Operadores Lineales:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

18 de septiembre de 2025

Agenda: Operadores Lineales

Operadores Lineales

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \,/ \mathbb{T}\left[\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle\right] = \alpha \; \mathbb{T}\,|v_1\rangle + \beta \; \mathbb{T}\,|v_2\rangle \;\forall\; |v_1\rangle \;\text{ y }\; |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\,|v\rangle = |v'\rangle = \lambda\,|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\,|v\rangle + \beta\mathbb{T}\,|w\rangle = \alpha\lambda\,|v\rangle + \beta\lambda\,|w\rangle$.

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \,/ \mathbb{T}\left[\alpha\ \ |v_1\rangle + \beta\ \ |v_2\rangle\right] = \alpha\ \mathbb{T}\,|v_1\rangle + \beta\ \mathbb{T}\,|v_2\rangle\ \forall\ |v_1\rangle\ \text{ y }\ |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1\,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\,|v\rangle = |v'\rangle = \lambda\,|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\,|v\rangle + \beta\mathbb{T}\,|w\rangle = \alpha\lambda\,|v\rangle + \beta\lambda\,|w\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}\,|v\rangle = \lambda \rightleftharpoons \langle u\,|v\rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \langle u|\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\,\langle u\,|v\rangle + \beta\,\langle u\,|w\rangle$,

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \,/ \mathbb{T}\left[\alpha\ \ |v_1\rangle + \beta\ \ |v_2\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}\,|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{T}\,|v_2\rangle\ \forall\ |v_1\rangle\ \text{ y }\ |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1\,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\,|v\rangle = |v'\rangle = \lambda\,|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\,|v\rangle + \beta\mathbb{T}\,|w\rangle = \alpha\lambda\,|v\rangle + \beta\lambda\,|w\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}\,|v\rangle = \lambda \rightleftharpoons \langle u\,|v\rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \langle u|\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\,\langle u\,|v\rangle + \beta\,\langle u\,|w\rangle$,
- Un proyector $\left[|s\rangle\,\langle s|\right]\ |v\rangle = \langle s\,|v\rangle\,|s\rangle = |v_s\rangle$. $|s\rangle\,\langle s|\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\,\langle s\,|v\rangle\,|s\rangle + \beta\,\langle s\,|w\rangle\,|s\rangle$ por lo tanto para $\mathbb{T} : \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbf{S}_n$ tendremos $\mathbb{P}_m\,|v\rangle \equiv \left(|u_i\rangle\,\left\langle u^i\right|_m\right)|v\rangle = \left\langle u^i\ |v\right\rangle_m |u_i\rangle = |v_m\rangle$,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T}: \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
$|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{\begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array}\right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
  $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
  entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
  $|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}\left[y(x)\right] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)\,,$

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$, entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal $|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}\,[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)$,
- Las ecuaciones diferenciales también lo son $y'' - 3\, y' + 2\, y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)$,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$, entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{\begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array}\right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal $|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}\,[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)\,,$
- Las ecuaciones diferenciales también lo son $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
- La integral también : $g(x) = \int_a^x\ f(t)\mathrm{d}t\ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\,[f(t)]$.
- y las transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}\,(s,t)\ \ f(t)\mathrm{d}t\ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\,[f(t)]\ ,$$

donde $\mathcal{K}\,(s,t)$ es una función conocida de s y t, denominada el *núcleo* de la transformación.

