Polinomios de Hermite

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

23 de agosto de 2021

Agenda Polinomios de Hermite

Hermite: generalidades

- Los polinomios de Hermite están definidos en toda la recta real: $x \in (-\infty, \infty)$

Hermite: generalidades

- Los polinomios de Hermite están definidos en toda la recta real: $x \in (-\infty, \infty)$
- La función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita
  $< f|f >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x)f(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2}|f(x)|^2 \,.$

Hermite: generalidades

- Los polinomios de Hermite están definidos en toda la recta real: $x \in (-\infty, \infty)$
- La función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita $< f|f >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x) f(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2} |f(x)|^2 \,.$
- El producto interno queda definido $< f|g >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x) f(x) g(x)$.

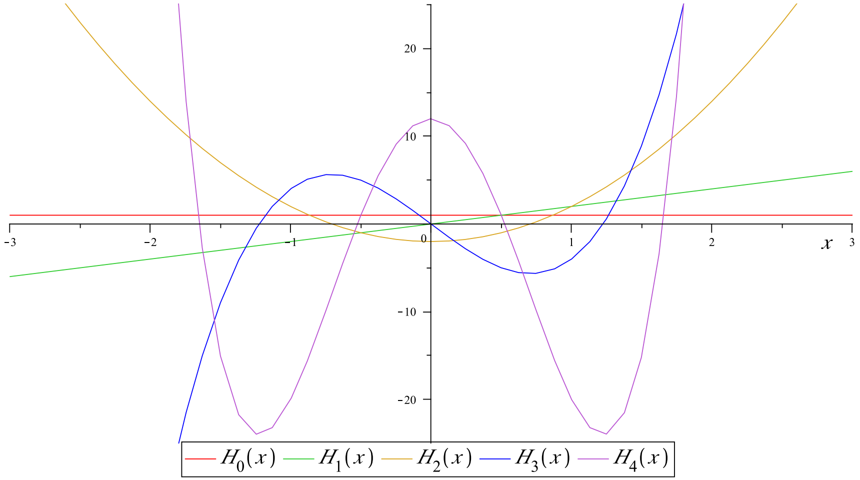
Hermite: generalidades

- Los polinomios de Hermite están definidos en toda la recta real: $x \in (-\infty, \infty)$
- La función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita $< f|f >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x) f(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2} |f(x)|^2 \,.$
- El producto interno queda definido $< f|g >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x) f(x) g(x)$.
- La fórmula de Rodrigues es $H_n(x) = (-1)^n \; e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} \,,$

Hermite: generalidades

- Los polinomios de Hermite están definidos en toda la recta real: $x \in (-\infty, \infty)$
- La función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita $< f|f >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x)f(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2}|f(x)|^2$.
- El producto interno queda definido $< f|g >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x)f(x)g(x)$.
- La fórmula de Rodrigues es $H_n(x) = (-1)^n \; e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$,
- los cinco primeros polinomios de Hermite son:

$$
\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x
\end{aligned}
$$



$H_n(x)$ tiene n raíces reales en el intervalo $(-1, 1)$

Ortogonalidad, norma y expansión de funciones

- Los polinomios de Hermite son ortogonales,
  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta}$,

- Los polinomios de Hermite son ortogonales, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta}$,
- Su norma por lo tanto es $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$. La función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

- Los polinomios de Hermite son ortogonales, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{dx} = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta}$,
- Su norma por lo tanto es $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{dx} = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$. La función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.
- Si f y g funciones arbitrarias, continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y que sus normas $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) \mathrm{dx}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x) \mathrm{dx}$, existen

Ortogonalidad, norma y expansión de funciones

- Los polinomios de Hermite son ortogonales, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta}$,
- Su norma por lo tanto es $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$.
  La función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.
- Si f y g funciones arbitrarias, continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y que sus normas $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x) \mathrm{d}x$, existen
- Estas funciones forman un espacio vectorial euclideano $\mathcal{I}_2^w$ con un producto interno definido por $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x) \mathrm{d}x$ Con $f(x)$ y $g(x)$ funciones cuadrado-integrables respecto al peso w.

