que $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}$, obtenemos

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = n(E_1\hat{\mathbf{y}} - E_2\hat{\mathbf{x}})\, e^{i(kz-\omega t)}. \tag{5.140}$$

La dirección del campo $\mathbf{E}$ define la *polarización* de la onda electromagnética plana. Podemos expresar el campo eléctrico como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{y}}, \tag{5.141}$$

donde

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}e\left[E_1\, e^{i(kz-\omega t)}\right] \tag{5.142}$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}e\left[E_2\, e^{i(kz-\omega t)}\right]. \tag{5.143}$$

Existen varias posibilidades de polarización:

1. Polarización lineal, $E_1, E_2 \in \Re$. Entonces

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_1\, \cos(kz - \omega t) \tag{5.144}$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_2\, \cos(kz - \omega t) \tag{5.145}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_2}{E_1} = \tan\theta = \text{cte}. \tag{5.146}$$

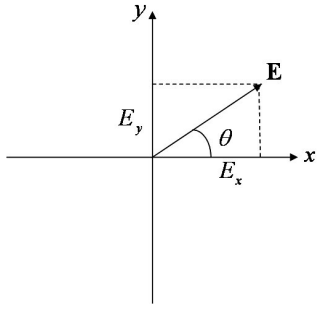


Figura 5.9: Onda electromagnética plana con polarización lineal.

En este caso, la dirección de $\mathbf{E}$ es fija en el plano perpendicular a la propagación de la onda. Si tomamos el plano $z = 0$, podemos visualizar las oscilaciones de las componentes de $\mathbf{E}$ como

$$E_x = E_1 \cos \omega t \tag{5.147}$$

$$E_y = E_2 \cos \omega t, \tag{5.148}$$

es decir, E_x y E_y oscilan en fase. La magnitud de $\mathbf{E}$ es

$$|\mathbf{E}| = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2} = (E_1^2 + E_2^2)^{1/2} \, |\cos \omega t|. \tag{5.149}$$

Por lo tanto, el campo $\mathbf{E}$ oscila con frecuencia ω en una dirección fija sobre el plano (x, y)

2. Polarización circular, $E_2 = \pm i E_1$, con $E_1 \in \Re$. Entonces,

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \tag{5.150}$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = \mp E_2 \sin(kz - \omega t) \tag{5.151}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{E}| = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2} = E_1 = \text{cte}. \tag{5.152}$$

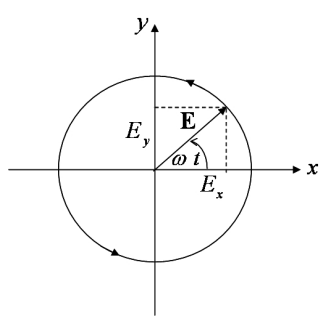


Figura 5.10: Onda electromagnética plana con polarización circular y helicidad postiva.

En el plano $z = 0$, si $E_2 = iE_1$ tenemos

$$E_x = E_1 \cos \omega t \tag{5.153}$$

$$E_y = E_2 \sin \omega t \tag{5.154}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = \tan \omega t. \tag{5.155}$$

El campo $\mathbf{E}$ rota con frecuencia ω sobre el plano (x, y), manteniendo su magnitud constante. El campo tiene la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})E_1\, e^{i(kz-\omega t)}. \tag{5.156}$$

Se dice que la onda está circularmente polarizada con *helicidad positiva*; $\mathbf{E}$ rota en la dirección de los dedos de la mano derecha (contra reloj) y el pulgar indica la dirección de propagación hacia el observador. Por otro lado, si $E_2 = -iE_1$, tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})E_1\, e^{i(kz-\omega t)}, \tag{5.157}$$

y el campo $\mathbf{E}$ rota en sentido opuesto y posee *helicidad negativa.*

En Mecánica Cuántica, la helicidad de la onda se interpreta como el estado de spin del fotón.

3. No polarizada; E_2, E_1 arbitrarios.

   En este caso, en general ni la dirección de $\mathbf{E}$ ni su módulo son constantes. La configuración correspondiente de $\mathbf{E}$ se denomina *polarización elíptica.*

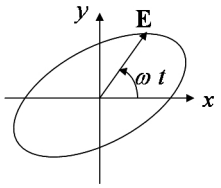


Figura 5.11: Onda electromagnética plana con polarización elíptica.

Cuando una onda electromagnética incide sobre una superficie que separa dos medios con diferentes índices de refracción, se observa que una parte de la onda se transmite y otra se refleja en direcciones que siguen ciertas relaciones geométricas.

Supongamos que el plano $z = 0$ con normal $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ es una interfase que separa un medio con índice de refracción n_1 $(z < 0)$ de un medio cuyo índice es n_2 $(z > 0)$. Una onda electromagnética plana en el medio con n_1, incidente sobre la interfase $z = 0$, se puede escribir

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_o\, e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{5.158}$$

$$\mathbf{B}_1 = n_1\, \hat{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{E}_1. \tag{5.159}$$

La onda reflejada en el medio con índice n_1 tiene la forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_o \, e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{5.160}$$

La onda transmitida o refractada en el medio caracterizado por n_2 es

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}''_o \, e^{i(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{5.161}$$

Las magnitudes de los correspondientes números de onda son

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}'| = n_1 \frac{\omega}{c}, \qquad |\mathbf{k}_2| = n_2 \frac{\omega}{c}. \tag{5.162}$$

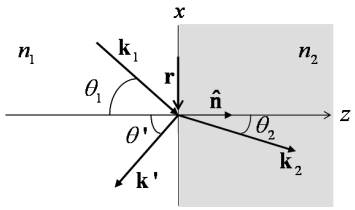


Figura 5.12: Onda incidente $\mathbf{k}_1$, onda reflejada $\mathbf{k}'$ y onda refractada $\mathbf{k}_2$ en la interfase $z = 0$.

Las condiciones de frontera sobre las componentes paralelas y normales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ deben cumplirse en todo punto del plano $z = 0$, para cualquier tiempo. Esto implica que la variación espacial de todas las ondas en un instante dado, contenida en el factor de fase $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, debe ser la misma en $z = 0$; es decir, las fases deben satisfacer

$$(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r})_{z=0}. \tag{5.163}$$

Luego, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ y $\mathbf{k}'$ deben yacer en un plano. Escojamos $\mathbf{r}$ sobre el plano $z = 0$. De acuerdo a la figura, obtenemos

$$k_1 \sin\theta_1 = k' \sin\theta' \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta' \qquad \text{(Ley de reflexión).} \tag{5.164}$$

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \text{(Ley de Snell).} \tag{5.165}$$

La *reflexión total interna* consiste en la ausencia de onda refractada cuando $n_1 > n_2$. El ángulo de incidencia θ_1 para la ocurrencia de este fenómeno corresponde al valor $\theta_2 = \pi/2$ en la ley de Snell,

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{5.166}$$

Resumen

1. Ley de inducción de Faraday,

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_m}{dt},$$
$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da.$$

2. Ecuaciones de Maxwell en el vacío,

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$
$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0,$$
$$\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}.$$

3. Potenciales electromagnéticos,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A},\\ \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.\end{aligned}$$

4. Calibre de Lorentz,

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

5. Densidad de energía del campo electromagnético,

$$u_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2).$$

6. Vector de Poynting,

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

7. Ecuación de onda para el campo eléctrico (o magnético)

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

8. Onda plana,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}_1\,\mathcal{R}e\left[E_o\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right].$$

9. Número de onda,

$$k = n\,\frac{\omega}{c}, \qquad\qquad n = \sqrt{\mu\epsilon}.$$

10. Transversabilidad de ondas electromagnéticas,

$$\mathbf{B} = n\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

11. Polarización de ondas planas ($E_1, E_2, \in \Re$),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_1\hat{\mathbf{x}} + E_2\hat{\mathbf{y}})\, e^{i(kz-\omega t)}, \quad \text{polarización lineal.}$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_1\hat{\mathbf{x}} + iE_1\hat{\mathbf{y}})\, e^{i(kz-\omega t)}, \quad \text{polarización circular.}$$

5.9 Problemas.

1. Considere los potenciales

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_o e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \varphi(\mathbf{r},t) = 0.$$

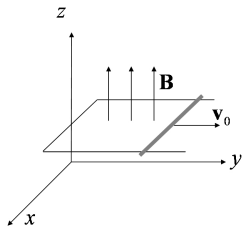
a) Encuentre el campo electromagnético asociado a estos potenciales.
a) Encuentre las condiciones para que el campo electromagnético sea físicamente realizable.

