Dinámica Newtoniana de Partículas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



4 de febrero de 2025

Agenda



- 🚺 Dinámica de Partículas
- Limitaciones del Marco Newtoniano
- Conceptos Básicos
 - Sistema de Referencia Inercial
 - Desplazamiento, velocidad y Aceleración
 - Cantidad de movimiento angular, energía cinética y trabajo
 - Fuerzas conservativas
 - Energía potencial y energía total
- Sistemas de Partículas
 - Dinámica de sistemas de partículas
 - Cantidad de Movimiento Angular
 - Energía cinética de un sistemas de partículas
 - Energía potencial de un sistemas de partículas
 - Energía Total de un sistemas de partículas

Tres Leyes de Newton



 Primera Ley de Newton:
 Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.

Tres Leyes de Newton



- Primera Ley de Newton:
 Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.
- Segunda Ley de Newton:
 Existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de una partícula con masa m y velocidad v está descrito por la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

Tres Leves de Newton



- Primera Ley de Newton:
 Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.
- Segunda Ley de Newton:
 Existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de una partícula con masa m y velocidad v está descrito por la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

Tercera Ley de Newton:
 Si F_{jj} es la fuerza que ejerce una partícula j sobre una partícula i, y
 F_{ij} es la fuerza que ejerce la partícula i sobre la partícula j, entonces

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$$
.



Limitaciones del Marco Newtoniano



El esquema newtoniano tiene limitaciones

- ullet Si vamos muy rápido vpprox c debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

Limitaciones del Marco Newtoniano



El esquema newtoniano tiene limitaciones

- ullet Si vamos muy rápido vpprox c debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

 La tercera ley de Newton, puede ser violada en sistemas fuera de equilibrio, como partículas mesoscópicas en plasmas complejos (Ivlev, A., et al (2014). Statistical Mechanics where Newton's Third Law is Broken. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.011035)

Limitaciones del Marco Newtoniano



El esquema newtoniano tiene limitaciones

- ullet Si vamos muy rápido vpprox c debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

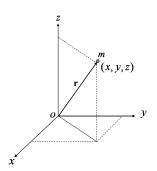
Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

- La tercera ley de Newton, puede ser violada en sistemas fuera de equilibrio, como partículas mesoscópicas en plasmas complejos (Ivlev, A., et al (2014). Statistical Mechanics where Newton's Third Law is Broken. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.011035)
- En mecánica de medios continuos de materiales compuestos, la relación entre la fuerza y la aceleración se vuelve no local. (Milton, G., & Willis, J. (2007). On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics.

https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1795.

Posición

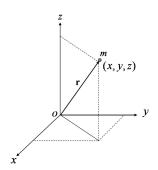




• Sistema de referencia u observador inercial: convención para designar una posición (en coordenadas cartesianas) ${\bf r} = (x,y,z) \equiv (x^1,x^2,x^3) \ {\bf o} \ {\bf ubicación} \ {\bf espacial} \ {\bf a} \ {\bf una} \ {\bf partícula} \ {\bf u} \ {\bf objeto} \ {\bf con} \ {\bf respecto} \ {\bf a} \ {\bf un} \ {\bf origen} \ {\bf o} \ {\bf punto} \ {\bf escogido} \ {\bf O}. \ {\bf El} \ {\bf observador} \ {\bf no} \ {\bf puede} \ {\bf estar} \ {\bf acelerado}$

Posición





- Sistema de referencia u observador inercial: convención para designar una posición (en coordenadas cartesianas) $\mathbf{r}=(x,y,z)\equiv(x^1,x^2,x^3)$ o ubicación espacial a una partícula u objeto con respecto a un origen o punto escogido O. El observador no puede estar acelerado
- La posición puede depender del tiempo $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$



• Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m}=0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$



- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m}=0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.



- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m}=0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- ullet Diez transformaciones, S o S', que la "inercialidad" y son:
 - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde \mathbb{O} es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3 .
 - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante \mathbf{a} .
 - tres impulsos (boost): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante \mathbf{v} .
 - una traslación temporal: $t' = t + \alpha$, con α un número real constante.



- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m}=0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- Diez transformaciones, $S \rightarrow S'$, que la "inercialidad" y son:
 - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde \mathbb{O} es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3 .
 - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante \mathbf{a} .
 - tres impulsos (boost): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante \mathbf{v} .
 - una traslación temporal: $t'=t+\alpha$, con α un número real constante.
- Estas transformaciones constituyen el grupo de Galileo bajo el cual las leyes de Newton son invariantes.



- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m} = 0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- Diez transformaciones, $S \rightarrow S'$, que la "inercialidad" y son:
 - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde \mathbb{O} es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3 .
 - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante \mathbf{a} .
 - tres impulsos (boost): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante \mathbf{v} .
 - una traslación temporal: $t'=t+\alpha$, con α un número real constante.
- Estas transformaciones constituyen el grupo de Galileo bajo el cual las leyes de Newton son invariantes.
- En relatividad especial las leyes del movimiento de Einstein son invariantes bajo el grupo de transformaciones de Lorentz que, junto con las traslaciones, forman el grupo de Poincaré.



- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m}=0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- Diez transformaciones, $S \rightarrow S'$, que la "inercialidad" y son:
 - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde \mathbb{O} es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3 .
 - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante \mathbf{a} .
 - tres impulsos (boost): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante \mathbf{v} .
 - una traslación temporal: $t'=t+\alpha$, con α un número real constante.
- Estas transformaciones constituyen el grupo de Galileo bajo el cual las leyes de Newton son invariantes.
- En relatividad especial las leyes del movimiento de Einstein son invariantes bajo el grupo de transformaciones de Lorentz que, junto con las traslaciones, forman el grupo de Poincaré.
- Podemos recuperar el grupo de Galileo a partir del grupo de Poincaré en el límite de la velocidad tendiendo a infinito.



• desplazamiento $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$



- desplazamiento $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) \mathbf{r}(t)$
- ullet velocidad $oldsymbol{ extsf{v}}=\lim_{\Delta t o 0}rac{oldsymbol{ extsf{r}}(t+\Delta t)-oldsymbol{ extsf{r}}(t)}{\Delta t}=\dot{oldsymbol{ extsf{r}}}$



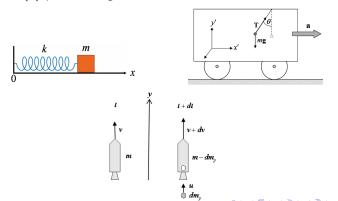
- desplazamiento $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) \mathbf{r}(t)$
- ullet velocidad $oldsymbol{v}=\lim_{\Delta t o 0}rac{oldsymbol{r}(t+\Delta t)-oldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\dot{oldsymbol{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$



- desplazamiento $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$
- ullet cantidad de momiento ${f p}=m{f v}$



- desplazamiento $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) \mathbf{r}(t)$
- ullet velocidad $oldsymbol{v}=\lim_{\Delta t o 0}rac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\dot{oldsymbol{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$
- cantidad de momiento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
- Encuentre $\mathbf{r}(r)$ para los siguientes sistemas





• Para una partícula ubicada en la posición \mathbf{r} , con velocidad \mathbf{v} , el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$



- Para una partícula ubicada en la posición \mathbf{r} , con velocidad \mathbf{v} , el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza **F** sobre una partícula ubicada en **r** es $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$



- Para una partícula ubicada en la posición \mathbf{r} , con velocidad \mathbf{v} , el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza **F** sobre una partícula ubicada en **r** es $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathsf{cte}$



