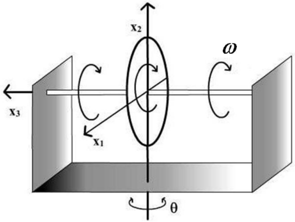
Girocompás y efecto Coriolis

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

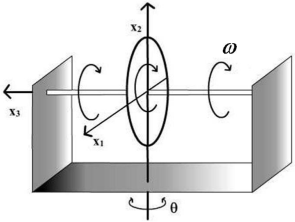
6 de mayo de 2025

Agenda



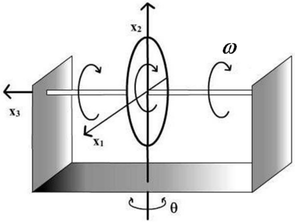
- El girocompás, es un instrumento para la navegación inercial, que permite indicar el Norte geográfico sin referencia al campo magnético.

Girocompás



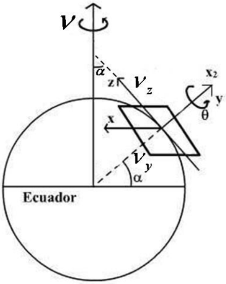
- El girocompás, es un instrumento para la navegación inercial, que permite indicar el Norte geográfico sin referencia al campo magnético.
- Es un disco con momentos principales de inercia $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$, que gira con velocidad angular constante ω, alrededor del eje perpendicular a su plano, que llamamos x_3.

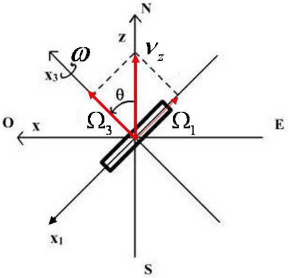
Girocompás



- El girocompás, es un instrumento para la navegación inercial, que permite indicar el Norte geográfico sin referencia al campo magnético.
- Es un disco con momentos principales de inercia $I_1^1 = I_2^2 \neq I_3^3$, que gira con velocidad angular constante ω, alrededor del eje perpendicular a su plano, que llamamos x_3.
- Simultáneamente, el disco puede rotar libremente un ángulo θ alrededor de un eje perpendicular a x_3.

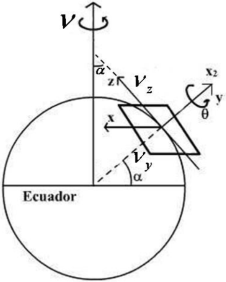
Navegación inercial

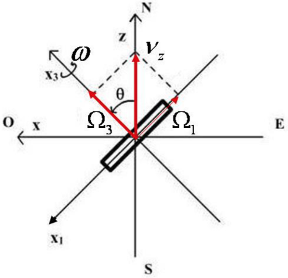




- Sea ν la magnitud de la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje NorteSur, con $\omega \gg \nu$, donde α es la latitud.

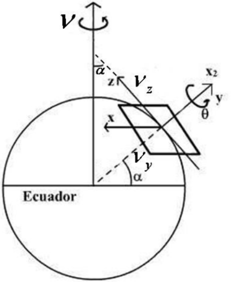
Navegación inercial

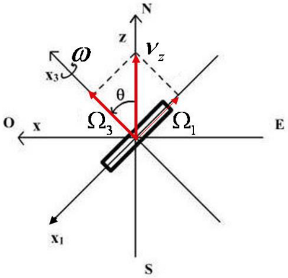




- Sea ν la magnitud de la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje NorteSur, con $\omega \gg \nu$, donde α es la latidud.
- El sistema de coordenadas $(\ x, y, z\ )$ está fijo en la Tierra y el sistema $(\ x_1, x_2, x_3\ )$ está en el CM del disco

Navegación inercial





- Sea ν la magnitud de la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje NorteSur, con $\omega \gg \nu$, donde α es la latitud.
- El sistema de coordenadas (x, y, z) está fijo en la Tierra y el sistema (x_1, x_2, x_3) está en el CM del disco
- Las componentes de la velocidad angular de la Tierra en (x, y, z) son $\nu_x = 0, \quad \nu_y = \nu \,\mathrm{sen}\, \alpha \quad$ y $\quad \nu_z = \nu \cos \alpha$

Las velocidades angulares

- Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación).

Las velocidades angulares

- Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación).
- las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ respecto a (x_1, x_2, x_3) son:

$$\begin{cases} \Omega^1 = -\nu_z \operatorname{sen}\theta = -\nu\cos\alpha \operatorname{sen}\theta \\ \Omega^2 = \nu_y + \dot{\theta} = \nu \operatorname{sen}\alpha + \dot{\theta} \\ \Omega^3 = \nu_z \cos\theta + \omega = \nu\cos\alpha\cos\theta + \omega \end{cases}$$

Las velocidades angulares

- Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación).
- las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ respecto a (x_1, x_2, x_3) son:

$$\begin{cases} \Omega^1 = -\nu_z \operatorname{sen}\theta = -\nu \cos\alpha \operatorname{sen}\theta \\ \Omega^2 = \nu_y + \dot{\theta} = \nu \operatorname{sen}\alpha + \dot{\theta} \\ \Omega^3 = \nu_z \cos\theta + \omega = \nu \cos\alpha \cos\theta + \omega \end{cases}$$

- El instrumento es libre de rotar sobre el eje y, no hay componente del torque en dirección de y, que corresponde instantaneamente al eje x_2.

