### Cuerpo Rígido: ángulos y velocidades de Euler

#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



2 de noviembre de 2024

#### Agenda



- Definiciones
- Desplazamiento general del cuerpo rígido
- Velocidades en un cuerpo rígido
- Precesión, nutación y rotación
- $oldsymbol{oldsymbol{5}}$  Velocidades de Euler
- o Transformaciones entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio
  - Rotaciones de Euler
  - Matrices de Euler
  - ullet Velocidades Angulares  $oldsymbol{\Omega}$  y  $oldsymbol{\hat{\Omega}}$
  - Productos escalares
  - Vectores unitarios

#### **Definiciones**

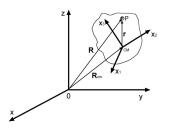


• Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas

#### **Definiciones**



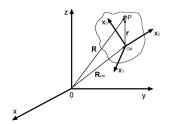
- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



#### **Definiciones**



- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas cuyas distancias relativas son fijas
- Su movimiento se describe en términos de la posición de su centro de masa y de la orientación relativa del cuerpo en el espacio



- Esto requiere de dos sistemas de coordenadas:
  - Un sistema inercial o laboratorio, denotado por (x, y, z) y con origen en un punto fijo O
  - Un sistema en movimiento, fijo en el cuerpo, con origen en el centro de masa (CM), identificado por  $(x_1, x_2, x_3)$



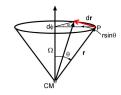
- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .



- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .
  - Rotación de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición  $\bf R$  de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es  $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$

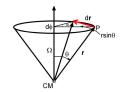


- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .
  - Rotación de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición  $\bf R$  de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es  $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$
- ullet Un desplazamiento infinitesimal de P será  $d{f R}=d{f R}_{
  m cm}+d{f r}$





- Un desplazamiento general del cuerpo rígido se representa como la suma de dos movimientos:
  - Translación del centro de masa, sin cambiar la orientación relativa entre (x, y, z) y  $(x_1, x_2, x_3)$ .
  - Rotación de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.
- La posición  $\bf R$  de un punto P del cuerpo rígido con respecto al sistema de referencia del laboratorio (x,y,z) es  $\bf R=\bf R_{\rm cm}+\bf r$
- Un desplazamiento infinitesimal de P será  $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}_{\rm cm} + d\mathbf{r}$



 Un cambio infinitesimal dr sólo puede deberse a un cambio de dirección del vector r, no a un cambio de su magnitud



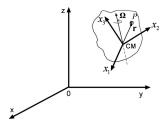
• Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .



- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$

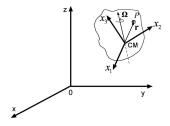


- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (r \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$





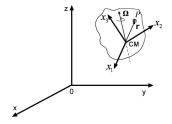
- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (\mathbf{r} \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$



•  $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ : velocidad de P en el laboratorio (x,y,z),  $\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt}$  velocidad de traslación del centro de masa en (x,y,z),  $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ : velocidad angular instantánea de rotación.



- Si  $\theta$  el ángulo entre la dirección  $d\phi$  y el vector  $\mathbf{r}$ , entonces el vector  $d\mathbf{r}$  es perpendicular al plano  $(d\phi, \mathbf{r})$ .
- Su magnitud es  $d\mathbf{r} = (\mathbf{r} \operatorname{sen} \theta) d\phi$  y su dirección  $d\mathbf{r} = d\phi \times \mathbf{r}$
- La velocidad de P, es  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathrm{cm}}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{r}$

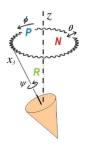


- $\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ : velocidad de P en el laboratorio (x, y, z),  $\mathbf{v}_{\rm cm} = \frac{d\mathbf{R}_{\rm cm}}{dt}$  velocidad de traslación del centro de masa en (x, y, z),  $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ : velocidad angular instantánea de rotación.
- ullet La dirección de la velocidad angular instantánea  $oldsymbol{\Omega}$  es la misma que la del vector  $d\phi$

## Precesión, nutación y rotación



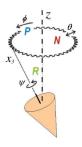
- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,



### Precesión, nutación y rotación



- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - nutación: inclinación con respecto al eje fijo y

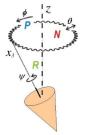


- Angulo Euler de precesión,  $\phi \in [0, 2\pi]$  : ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - Angulo Euler de nutación,  $\theta \in [0, \pi]$  : ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta  $x_3$ .