2. Considere los campos electromagnéticos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A\sin(ky-\omega t)\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{B} &= B\sin(ky-\omega t)\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

a) ¿Qué relación debe existir entre A y B para que estos campos sean ondas físicamente posibles en el vacío?.
b) Calcule los potenciales $\mathbf{A}$ y φ para este campo electromagnético en el calibre de Lorentz.

3. Una varilla con conductividad σ y densidad de masa γ se mueve sin fricción sobre rieles en presencia de un campo magnético constante $\mathbf{B} = B_o\hat{\mathbf{z}}$. Si la velocidad inicial de la varilla en la dirección y es v_o, calcule el tiempo requerido para que la varilla se detenga.



4. Un aro de radio R está rotando con velocidad angular uniforme ω sobre un eje que pasa por su diámetro. Un anillo de radio $a \ll R$ por el cual circula una corriente I se encuentra en el centro del aro, con su plano perpendicular al plano del aro. Encuentre la diferencia de potencial resultante entre los dos extremos del diámetro del aro.

5. Un anillo de radio a está hecho de un cable de cierto diámetro, que posee resistividad ϱ y densidad de masa η. El anillo cae verticalmente en la direccion z, con su plano perpendicular a z, en un campo magnético con una componente $B_z = B_o z$, donde B_o =cte. Despreciando la resistencia del aire, encuentre la velocidad terminal del anillo.

6. Un alambre muy largo, de longitud l y radio b, transporta una corriente I cuando se le aplica una diferencia de potencial V entre sus extremos. Calcule el flujo de energía por unidad de longitud en la superficie del alambre.

7. Considere la siguiente onda plana linealmente polarizada propagándose en un medio caracterizado por constante dieléctrica ϵ, permeabilidad magnética μ y conductividad σ,
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_o e^{i\omega[t - \frac{n}{c}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]}.$$
Calcule el índice de refración n del medio.

8. Considere un plasma neutro con conductividad σ y permeabilidad μ.
a) Suponga que el plasma es estacionario y que en $t = 0$ contiene un campo magnético
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \begin{cases} B_o\hat{\mathbf{x}}, & |x| < L, \\ 0, & |x| > L, \end{cases}$$
Determine el campo magnético en el espacio para todo tiempo posterior.
b) Si el plasma se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, encuentre la ecuación que satisface el campo magnético.

9. Un plasma formado por electrones (carga e y masa m) tiene una densidad de carga uniforme ρ muy pequeña. Suponga que las interacciones entre los electrones pueden ser despreciadas. Una onda electromagnética plana de frecuencia ω y número de onda k incide sobre el plasma.
a) Encuentre la conductividad del plasma en función de ω.
b) Encuentre el índice de refracción del plasma en función de ω.
c) Si la onda incide paralelamente a la dirección de $\mathbf{B}_o$ y posee polarización circular, determine el índice de refracción del plasma en función de ω para los dos tipos de helicidad (positiva y negativa) de la onda.

10. Un cable delgado de longitud l y orientado en la dirección z lleva una corriente $I = I_o \cos \omega t$.
    a) Encuentre el momento dipolar eléctrico del cable.
    b) Calcule el potencial vector para distancias $r \gg l$.

Capítulo 6

Transformaciones relativistas de campos electromagnéticos.

6.1 Revisión de Relatividad Especial.

Hacia finales del siglo XIX, la Física consistía en dos grandes teorías para explicar la mayoría de los fenómenos conocidos hasta entonces:

- Mecánica, expresada en las leyes de Newton, que presentaba una descripción unificada de los fenómenos del movimiento.
- Electromagnetismo, contenido en las ecuaciones de Maxwell, que representaba la unificación de la descripción de los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos, y que condujo al descubrimiento de las ondas electromagnéticas y de la naturaleza de la luz.

En sus estudios sobre el movimiento, Galileo estableció el principio de relatividad:

Principio de Relatividad de Galileo.
Las leyes de la Mecánica son las mismas en diferentes sistemas de coordenadas inerciales que se encuentran en movimiento relativo uniforme.

Dados dos sistemas de coordenadas S con origen O, y S' con origen O', tal que O' se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}$ con respecto a O, las *transformaciones de*

Galileo entre estos sistemas de coordenadas son

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' &= t \end{aligned} \tag{6.1}$$

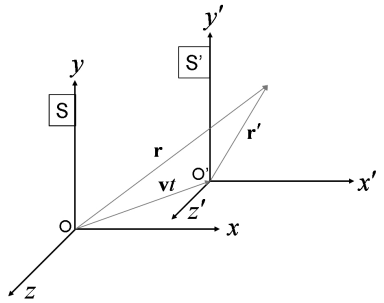


Figura 6.1: Transformaciones de Galileo para sistemas inerciales en movimiento relativo.

Si $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, las transformaciones de Galileo resultan en

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{6.2}$$

Derivando con respecto al tiempo la Ec. (6.1), se obtiene la suma de velocidades,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} + \mathbf{v} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{u} &= \mathbf{u}' + \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

puesto que $dt = dt'$ y donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de una partícula medida en S y $\mathbf{u}'$ corresponde a la velocidad de esa partícula medida en S'. En particular, si $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, la suma de velocidades da

$$u'_x = u_x - v. \tag{6.4}$$

La forma de las leyes de Newton es invariante bajo las transformaciones de Galileo. Consideremos la Segunda Ley de Newton en S',

$$m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = -\nabla' V(\mathbf{r}') = \mathbf{F}(\mathbf{r}'). \tag{6.5}$$

Tenemos,

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}, \tag{6.6}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{6.7}$$

Por otro lado, notamos que para cualquier f,

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{6.8}$$

y similarmente

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{6.9}$$

Luego,

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \nabla \tag{6.10}$$

La coordenada $\mathbf{r}'$ se puede expresar, en general, como la distancia entre la partícula en consideración y otra partícula (o influencia externa) con la cual aquella interactúa. Es decir,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}. \tag{6.11}$$

Luego, $\nabla' V(\mathbf{r}') = \nabla V(\mathbf{r})$. De acuerdo a las transformaciones de Galileo Ec. (6.1), la Ec. (6.5) en el sistema de referencia S' se expresa en el sistema S como

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{6.12}$$

Por lo tanto, la Segunda ley de Newton es invariante (conserva su forma) bajo las transformaciones de Galileo, y el principio de relatividad de Galileo es válido para estas transformaciones.

Sin embargo, en contraste con el comportamiento de las leyes de la Mecánica, las leyes del Electromagnetismo no son invariantes ante las transformaciones de Galileo.

Las ecuaciones de Maxwell para los campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{6.13}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.14}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6.15}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{6.16}$$

Note que las ecuaciones de Maxwell contienen términos de la forma $\frac{\partial E_j}{\partial t}(\mathbf{r}, t)$, donde E_j es la componente j del campo eléctrico (también contienen términos similares para el campo magnético).

Consideremos la componente $E_j(\mathbf{r}', t')$ en S'. Entonces,

$$\frac{\partial E_j}{\partial t'}(\mathbf{r}', t') = \sum_i \frac{\partial E_j}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial t'} + \frac{\partial E_j}{\partial t'} = -\sum_i \frac{\partial E_j}{\partial x'_i} v_i + \frac{\partial E_j}{\partial t} \tag{6.17}$$

donde hemos usado las transformaciones de Galileo

$$x'_i = x_i - v_i t, \quad t' = t \tag{6.18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial x'_i}{\partial t'} = \frac{\partial x'_i}{\partial t} = -v_i. \tag{6.19}$$

Luego,

$$\frac{\partial E_j}{\partial t} = \frac{\partial E_j}{\partial t'} + \mathbf{v} \cdot \nabla' E_j \,. \tag{6.20}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo las transformaciones de Galileo sólo si $\mathbf{v} = 0$; es decir, conservan su forma solamente en un sistema de referencia inercial en reposo con respecto al medio en el cual se propaga la luz. (El "medio" correspondiente al vacío se denominaba *éter*).

Ante esta situación, se presentan los siguientes escenarios posibles:

1. Las transformaciones de Galileo son correctas, tanto para la Mecánica como para el Electromagnetismo, lo cual implica que las ecuaciones de Maxwell son incorrectas.

2. Las transformaciones de Galileo son válidas para la Mecánica en todo sistema inercial, pero las ecuaciones de Maxwell sólo son válidas en un sistema inercial en reposo con respecto al éter ($\mathbf{v} = 0$).

3. Tanto las leyes de la Mecánica como las del Electromagnetismo son invariantes en todo sistema inercial, pero no bajo las transformaciones de Galileo. Esto implica que las leyes de Newton son incorrectas y que se requiere otra transformación de coordenadas.

El éxito de las ecuaciones de Maxwell en la predicción de las ondas electromagnéticas (experimentos de Hertz, Marconi, y otros) sugiere descartar el escenario (i).