Las velocidades angulares

- Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación).
- las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ respecto a (x_1, x_2, x_3) son:
$$\begin{cases} \Omega^1 = -\nu_z \operatorname{sen}\theta = -\nu\cos\alpha\operatorname{sen}\theta \\ \Omega^2 = \nu_y + \dot{\theta} = \nu\operatorname{sen}\alpha + \dot{\theta} \\ \Omega^3 = \nu_z\cos\theta + \omega = \nu\cos\alpha\cos\theta + \omega \end{cases}$$
- El instrumento es libre de rotar sobre el eje y, no hay componente del torque en dirección de y, que corresponde instantaneamente al eje x_2.
- Entonces, la ecuación de Euler $\tau^2 = I_2^2\dot{\Omega}^2 + \Omega_1\Omega_3\left(I_1^1 - I_3^3\right) = 0$

Las velocidades angulares

- Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación).
- las componentes de $\mathbf{\Omega}$ respecto a (x_1, x_2, x_3) son:
$$\begin{cases} \Omega^1 = -\nu_z \operatorname{sen}\theta = -\nu \cos\alpha \operatorname{sen}\theta \\ \Omega^2 = \nu_y + \dot{\theta} = \nu \operatorname{sen}\alpha + \dot{\theta} \\ \Omega^3 = \nu_z \cos\theta + \omega = \nu \cos\alpha \cos\theta + \omega \end{cases}$$
- El instrumento es libre de rotar sobre el eje y, no hay componente del torque en dirección de y, que corresponde instantaneamente al eje x_2.
- Entonces, la ecuación de Euler $\tau^2 = I_2^2 \dot{\Omega}^2 + \Omega_1 \Omega_3 \left(I_1^1 - I_3^3 \right) = 0$
- Derivando Ω^2 y sustituyendo (con $I_1^1 = I_2^2$) tenemos
$I_1^1 \ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1 \right) \nu \cos\alpha \operatorname{sen}\theta (\nu \cos\alpha \cos\theta + \omega) = 0$

Las velocidades angulares

- Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación).
- las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ respecto a (x_1, x_2, x_3) son:
$$\begin{cases} \Omega^1 = -\nu_z \operatorname{sen}\theta = -\nu\cos\alpha\operatorname{sen}\theta \\ \Omega^2 = \nu_y + \dot{\theta} = \nu\operatorname{sen}\alpha + \dot{\theta} \\ \Omega^3 = \nu_z\cos\theta + \omega = \nu\cos\alpha\cos\theta + \omega \end{cases}$$
- El instrumento es libre de rotar sobre el eje y, no hay componente del torque en dirección de y, que corresponde instantaneamente al eje x_2.
- Entonces, la ecuación de Euler $\tau^2 = I_2^2\dot{\Omega}^2 + \Omega_1\Omega_3\left(I_1^1 - I_3^3\right) = 0$
- Derivando Ω^2 y sustituyendo (con $I_1^1 = I_2^2$) tenemos
$I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\cos\alpha\operatorname{sen}\theta(\nu\cos\alpha\cos\theta + \omega) = 0$
- Como $\omega \gg \nu$, entonces $\omega \gg \nu\cos\alpha\cos\theta$, e implica
$I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\omega\cos\alpha\operatorname{sen}\theta \approx 0$

Las velocidades angulares

- Supongamos que la dirección de $\dot{\theta}$ en un instante dado está sobre el eje x_2 (simetría del disco permite esta simplificación).
- las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ respecto a (x_1, x_2, x_3) son:
$$\begin{cases} \Omega^1 = -\nu_z \operatorname{sen}\theta = -\nu\cos\alpha \operatorname{sen}\theta \\ \Omega^2 = \nu_y + \dot{\theta} = \nu \operatorname{sen}\alpha + \dot{\theta} \\ \Omega^3 = \nu_z \cos\theta + \omega = \nu\cos\alpha\cos\theta + \omega \end{cases}$$
- El instrumento es libre de rotar sobre el eje y, no hay componente del torque en dirección de y, que corresponde instantaneamente al eje x_2.
- Entonces, la ecuación de Euler $\tau^2 = I_2^2\dot{\Omega}^2 + \Omega_1\Omega_3\left(I_1^1 - I_3^3\right) = 0$
- Derivando Ω^2 y sustituyendo (con $I_1^1 = I_2^2$) tenemos $I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\cos\alpha \operatorname{sen}\theta(\nu\cos\alpha\cos\theta + \omega) = 0$
- Como $\omega \gg \nu$, entonces $\omega \gg \nu\cos\alpha\cos\theta$, e implica $I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\omega\cos\alpha \operatorname{sen}\theta \approx 0$
- Para pequeñas oscilaciones $I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\omega\cos\alpha\ \theta \approx 0$