### Precesión, nutación y rotación



- Distinguiremos tres movimientos en un cuerpo rígido
  - precesión: rotación alrededor de un eje fijo en el laboratorio,
  - nutación: inclinación con respecto al eje fijo y
  - rotación: rotación del cuerpo sobre sí mismo.



- Angulo Euler de precesión,  $\phi \in [0, 2\pi]$  : ángulo de rotación con respecto al eje z, sobre el plano (x, y),
  - Angulo Euler de nutación,  $\theta \in [0, \pi]$  : ángulo de rotación con respecto a la línea nodal N, medido desde z hasta  $x_3$ .
  - Angulo Euler de rotación,  $\psi \in [0, 2\pi]$  : ángulo de rotación con respecto al eje  $x_3$ , sobre el plano  $(x_1, x_2)$ , medido desde N a  $x_1$ .



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- ullet La velocidad angular instantánea  $\Omega$  es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea  $\Omega$  es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector  $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$  se expresan en términos de los ángulos de  $(\theta, \phi, \psi)$  y de sus velocidades angulares  $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ .



- Las velocidades angulares  $\dot{\phi}, \dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  pueden expresarse en términos de sus proyecciones sobre los ejes  $(x_1, x_2, x_3)$  como
  - $\dot{\psi}_1 = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$  y  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$ ;
  - $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi$ ,  $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi$  y  $\dot{\theta}_3 = 0$ , ya que  $\dot{\theta}$  es perpendicular a  $x_3$
  - $\dot{\phi}_1 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \psi$ ,  $\dot{\phi}_2 = (\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta) \cos \psi$  y  $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta$
- La velocidad angular instantánea  $\Omega$  es una combinación de rotaciones asociadas a los tres ángulos de Euler.
- Las componentes del vector  $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$  se expresan en términos de los ángulos de  $(\theta, \phi, \psi)$  y de sus velocidades angulares  $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ .
- Para cada componente  $\tilde{\Omega}_i$ , respecto al sistema centro de masa, tenemos  $\tilde{\Omega}_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad i=1,2,3.$

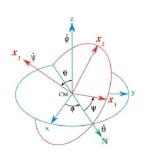
$$\tilde{\Omega}_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

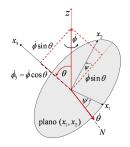
$$ilde{\Omega}_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, heta \cos \psi - \dot{ heta} \operatorname{sen} \, \psi$$

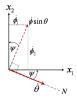
$$\tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

### Componentes y velocidades angulares











• La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .



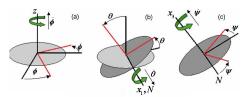
- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .
- Si  $\mathbf{r}_L$  son las coordenadas de un punto en el sistema  $S_{xyz}$  laboratorio y  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$  las de un punto en el sistema  $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$  centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}} \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j r^j$  y  $\mathbf{r}_L = \mathbb{U} \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j \tilde{r}^j$



- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .
- Si  $\mathbf{r}_L$  son las coordenadas de un punto en el sistema  $S_{xyz}$  laboratorio y  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$  las de un punto en el sistema  $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$  centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}} \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j r^j$  y  $\mathbf{r}_L = \mathbb{U} \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j \tilde{r}^j$
- $\bullet \ \ \mathsf{Claramente} \ \mathbb{U}\tilde{\mathbb{U}} \equiv \tilde{\mathbb{U}}\mathbb{U} = \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{\mathbb{U}} = \mathbb{U}^{-1}$



- La transformación entre el sistema Centro de Masa y Laboratorio se construye concatenando tres transformaciones lineales independiente, cada una siguiendo un ángulo de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ .
- Si  $\mathbf{r}_L$  son las coordenadas de un punto en el sistema  $S_{xyz}$  laboratorio y  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm}$  las de un punto en el sistema  $\tilde{S}_{x_1x_2x_3}$  centro de masa, queremos un par de transformaciones tales que  $\tilde{\mathbf{r}}_{cm} = \tilde{\mathbb{U}} \mathbf{r}_L \Leftrightarrow \tilde{r}^i = \tilde{U}^i_j r^j$  y  $\mathbf{r}_L = \mathbb{U} \mathbf{r}_{cm} \Leftrightarrow r^i = U^i_j \tilde{r}^j$
- Rotamos tres veces  $\tilde{S}_{x_1,x_2,x_3}$  respecto a  $S_{x,y,z}$ .



$$\tilde{\mathbb{U}}_{\phi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \ \tilde{\mathbb{U}}_{\theta} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{\psi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$