Por otro lado, la falla en la detección del movimiento relativo al éter (experimento de Michelson-Morley) requiere descartar la posibilidad (ii). El escenario (iii) fue el camino elegido por Einstein en 1905.

Postulados de la Relatividad Especial.

1) Las leyes de la Naturaleza (los resultados de los experimentos) son las mismas en todos los sistemas inerciales.
2) La velocidad de la luz es constante en todos los sistemas inerciales.

Según el postulado 1, la ecuación de onda electromagnética se cumple en los sistemas de referencia S y S'. El postulado 2 implica que la forma de una onda electromagnética debe ser igual en los sistemas de referencia inerciales S y S'. Entonces, consideremos un pulso esférico de luz emitido en el origen O de S en el instante $t = t' = 0$, cuando ambos orígenes O y O' coinciden.

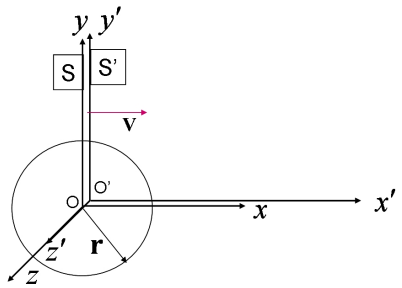


Figura 6.2: Pulso electromagnético emitido cuando los orígenes O y O' coinciden.

Luego,

$$\begin{array}{ll} \text{En S:} & |\mathbf{r}| = ct \\ \text{En S':} & |\mathbf{r}'| = ct' \end{array} \tag{6.21}$$

donde c es la magnitud constante de la velocidad de la luz en ambos sistemas. En términos de las coordenadas en cada sistema, tenemos

$$\begin{array}{ll} \text{En S:} & x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ \text{En S':} & x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2\,. \end{array} \tag{6.22}$$

Las relaciones (6.22) no son compatibles con las transformaciones de Galileo. Esto se puede verificar sustituyendo las transformaciones Ecs. (6.2) en la relación (6.22) para S', lo que da

$$x^2 - 2vxt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2\,, \tag{6.23}$$

y lo cual es distinto de la expresión correspondiente en S.

Las transformaciones compatibles con los postulados de la Relatividad deben ser lineales en t y en x para preservar la forma de una onda esférica en ambos sistemas de coordenadas. Además, deben tender a las transformaciones de Galileo cuando la velocidad relativa entre los dos sistemas es pequeña, puesto que la suma de velocidades derivada de esas transformaciones, Ec. (6.3), funciona en las práctica en tales situaciones. La simetría de los sistemas sugiere invarianza en las coordenadas y, x perpendiculares a la dirección del movimiento. Entonces, si la velocidad de O' es $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, supongamos unas transformaciones de la forma

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - fx) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{6.24}$$

donde γ y f son factores o funciones a determinar. Sustitución de las transformaciones (6.24) en la relación (6.22) para S' consistente con el segundo postulado, da

$$x^2\gamma^2(1 - c^2f^2) + 2(fc^2 - v)\gamma^2xt + y^2 + z^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\gamma^2c^2t^2. \tag{6.25}$$

Comparando con la relación (6.22) para S, requerimos

$$fc^2 - v = 0 \tag{6.26}$$

$$\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \tag{6.27}$$

$$\gamma^2(1 - f^2c^2) = 1 \tag{6.28}$$

lo cual conduce a

$$f = \frac{v}{c^2}\,, \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{6.29}$$

Luego, las transformaciones buscadas son

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{6.30}$$

Las Ecs. (6.30) son las *transformaciones de Lorentz.* Las ecuaciones de Maxwell (y la ecuación de una onda electromagnética) son invariantes bajo estas transformaciones.

Se acostumbra emplear la notación $\beta \equiv v/c$, con la cual las transformaciones de Lorentz se escriben en forma compacta como

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Note que $\beta \leq 1$ y $\gamma \geq 1$.

En el límite de pequeñas velocidades $v \ll c$, tenemos $\beta \ll 1$ y $\gamma \approx 1$, y las transformaciones de Lorentz se aproximan a las transformaciones de Galileo,

$$\begin{aligned} x' &\approx x - vt \\ t' &\approx t. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Las transformaciones de Lorentz inversas se pueden obtener haciendo $v \to -v$, $x \to -x'$, $t \to t'$, en las Ecs. (6.31),

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \\ y &= y' \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{6.33}$$

A partir de las transformaciones de Lorentz se obtiene la regla de adición de velocidades,

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \gamma\left(\frac{dx}{dt'} - \beta c\frac{dt}{dt'}\right), \\ \frac{dx}{dt'} &= \frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{dt'} = u_x\frac{dt}{dt'} \end{aligned} \tag{6.34}$$

luego,

$$u'_x = \gamma\left(u_x - \beta c\right)\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(u_x - \beta c\right)\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}, \tag{6.35}$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}u_x\right), \tag{6.36}$$

lo cual conduce a

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{\beta}{c}u_x}. \tag{6.37}$$

La relación inversa de la suma de velocidades se obtiene haciendo $v \to -v$, $u_x \to u'_x$, en la Ec. (6.37),

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{\beta}{c}u'_x}. \tag{6.38}$$

Contracción de la longitud.

Consideremos un objeto de longitud L_o en reposo a lo largo del eje x en el sistema S. Luego, independiente de t,

$$L_o = x_2 - x_1, \tag{6.39}$$

Consideremos la longitud del objeto medida en el sistema S'. Un observador en S' debe realizar una medida de los extremos x'_2 y x'_1 simultáneamente en S', es decir, para un mismo tiempo t',

$$L' = x'_2(t') - x'_1(t'). \tag{6.40}$$

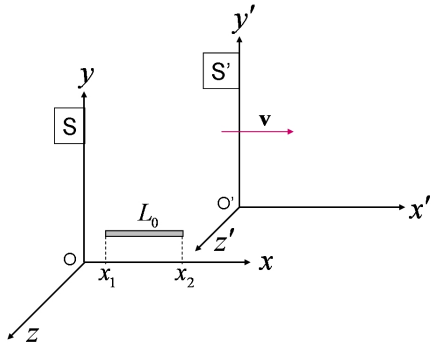


Figura 6.3: Contracción de la longitud.

Las transformaciones de Lorentz, Ecs. (6.31), dan las coordenadas x_1 y x_2 en S para un mismo tiempo t' en S' ,

$$\begin{aligned} x_2 &= \gamma(x_2' + \beta ct') \\ x_1 &= \gamma(x_1' + \beta ct') \\ \Rightarrow x_2 - x_1 &= \gamma(x_2' - x_1')\,. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Luego,

$$L' = \frac{L_o}{\gamma} = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{6.42}$$

Como $\gamma > 1$, la longitud L' del objeto medida en S' es menor que la longitud L_o en S donde el objeto se encuentra en reposo.

Dilatación del tiempo.

Un observador con un reloj en S, presente en dos eventos que ocurren en las mismas coordenadas con respecto al observador, mide el *tiempo propio* entre esos eventos. El tiempo propio entre dos eventos que ocurren en un mismo punto x de S es

$$\tau \equiv t_2(x) - t_1(x). \tag{6.43}$$

Las transformaciones de Lorentz inversas, Ecs. (6.33), dan para ese intervalo de tiempo en S',

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta}{c}x\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{\beta}{c}x\right) = \gamma(t_2 - t_1). \tag{6.44}$$

Luego,

$$\Delta t' = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{6.45}$$

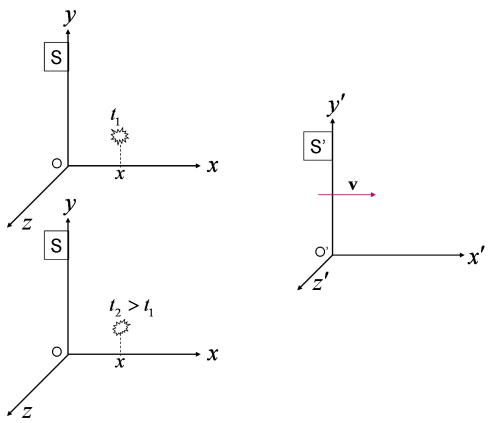


Figura 6.4: Un observador en S mide el tiempo propio entre dos eventos que ocurren en las mismas coordenadas en S.

Puesto que $\gamma > 1$, el intervalo de tiempo medido en S' es mayor que el tiempo propio medido en S. En general, el tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto posible entre dos eventos.

Dinámica relativista.