- Para una partícula ubicada en la posición \mathbf{r} , con velocidad \mathbf{v} , el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza **F** sobre una partícula ubicada en **r** es $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathsf{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad ${\bf v}$ es un escalar $T=\frac{1}{2}m{\bf v}^2$



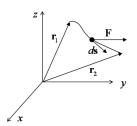
- Para una partícula ubicada en la posición \mathbf{r} , con velocidad \mathbf{v} , el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza **F** sobre una partícula ubicada en **r** es $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathsf{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad ${\bf v}$ es un escalar $T=\frac{1}{2}m{\bf v}^2$
- El trabajo realizado por una ${\bf F}$ externa sobre una partícula desde una posición ${\bf r}_1$ hasta una posición ${\bf r}_2$, como la integral de línea $W_{12} \equiv \int_1^2 {\bf F} \cdot {\rm d}{\bf s}$ donde ${\bf d}{\bf s}$ es el vector tangente a la trayectoria que une la posición ${\bf r}_1$ con la posición ${\bf r}_2$.



- Para una partícula ubicada en la posición \mathbf{r} , con velocidad \mathbf{v} , el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza **F** sobre una partícula ubicada en **r** es $\tau \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- ullet Para una fuerza central ${f F}=f(r)\hat{f r}$, el torque se anula y ${f L}={\sf cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad ${\bf v}$ es un escalar $T=\frac{1}{2}m{\bf v}^2$
- El trabajo realizado por una ${\bf F}$ externa sobre una partícula desde una posición ${\bf r}_1$ hasta una posición ${\bf r}_2$, como la integral de línea $W_{12} \equiv \int_1^2 {\bf F} \cdot {\rm d}{\bf s}$ donde ${\rm d}{\bf s}$ es el vector tangente a la trayectoria que une la posición ${\bf r}_1$ con la posición ${\bf r}_2$.
- Entonces $m \int_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\mathbf{v} \mathrm{d}t) = \frac{1}{2} m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{1}{2} m \int_1^2 \mathrm{d} \left(v^2\right) = T_2 T_1$. El trabajo de **F** desde la posición \mathbf{r}_1 hasta la posición \mathbf{r}_2 depende solamente de la diferencia entre la energía cinética en las posiciones \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_1 .

Fuerzas conservativas







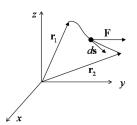


• Si el trabajo W_{12} de una fuerza externa ${\bf F}$ es independiente de la trayectoria entre ${\bf r}_1$ y ${\bf r}_2$, entonces ${\bf F}$ se llama fuerza conservativa:

$$\underbrace{\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} = \underbrace{\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} \Rightarrow \underbrace{\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} + \underbrace{\int_{2}^{1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino -B}} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Fuerzas conservativas









• Si el trabajo W_{12} de una fuerza externa ${\bf F}$ es independiente de la trayectoria entre ${\bf r}_1$ y ${\bf r}_2$, entonces ${\bf F}$ se llama fuerza conservativa:

$$\underbrace{\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} = \underbrace{\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} \Rightarrow \underbrace{\int_{1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino A}} + \underbrace{\int_{2}^{1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}_{\text{camino -B}} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Más aún

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$$



• Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x,y,z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2.$ Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).



- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x,y,z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 V_2.$ Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2-T_1=W_{12}=V_1-V_2\Rightarrow T_1+V_1=E_1=E_2=T_2+V_2$, la enegía total se conserva



- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x,y,z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 V_2.$ Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2-T_1=W_{12}=V_1-V_2\Rightarrow T_1+V_1=E_1=E_2=T_2+V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}T + V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_{i}} \dot{x}_{i} + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.