• En general concatenamos las tres rotaciones como  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}=\tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$ 

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta & \sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi & -\sin\psi\cos\phi & \cos\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$



• En general concatenamos las tres rotaciones como  $\ddot{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}=\ddot{\mathbb{U}}_{\psi}\ddot{\mathbb{U}}_{\theta}\ddot{\mathbb{U}}_{\phi}$ 

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta & \sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

• Como tenemos  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$  también tendremos  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}.$ 



• En general concatenamos las tres rotaciones como  $\ddot{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}=\ddot{\mathbb{U}}_{\psi}\ddot{\mathbb{U}}_{\theta}\ddot{\mathbb{U}}_{\phi}$ 

$$\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta & \sin\phi & -\sin\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi & \sin\phi & \cos\psi \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\phi & \cos\phi & \sin\phi & -\sin\psi\sin\phi & \cos\phi & \cos\psi & \sin\phi \\ -\sin\psi\sin\phi & -\sin\psi\cos\phi & -\sin\psi\cos\phi & \cos\phi & \cos\phi & \cos\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

- Como tenemos  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$  también tendremos  $\mathbb{U}_{\psi\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}.$
- Por lo tanto  $\tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  $\tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos \psi & - \sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \end{array} \right) \; .$



- En general concatenamos las tres rotaciones como  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sec\psi\cos\theta & \sec\phi\phi \\ - \sec\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\phi & \sec\phi\phi \\ - \sec\phi\theta & \sec\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi\sin\phi + \sec\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ - \sec\phi\cos\phi & \cos\phi\cos\phi \\ - \sec\phi\theta\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi & \cos\phi\phi \\ - \cos\phi\cos\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$
- Como tenemos  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$  también tendremos  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$ .
- $\begin{array}{c} \bullet \hspace{0.5cm} \text{Por lo tanto} \hspace{0.1cm} \tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \\ \end{array}$
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1}=\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^T$  y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.



- En general concatenamos las tres rotaciones como  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\phi\cos\phi & \cos\phi\cos\phi \end{pmatrix}$
- Como tenemos  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi} = \tilde{\mathbb{U}}_{\psi}\tilde{\mathbb{U}}_{\theta}\tilde{\mathbb{U}}_{\phi}$  también tendremos  $\tilde{\mathbb{U}}_{\eta\theta\phi}^{-1} \equiv \mathbb{U}_{\phi\theta\psi} = \mathbb{U}_{-\phi}\mathbb{U}_{-\theta}\mathbb{U}_{-\psi}$ .
- $\begin{array}{c} \bullet \hspace{0.5cm} \text{Por lo tanto} \hspace{0.1cm} \tilde{\mathbb{U}}_{-\phi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\theta} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \\ \tilde{\mathbb{U}}_{-\psi} = \left( \begin{array}{ccc} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \\ \end{array}$
- Finalmente tenemos que las matricies de rotación son matrices ortogonales. Esto es que la traspuesta es la inversa  $\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{-1}=\tilde{\mathbb{U}}_{\psi\theta\phi}^{T}$  y eso se ve claramente en las matrices arriba. Además la inversa de una multiplicación de matrices invierte el orden.

$$\bullet \quad \tilde{\mathbb{U}}^{-1} = \tilde{\mathbb{U}}^T = \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

# Velocidades Angulares $oldsymbol{\Omega}$ y $oldsymbol{ ilde{\Omega}}$



• Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio  $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$  a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa  $\tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{\Omega}^3$ .

## Velocidades Angulares $oldsymbol{\Omega}$ y $oldsymbol{ ilde{\Omega}}$



• Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio  $\Omega^1,\Omega^2,\Omega^3$  a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa  $\tilde{\Omega}^1,\tilde{\Omega}^2,\tilde{\Omega}^3$ .

$$\bullet \quad \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & - \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & - \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \phi & - \sin \theta \cos \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$$

## Velocidades Angulares $oldsymbol{\Omega}$ y $oldsymbol{ ilde{\Omega}}$



- Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio  $\Omega^1,\Omega^2,\Omega^3$  a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa  $\tilde{\Omega}^1,\tilde{\Omega}^2,\tilde{\Omega}^3$ .
- $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \psi \cos \phi \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$
- Dado que para el centro de masa

$$\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi$$

$$\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

## Velocidades Angulares $oldsymbol{\Omega}$ y $ilde{oldsymbol{\Omega}}$



• Estas matrices nos permiten calcular las componentes de la velocidad angular respecto al sistema laboratorio  $\Omega^1,\Omega^2,\Omega^3$  a partir de las componentes respecto al sistema centro de masa  $\tilde{\Omega}^1,\tilde{\Omega}^2,\tilde{\Omega}^3$ .