Los postulados de la Relatividad y las transformaciones de Lorentz son compatibles con las ecuaciones de Maxwell, pero requieren modificaciones de las leyes de Newton. Einstein propuso redefinir el momento lineal de una partícula que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ en un sistema S, del siguiente modo

$$p_i = m\frac{dx_i}{d\tau}, \tag{6.46}$$

donde τ es el tiempo propio (el tiempo medido en el sistema donde la partícula está en reposo), el cual está definido unívocamente (tiene el mismo valor) para todos los

observadores inerciales. Tenemos,

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \gamma u_i\,. \tag{6.47}$$

Luego, el momento relativista es

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = m\gamma\mathbf{u}\,, \tag{6.48}$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de la partícula en el sistema de referencia S.

La Segunda Ley de Newton relativista se escribe entonces,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{6.49}$$

donde $\mathbf{p}$ está definido en la Ec. (6.48). En esta forma, la Segunda Ley de Newton es invariante bajo las transformaciones de Lorentz,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}. \tag{6.50}$$

Note que en el límite de bajas velocidades, $\beta = \dfrac{v}{c} \ll 1$, obtenemos $\mathbf{p} \approx m\mathbf{u}$.

Invariantes relativistas.

Existen cantidades escalares que tienen el mismo valor en todos los sistemas inerciales. Por ejemplo,

$$\gamma^2(1-\beta^2) = 1 \tag{6.51}$$

tiene el mismo valor en todos los sistemas. Multiplicando por la constante m^2c^4, obtenemos otra cantidad invariante,

$$m^2c^4 = m^2c^4\gamma^2 - p^2c^2 = \text{cte}. \tag{6.52}$$

Energía relativista.

Si definimos la cantidad

$$\mathcal{E} \equiv \gamma mc^2 \,, \tag{6.53}$$

entonces podemos expresar

$$\mathcal{E}^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = \text{cte.} \tag{6.54}$$

Los términos en la Ec. (6.54) poseen unidades de energía al cuadrado. Luego, la cantidad $\mathcal{E}$ es un tipo de energía que se puede interpretar físicamente si hacemos una expansión en términos de $\beta = \dfrac{v}{c} \ll 1$,

$$\mathcal{E} = mc^2(1-\beta^2)^{-1/2} = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \mathcal{O}(\beta^4)\right] \tag{6.55}$$

Luego,

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots \tag{6.56}$$

El primer término en la Ec. (6.56) es constante y no depende de la velocidad de la partícula,

$$\mathcal{E}_o = mc^2 \,, \tag{6.57}$$

por lo que representa la *energía en reposo* de la masa m. El segundo término en la Ec. (6.56) corresponde a la energía cinética de la partícula para bajas velocidades. Luego, la cantidad $\mathcal{E}$ se interpreta como la energía total relativista de una partícula libre,

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + T_{\text{rel}}. \tag{6.58}$$

Lagrangiano para una partícula relativista.

Las leyes de Newton se cumplen en Relatividad con la definición apropiada de $\mathbf{p}$, dada en la Ec. (6.48). Luego, las ecuaciones de Lagrange también se deben cumplir para un Lagrangiano $\mathcal{L}$ definido apropiadamente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0. \tag{6.59}$$

Consideremos una partícula con velocidad $\mathbf{v}$ y posición $\mathbf{r}$ en un potencial $V(\mathbf{r})$. Luego,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = p_i = \gamma m \dot{x}_i, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \,. \tag{6.60}$$

Supongamos la velocidad a lo largo del eje x_i, i.e., $\dot{x}_i = v$. Entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \gamma m v \,, \tag{6.61}$$

luego, la dependencia funcional del Lagrangiano con la velocidad es

$$\mathcal{L}(v) = m \int \frac{v\, dv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \int \frac{\beta\, d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \tag{6.62}$$

lo cual da

$$\mathcal{L}(v) = -mc^2 (1-\beta^2)^{1/2} \,. \tag{6.63}$$

Para $\beta \ll 1$, $\mathcal{L}(v)$ se aproxima a la energía cinética newtoniana

$$\mathcal{L}(v) \approx \frac{1}{2} m v^2 + \cdots \tag{6.64}$$

Luego, el Lagrangiano para una partícula relativista debe tener la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v) - V(\mathbf{r})$, es decir,

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(\mathbf{r}). \tag{6.65}$$

Note que $\mathcal{L} \neq \mathcal{E} - V$, y $\mathcal{L} \neq T_{\text{rel}} - V$. Sin embargo, puesto que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo, la función de energía es una cantidad constante para este sistema,

$$E = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - \mathcal{L} = \text{cte}. \tag{6.66}$$

Utilizando $\mathcal{L}$ de la Ec. (6.65), obtenemos

$$E = m \frac{\sum_i \dot{x}_i \dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2 \sqrt{1-\beta^2} + V, \tag{6.67}$$

lo cual se reduce a

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + V = \mathcal{E} + V = \text{cte.} \tag{6.68}$$

La inclusión de potenciales dependientes de la velocidad no representa problema, y se hace del mismo modo que en el caso no relativista. En particular, recordemos que en Mecánica Clásica la energía potencial de una partícula con carga q que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo electromagnético caracterizado por los potenciales φ y $\mathbf{A}$ está dada por

$$V = q\varphi - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\,. \tag{6.69}$$

La fuerza de Lorentz sobre una partícula en un campo electromagnético se deriva de este potencial. Luego, el Lagrangiano relativista para una partícula en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}. \tag{6.70}$$

Ejemplo.

1. Partícula con masa m sujeta a la fuerza $F = ma$, donde a es una constante.

   El potencial es $V = -max$ y el Lagrangiano relativista es

   $$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + max, \tag{6.71}$$

   donde $\beta = \dot{x}/c$. La ecuación de Lagrange para x da:

   $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{a}{c}. \tag{6.72}$$

   Integrando, tenemos

   $$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{at+\alpha}{c} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{at+\alpha}{\sqrt{c^2+(at+\alpha)^2}} \tag{6.73}$$

   donde α es una constante de integración. Integrando otra vez,

   $$x = c\int \frac{(at+\alpha)dt}{\sqrt{c^2+(at+\alpha)^2}} \tag{6.74}$$

$$x - x_0 = \frac{c}{a}\left(\sqrt{c^2 + (at+\alpha)^2} - \sqrt{c^2 + a^2}\right) \tag{6.75}$$

donde hemos introducido la condición inicial $x = x_0$ en $t = 0$. Si la partícula se encuentra en reposo $\dot{x}(0) = 0$ en el origen x_0 en $t = 0$, entonces $\alpha = 0$ y tenemos

$$\left(x + \frac{c^2}{a^2}\right)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{a^2}\,, \tag{6.76}$$

lo cual corresponde a una hipérbola en el plano (x, t). Note que en el límite no relativista, $\beta \ll 1$, la Ec. (6.73) da la trayectoria parábolica usual en el plano (x, t),

$$x \approx \frac{1}{2}at^2 + \alpha t + x_0. \tag{6.77}$$

6.2 Corrimiento Doppler relativista.

Los postulados de la Relatividad implican que una onda plana tiene la misma forma en todos los sistemas de coordenadas inerciales. Puesto que las transformaciones de Lorentz son lineales, una onda plana en S debe seguir siendo una onda plana en S'. La fase de una onda debe ser una cantidad invariante, la misma en todos los sistemas de coordenadas, puesto que la fase está determinada por el número de máximos y mínimos de la onda que pasan por un observador; y toda operación de conteo de objetos es independiente del sistema de coordenadas. Es decir, el número de objetos es un *invariante de Lorentz*. Luego, la fase de una onda plana en el sistema S debe tener el mismo valor en el sistema S';

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' - \omega' t', \tag{6.78}$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ y ω son el vector de onda y la frecuencia en el sistema S, y $\mathbf{k}' = (k'_x, k'_y, k'_z)$ y ω' son las correspondientes cantidades en S'. Las coordenadas de los dos sistemas están relacionadas por las transformaciones de Lorentz. Luego, sustituyendo las transformaciones inversas Ecs. (6.33) en la Ec. (6.78), tenemos

$$\begin{aligned}
k_x x + k_y y + k_z z - \omega t &= k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t', \\
k_x\gamma(x' + vt) + k_y y' + k_z z' - \omega\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) &= k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t', \\
\gamma\left(k_x - \frac{v}{c^2}\omega\right)x' + k'_y y' + k'_z z' - \gamma(\omega - k_x v)t' &= k'_x x' + k'_y y + k'_z z - \omega' t'
\end{aligned} \tag{6.79}$$

comparando coeficientes en ambos lados de la Ec. (6.79), obtenemos

$$
\begin{aligned}
k'_x &= \gamma\left(k_x - \frac{v}{c^2}\,\omega\right) && (6.80)\\
\omega' &= \gamma(\omega - v k_x) && (6.81)\\
k'_y &= k_y && (6.82)\\
k'_z &= k_z && (6.83)
\end{aligned}
$$

En términos de componentes vectoriales perpendiculares y paralelas a la dirección del movimiento, podemos expresar

$$
\begin{aligned}
k'_{\parallel} &= \gamma\left(k_{\parallel} - \beta\,\frac{\omega}{c}\right)\\
\frac{\omega'}{c} &= \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta\,k_{\parallel}\right)\\
\mathbf{k}'_{\perp} &= \mathbf{k}_{\perp}
\end{aligned}
\qquad (6.84)
$$

Note que las cantidades $\mathbf{k}$ y ω/c se transforman de la misma manera que $\mathbf{r}$ y t en las transformaciones de Lorentz. Las transformaciones inversas se obtienen intercambiando variables primas por no primas y haciendo $\beta \to -\beta$ en las Ecs. (6.84).

