

Vector Laplace-Runge-Lenz

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



1 de abril de 2025

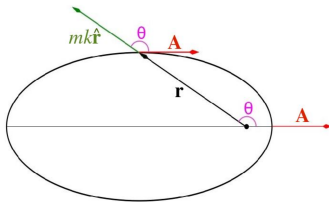
- 1 El problema de Kepler y el vector **A**, Laplace-Runge-Lenz
- 2 El vector **A** como cantidad conservada
- 3 Problema Kepler superintegrable
- 4 Spoiler Alert. Simetrías Escondidas y paréntesis de Poisson
 - Dos ejemplos
- 5 Spoiler Alert: Simetrías Escondidas y el Vector de Runge-Lenz

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$,

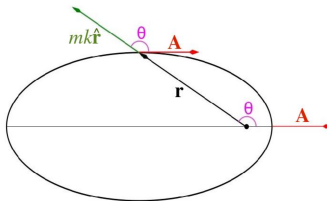
- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, con $q = L^2/\mu k$, y
$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}.$$

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, con $q = L^2/\mu k$, y
$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}.$$
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, con $q = L^2/\mu k$, y
$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}.$$
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$
- Es un vector constante en magnitud y dirección. Apunta en la dirección del perihelio: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$: \mathbf{A} está en el plano de la órbita.



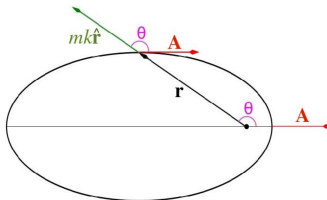
- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, con $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$
- Es un vector constante en magnitud y dirección. Apunta en la dirección del perihelio: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$: \mathbf{A} está en el plano de la órbita.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \hat{\mathbf{r}}]$

- En el problema de Kepler tenemos $V(r) = -k/r$ y $\mathbf{f}(r) = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$,
- La trayectoria es un cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e \cos \theta$, con $q = L^2/\mu k$, y

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}.$$
- Definimos el vector de Laplace-Runge-Lenz como: $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$
- Es un vector constante en magnitud y dirección. Apunta en la dirección del perihelio: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$: \mathbf{A} está en el plano de la órbita.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \hat{\mathbf{r}}]$
- Donde $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}}$ y también $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{dr}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

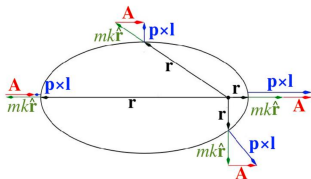
- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$
- y finalmente $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}} = \text{cte}$

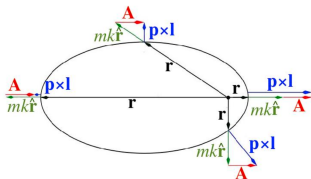
A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt})] = \mu \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r^2) = 2r \frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r) [\mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}]$
- Además $\frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow -r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mathbf{r} \frac{dr}{dt} - r \frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d}{dt}(\frac{\mathbf{r}}{r}) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$
- y finalmente $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu k \hat{\mathbf{r}} = \text{cte}$
- La magnitud del vector \mathbf{A} para la fuerza gravitacional se expresa en términos de L y E como $A^2 = (\mu k e)^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E L^2 = \text{cte}$

- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.

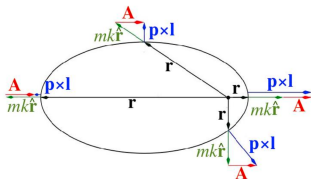


- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



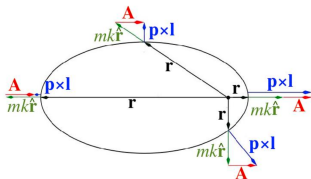
- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.

- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.
- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable.

- La dirección de \mathbf{A} , correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- La dirección $\hat{\mathbf{A}}$ constante implica que la órbita para $V(r) = -k/r$ no precesa.
- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable.
- Existen seis grados de libertad (tres para cada partícula) y siete cantidades conservadas: las tres componentes de la velocidad del centro de masa \mathbf{v}_{cm} , la dirección del momento angular \mathbf{L} , su magnitud L , la energía E y la dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz $\hat{\mathbf{A}}$

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}) , con $i = 1, 2, \dots, n$

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}) , con $i = 1, 2, \dots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \dots, 3n$

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}) , con $i = 1, 2, \dots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \dots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera: $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}) , con $i = 1, 2, \dots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \dots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera: $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}) , con $i = 1, 2, \dots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \dots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera: $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.
- Entonces $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$.

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}) , con $i = 1, 2, \dots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \dots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera: $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.
- Entonces $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Donde $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$ son las ecuaciones de Hamilton.