• Dado que para el centro de masa

$$\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \operatorname{sen} \, \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \, \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \, \psi$$

$$\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

Tendremos para el sistema laboratorio

$$\Omega^1 = \dot{ heta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\phi\sin\theta$$

$$\Omega^2 = \dot{ heta} \operatorname{sen} \phi - \dot{\psi} \cos \phi \operatorname{sen} heta$$

$$\Omega^3 = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta$$



• En general tenemos que  $\vec{\Omega} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_3$ 



- En general tenemos que  $\vec{\Omega} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto

$$\begin{split} &\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3 \\ &\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3 \\ &\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3 \end{split}$$



- En general tenemos que  $\vec{\Omega} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto

$$\begin{split} &\Omega^1 = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3 \\ &\Omega^2 = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3 \\ &\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3 \end{split}$$



- En general tenemos que  $\vec{\Omega} = \Omega^1 \hat{\mathbf{x}} + \Omega^2 \hat{\mathbf{y}} + \Omega^3 \hat{\mathbf{z}} = \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\Omega}^2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_3$
- Por lo tanto

$$\Omega^{1} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{1} \tilde{\Omega}^{1} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{2} \tilde{\Omega}^{2} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{3} \tilde{\Omega}^{3}$$

$$\Omega^{2} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{1} \tilde{\Omega}^{1} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{2} \tilde{\Omega}^{2} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{3} \tilde{\Omega}^{3}$$

$$\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \tilde{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \tilde{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \tilde{\Omega}^3$$

$$\Omega^3 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\Omega}^1 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \hat{\Omega}^2 + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \hat{\Omega}^3$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \Omega^1 \\ \Omega^2 \\ \Omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}^1 \\ \tilde{\Omega}^2 \\ \tilde{\Omega}^3 \end{pmatrix}$$

- $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 = \cos \psi \cos \phi \sin \psi \cos \theta \sin \phi$ ;
  - $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 = \operatorname{sen} \psi \cos \phi \cos \psi \cos \theta \operatorname{sen} \phi$ ;
- $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$ ;
  - $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 = \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi$ ;
  - $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi$ :  $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 = - \operatorname{sen} \theta \cos \phi$ :
  - $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta; \quad \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 = \cos \psi \operatorname{sen} \theta;$  $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 = \cos \theta$ .

#### Vectores unitarios



• Más aún si  $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}}$  y al proyectarla tendremos que  $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$ . Por lo tanto expresamos  $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi)\hat{\mathbf{y}} + (\sin \psi \sin \theta)\hat{\mathbf{z}}$ 

#### Vectores unitarios



- Más aún si  $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}}$  y al proyectarla tendremos que  $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$ . Por lo tanto expresamos  $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos \psi \cos \phi \sin \psi \cos \theta \sin \phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi)\hat{\mathbf{y}} + (\sin \psi \sin \theta)\hat{\mathbf{z}}$
- Del mismo modo  $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{z}}$ . Con lo cual  $\hat{\mathbf{x}}_2 = (-\sin\psi\cos\phi \cos\psi\cos\theta\sin\phi)\hat{\mathbf{x}} + (-\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos\psi\sin\theta\hat{\mathbf{z}}$

#### Vectores unitarios



- Más aún si  $\hat{\mathbf{x}}_1 = \alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}}$  y al proyectarla tendremos que  $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{z}}$ . Por lo tanto expresamos  $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\cos \psi \cos \phi \sin \psi \cos \theta \sin \phi)\hat{\mathbf{x}} + (\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi)\hat{\mathbf{y}} + (\sin \psi \sin \theta)\hat{\mathbf{z}}$
- Del mismo modo  $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)\hat{\mathbf{z}}$ . Con lo cual  $\hat{\mathbf{x}}_2 = (-\sin\psi\cos\phi \cos\psi\cos\theta\sin\phi)\hat{\mathbf{x}} + (-\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos\psi\sin\theta\hat{\mathbf{z}}$
- Finalmente  $\hat{\mathbf{x}}_3 = (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{y}} + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)\hat{\mathbf{z}}$ . Finalmente,  $\hat{\mathbf{x}}_3 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{\mathbf{x}} \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$