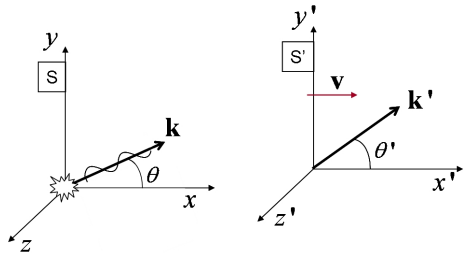


Figura 6.5: Efecto Doppler relativista.

Una consecuencia inmediata de las transformaciones Ec. (6.84) es el *corrimiento Doppler relativista*. Si una vector de onda $\mathbf{k}$ forma un ángulo θ con respecto con el eje x en el sistema de coordenadas S, entonces en el sistema S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, la frecuencia de la onda es

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \gamma(\omega - v\,k\cos\theta),\\
\Rightarrow \omega' &= \gamma\omega\,(1 - \beta\cos\theta)\,, && (6.85)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado $k = \omega/c$.

Para $\theta = 0$, la Ec. (6.85) da el conocido corrimiento Doppler para la luz: si $v > 0$, la fuente en S se aleja del observador en S' y $\omega' < \omega$, lo que corresponde al *corrimiento hacia el rojo*; mientras que si $v < 0$, la fuente en S se acerca al observador en S' y $\omega' > \omega$, lo que se denomina *corrimiento hacia el azul.*

En el límite no relativista, $\gamma \to 1$, la Ec. (6.85) da

$$\omega' = \gamma\omega \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right). \tag{6.86}$$

Note que en el límite no relativista, no existe corrimento Doppler para $\theta = \pi/2$; es decir $\omega' = \omega$. Sin embargo, la expresión relativista, Ec. (6.85), para $\theta = \pi/2$, da

$$\omega' = \gamma\omega > \omega; \tag{6.87}$$

este efecto relativista se conoce como el *corrimiento Doppler transversal.*

A pesar del corrimiento Doppler relativista, la velocidad de fase de la onda plana sigue siendo la misma en los sistemas de referencia S y S'. En S tenemos,

$$v = \frac{\omega}{k} = c, \tag{6.88}$$

mientras que en S',

$$v' = \frac{\omega'}{k'}. \tag{6.89}$$

donde

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta). \tag{6.90}$$

Por otro lado, calculamos k' como

$$\begin{aligned} k'^2 &= k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2 \\ &= \gamma^2\left(k_x - \beta\frac{\omega}{c}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2 \\ &= k^2\sin^2\theta + k^2(\cos\theta - \beta)^2, \end{aligned} \tag{6.91}$$

donde hemos usado

$$k_y^2 + k_z^2 = k_\perp^2 = k^2\sin^2\theta, \qquad k_x = k_\parallel = k\cos\theta, \qquad k = \frac{\omega}{c}. \tag{6.92}$$

Usando la identidad $\gamma^2(1-\beta^2)=1$, podemos escribir la Ec. (6.91) como

$$\begin{aligned} k'^2 &= k^2\gamma^2(1-\beta^2)\sin^2\theta + k^2(\cos\theta-\beta)^2 \\ &= k^2\gamma^2(\sin^2\theta - \beta^2\sin^2\theta + \cos\theta^2 - 2\beta\cos\theta + \beta^2) \\ &= k^2\gamma^2(1+\beta^2\cos\theta^2 - 2\beta\cos\theta) \\ &= k^2\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2 \\ \Rightarrow k' &= k\gamma(1-\beta\cos\theta). \end{aligned} \tag{6.93}$$

Sustituyendo en la Ec. (6.89), obtenemos

$$v' = \frac{\omega'}{k'} = \frac{\gamma\omega(1-\beta\cos\theta)}{k\gamma(1-\beta\cos\theta)} = \frac{\omega}{k} = c. \tag{6.94}$$

La invarianza de la velocidad de fase es consecuencia del postulado 2 de la Relatividad.

El ángulo θ' que el vector de onda $\mathbf{k}'$ forma con la dirección de $\mathbf{v}$ en S' es

$$\begin{aligned} \tan\theta' &= \frac{k'_\perp}{k'_\parallel} \\ \Rightarrow \tan\theta' &= \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}. \end{aligned} \tag{6.95}$$

Ejemplos.

1. Experimento de Fizeau (1951).

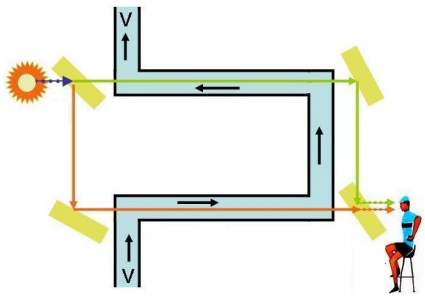


Figura 6.6: Experimento de Fizeau.

Este experimento buscaba medir el cambio en la velocidad de la luz en un medio (agua) en movimiento. Hyppolite Fizeau encontró experimentalmente que la velocidad de la luz en el laboratorio en este caso era

$$v_{\text{luz}} = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{6.96}$$

donde n es el índice de refracción del agua; v es la velocidad del agua en movimiento; el signo $+$ ocurre si el agua se mueve en la dirección de la luz, y el signo $-$ tiene lugar si el agua se mueve en dirección contraria a la luz. El aparato separa dos rayos de luz monocromática provenientes de la misma fuente y los transmite por un fluido moviéndose a favor o en contra de la dirección de la onda electromagnética. Un observador mide el corrimiento de fase $(k_1 - k_2)L$ mediante el patrón de interferencia resultante entre las dos ondas, donde k_1 y k_2 son los números de onda correspondientes y L es la longitud del recorrido para ambos rayos. El corrimiento de fase es proporcional a la diferencia de velocidades de la luz en los dos casos.

Los resultados del experimento pueden explicarse mediante la Relatividad Especial. La invarianza de la fase de la onda debe ser válida aún en presencia de un medio dieléctrico; luego las transformaciones relativistas de $\mathbf{k}$ y ω siguen siendo válidos en un medio como el agua. Consideremos que el agua está estacionaria en el sistema S', el cual se mueve con velocidad v en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ con respecto al sistema del laboratorio S. Entonces, en S', donde el agua está en reposo, la velocidad de la luz es

$$v'_{\text{luz}} = \frac{\omega'}{k'} = \frac{c}{n} \tag{6.97}$$

donde $\mathbf{k}' = k'\hat{\mathbf{x}}$ es el vector de onda y ω' la frecuencia de la luz en S'.

En el laboratorio S, la velocidad de la luz será

$$v_{\text{luz}} = \frac{\omega}{k}\,. \tag{6.98}$$

Utilizamos las transformaciones inversas de las Ecs. (6.84),

$$\omega = \gamma(\omega' + vk') \tag{6.99}$$

$$k = \gamma\left(k' + \beta\frac{\omega'}{c}\right), \tag{6.100}$$

y sustituyendo en la Ec. (6.98) obtenemos

$$\begin{aligned} v_{\text{luz}} &= \frac{\gamma(\omega' + vk')}{\gamma\left(k' + \beta\dfrac{\omega'}{c}\right)} \\ &= \frac{\omega'}{k'}\frac{\left(1 + v\dfrac{k'}{\omega'}\right)}{\left(1 + \dfrac{\beta\omega'}{ck'}\right)} \\ &= \frac{c}{n}\left(1 + n\beta\right)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{6.101}$$

Puesto que el agua se mueve con velocidad pequeña comparada con la de la luz, tenemos $\beta = \dfrac{v}{c} \ll 1$. Luego, despreciando términos de orden β^2 y mayores, podemos escribir para la velocidad de la luz en el laboratorio S,

$$\begin{aligned} v_{\text{luz}} &= \frac{c}{n}\left(1 + n\beta\right)\left(1 - \frac{\beta}{n} + \cdots\right) \\ &= \frac{c}{n}\left[1 - \frac{\beta}{n} + n\beta + \cdots\right] \\ &= \frac{c}{n}\left[1 + \beta\left(n - \frac{1}{n}\right) + \cdots\right] \\ \Rightarrow v_{\text{luz}} &= \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \tag{6.102}$$

lo cual está en completo acuerdo con el experimento de Fizeau cuando el agua se mueve en la dirección de la luz. Para el agua moviéndose en dirección opuesta a la de la luz, simplemente reemplazamos $v \to -v$ en el resultado anterior.

