Funciones de Green

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

12 de agosto de 2022

Agenda Funciones de Green

El problema de frontera inhomogéneo 1/2

- Consideremos el caso inhomogéneo
$\mathbb{L}\,|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)\,.$

El problema de frontera inhomogéneo 1/2

- Consideremos el caso inhomogéneo
  $\mathbb{L}\,|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)\,.$
- La solución del caso homogéneo será
  $\mathbb{L}\,|u_i\rangle = -\lambda_i\,|u_i\rangle \quad \Rightarrow |y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} C^i\,|u_i\rangle\ ,$

El problema de frontera inhomogéneo 1/2

- Consideremos el caso inhomogéneo
  $\mathbb{L}\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)\,.$
- La solución del caso homogéneo será
  $\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i\left|u_i\right\rangle \quad \Rightarrow \left|y\right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} C^i\left|u_i\right\rangle\ ,$
- Entonces $\left|f\right\rangle = \mathbb{L}\left|y\right\rangle$, implica
  $\left|f\right\rangle = \mathbb{L}\left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i\left|u_i\right\rangle\right) = \sum_{i=0}^{\infty} C^i\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i\left|u_i\right\rangle\ ,$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos el caso inhomogéneo
$$\mathbb{L}\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)\,.$$
- La solución del caso homogéneo será
$$\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i\left|u_i\right\rangle \quad \Rightarrow \left|y\right\rangle = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\left|u_i\right\rangle\ ,$$
- Entonces $\left|f\right\rangle = \mathbb{L}\left|y\right\rangle$, implica
$$\left|f\right\rangle = \mathbb{L}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\left|u_i\right\rangle\right) = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i\left|u_i\right\rangle\ ,$$
- Los coeficientes C^i se podrán calcular proyectando
$$\left\langle u^j\right|f\rangle = -\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i\underbrace{\left\langle u^j\right|u_i\rangle}_{\delta_{ij}} \Rightarrow C^j = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\left\langle u^j\right|f\rangle}{\left\langle u^j\right|u_j\rangle}$$

El problema de frontera inhomogéneo 1/2

- Consideremos el caso inhomogéneo
$$\mathbb{L}\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)\,.$$
- La solución del caso homogéneo será
$$\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\lambda_i\left|u_i\right\rangle \quad \Rightarrow \left|y\right\rangle = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\left|u_i\right\rangle\,,$$
- Entonces $\left|f\right\rangle = \mathbb{L}\left|y\right\rangle$, implica
$$\left|f\right\rangle = \mathbb{L}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\left|u_i\right\rangle\right) = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\mathbb{L}\left|u_i\right\rangle = -\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i\left|u_i\right\rangle\,,$$
- Los coeficientes C^i se podrán calcular proyectando
$$\left\langle u^j\middle|f\right\rangle = -\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i\underbrace{\left\langle u^j\middle|u_i\right\rangle}_{\delta_{ij}} \Rightarrow C^j = \frac{1}{\lambda_j}\frac{\left\langle u^j\middle|f\right\rangle}{\left\langle u^j\middle|u_j\right\rangle}$$
- Por lo tanto, $\left|y\right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i}\frac{\left\langle u^i\middle|f\right\rangle}{\left\langle u^i\middle|u_i\right\rangle}\right)\left|u_i\right\rangle \Leftrightarrow$
$$y(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\left(\frac{\int_a^b \mathrm{d}\xi\ u_i^*(\xi)\,w(\xi)f(\xi)}{\int_a^b \mathrm{d}\zeta\ u_i^*(\zeta)\,w(\zeta)u_i(\zeta)}\right)u_i(x)$$

El problema de frontera inhomogéneo 2/2

- Normalizando $\left\langle \hat{u}^i \,|\hat{u}_i\right\rangle = 1 \;\Leftrightarrow\; \int_a^b \mathrm{d}\zeta\;\; \hat{u}_i^*(\zeta)\, w(\zeta)\hat{u}_i(\zeta) = 1 \Rightarrow$
  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left(\int_a^b \mathrm{d}\xi\;\; \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi) \right) \hat{u}_i(x)\,,$

El problema de frontera inhomogéneo 2/2

- Normalizando $\left\langle \hat{u}^i \,|\hat{u}_i\right\rangle = 1 \;\Leftrightarrow\; \int_a^b \mathrm{d}\zeta\;\hat{u}_i^*(\zeta)\,w(\zeta)\hat{u}_i(\zeta) = 1 \Rightarrow$
  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\left(\int_a^b \mathrm{d}\xi\;\hat{u}_i^*(\xi)\,w(\xi)f(\xi)\right)\hat{u}_i(x)\,,$
- Con lo cual $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\left(\int_a^b \mathrm{d}\xi\;\hat{u}_i^*(\xi)\,w(\xi)f(\xi)\right)\hat{u}_i(x) \Rightarrow$

  $$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\,\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)\right)}_{G(x,\xi)} w(\xi)f(\xi)\,.$$

  Hemos construido la Función de Green.

