Teoría Potencial

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

5 de marzo de 2021

Agenda: Teoría Potencial

1. Potenciales escalares y vectoriales
2. Teorema de Helmholtz
3. Recapitulando

Potenciales escalares y vectoriales

- Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ en una determinada región R puede asociarse con el gradiente de un potencial $\phi(x, y, z)$ tendremos que $\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x^i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{F}(x^i) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$
  - Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional
  - Un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial.
  - Un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y que el campo es conservativo.

Potenciales escalares y vectoriales

- Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ en una determinada región R puede asociarse con el gradiente de un potencial $\phi(x, y, z)$ tendremos que $\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x^i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{F}(x^i) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$
  - Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional
  - Un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial.
  - Un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y que el campo es conservativo.
- **Potenciales vectoriales y calibres:** un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ es irrotacional, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*). Entonces podemos asociar un potencial *vectorial* $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}(x^i) = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(x^i)\,.$

Potenciales escalares y vectoriales

- Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ en una determinada región R puede asociarse con el gradiente de un potencial $\phi(x,y,z)$ tendremos que $\mathbf{F}(x^i) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x^i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint \mathbf{F}(x^i)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0\,.$
  - Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional
  - Un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial.
  - Un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y que el campo es conservativo.
- **Potenciales vectoriales y calibres:** un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ con un potencial escalar $\phi(x,y,z)$ es irrotacional,

  $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}(x,y,z) = 0$ (*solenoidal* o *transverso*). Entonces podemos asociar un potencial *vectorial*

  $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x^i) = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{F}(x^i) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(x^i)\,.$
- $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$ es el *potencial vectorial* del campo $\mathbf{F}$ y $\mathbf{A}(x,y,z)$ no es único. Existe una arbitrariedad de un campo escalar, llamado *de calibre* $\chi = \chi(x,y,z)$ (gauge en inglés) de forma tal que
  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i) \quad \Rightarrow \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\chi) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$

  varios potenciales vectoriales A generan el mismo campo vectorial **F**.
  - **El calibre de Lorentz:** $\boldsymbol{\nabla}^2\chi(x^i) - a\dfrac{\partial^2\chi(x^i)}{\partial t^2} = 0$
  - **El calibre de Coulomb, de radiación o transverso:**

    $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}'(x^i) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{A}(x^i) + \boldsymbol{\nabla}\chi(x^i)\right) = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}^2\chi(x^i) = 0\,.$

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_S \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único

Teorema de Helmholtz

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único
- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \,. \end{array} \right.$$

Teorema de Helmholtz

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único

- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$.
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \,. \end{array} \right.$$

- En general el campo $\mathbf{F}$ puede ser discontinuo, entonces
$$\left. \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \text{y como } \mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = \rho(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \,, \end{array} \right.$$

Teorema de Helmholtz

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único

- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$.
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t\,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0\,. \end{array} \right.$$

- En general el campo $\mathbf{F}$ puede ser discontinuo, entonces
$$\left. \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{J}\,(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \text{y como } \mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = \rho\,(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}\,(\mathbf{r})\;, \end{array} \right.$$

- Entonces $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho\,(\mathbf{r})$ y la solución existe y es única.

Teorema de Helmholtz

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único
- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$.
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t\,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0\,. \end{array} \right.$$
- En general el campo $\mathbf{F}$ puede ser discontinuo, entonces
$$\left. \begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \text{y como } \mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = \rho(\mathbf{r}) \\ \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}(\mathbf{r})\,, \end{array} \right.$$
- Entonces $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \ \Rightarrow \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \ \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho(\mathbf{r})$ y la solución existe y es única.
- Por otra parte $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \ \Rightarrow \ \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \ \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{r})\,.$

Teorema de Helmholtz

- Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S, y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{F}$, también se conocen, entonces ese campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es único
- Todo campo vectorial $\mathbf{F}$, continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes": una *longitudinal* o *irrotacional* $\mathbf{F}_l$ y otra *transversa* o *solenoidal* $\mathbf{F}_t$.
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \,. \end{array} \right.$$
- En general el campo $\mathbf{F}$ puede ser discontinuo, entonces
$$\left. \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \text{y como } \mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = \rho(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \,, \end{array} \right.$$
- Entonces $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_l = 0 \;\Rightarrow \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x^i) \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_l = -\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x^i) = \rho(\mathbf{r})$ y la solución existe y es única.
- Por otra parte $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}_t = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \;\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}_t = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \,.$
- Al seleccionar el calibre de Coulomb $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ tendremos
$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \partial^i\partial_i\,\mathbf{A} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \partial^i\partial_i\,A^k = -J^k(\mathbf{r}) \;\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla}^2 A_x = -J_x(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\nabla}^2 A_y = -J_y(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\nabla}^2 A_z = -J_z(\mathbf{r}) \end{array} \right.$$

Recapitulando

- LZZZZZZ