Note que las transformaciones de velocidades de Galileo dan, para la velocidad de la luz en el laboratorio, la expresión

$$v_{\text{luz}} = \frac{c}{n} \pm v, \tag{6.103}$$

que no está de acuerdo con el resultado experimental.

6.3 Transformaciones de campos electromagnéticos.

La evidencia experimental indica que la carga eléctrica es un invariante relativista; es decir, la carga eléctrica de una partícula, tal como el electrón o el protón, es independiente de su velocidad. Se ha establecido que el cociente entre la carga del electrón y el protón es el mismo para diversos átomos neutros; a pesar de que las velocidades de los correspondientes electrones sean muy distintas. Igualmente, se han realizado experimentos con haces de diversos átomos neutros moviéndose a altas velocidades y sujetos a campos eléctricos; sin observación de efecto de desviación alguno.

La invarianza de la carga eléctrica y la contracción de la longitud implican que la densidad de carga medida en sistemas inerciales S y S' en movimiento relativo debe ser diferente. Como consecuencia, los campos eléctricos y magnéticos en S y en S' también son diferentes; pero las ecuaciones de Maxwell conservan su forma en ambos sistemas.

Para mostrar cómo la densidad de una distribución carga se transforma en distintos sistemas, consideremos una lámina paralela al plano (x, z) con carga q, largo L_o (en la dirección x) y ancho l en reposo en un sistema S. La densidad superficial de carga de la lámina en S es σ_o, donde

$$\sigma_o = \frac{q}{L_o l}. \tag{6.104}$$

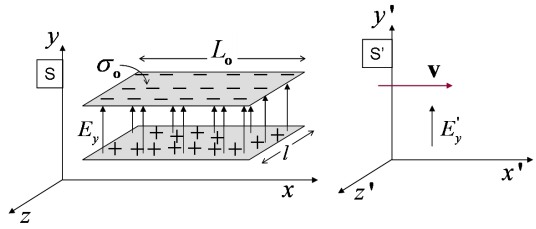


Figura 6.7: Transformación de la componente E_y en S a E'_y en S' .

La longitud de la lámina, medida en un sistema S' que se mueve con velocidad v en la dirección x, es

$$L' = \frac{L_o}{\gamma} = L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{6.105}$$

Luego, la densidad de carga superficial de la lámina, medida en S' es

$$\sigma' = \frac{q}{L'l} = \gamma \frac{q}{L_o l} = \gamma \sigma_o. \tag{6.106}$$

Es decir, la densidad de carga medida en un sistema en movimiento es mayor que la densidad de carga en reposo; $\sigma' > \sigma_o$, puesto que $\gamma > 1$.

Consideremos dos láminas paralelas al plano (x, z) en reposo en S, con densidades de carga σ_o y $-\sigma_o$, y con sus longitudes L_o en la dirección x. El campo eléctrico en S es uniforme entre las láminas y va en la dirección y,

$$E_y = 4\pi\sigma_o. \tag{6.107}$$

El campo eléctrico medido en S' debe tener la misma forma que en S, puesto que en S' también que se cumplen las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} E'_y &= 4\pi\sigma' && (6.108)\\ &= 4\pi\gamma\sigma_o && (6.109)\\ \Rightarrow E'_y &= \gamma E_y. && (6.110) \end{aligned}$$

Luego, $E'_y > E_y$. Del mismo modo, si colocamos las láminas paralelas al plano (x, y) en S, con sus longitudes L_o en la dirección x, obtenemos

$$E'_z = \gamma E_z, \tag{6.111}$$

puesto que la contracción de la longitud sigue afectando a L_o en la dirección x en S'.

Por otro lado, si las láminas se encuentran paralelas al plano (y, z) en S, la contracción de la longitud en la dirección x afecta la separación de las láminas medida en S', pero no sus áreas. Como consecuencia, la densidad de carga de las láminas medida en S' no cambia; y por lo tanto, el campo eléctrico en la dirección x' tampoco cambia,

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_o && (6.112)\\ \Rightarrow E'_x &= E_x. && (6.113) \end{aligned}$$

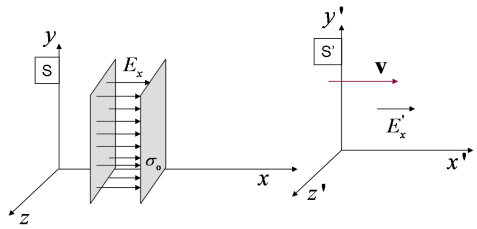


Figura 6.8: Transformación de la componente E_x en S a E'_x en S' .

Entonces, las componentes del campo eléctrico perpendiculares a la dirección de la velocidad cambian, mientras que las componentes del campo eléctrico paralelas a la velocidad no se alteran en el sistema S'; esto es,

$$E'_\perp = \gamma E_\perp \tag{6.114}$$

$$E'_\parallel = E_\parallel. \tag{6.115}$$

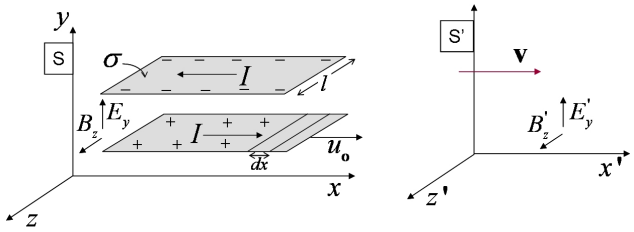


Figura 6.9: Transformaciones de las componentes E_y y B_z en S a E'_y y B'_z en S' .

Supongamos ahora que, además de un campo eléctrico, existe un campo magnético en S. Para que exista un campo magnético en S, debemos tener cargas en movimiento en S. Consideremos entonces que las láminas paralelas, cuyas densidades de carga en reposo son $\pm\sigma_o$, se mueven ambas en el sistema S en la dirección x con velocidad u_o. Entonces, la densidad de carga en S es

$$\sigma = \gamma_o \sigma_o \,, \tag{6.116}$$

$$\text{donde} \quad \gamma_o = (1-\beta_o^2)^{-1/2} \tag{6.117}$$

$$\beta_o = \frac{u_o}{c}. \tag{6.118}$$

La densidad de carga en movimiento equivale a una corriente. Consideremos un elemento diferencial de una lámina de largo dx. Su carga es

$$dq = \sigma l \, dx. \tag{6.119}$$

La corriente que pasa en un tiempo dt en S es

$$I = \frac{dq}{dt} = \sigma l \, \frac{dx}{dt} = \sigma l u_o. \tag{6.120}$$

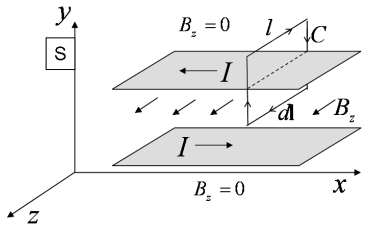


Figura 6.10: Ley de Ampère para calcular la componente B_z en S .