Ejemplos de transformaciones integrales

Nombre	$F(s) = \mathbb{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^{\infty} \begin{matrix}\operatorname{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^{\infty} \begin{matrix}\operatorname{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} F(s)\mathrm{d}s$
Hankel	$F(s) = \int_0^{\infty} tJ_n(st) f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^{\infty} sJ_n(ts) F(s)\mathrm{d}s$
Mellin	$F(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s)\mathrm{d}s$

Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
$$\lambda \mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \, / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle \right] = \alpha \ \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} \left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle \right] = \alpha \ \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$

Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
$$\lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \; / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] =$
$\lambda\mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle]$

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
$$\lambda \mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \; / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$
- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \lambda \mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ lineales en $\mathbf{V}$,

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
$$\lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \, / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] = \alpha \ \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] = \alpha \ \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \ \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] = \lambda\mathbb{A} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ lineales en $\mathbf{V}$,
- La transformación cero de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2 : \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle \ \forall \ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$,
- El elemento simétrico $(-\mathbb{A}) |v\rangle = -\mathbb{A} |v\rangle \ \Rightarrow \ (\mathbb{A} - \mathbb{A}) |v\rangle = \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle$.

Operadores Tensoriales

- Sean $\mathbb{A}_{(1)}$ y $\mathbb{B}_{(2)}$ dos operadores lineales que actúan en dos espacios vectoriales $\mathbf{V}_1$, y $\mathbf{V}_2$, respectivamente: $\left(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)}\right) |v(1)\ w(2)\rangle \Rightarrow \left(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)}\right) \left(|v(1)\rangle \otimes |w(2)\rangle\right) = \mathbb{A}_{(1)}|v(1)\rangle \otimes \mathbb{B}_{(2)}|w(2)\rangle$.

- Sean $\mathbb{A}_{(1)}$ y $\mathbb{B}_{(2)}$ dos operadores lineales que actúan en dos espacios vectoriales $\mathbf{V}_1$, y $\mathbf{V}_2$, respectivamente: $\left(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)}\right) |v(1)\ w(2)\rangle \Rightarrow \left(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)}\right) (|v(1)\rangle \otimes |w(2)\rangle) = \mathbb{A}_{(1)}|v(1)\rangle \otimes \mathbb{B}_{(2)}|w(2)\rangle$.
- Entonces $\left(\mathbb{A}_{(1)}\right)^i_j$ y $\left(\mathbb{B}_{(2)}\right)^k_m$ son matrices $n \times n$ y $m \times m$ el operador tensorial será una matriz $nm \times nm$. Esto es

$$\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbb{B}_{(2)} & a_{12}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{1n}\mathbb{B}_{(2)} \\ a_{21}\mathbb{B}_{(2)} & a_{22}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{2n}\mathbb{B}_{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbb{B}_{(2)} & a_{n2}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{nn}\mathbb{B}_{(2)} \end{pmatrix} .$$

- Sean $\mathbb{A}_{(1)}$ y $\mathbb{B}_{(2)}$ dos operadores lineales que actúan en dos espacios vectoriales $\mathbf{V}_1$, y $\mathbf{V}_2$, respectivamente: $\left(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)}\right)|v(1)\ w(2)\rangle \Rightarrow \left(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)}\right)(|v(1)\rangle \otimes |w(2)\rangle) = \mathbb{A}_{(1)}|v(1)\rangle \otimes \mathbb{B}_{(2)}|w(2)\rangle$.
- Entonces $\left(\mathbb{A}_{(1)}\right)^i_j$ y $\left(\mathbb{B}_{(2)}\right)^k_m$ son matrices $n \times n$ y $m \times m$ el operador tensorial será una matriz $nm \times nm$. Esto es

$$\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbb{B}_{(2)} & a_{12}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{1n}\mathbb{B}_{(2)} \\ a_{21}\mathbb{B}_{(2)} & a_{22}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{2n}\mathbb{B}_{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbb{B}_{(2)} & a_{n2}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{nn}\mathbb{B}_{(2)} \end{pmatrix}.$$

- Construya $\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)}$, con los siguientes operadores matriciales

$$\left(\mathbb{A}_{(1)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \left(\mathbb{B}_{(2)}\right)^k_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\,|v\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\,|v\rangle\right) = \mathbb{A}\,|\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{B}\mathbb{C})\,; \qquad \alpha\,(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (\alpha\mathbb{A})\,\mathbb{B} = \mathbb{A}\,(\alpha\mathbb{B})\,;$$

$$(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\,\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}\,; \qquad \mathbb{A}\,(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) = \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2\,.$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\,|v\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\,|v\rangle\right) = \mathbb{A}\,|\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{B}\mathbb{C})\,; \qquad \alpha\,(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (\alpha\mathbb{A})\,\mathbb{B} = \mathbb{A}\,(\alpha\mathbb{B})\,;$$
$$(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\,\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}\,; \qquad \mathbb{A}\,(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) = \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2\,.$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