- Normalizando $\left\langle \hat{u}^i \,|\hat{u}_i\right\rangle = 1 \;\Leftrightarrow\; \int_a^b \mathrm{d}\zeta\; \hat{u}_i^*(\zeta)\, w(\zeta)\hat{u}_i(\zeta) = 1 \Rightarrow$
  $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left(\int_a^b \mathrm{d}\xi\; \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi) \right) \hat{u}_i(x)\,,$
- Con lo cual $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left(\int_a^b \mathrm{d}\xi\; \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi) \right) \hat{u}_i(x) \Rightarrow$
  $$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x) \right)}_{G(x,\xi)} w(\xi) f(\xi)\,.$$
  Hemos construido la Función de Green.
- la solución al problema de Sturm-Liouville se puede expresar en términos de la función de Green como
  $y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\; G(\xi, x) w(\xi) f(\xi)$, con $G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)$.
- Formalmente: $\mathbb{L}\mathbb{L}^{-1} \equiv \mathbb{L}\mathbb{G} \equiv \mathbb{L}G(x,t) = \delta(x-t)$ i.e.
  $\mathbb{L}y(x) = f(x) \Rightarrow y(x) = \mathbb{L}^{-1} f(x) \equiv \mathbb{G} f(x) \Rightarrow$
  $y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t) \mathrm{d}t.$

Generalizando el problema de frontera inhomogéne

- Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales
$$(\mathbb{L}+\lambda)\,|y\rangle = |f\rangle \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)+\left(R(x)+\lambda\, w(x)\right)y(x)=f(x)$$

Generalizando el problema de frontera inhomogéne

- Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales
$(\mathbb{L}+\lambda)\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + (R(x)+\lambda\, w(x))\, y(x) = f(x)$
- Otra véz, resolvemos el problema homogeneo y expresamos la función inhomogenea como combinación lineal de las autofunciones
$\mathbb{L}\left|\hat{u}_i\right\rangle = -\lambda_i\left|\hat{u}_i\right\rangle \quad \Rightarrow \left|f\right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} F^i\left|\hat{u}_i\right\rangle \equiv \sum_{i=0}^{\infty}\left\langle \hat{u}^i \,\middle|\, f\right\rangle\left|\hat{u}_i\right\rangle$

Generalizando el problema de frontera inhomogénea

- Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales
$(\mathbb{L}+\lambda)\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + \left(R(x) + \lambda\, w(x)\right) y(x) = f(x)$
- Otra véz, resolvemos el problema homogeneo y expresamos la función inhomogenea como combinación lineal de las autofunciones
$\mathbb{L}\left|\hat{u}_i\right\rangle = -\lambda_i \left|\hat{u}_i\right\rangle \quad \Rightarrow \left|f\right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} F^i \left|\hat{u}_i\right\rangle \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle \hat{u}^i \right| f\rangle \left|\hat{u}_i\right\rangle$
- Con lo cual $(\mathbb{L}+\lambda)\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \quad \Rightarrow$
$(\mathbb{L}+\lambda)\left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i \left|\hat{u}_i\right\rangle\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle \hat{u}^i \right| f\rangle \left|\hat{u}_i\right\rangle \Rightarrow C^i\left(\lambda_i + \lambda\right) = \left\langle \hat{u}^i \right| f\rangle$

- Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales
$(\mathbb{L}+\lambda)\,|y\rangle = |f\rangle \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + (R(x)+\lambda\, w(x))\, y(x) = f(x)$
- Otra véz, resolvemos el problema homogeneo y expresamos la función inhomogenea como combinación lineal de las autofunciones
$\mathbb{L}\,|\hat{u}_i\rangle = -\lambda_i\,|\hat{u}_i\rangle \quad \Rightarrow |f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} F^i\,|\hat{u}_i\rangle \equiv \sum_{i=0}^{\infty}\left\langle \hat{u}^i\,|f\right\rangle|\hat{u}_i\rangle$
- Con lo cual $(\mathbb{L}+\lambda)\,|y\rangle = |f\rangle \quad \Rightarrow$
$(\mathbb{L}+\lambda)\left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i\,|\hat{u}_i\rangle\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left\langle \hat{u}^i\,|f\right\rangle|\hat{u}_i\rangle \Rightarrow C^i\,(\lambda_i+\lambda) = \left\langle \hat{u}^i\,|f\right\rangle$
- Obtenemos entonces $|y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\left\langle \hat{u}^i\,|f\right\rangle}{(\lambda_i+\lambda)}\right)|\hat{u}_i\rangle \Leftrightarrow$

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\int_a^b \mathrm{d}\xi\; \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi)}{\lambda_i+\lambda}\right)\hat{u}_i(x)\,,$$