Para calcular el campo magnético producido por las corrientes laminares I que van en las direcciones x y x, notamos que el campo magnético entre las láminas en movimiento es uniforme y va en la dirección z, mientras que fuera de las láminas el campo magnético es cero. Utilizando la ley de Ampère en forma integral para el circuito C, obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{4\pi}{c} I_{\text{enc}} \\ B_z l &= \frac{4\pi}{c} I \\ \Rightarrow B_z &= \frac{4\pi}{c} \sigma u_o. \end{aligned} \tag{6.121}$$

El campo eléctrico en S va en la dirección y y su valor es

$$E_y = 4\pi\sigma. \tag{6.122}$$

Sustituyendo σ, podemos expresar los campos en S como

$$E_y = 4\pi\gamma_o\sigma_o \tag{6.123}$$

$$B_z = \frac{4\pi}{c}\gamma_o\sigma_o u_o = 4\pi\gamma_o\sigma_o\beta_o. \tag{6.124}$$

Las expresiones de los campos en el sistema S' tienen la misma forma que en S, Ecs. (6.121) y (6.122), pero en términos de cantidades medidas en S'; esto es

$$E'_y = 4\pi\sigma' \tag{6.125}$$

$$B'_z = \frac{4\pi}{c}\sigma' u', \tag{6.126}$$

donde σ' es la densidad de carga en S' y u' es la velocidad de las láminas con respecto a S'. Tenemos

$$\sigma' = \gamma'\sigma_o \tag{6.127}$$

$$\text{donde} \quad \gamma' = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{6.128}$$

Utilizando la suma de velocidades relativistas, tenemos

$$u' = \frac{u_o - v}{1 - \frac{\beta}{c}u_o} \tag{6.129}$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{c} = \frac{\beta_o - \beta}{1 - \beta\beta_o}, \tag{6.130}$$

donde

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \beta_o = \frac{u_o}{c}. \tag{6.131}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
1-\frac{u'^2}{c^2} &= 1-\left(\frac{\beta_o-\beta}{1-\beta\beta_o}\right)^2 \\
&= \frac{(1-\beta_o^2)(1-\beta^2)}{(1-\beta\beta_o)^2} \qquad (6.132)\\
\Rightarrow \gamma' &= \left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\
&= (1-\beta_o^2)^{-1/2}(1-\beta^2)^{-1/2}\,(1-\beta\beta_o) \\
&= \gamma_o\gamma\,(1-\beta\beta_o). \qquad (6.133)
\end{aligned}$$

Sustituyendo σ' y γ' en la Ec. (6.125), obtenemos

$$\begin{aligned}
E'_y &= 4\pi\sigma' \\
&= 4\pi\gamma'\sigma_o \\
&= 4\pi\sigma_o\gamma_o\gamma\,(1-\beta\beta_o) \\
&= \gamma\,(4\pi\sigma_o\gamma_o - 4\pi\sigma_o\gamma_o\beta_o\,\beta) \\
\Rightarrow \quad E'_y &= \gamma\,(E_y-\beta B_z)\,, \qquad (6.134)
\end{aligned}$$

donde hemos sustituido las Ecs. (6.123) y (6.124).

Del mismo modo, sustituyendo σ', γ' y u'/c en la Ec. (6.126), obtenemos

$$\begin{aligned}
B'_z &= 4\pi\sigma'\,\frac{u'}{c} \\
&= 4\pi\gamma'\sigma_o\,\frac{(\beta_o-\beta)}{(1-\beta\beta_o)} \\
&= 4\pi\sigma_o\gamma\gamma_o(1-\beta\beta_o)\,\frac{(\beta_o-\beta)}{(1-\beta\beta_o)} \\
&= \gamma\,(4\pi\sigma_o\gamma_o\beta_o - 4\pi\sigma_o\gamma_o\,\beta) \\
\Rightarrow \quad B'_z &= \gamma\,(B_z-\beta E_y)\,. \qquad (6.135)
\end{aligned}$$

Por un procedimiento similar, se puede demostrar que las otras componentes de **E** y **B** perpendiculares a la dirección x de la velocidad se transforman como

$$\begin{aligned}
E'_z &= \gamma\,(E_z+\beta B_y) \qquad (6.136)\\
B'_y &= \gamma\,(B_y+\beta E_z)\,. \qquad (6.137)
\end{aligned}$$

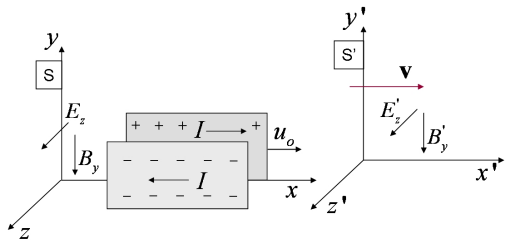


Figura 6.11: Transformaciones de las componentes E_z y B_y en S a E'_z y B'_y en S' .

Por último, consideremos la transformación de la componente B_x del campo magnético, paralela a la velocidad. Supongamos que en el sistema S tenemos en reposo un solenoide infinito en la dirección x, el cual transporta una corriente I y posee N/L_o vueltas por unidad de longitud.

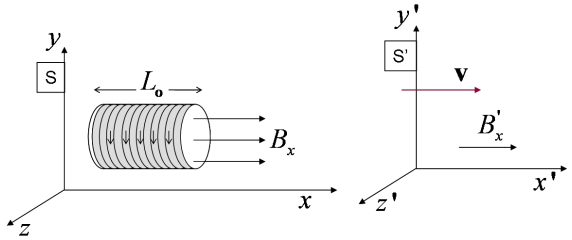


Figura 6.12: Transformación de la componente B_x en S a B'_x en S' .

Dentro del solenoide, el campo magnético es uniforme y va en la dirección x. La ley de Ampère da el valor

$$B_x = \frac{4\pi}{c}\, I\, \frac{N}{L_o}. \tag{6.138}$$

La corriente medida en S es

$$I = \frac{dq}{d\tau}, \tag{6.139}$$

donde $d\tau$ es el intervalo de tiempo propio para el paso de una carga dq por el cable. La corriente medida en S' es

$$I' = \frac{dq}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{dq}{d\tau} = \frac{I}{\gamma}\,, \tag{6.140}$$

puesto que $dt' = \gamma d\tau$ debido a la dilatación del tiempo en S'. Debido a la contracción de la longitud, la longitud del solenoide en S' es

$$L' = \frac{L_o}{\gamma}. \tag{6.141}$$

El número de espiras N es invariante. Entonces, el campo magnético en S' es

$$\begin{aligned} B'_x &= \frac{4\pi}{c} I' \frac{N}{L'} && (6.142) \\ &= \frac{4\pi}{c} \left(\frac{I}{\gamma}\right) \left(\frac{N}{L_o}\gamma\right) \\ &= \frac{4\pi}{c} I \frac{N}{L_o} \\ \Rightarrow B'_x &= B_x. && (6.143) \end{aligned}$$

Es decir, la componente del campo magnético paralela a la velocidad no cambia.

En resumen, las transformaciones relativistas de las componentes de los campos electromagnéticos son

$$\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma\left(E_y - \beta B_z\right) & B'_y = \gamma\left(B_y + \beta E_z\right) \\ E'_z = \gamma\left(E_z + \beta B_y\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \beta E_y\right), \end{array} \tag{6.144}$$

donde la velocidad relativa del sistema S' con respecto a S va en la dirección x. Las componentes de los campos electromagnéticos paralelas a la dirección de la velocidad no se alteran, mientras que las componentes perpendiculares se transforman. Si escribimos $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\parallel + \mathbf{B}_\perp$, las transformaciones Ecs. (6.144) se pueden expresar en forma vectorial como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel \\ \mathbf{B}'_\perp &= \gamma(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}), \end{aligned} \tag{6.145}$$

$$\text{donde} \qquad \boldsymbol{\beta} = \frac{v}{c}\,\hat{\mathbf{x}}\,, \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}. \tag{6.146}$$

Las transformaciones inversas se obtienen intercambiando variables primas por variables no primas, y haciendo $\beta \to -\beta$ en las Ecs. (6.144) y $\boldsymbol{\beta} \to -\boldsymbol{\beta}$ en las Ecs. (6.145).

Las transformaciones Ecs. (6.145) muestran que los campos eléctrico y magnético siempre coexisten en algún sistema de referencia. Un campo puramente eléctrico en un sistema aparece como una mezcla de campos eleć tricos y magnéticos en otro sistema. Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ están completamente relacionados, formando una entidad que es el campo electromagnético, y podemos considerar a las componentes de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ como seis componentes del campo electromagnético. El mismo campo electromagnético, visto desde distintos sistemas, estará representado por distintos valores para esas seis componentes. De este modo, el campo electromagnético se puede expresar como un tensor o una matriz 3×3 con seis componentes independientes que se transforman en distintos sistemas de referencia de acuerdo a las Ecs. (6.144).

Ejemplos.

1. Carga puntual en movimiento.

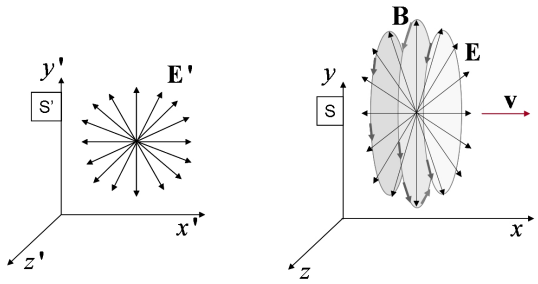


Figura 6.13: Campos de una carga en movimiento.

Supongamos una carga q en reposo en S'. Luego, en S' no hay campo magnético, $\mathbf{B}'_{\parallel} = 0, \mathbf{B}'_{\perp} = 0$, y $\mathbf{E}'$ es un campo electrostático radial.