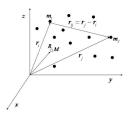
- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x,y,z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 V_2.$ Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2-T_1=W_{12}=V_1-V_2\Rightarrow T_1+V_1=E_1=E_2=T_2+V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}T + V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_{i}} \dot{x}_{i} + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.
- Luego, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\nabla V \cdot \mathbf{v} + \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$, i.e. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$

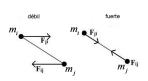


- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x,y,z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 V_2.$ Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2-T_1=W_{12}=V_1-V_2\Rightarrow T_1+V_1=E_1=E_2=T_2+V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}T + V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_{i}} \dot{x}_{i} + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.
- Luego, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\nabla V \cdot \mathbf{v} + \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$, i.e. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$
- La energía potencial V puede ser definida para sistemas no conservativos, pero V depende explícitamente tanto de la posición como del tiempo, V(r, t). La fuerza puede expresarse como
 F = -∇V(r, t). El trabajo para mover una partícula entre los puntos r₁ y r₂ no es V₁ V₂, puesto que V cambia con el tiempo. La energía total es E = T + V, no se conserva durante el movimiento.

Sistemas de Partículas



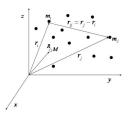


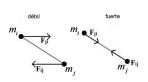


• La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.

Sistemas de Partículas



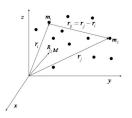


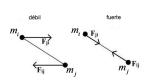


- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.
- La velocidad del centro de masa es $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M_{\mathrm{T}}} \sum_{i} m_{i} \frac{d\mathbf{r}_{i}}{dt}$

Sistemas de Partículas







- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.
- La velocidad del centro de masa es ${m v}_{
 m cm}=rac{d{m R}}{dt}=rac{1}{M_{
 m T}}\sum_i m_i rac{dr_i}{dt}$
- El momento lineal total del sistema de N partículas es $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_{i} \mathbf{p}_{i} = \sum_{i} m_{i} \frac{d\mathbf{r}_{i}}{dt} = M_{\mathrm{T}} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = M_{\mathrm{T}} \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$



• Si \mathbf{F}_{ji} es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ (i) es la fuerza externa total sobre la partícula i. Entonces $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ji}$.



- Si F_{ji} es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y F_{ext} (i) es la fuerza externa total sobre la partícula i.
 Entonces F_{ji} = -F_{jj}.
- Si \mathbf{F}_{ij} es central, $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$. Entonces las fuerzas sobre las partículas van en la dirección (paralela o antiparalela) del vector \mathbf{r}_{ij} .



- Si F_{ji} es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y F_{ext} (i) es la fuerza externa total sobre la partícula i.
 Entonces F_{ii} = -F_{ii}.
- Si \mathbf{F}_{ij} es central, $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$. Entonces las fuerzas sobre las partículas van en la dirección (paralela o antiparalela) del vector \mathbf{r}_{ij} .
- Esta condición sobre fuerzas centrales se conoce como forma fuerte de la ley de acción y reacción. No todas las fuerzas cumplen esta condición. Las fuerzas magnéticas entre dos cargas en movimiento no siempre son centrales



• La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^0 + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$



- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^0 + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_{i} \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^{0} + \sum_{i} \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_{i} \dot{\mathbf{p}}_{i} = \sum_{i} \frac{d}{dt} (m_{i} \mathbf{v}_{i})$



- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^0 + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_{i} \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^{0} + \sum_{i} \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_{i} \dot{\mathbf{p}}_{i} = \sum_{i} \frac{d}{dt} (m_{i} \mathbf{v}_{i})$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = 0$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.



- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^0 + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_{i} \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^{0} + \sum_{i} \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_{i} \dot{\mathbf{p}}_{i} = \sum_{i} \frac{d}{dt} (m_{i} \mathbf{v}_{i})$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ii} + \mathbf{F}_{ii} = 0$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.
- Si m_i es constante $\forall i$, entonces $\sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = M_T \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$



- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^0 + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_{i} \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ii}^{0} + \sum_{i} \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_{i} \dot{\mathbf{p}}_{i} = \sum_{i} \frac{d}{dt} (m_{i} \mathbf{v}_{i})$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = 0$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.
- Si m_i es constante $\forall i$, entonces $\sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = M_T \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$
- Luego, $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(\text{ total }) \equiv \sum_{i} \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \frac{d\mathbf{P}_{\mathrm{T}}}{dt}$



• La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_{i} \mathbf{L}_{i} = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}) = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times m_{i} \mathbf{v}_{i})$



- La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_{i} \mathbf{L}_{i} = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}) = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times m_{i} \mathbf{v}_{i})$
- Si la posición de la partícula i, respecto al centro de masa es $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i \mathbf{R}$, la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa será $\mathbf{v}'_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$.



- La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_{i} \mathbf{L}_{i} = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}) = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times m_{i} \mathbf{v}_{i})$
- Si la posición de la partícula i, respecto al centro de masa es $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i \mathbf{R}$, la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa será $\mathbf{v}'_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$.
- En términos del centro de masa podemos escribir

$$\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_{i} (\mathbf{r}'_{i} + \mathbf{R}) \times m_{i} (\mathbf{v}'_{i} + \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}) = \sum_{i} (\mathbf{r}'_{i} \times m_{i} \mathbf{v}'_{i}) + \left(\sum_{i} m_{i} \mathbf{r}'_{i} \right) \times \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \underbrace{\mathbf{R} \times \left(\sum_{i} m_{i} \mathbf{v}'_{i} \right)}_{=0} + \mathbf{R} \times \left(\sum_{i} m_{i} \mathbf{v}'_{i} \right)$$

• Los términos que se anulan son la posición del centro de masa respecto al centro de masa y la velocidad del centro de masa respecto al centro de masa, respectivamente.



- La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_{i} \mathbf{L}_{i} = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}) = \sum_{i} (\mathbf{r}_{i} \times m_{i} \mathbf{v}_{i})$
- Si la posición de la partícula i, respecto al centro de masa es $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i \mathbf{R}$, la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa será $\mathbf{v}'_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$.
- En términos del centro de masa podemos escribir

$$\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_{i} (\mathbf{r}'_{i} + \mathbf{R}) \times m_{i} (\mathbf{v}'_{i} + \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}) = \sum_{i} (\mathbf{r}'_{i} \times m_{i} \mathbf{v}'_{i}) + \left(\sum_{i} m_{i} \mathbf{v}'_{i} \right) \times \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \underbrace{\mathbf{R} \times \left(\sum_{i} m_{i} \mathbf{v}'_{i} \right)}_{=0} + \mathbf{R} \times \left(\sum_{i} m_{i} \mathbf{v}'_{i} \right)$$

- Los términos que se anulan son la posición del centro de masa respecto al centro de masa y la velocidad del centro de masa respecto al centro de masa, respectivamente.
- El momento angular de un sistema de partículas es $\mathbf{L}_T = \sum_i (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i') + \mathbf{R} \times \mathbf{p}_{cm}$. Cantidad de movimiento angular respecto CM₋+ la del CM₋.



 La variación de la cantidad de movimiento angular respecto a un sistema de partículas es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}) = \underbrace{\sum_{i} (\mathbf{v}_{i} \times m\mathbf{v}_{i})}_{=0} + \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \dot{\mathbf{p}}_{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \underbrace{\sum_{i} \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{ji})}_{0}$$



 La variación de la cantidad de movimiento angular respecto a un sistema de partículas es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}) = \underbrace{\sum_{i} (\mathbf{v}_{i} \times m\mathbf{v}_{i})}_{=0} + \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \dot{\mathbf{p}}_{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \underbrace{\sum_{i} \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{ji})}_{=0}$$

• Entonces, $\frac{d\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{dt} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} (i) = \sum_{i} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}} (i) = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}} (\mathrm{total}).$



 La variación de la cantidad de movimiento angular respecto a un sistema de partículas es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{p}_{i}) = \underbrace{\sum_{i} (\mathbf{v}_{i} \times m\mathbf{v}_{i})}_{=0} + \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \dot{\mathbf{p}}_{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \underbrace{\sum_{i} \sum_{j \neq i} (\mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{ji})}_{=0}$$

- Entonces, $\frac{d\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{dt} = \sum_{i} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}} (i) = \sum_{i} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}} (i) = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}} (\mathrm{total}).$
- Si el torque externo total en un sistema es cero, entonces el momento angular total \mathbf{L}_{T} es constante.

