Pequeñas oscilaciones

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

27 de septiembre de 2024

Agenda

1. Pequeñas oscilaciones 1D
2. Oscilaciones con varios grados de libertad
3. Sección
4. Sección
5. Sección

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

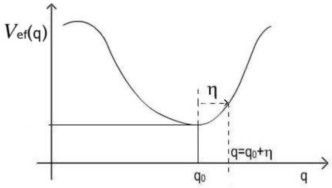
- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\mathrm{ef}}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$

Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2}c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\mathrm{ef}}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$

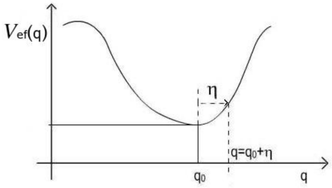
Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c\dot{q}^2 - V_{\mathrm{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\mathrm{ef}}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\mathrm{ef}}(q_0) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



Pequeñas oscilaciones 1D 1/2

- Como vimos en la clase de estabiliad dado un $\mathcal{L} = \frac{1}{2} c\dot{q}^2 - V_{\rm ef}(q)$
- La ecuación de movimiento es $c\ddot{q} = f_{\rm ef}(q) \equiv -\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en q_0, cuando $f_{\rm ef}\left(q_0\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$
- Será estable si $\left.\frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2}\right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



- Desarrollamos por Taylor, $V_{\rm ef}\left(q\right)$ alrededor de $q = q_0$, y tenemos

$$V_{\rm ef}(q) = V_{\rm ef}\left(q_0 + \eta\right) = V\left(q_0\right) + \cancelto{0}{\left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0}} \eta + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial q^2}\right|_{q_0} \eta^2 + \cdots \,,$$

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\text{ef}}(q) = V_{\text{ef}}\left(q_0 + \eta\right) \approx \frac{1}{2} K \left(q - q_0\right)^2 = \frac{1}{2} K \eta^2$

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}\left(q_0 + \eta\right) \approx \frac{1}{2}K\left(q - q_0\right)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q} = -K\left(q - q_0\right) \equiv -K\eta$

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}\left(q_0 + \eta\right) \approx \frac{1}{2}K\left(q - q_0\right)^2 = \frac{1}{2}K\eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q} = -K\left(q - q_0\right) \equiv -K\eta$
- Entonces, $\ddot{\eta} + \omega^2\eta = 0$, donde $\omega^2 \equiv \frac{K}{c} = \left.\frac{1}{c}\frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial q^2}\right|_{q_0}$ es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de q_0.

Pequeñas oscilaciones 1D 2/2

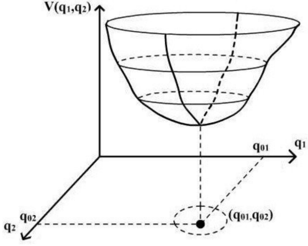
- Despreciando términos en potencias de η de orden superior al cuadrático, tenemos $V_{\mathrm{ef}}(q) = V_{\mathrm{ef}}(q_0 + \eta) \approx \frac{1}{2} K (q - q_0)^2 = \frac{1}{2} K \eta^2$
- La ecuación de movimiento será $c\ddot{\eta} = -\frac{\partial V_{\mathrm{ef}}}{\partial q} = -K(q - q_0) \equiv -K\eta$
- Entonces, $\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$, donde $\omega^2 \equiv \frac{K}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V_{\mathrm{ef}}}{\partial q^2}\Big|_{q_0}$ es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de q_0.
- Que tendrá como solución $\eta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t = A \cos(\omega t + \varphi) \equiv \mathrm{Re}\left[A e^{i(\omega t + \varphi)}\right] = \mathrm{Re}\left(a e^{i\omega t}\right)$ donde $a = A e^{i\varphi}$ es la amplitud compleja

Oscilaciones con varios grados de libertad

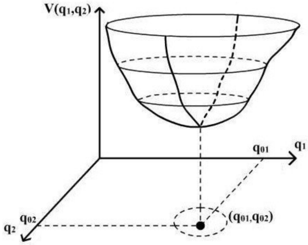
- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.

Oscilaciones con varios grados de libertad

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$

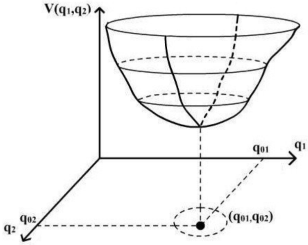


- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$



- Perturbando las q_i, tendremos $q_i = q_{0i} + \eta_i$, con $\eta_i \to 0 \quad \left(\frac{\eta_i}{q_{0i}} \ll 1\right)$

- Dado un sistema con s grados de libertad $\{q_i : i = 1, \ldots, s\}$ con energía potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$.
- La configuración de equilibrio del sistema en $\{q_{0i} : i = 1, \ldots, s\}$, con $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_{0i}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$



- Perturbando las q_i, tendremos $q_i = q_{0i} + \eta_i$, con $\eta_i \to 0 \quad \left(\frac{\eta_i}{q_{0i}} \ll 1\right)$
- El valor del potencial $V(q_1, \ldots, q_s)$ cerca de la configuración de equilibrio se obtiene de la expansión de Taylor en varias variables de $V(q_1, \ldots, q_s)$ alrededor de $\{q_{0i}\}$, con $q_i = q_{0i} + \eta_i$,

- Esto es $V\left(q_1, \ldots, q_s\right) =$
$V\left(q_{01}, \ldots, q_{0s}\right) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$

- Esto es $V(q_1, \ldots, q_s) = V(q_{01}, \ldots, q_{0s}) + \sum_i \cancel{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}}^{0} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$.

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/2

- Esto es $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) =$
$$V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i\eta_j + \cdots$$
- Los $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = \left(q_{01},\ldots,q_{0s}\right)$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) = V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

Oscilaciones con varios grados de libertad 2/2

- Esto es $V(q_1, \dots, q_s) =$
$$V(q_{01}, \dots, q_{0s}) + \cancelto{0}{\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$$
- Los $V(q_{01}, \dots, q_{0s})$ es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \dots, q_{0s})$.
- En la configuración de equilibrio $q_i = q_{0i} + \eta_i$, el potencial se puede expresar como $V(q_1, \dots, q_s) = V(\eta_1, \dots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- donde los coeficientes $V_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}}$ son simétricos, $V_{ij} = V_{ji}$

Título transparencia

-

Título transparencia

-

Título transparencia