Vista desde el sistema S, que podemos llamar *laboratorio*, la carga q se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en la dirección x. El campo eléctrico en S está dado por las transformaciones inversas correspondientes a la Ecs. (6.145),

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \qquad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'), \tag{6.147}$$

es decir,

$$E_x = E'_x, \qquad E_{\perp} = \gamma E'_{\perp}. \tag{6.148}$$

En S, las líneas radiales de campo eléctrico se pliegan en la dirección transversal al movimiento, concentrándose en un cilindro delgado perpendicular a la dirección de $\mathbf{v}$.

Similarmente, el campo magnético medido en S está dado por

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}, \qquad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}'_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}') \tag{6.149}$$

lo que conduce en este caso a

$$\mathbf{B}_{\parallel} = 0, \qquad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'. \tag{6.150}$$

En S se observa un campo magnético $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp}$ perpendicular a la dirección del movimiento $\boldsymbol{\beta}$ y al campo radial $\mathbf{E}'$. Las líneas de campo $\mathbf{B}$ son circunferencias alrededor de la dirección de movimiento, en el plano perpendicular a ésta. La carga en movimiento constituye una corriente en la dirección $\mathbf{v}$ en S, y la dirección del campo $\mathbf{B}$ que ésta produce satisface la regla de la mano derecha.

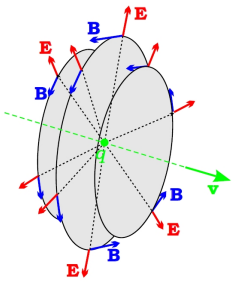


Figura 6.14: Direcciones de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ de una carga en movimiento.

Supongamos que la carga q se encuentra en el origen de coordenadas de S', de modo que $\mathbf{E}' = \frac{q}{r'^3}\mathbf{r}'$. Consideremos un instante $t = t' = 0$ cuando los orígenes de coordenadas de S' y S coinciden. Entonces, para velocidades bajas con respecto a c, $\gamma \simeq 1$, $\mathbf{r} \simeq \mathbf{r}'$, y obtenemos campo magnético en S

$$\mathbf{B} \simeq \frac{q}{c}\,\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}\,, \tag{6.151}$$

el cual es el campo magnético dado por la ley de Biot-Savart para una corriente correspondiente a una carga en movimiento.

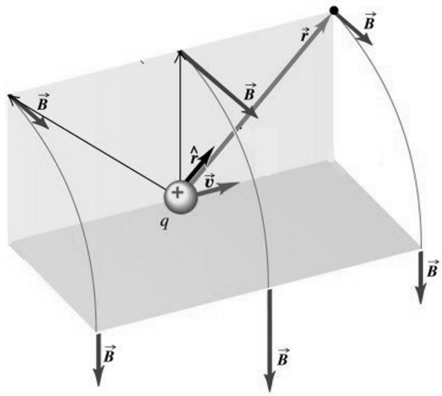


Figura 6.15: Campo magnético de una carga en movimiento y la ley de Biot-Savart.

2. Supongamos que en S existe un campo eléctrico $\mathbf{E}$, pero que no hay campo magnético, $\mathbf{B} = 0$. Entonces, en S' se observa un campo magnético

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = 0, \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E} \times \boldsymbol{\beta}. \tag{6.152}$$

En el ejemplo de las láminas cargadas en reposo, $E_y = 4\pi\sigma_o$ en S. Luego, el campo magnético en S' es

$$\begin{aligned} B'_x &= 0, \\ B'_y &= 0, \\ B'_z &= -\gamma\beta E_y = -4\pi\sigma_o\gamma\beta. \end{aligned} \tag{6.153}$$

Resumen

1. Transformaciones de Lorentz,

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{v}{c}\,, \qquad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

2. Suma relativista de velocidades,

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{\beta}{c}u'_x}\,.$$

3. Contracción de la longitud,

$$L' = \frac{L_o}{\gamma}\,.$$

4. Dilatación del tiempo,

$$\Delta t' = \gamma\tau.$$

5. Momento relativista,

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u}.$$

6. Energía relativista,

$$\mathcal{E} \equiv \gamma mc^2, \qquad \mathcal{E}^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = \text{cte}.$$

7. Corrimiento Doppler relativista,

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta\, k_\parallel\right), \qquad k'_\parallel = \gamma\left(k_\parallel - \beta\,\frac{\omega}{c}\right).$$

8. Transformaciones de los campos electromagnéticos,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp &= \gamma(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel \\ \mathbf{B}'_\perp &= \gamma(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{v}{c}\,\hat{\mathbf{x}}.$$

6.4 Problemas.

1. En un laboratorio se observa un cable recto infinito, con densidad lineal de carga λ_o en reposo, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}$ paralela a la dirección del cable. ¿Cuáles son los campos eléctrico y magnético observados en el laboratorio?.

2. Considere un sistema de referencia en el cual existe un campo eléctrico $\mathbf{E} = E_o\hat{\mathbf{y}}$ y un campo magnético $\mathbf{B} = B_o\hat{\mathbf{z}}$, tal que $E_o < B_o$.
   a) Encuentre un sistema de referencia inercial donde el campo eléctrico sea nulo.
   b) Demuestre que las cantidades $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ y $E^2 - B^2$ son iguales en ambos sistemas.

3. Una onda electromagnética plana con frecuencia ω incide sobre un espejo plano, formando un ángulo α con respecto al espejo. Si el espejo se mueve con velocidad constante v en la dirección de su normal al encuentro de la onda incidente, determine el ángulo de reflexión respecto al plano del espejo y la frecuencia de la onda reflejada

4. Una onda electromagnética plana en un sistema inercial $\mathcal{S}$ posee un campo eléctrico $\mathbf{E} = E_o \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$.
   a) Encuentre el campo magnético correspondiente a esta onda en $\mathcal{S}$.
   b) Encuentre el número de onda y la frecuencia de esta onda en un sistema de referencia $\mathcal{S}'$ que se mueve con velocidad constante $v\hat{\mathbf{x}}$ con respecto a $\mathcal{S}$.

5. Un cable recto e infinito tiene una densidad lineal de carga uniforme λ y lleva una corriente I.
   a) Encuentre un sistema de referencia en el cual no exista campo magnético y determine la magnitud del campo eléctrico medido en ese sistema.
   b) Encuentre un sistema de referencia en el cual solamente se observe campo magnético y determine la magnitud de ese campo en tal sistema.

6. En un laboratorio, se observan dos electrones moviéndose en trayectorias paralelas, uno al lado del otro, con la misma rapidez v y separados por una distancia transversal d.
   a) ¿Cuál es la fuerza entre ambas partículas, calculada en el laboratorio?.
   b) Si los electrones se mueven en la misma línea uno delante del otro, separados por una distancia d, ¿cuál es la fuerza medida en el laboratorio en este caso?.

7. Una esfera conductora de radio R se mueve con velocidad constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$. a través de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_o\hat{\mathbf{y}}$.
   a) Encuentre la densidad superficial de carga inducida sobre la esfera.
   b) ¿Cuál es el límite no relativista de esta cantidad?.

8. Una partícula relativista de masa m y carga q, con velocidad inicial $\mathbf{v}_o$, se mueve en un campo eléctrico $\mathbf{E}_o$ uniforme, constante y perpendicular a $\mathbf{v}_o$. Encuentre la velocidad de la partícula en función del tiempo.

9. Una partícula relativista con carga q y masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en el campo de un dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ orientado en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ y cuyo potencial vector, en coordenadas esféricas, es

$$\mathbf{A} = \frac{\mu \sin\theta}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

   a) Encuentre el momento conjugado p_ϕ de la partícula.
   b) Demuestre que p_ϕ es una constante del movimiento.

10. Este problema se refiere al *efecto Sagnac*. Se construye un interferómetro enviando luz de longitud de onda λ en direcciones opuestas a través de un contorno plano cerrado (por ejemplo, una fibra óptica) de longitud L y que encierra un área A. Todo el aparato, incluyendo la fuente de luz y el detector, se hace rotar con velocidad angular Ω alrededor de un eje perpendicular a su plano.
    a) Demuestre que el corrimiento de fase observado entre los rayos de luz que se mueven en direcciones opuestas es $\frac{4\Omega A}{c\lambda}$, hasta primer orden en Ω.
    b) ¿Cómo depende la respuesta anterior de la localización del eje de rotación?.
    c) ¿Podría este efecto ser observado en un laboratorio típico?.

.

Explicit Forms of Vector Operations

Let $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ be orthogonal unit vectors associated with the coordinate directions specified in the headings on the left, and A_1, A_2, A_3 be the corresponding components of $\mathbf{A}$. Then

Cartesian $(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$$

Cylindrical (ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \mathbf{e}_3 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Spherical (r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right]$$
$$+ \mathbf{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\left[\text{Note that } \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi).\right]$$