Ortogonalidad, norma y expansión de funciones

- Los polinomios de Hermite son ortogonales,
  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta}$,
- Su norma por lo tanto es $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$.
  La función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.
- Si f y g funciones arbitrarias, continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y que sus normas $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x) \mathrm{d}x$, existen
- Estas funciones forman un espacio vectorial euclideano $\mathcal{I}_2^w$ con un producto interno definido por $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x) \mathrm{d}x$ Con $f(x)$ y $g(x)$ funciones cuadrado-integrables respecto al peso w.
- Este espacio de funciones se denota como $\mathcal{I}_2^w$ y

- Los polinomios de Hermite son ortogonales, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta}$,
- Su norma por lo tanto es $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$. La función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.
- Si f y g funciones arbitrarias, continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y que sus normas $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) \mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x) \mathrm{d}x$, existen
- Estas funciones forman un espacio vectorial euclideano $\mathcal{I}_2^w$ con un producto interno definido por $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x) \mathrm{d}x$ Con $f(x)$ y $g(x)$ funciones cuadrado-integrables respecto al peso w.
- Este espacio de funciones se denota como $\mathcal{I}_2^w$ y
- Una función $f(x)$ se puede expresar cómo $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\, \mathrm{d}x \right]\ H_k(x)$, donde $a_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\, \mathrm{d}x$.

- Los polinomios de Hermite, son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{\mathrm{d}^2 H_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x \frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x} + nH_n(x) = 0$

n	Ecuación de Hermite	Solución
0	$\frac{\mathrm{d}^2 H_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0$	$H_0(x) = 1$
1	$\frac{\mathrm{d}^2 H_1(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2H_1(x) = 0$	$H_1(x) = 2x$
2	$\frac{\mathrm{d}^2 H_2(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_2(x)}{\mathrm{d}x} + 4H_2(x) = 0$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$\frac{\mathrm{d}^2 H_3(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}H_3(x)}{\mathrm{d}x} + 6H_3(x) = 0$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

- La función generatriz $\mathcal{H}(t,x)$ de los polinomios de Hermite es:
  $\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) + H_1(x)\, t + \frac{H_2(x)}{2}\, t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n$

Función generatriz y relación de recurrencia

- La función generatriz $\mathcal{H}(t, x)$ de los polinomios de Hermite es: $\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt - t^2} = H_0(x) + H_1(x)\, t + \frac{H_2(x)}{2}\, t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n$
- La relación de recurrencia será $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$

- La función generatriz $\mathcal{H}(t,x)$ de los polinomios de Hermite es: $\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) + H_1(x)\, t + \frac{H_2(x)}{2}\, t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n$
- La relación de recurrencia será $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$
- Los polinomios de Hermite pueden ser representados como $H_n(x) = \frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} t^n \mathrm{d}t$

Función generatriz y relación de recurrencia

- La función generatriz $\mathcal{H}(t,x)$ de los polinomios de Hermite es: $\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) + H_1(x)\,t + \frac{H_2(x)}{2}\,t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\,t^n$
- La relación de recurrencia será $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$
- Los polinomios de Hermite pueden ser representados como $H_n(x) = \frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} t^n \mathrm{d}t$
- y también como $H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\mathrm{d}t\,, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

Función generatriz y relación de recurrencia

- La función generatriz $\mathcal{H}(t,x)$ de los polinomios de Hermite es:
  $\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) + H_1(x)\, t + \frac{H_2(x)}{2}\, t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n$
- La relación de recurrencia será $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$
- Los polinomios de Hermite pueden ser representados como
  $H_n(x) = \frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} t^n \mathrm{d}t$
- y también como
  $H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt)\mathrm{d}t\,, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$
- del mismo modo
  $H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \mathrm{sen}(2xt)\mathrm{d}t\,, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

- La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$
  μ la "masa" de partícula, E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial

El Oscilador armónico cuántico indep. del tiempo

- La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$
  μ la "masa" de partícula, E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial
- Si $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$, entonces $\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$

- La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$
  μ la "masa" de partícula, E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial
- Si $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$, entonces $\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$
- Es la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:
  $\psi''(\xi) + \left[2n + 1 - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$

El Oscilador armónico cuántico indep. del tiempo

- La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$
  μ la "masa" de partícula, E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial
- Si $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$, entonces $\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$
- Es la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:
  $\psi''(\xi) + \left[2n + 1 - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$
- Entonces $\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,,$

- La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$
  μ la "masa" de partícula, E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial
- Si $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$, entonces $\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$
- Es la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:
  $\psi''(\xi) + \left[2n + 1 - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$
- Entonces $\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,,$
- La función de onda se expresa en la base de soluciones de esa ecuación como $\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\,.$

- La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$
  μ la "masa" de partícula, E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial
- Si $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$, entonces $\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$
- Es la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:
  $\psi''(\xi) + \left[2n + 1 - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$
- Entonces $\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,,$
- La función de onda se expresa en la base de soluciones de esa ecuación como $\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\,.$
- Si mantenemos la normalización $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi)\mathrm{d}\xi = 1$ con
  $c_n = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,.$

Recapitulando

En presentación consideramos

1.