Energía cinética de un sistemas de partículas



• La energía cinética total sistema de partículas es $T_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} v_{i}^{2}$.

Energía cinética de un sistemas de partículas



- La energía cinética total sistema de partículas es $T_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} v_{i}^{2}$.
- En coordenadas del centro de masa, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{\rm cm}$, podemos escribir $T_{\rm total} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{\rm cm}) \cdot (\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{\rm cm})$ $T_{\rm total} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} 2 \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i'$

Por lo tanto
$$T_{\text{total}} = \frac{1}{2} M_T v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

Energía cinética de un sistemas de partículas



- La energía cinética total sistema de partículas es $T_{\text{total}} = \frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} v_{i}^{2}$.
- En coordenadas del centro de masa, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{\rm cm}$, podemos escribir $T_{\rm total} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{\rm cm}) \cdot (\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{\rm cm})$ $T_{\rm total} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} 2 \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i'$

Por lo tanto
$$T_{\rm total} = \frac{1}{2} M_T v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

- La energía cinética total tiene dos contribuciones:
 - (i) la energía cinética del centro de masa, $\frac{1}{2}M_T v_{\rm cm}^2$;
 - (ii) la energía cinética relativa al centro de masa, $\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$.



• Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i)$



- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ii}|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)$



- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ii}|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)$
- Si la energía potencial de interacción es $V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$ tendremos $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$, con $\nabla_i = \partial/\partial \mathbf{r}_i$. Como $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, las funciones $f_{ij} = f_{ji}$ son simétricas con respecto al intercambio de i y j.



- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)$
- Si la energía potencial de interacción es $V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$ tendremos $\mathbf{F}_{ji}=-\nabla_{i}V_{ji}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$, con $\nabla_{i}=\partial/\partial\mathbf{r}_{i}$. Como $\mathbf{F}_{ji}=-\mathbf{F}_{ij}$, las funciones $f_{ij}=f_{ji}$ son simétricas con respecto al intercambio de i y j.
- Entonces $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$ y, ambas \mathbf{F}_{ji} y \mathbf{F}_{ij} son derivables de una energía potencial de interacción entre la partícula i y la partícula j. Así $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \equiv -\nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$.



- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{i \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ii}|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)$
- Si la energía potencial de interacción es $V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$ tendremos $\mathbf{F}_{ji}=-\nabla_{i}V_{ji}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$, con $\nabla_{i}=\partial/\partial\mathbf{r}_{i}$. Como $\mathbf{F}_{ji}=-\mathbf{F}_{ij}$, las funciones $f_{ij}=f_{ji}$ son simétricas con respecto al intercambio de i y j.
- Entonces $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$ y, ambas \mathbf{F}_{ji} y \mathbf{F}_{ij} son derivables de una energía potencial de interacción entre la partícula i y la partícula j. Así $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \equiv -\nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$.
- Las masas m_i son constantes, entonces $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\left(i\right) \sum_{j \neq i} \nabla_i V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right) = m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}$. Hacemos el producto escalar con \mathbf{v}_i , obtenemos $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\left(i\right) \mathbf{v}_i \cdot \sum_{i \neq i} \nabla_i V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right) = \frac{1}{2} m_i \frac{\mathrm{d}v_i^2}{\mathrm{d}t}$



• Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt} \left(\sum_{i} \frac{1}{2} m_{i} v_{i}^{2} \right) = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) - \sum_{i} \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_{i} \cdot \nabla_{i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) - \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_{i} \cdot \nabla_{i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) + \mathbf{v}_{j} \cdot \nabla_{j} V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \right] = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) - \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \left[\nabla_{i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_{i} + \nabla_{j} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_{j} \right] = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) - \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$ donde hemos usado $V_{ii} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = V_{ii} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$



- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_j \right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$ donde hemos usado $V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$
- Entonces, podemos escribir $\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i} \frac{1}{2} m_{i} v_{i}^{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \right] = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$



- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_j \right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$ donde hemos usado $V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$
- Entonces, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\right]=\sum_{i}\mathbf{v}_{i}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$$

• Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = -\nabla V_{\mathrm{ext}}(i)$, tenemos, $\sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = -\sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \nabla V_{\mathrm{ext}}(i) = -\frac{d}{dt} (\sum_{i} V_{\mathrm{ext}}(i))$.



- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\nabla_i V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_j \right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$ donde hemos usado $V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$
- Entonces, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\right]=\sum_{i}\mathbf{v}_{i}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$$

- Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\left(i\right) = -\nabla V_{\mathrm{ext}}\left(i\right)$, tenemos, $\sum_{i}\mathbf{v}_{i}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\left(i\right) = -\sum_{i}\mathbf{v}_{i}\cdot\nabla V_{\mathrm{ext}}\left(i\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i}V_{\mathrm{ext}}\left(i\right)\right)$.
- Entonces $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)+\sum_{i}V_{\mathrm{ext}}(i)\right]=0$



- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt} \left(\sum_{i} \frac{1}{2} m_{i} v_{i}^{2} \right) = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \sum_{i} \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_{i} \cdot \nabla_{i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_{i} \cdot \nabla_{i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) + \mathbf{v}_{j} \cdot \nabla_{j} V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \right] = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_{i} + \nabla_{j} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_{j} = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$ donde hemos usado $V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$
- Entonces, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\right]=\sum_{i}\mathbf{v}_{i}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$$

- Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = -\nabla V_{\text{ext}}(i)$, tenemos, $\sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = -\sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \nabla V_{\text{ext}}(i) = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i} V_{\text{ext}}(i) \right)$.
- Entonces $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)+\sum_{i}V_{\mathrm{ext}}(i)\right]=0$
- La energía cinética total es $T_{\text{total}} = \sum_{i} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ y la energía potencial total, $V_{\text{total}} = \sum_{i} V_{\text{ext}}(i) + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$.



- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt} \left(\sum_{i} \frac{1}{2} m_{i} v_{i}^{2} \right) = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \sum_{i} \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_{i} \cdot \nabla_{i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_{i} \cdot \nabla_{i} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) + \mathbf{v}_{j} \cdot \nabla_{j} V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \right] = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_{i} + \nabla_{j} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) \cdot \mathbf{v}_{j} = \sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} \left(i \right) \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$ donde hemos usado $V_{ij} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right) = V_{ji} \left(|\mathbf{r}_{ij}| \right)$
- Entonces, podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\right]=\sum_{i}\mathbf{v}_{i}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$$

- Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = -\nabla V_{\text{ext}}(i)$, tenemos, $\sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = -\sum_{i} \mathbf{v}_{i} \cdot \nabla V_{\text{ext}}(i) = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i} V_{\text{ext}}(i) \right)$.
- Entonces $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i}\frac{1}{2}m_{i}v_{i}^{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)+\sum_{i}V_{\mathrm{ext}}(i)\right]=0$
- La energía cinética total es $T_{\text{total}} = \sum_{i} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ y la energía potencial total, $V_{\text{total}} = \sum_{i} V_{\text{ext}}(i) + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$.
- Finalmente, la energía total del sistema se conserva, $E_{\text{total}} = T_{\text{total}} + V_{\text{total}} = \text{constante}.$