- En general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:
  $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow [\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}]\,|v\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}\,|v\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}\,|v\rangle$.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{AB}$ tal que $\mathbb{AB}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$(\mathbb{AB})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{BC})\,; \qquad \alpha\,(\mathbb{AB}) = (\alpha\mathbb{A})\,\mathbb{B} = \mathbb{A}\,(\alpha\mathbb{B})\,;$$

$$(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\,\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}\,; \qquad \mathbb{A}\,(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) = \mathbb{AB}_1 + \mathbb{AB}_2\,.$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.
- En general $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:
  $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = \mathbb{AB} - \mathbb{BA} \Rightarrow [\mathbb{AB} - \mathbb{BA}]\left|v\right\rangle = \mathbb{AB}\left|v\right\rangle - \mathbb{BA}\left|v\right\rangle$.
- Entonces

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A},\mathbb{B}] &= -\,[\mathbb{B},\mathbb{A}]\\
[\mathbb{A},(\mathbb{B}+\mathbb{C})] &= [\mathbb{A},\mathbb{B}] + [\mathbb{A},\mathbb{C}]\\
[\mathbb{A},\mathbb{BC}] &= [\mathbb{A},\mathbb{B}]\,\mathbb{C} + \mathbb{B}\,[\mathbb{A},\mathbb{C}]\\
[\mathbb{A},[\mathbb{B},\mathbb{C}]] &= -\,[\mathbb{B},[\mathbb{C},\mathbb{A}]] - [\mathbb{C},[\mathbb{A},\mathbb{B}]]\,.
\end{aligned}$$

Proyectores

- Un operador proyección a lo largo de un vector $|v\rangle$ será $\mathbb{P}^2_{|v\rangle} = \mathbb{P}_{|v\rangle}$ con $\langle v|v\rangle = 1$, y lo representaremos como $\mathbb{P}_{|v\rangle} \equiv |v\rangle\langle v|$

- Un operador proyección a lo largo de un vector $|v\rangle$ será $\mathbb{P}^2_{|v\rangle} = \mathbb{P}_{|v\rangle}$ con $\langle v|v\rangle = 1$, y lo representaremos como $\mathbb{P}_{|v\rangle} \equiv |v\rangle\langle v|$
- Claramente

$$\mathbb{P}^2_{|v\rangle}|z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle}\ \mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle = \left(|v\rangle\langle v|\right)\left(|v\rangle\langle v|\right)|z\rangle = |v\rangle\underbrace{\langle v|v\rangle}_{1}\langle v|z\rangle$$

$$\mathbb{P}^2_{|v\rangle}|z\rangle = |v\rangle\langle v|z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle\,.$$

- Un operador proyección a lo largo de un vector $|v\rangle$ será $\mathbb{P}^2_{|v\rangle} = \mathbb{P}_{|v\rangle}$ con $\langle v|v\rangle = 1$, y lo representaremos como $\mathbb{P}_{|v\rangle} \equiv |v\rangle\langle v|$
- Claramente
$$\mathbb{P}^2_{|v\rangle}|z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle}\ \mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle = \left(|v\rangle\langle v|\right)\left(|v\rangle\langle v|\right)|z\rangle = |v\rangle\underbrace{\langle v|v\rangle}_{1}\langle v|z\rangle$$
$$\mathbb{P}^2_{|v\rangle}|z\rangle = |v\rangle\langle v|z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle\,.$$
- y cumple con $\mathbb{P}_{|v\rangle}\left[\alpha\ |z_1\rangle + \beta\ |z_2\rangle\right] = \alpha\ \mathbb{P}_{|v\rangle}|z_1\rangle + \beta\ \mathbb{P}_{|v\rangle}|z_2\rangle$