Pequeñas Oscilaciones

- Pequeñas Oscilaciones $I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\omega\cos\alpha\;\theta \approx 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_c^2\theta \approx 0$, con lo cual $\omega_c^2 = \frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)}{I_1^1}\nu\omega\cos\alpha$,

Pequeñas Oscilaciones

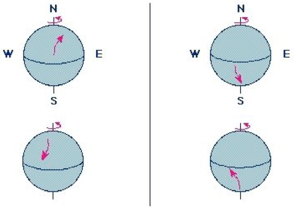
- Pequeñas Oscilaciones $I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\omega\cos\alpha\;\theta \approx 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_c^2\theta \approx 0$, con lo cual $\omega_c^2 = \frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)}{I_1^1}\nu\omega\cos\alpha$,
- Es la frecuencia para pequeñas oscilaciones del eje x_3 del disco alrededor del eje z, que apunta hacia el Norte.

Pequeñas Oscilaciones

- Pequeñas Oscilaciones $I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\omega\cos\alpha\ \theta \approx 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_c^2\theta \approx 0$, con lo cual $\omega_c^2 = \frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)}{I_1^1}\nu\omega\cos\alpha$,
- Es la frecuencia para pequeñas oscilaciones del eje x_3 del disco alrededor del eje z, que apunta hacia el Norte.
- El punto de equilibrio $\theta = 0$ de la oscilación del eje x_3 señala la dirección del Norte geográfico.

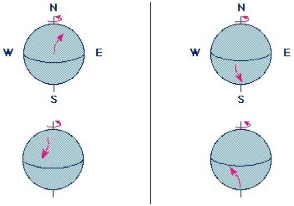
Pequeñas Oscilaciones

- Pequeñas Oscilaciones $I_1^1\ddot{\theta} + \left(I_3^3 - I_1^1\right)\nu\omega\cos\alpha\ \theta \approx 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_c^2\theta \approx 0$, con lo cual $\omega_c^2 = \frac{\left(I_3^3 - I_1^1\right)}{I_1^1}\nu\omega\cos\alpha$,
- Es la frecuencia para pequeñas oscilaciones del eje x_3 del disco alrededor del eje z, que apunta hacia el Norte.
- El punto de equilibrio $\theta = 0$ de la oscilación del eje x_3 señala la dirección del Norte geográfico.
- La frecuencia de oscilación ω_c permite a su vez calcular la latitud α sin ninguna referencia externa
- $\omega_c = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ es Polo Norte.
  $\omega_c =$ máxima $\Rightarrow \alpha = 0$ es el Ecuador.



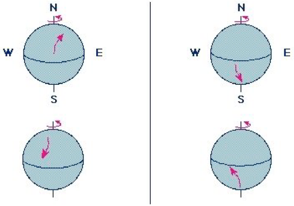
- Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ un sistema inercial (en reposo respecto a las estrellas fijas) y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ un sistema de coordenadas en rotación (la Tierra) con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ relativa al sistema inercial.

Efecto Coriolis



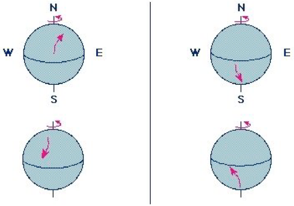
- Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ un sistema inercial (en reposo respecto a las estrellas fijas) y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ un sistema de coordenadas en rotación (la Tierra) con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ relativa al sistema inercial.
- Una vez mas $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x_1,x_2,x_3)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$,

Efecto Coriolis



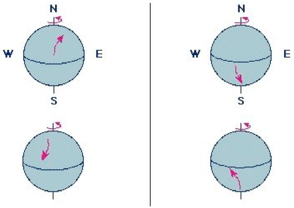
- Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ un sistema inercial (en reposo respecto a las estrellas fijas) y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ un sistema de coordenadas en rotación (la Tierra) con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ relativa al sistema inercial.
- Una vez mas $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x_1,x_2,x_3)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$,
- Con lo cual $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$

Efecto Coriolis



- Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ un sistema inercial (en reposo respecto a las estrellas fijas) y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ un sistema de coordenadas en rotación (la Tierra) con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$ relativa al sistema inercial.
- Una vez mas $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x_1,x_2,x_3)} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$,
- Con lo cual $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$
- Entonces $\underbrace{m\frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}}_{\mathbf{F}'} + \underbrace{2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'}_{-\mathbf{F}_{Coriolis}} + \underbrace{m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_{-\mathbf{F}_{centrifuga}}$

Efecto Coriolis



- Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ un sistema inercial (en reposo respecto a las estrellas fijas) y $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ un sistema de coordenadas en rotación (la Tierra) con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$ relativa al sistema inercial.
- Una vez mas $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x,y,z)} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{(x_1,x_2,x_3)} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$,
- Con lo cual $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}' + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$
- Entonces $\underbrace{m\frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}}_{\mathbf{F}'} + \underbrace{2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}'}_{-\mathbf{F}_{Coriolis}} + \underbrace{m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})}_{-\mathbf{F}_{centrifuga}}$
- Es decir $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{Coriolis} + \mathbf{F}_{centrifuga}$

En presentación consideramos

1.