- Mas adelante en este curso, si tenemos un sistema de n partículas libres, definiremos el espacio de configuraciones como un espacio de $3n$ dimensiones (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}) , con $i = 1, 2, \dots, n$
- Ese mismo sistema de partículas libres lo podremos describir en el espacio de fases de $6n$ dimensiones (q_k, p_k) con $k = 1, 2, \dots, 3n$
- En el espacio de fases definiremos los paréntesis de Poisson para dos funciones f, g cualesquiera: $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- Sea una función $f(q_i, p_i, t)$ en el espacio de fase (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, s$, de un sistema mecánico con una función energía $\mathcal{E} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ que lo llamaremos Hamiltoniano.
- Entonces $\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$.
- Donde $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$ son las ecuaciones de Hamilton.
- Si f no depende explícitamente del tiempo $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ y es una cantidad conservada $\frac{df}{dt} = 0$, entonces $\{f, \mathcal{H}\} = 0$.

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
 - $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$
 - $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$
 - $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$
 - luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

- $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$

- $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$

- $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$

- luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de \mathbf{p} y \mathbf{L} :

$$\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$$

$$\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$$

$$\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i} \frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i} \frac{\partial L_y}{\partial q_i} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} =$$

$$\left(\frac{\partial L_x}{\partial x} \frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x} \frac{\partial L_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y} \frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y} \frac{\partial L_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z} \frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z} \frac{\partial L_y}{\partial z} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$$

- Calcular $\{r, \mathbf{p}\}$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

- $\{r, \mathbf{p}\} = \{r, p_x\} \hat{\mathbf{x}} + \{r, p_y\} \hat{\mathbf{y}} + \{r, p_z\} \hat{\mathbf{z}}$

- $\{r, p_x\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \frac{\partial p_x}{\partial p_i} - \frac{\partial r}{\partial p_i} \frac{\partial p_x}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{x}{r}$

- $\{r, p_y\} = \frac{y}{r}, \quad \{r, p_z\} = \frac{z}{r}$

- luego $\{r, \mathbf{p}\} = \frac{x}{r} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$

- Dadas las componentes del momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$:

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x$$

Calcular los paréntesis de Poisson para las componentes de \mathbf{p} y \mathbf{L} :

$$\{p_y, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial y} = -p_z; \quad \{p_x, L_x\} = -\frac{\partial L_x}{\partial x} = 0;$$

$$\{p_z, L_y\} = -\frac{\partial L_y}{\partial z} = -p_x$$

$$\{L_x, L_y\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L_x}{\partial q_i} \frac{\partial L_y}{\partial p_i} - \frac{\partial L_x}{\partial p_i} \frac{\partial L_y}{\partial q_i} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} =$$

$$\left(\frac{\partial L_x}{\partial x} \frac{\partial L_y}{\partial p_x} - \frac{\partial L_x}{\partial p_x} \frac{\partial L_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial y} \frac{\partial L_y}{\partial p_y} - \frac{\partial L_x}{\partial p_y} \frac{\partial L_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial L_x}{\partial z} \frac{\partial L_y}{\partial p_z} - \frac{\partial L_x}{\partial p_z} \frac{\partial L_y}{\partial z} \right)$$

$$\{L_x, L_y\} = xp_y - yp_x = L_z; \quad \{L_y, L_z\} = L_x \quad \{L_z, L_x\} = L_y$$

- Entonces, $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$. En Mecánica Cuántica, $[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$.

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\vec{r}|}$

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\vec{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}$

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\vec{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\vec{A}}{dt} = \{\vec{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\vec{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\vec{A}}{dt} = \{\vec{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de $SO(3)$ que garantiza simetría rotacional.

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\vec{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\vec{A}}{dt} = \{\vec{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de $SO(3)$ que garantiza simetría rotacional.
- Muestre también $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\vec{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\vec{A}}{dt} = \{\vec{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de $SO(3)$ que garantiza simetría rotacional.
- Muestre también $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$
- Adicionalmente, muestre que $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$

Para un sistema de Kepler en coordenadas cartesianas

- El Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{|\vec{r}|}$
- El vector de Runge Lenz es $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$
- Muestre que $\frac{d\vec{A}}{dt} = \{\vec{A}, H\} = \{A_i, H\} = 0$, donde las A_i son las componentes cartesianas del vector de Runge-Lenz
- Si L_k son las componente cartesianas de la cantidad de movimiento angular, muestre que $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$. Esta operación define el álgebra de Lie de $SO(3)$ que garantiza simetría rotacional.
- Muestre también $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$
- Adicionalmente, muestre que $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$
- El problema de Kepler tiene un grupo de simetría ampliado: No sólo rotaciones espaciales $SO(3)$, sino $SO(4)$ para el caso de órbitas acotadas, generada por $\{L_i, \tilde{A}_j\}$