Proyectores

- Un operador proyección a lo largo de un vector $|v\rangle$ será $\mathbb{P}^2_{|v\rangle} = \mathbb{P}_{|v\rangle}$ con $\langle v|v\rangle = 1$, y lo representaremos como $\mathbb{P}_{|v\rangle} \equiv |v\rangle\langle v|$
- Claramente
$$\mathbb{P}^2_{|v\rangle}|z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle}\ \mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle = (|v\rangle\langle v|)\,(|v\rangle\langle v|)\,|z\rangle = |v\rangle\underbrace{\langle v|v\rangle}_{1}\langle v|z\rangle$$
$$\mathbb{P}^2_{|v\rangle}|z\rangle = |v\rangle\langle v|z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle\,.$$
- y cumple con $\mathbb{P}_{|v\rangle}\,[\alpha\ |z_1\rangle + \beta\ |z_2\rangle] = \alpha\ \mathbb{P}_{|v\rangle}|z_1\rangle + \beta\ \mathbb{P}_{|v\rangle}|z_2\rangle$
- Sea: $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_q\rangle\}$ un conjunto ortonormal de vectores que expande $\mathbf{S}_q \subset \mathbf{V}^n$. Definiremos el proyector $\mathbb{P}_q$ sobre el subespacio $\mathbf{S}_q$ como: $\mathbb{P}_q = |\mathrm{e}_i\rangle\langle\mathrm{e}^i|_q$, es claro que $\forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}$ se tiene:
$$\mathbb{P}_q|v\rangle = (|\mathrm{e}_i\rangle\langle\mathrm{e}^i|_q)(v^k|\mathrm{e}_k\rangle) = v^k(|\mathrm{e}_i\rangle\overbrace{\langle\mathrm{e}^i|_q)|\mathrm{e}_k\rangle}^{\delta^i_k} = v^k|\mathrm{e}_k\rangle_q,$$ claramente es la proyección de $|v\rangle$ en $\mathbf{S}_q$

Funciones de operadores

- Las potencias de operadores provienen de la aplicación consecutiva del operador, $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}\,;\ \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\cdots$

Funciones de operadores

- Las potencias de operadores provienen de la aplicación consecutiva del operador, $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$; $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$; $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}$; $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\cdots$
- Las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m$; $(\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}$.

Funciones de operadores

- Las potencias de operadores provienen de la aplicación consecutiva del operador, $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$; $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$; $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}$; $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\cdots$
- Las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m$; $(\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}$.
- Con las potencias de operadores podemos construir un "polinomio" en potencias de los operadores $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i \leftrightarrows P_n(\mathbb{A})|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]\,|v\rangle = \left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle$, $\forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$.

Funciones de operadores

- Las potencias de operadores provienen de la aplicación consecutiva del operador, $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$; $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$; $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}$; $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\cdots$
- Las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m$; $(\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}$.
- Con las potencias de operadores podemos construir un "polinomio" en potencias de los operadores $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i \leftrightarrows$ $P_n(\mathbb{A})|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]\,|v\rangle = \left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle$, $\forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$.
- Como en el caso de funciones, "desarrollamos por Taylor"

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle$$

Funciones de operadores

- Las potencias de operadores provienen de la aplicación consecutiva del operador, $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}\,;\ \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\cdots$
- Las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m;\ (\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}$.
- Con las potencias de operadores podemos construir un "polinomio" en potencias de los operadores $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i \leftrightarrows P_n(\mathbb{A})|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]\,|v\rangle = \left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle,\ \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$.
- Como en el caso de funciones, "desarrollamos por Taylor"
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle$$
- podemos expresar la exponencial de un operador $\mathbb{A}$, como
$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\cdots\right]|v\rangle\,.$$

- Las potencias de operadores provienen de la aplicación consecutiva del operador, $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}\,;\ \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\cdots$
- Las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m;\ (\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}$.
- Con las potencias de operadores podemos construir un "polinomio" en potencias de los operadores $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i \leftrightarrows P_n(\mathbb{A})|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]\,|v\rangle = \left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle,\ \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$.
- Como en el caso de funciones, "desarrollamos por Taylor"
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle$$
- podemos expresar la exponencial de un operador $\mathbb{A}$, como
$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\cdots\right]|v\rangle\,.$$
- Si $[\mathbb{A},\mathbb{B}] \neq 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\mathbb{A}} \neq \mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$.