Generalizando el problema de frontera inhomogéne

- Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales
  $(\mathbb{L}+\lambda)\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + (R(x)+\lambda\, w(x))\, y(x) = f(x)$
- Otra véz, resolvemos el problema homogeneo y expresamos la función inhomogenea como combinación lineal de las autofunciones
  $\mathbb{L}\left|\hat{u}_i\right\rangle = -\lambda_i \left|\hat{u}_i\right\rangle \quad \Rightarrow \left|f\right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} F^i \left|\hat{u}_i\right\rangle \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle \hat{u}^i \,\middle|\, f\right\rangle \left|\hat{u}_i\right\rangle$
- Con lo cual $(\mathbb{L}+\lambda)\left|y\right\rangle = \left|f\right\rangle \quad \Rightarrow$
  $(\mathbb{L}+\lambda)\left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i \left|\hat{u}_i\right\rangle\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle \hat{u}^i \,\middle|\, f\right\rangle \left|\hat{u}_i\right\rangle \Rightarrow C^i(\lambda_i+\lambda) = \left\langle \hat{u}^i \,\middle|\, f\right\rangle$
- Obtenemos entonces $\left|y\right\rangle = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\left\langle \hat{u}^i \middle| f\right\rangle}{(\lambda_i+\lambda)}\right)\left|\hat{u}_i\right\rangle \Leftrightarrow$
  $$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\int_a^b \mathrm{d}\xi\, \hat{u}_i^*(\xi)\, w(\xi) f(\xi)}{\lambda_i+\lambda}\right)\hat{u}_i(x)\,,$$
- Intercambiando sumatorias e integrales tendremos
  $y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\, w(\xi) f(\xi) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)}{\lambda_i+\lambda}$
  $\Rightarrow G(\xi,x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)}{\lambda_i+\lambda}$

Recapitulando

Mostramos como dada una ecuación diferencial inhomogénea en forma autoadjunta $\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)$ definida en el rango $a \leq x \leq b$ y sujeta a condiciones de frontera $\alpha_1\, y(x)|_{x=a} + \beta_1\, \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a} = C_1$ y $\alpha_2\, y(x)|_{x=b} + \beta_2\, \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=b} = C_2$:

1. Se resuelve el problema de autovalores del operador diferencial $\mathbb{L}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$.

Mostramos como dada una ecuación diferencial inhomogénea en forma autoadjunta $\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)$ definida en el rango $a \leq x \leq b$ y sujeta a condiciones de frontera $\alpha_1\ y(x)|_{x=a} + \beta_1\ \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a} = C_1$ y $\alpha_2\ y(x)|_{x=b} + \beta_2\ \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=b} = C_2$:

1. Se resuelve el problema de autovalores del operador diferencial $\mathbb{L}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$.
2. Se construye la función de Green con las autofunciones normalizadas $|\hat{u}_i\rangle$ y los autovalores correspondientes de la forma $G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)$.

Recapitulando

Mostramos como dada una ecuación diferencial inhomogénea en forma autoadjunta $\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)$ definida en el rango $a \leq x \leq b$ y sujeta a condiciones de frontera $\alpha_1 \, y(x)|_{x=a} + \beta_1 \, \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a} = C_1$ y $\alpha_2 \, y(x)|_{x=b} + \beta_2 \, \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=b} = C_2$:

1. Se resuelve el problema de autovalores del operador diferencial $\mathbb{L}|u_i\rangle = \lambda_i |u_i\rangle$.
2. Se construye la función de Green con las autofunciones normalizadas $|\hat{u}_i\rangle$ y los autovalores correspondientes de la forma $G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)$.
3. Se construye la función de Green con las autofunciones normalizadas $|\hat{u}_i\rangle$ y los autovalores correspondientes de la forma $G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)$.

Mostramos como dada una ecuación diferencial inhomogénea en forma autoadjunta $\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) + R(x)y(x) = f(x)$ definida en el rango $a \leq x \leq b$ y sujeta a condiciones de frontera $\alpha_1\, y(x)|_{x=a} + \beta_1\, \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a} = C_1$ y $\alpha_2\, y(x)|_{x=b} + \beta_2\, \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=b} = C_2$:

1. Se resuelve el problema de autovalores del operador diferencial $\mathbb{L}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$.
2. Se construye la función de Green con las autofunciones normalizadas $|\hat{u}_i\rangle$ y los autovalores correspondientes de la forma $G(\xi,x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)$.
3. Se construye la función de Green con las autofunciones normalizadas $|\hat{u}_i\rangle$ y los autovalores correspondientes de la forma $G(\xi,x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\hat{u}_i^*(\xi)\hat{u}_i(x)$.
4. Se utiliza $G(\xi,x)$ como *Kernel* para construir la solución general de la ecuación inhomogénea de la forma $y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\; G(\xi,x)w(\xi)f(\xi)$

Autoevaluación

-

Para la discusión

-