- Las potencias de operadores provienen de la aplicación consecutiva del operador, $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}\,;\ \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}\,;\ \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\cdots$
- Las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números $\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m;\ (\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}$.
- Con las potencias de operadores podemos construir un "polinomio" en potencias de los operadores $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = a_i x^i \leftrightarrows$ $P_n(\mathbb{A})|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \cdots + a_n\mathbb{A}^n]\,|v\rangle = \left[a_i\mathbb{A}^i\right]|v\rangle,\ \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1$.
- Como en el caso de funciones, "desarrollamos por Taylor"
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} \quad \leftrightarrows \quad \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle$$
- podemos expresar la exponencial de un operador $\mathbb{A}$, como
$$\mathrm{e}^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{A}^n}{n!}\right]|v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!}\cdots\right]|v\rangle\,.$$
- Si $[\mathbb{A},\mathbb{B}] \neq 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}} \neq \mathrm{e}^{\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\mathbb{A}} \neq \mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$.
- En general se cumple la fórmula de Glauber: $\mathrm{e}^{\mathbb{A}}\mathrm{e}^{\mathbb{B}} = \mathrm{e}^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\mathbb{A},\mathbb{B}]}$.

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha\ \left|v_1\right\rangle + \beta\ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\,\mathbb{T}\left|v_2\right\rangle\ \forall\ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1\,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}\left(s,t\right)\ f(t)\mathrm{d}t\ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
    - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
    - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha\ \left|v_1\right\rangle + \beta\ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle\ \forall\ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1\,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t\ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.
- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$.

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.
- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$.
- Como, en general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, construimos el conmutador de estos operadores como:
$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow [\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}]\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}\left|v\right\rangle\,.$

Para la discusión

- Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:
  1. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$.
  2. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

  ¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$?

Para la discusión

- Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:
  1. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$.
  2. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

  ¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$?
- Dados los operadores lineales $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y el operador identidad $\mathbb{I}$, tales que: $\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{I}, \quad \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$ y $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 2i\mathbb{C}$.
  - Muestre $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$, $[\mathbb{B},\mathbb{C}] = 2i\mathbb{A}$
  - Calcule $[\mathbb{F}(\mathbb{A}),\mathbb{A}]$

Para la discusión

- Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:
  1. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$.
  2. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

  ¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$?
- Dados los operadores lineales $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y el operador identidad $\mathbb{I}$, tales que: $\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}$, $\quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{I}$, $\quad \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$ y $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 2i\mathbb{C}$.
  - Muestre $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$, $[\mathbb{B},\mathbb{C}] = 2i\mathbb{A}$
  - Calcule $[\mathbb{F}(\mathbb{A}),\mathbb{A}]$
- Considere un operador $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}t$ y calcule $\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}$

Para la discusión

- Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:
  1. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$.
  2. $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

  ¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$?
- Dados los operadores lineales $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y el operador identidad $\mathbb{I}$, tales que: $\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{I}, \quad \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$ y $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 2i\mathbb{C}$.
  - Muestre $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$, $[\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 2i\mathbb{A}$
  - Calcule $[\mathbb{F}(\mathbb{A}), \mathbb{A}]$
- Considere un operador $\mathbb{A}(t) = \mathbb{A}t$ y calcule $\frac{\mathrm{d}e^{\mathbb{A}t}}{\mathrm{d}t}$
- Calcule $\frac{\mathrm{d}\left(e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}\right)}{\mathrm{d}t}|v\rangle$