

Modos normales de oscilación

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



14 de octubre de 2024

- 1 Marco teórico: Modos normales de oscilación
- 2 Un ejemplo: Modos Normales Oscilación para el CO2
 - Descripción del sistema CO2
 - Energías cinética y potencial
 - Las frecuencias de oscilación ω_k
 - Modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$
- 3 Sección

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son
$$\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son
$$\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos
$$\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s$
- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ es decir
$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \dots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \dots, q_{0s}\}$ son $\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s$
- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ es decir
$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \dots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$
- Esto permite calcular las s frecuencias de pequeñas oscilaciones $\omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, s$ como soluciones al polinomio característico

- Para cada ω_k , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

- Para cada ω_k , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

- Para cada ω_k , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.

- Para cada ω_k , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}$, $k = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_k a_j(\omega_k) \xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales

- Para cada ω_k , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}$, $k = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_k a_j(\omega_k) \xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_k satisface la ecuación $\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0$.

- Para cada ω_k , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.

Si $s = 2$

$$i = 1 : (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}$, $k = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_k a_j(\omega_k) \xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_k satisface la ecuación $\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son $\eta_1 = a_1(\omega_1) \xi_1 + a_1(\omega_2) \xi_2$, $\eta_2 = a_2(\omega_1) \xi_1 + a_2(\omega_2) \xi_2$

- Para cada ω_k , existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_k)$.

Si $s = 2$

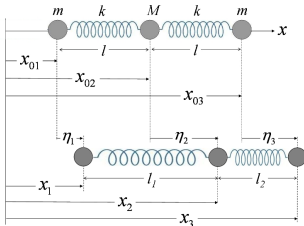
$$i = 1 : (V_{11} - \omega_k^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega_k^2 T_{12}) a_2 = 0$$

$$i = 2 : (V_{21} - \omega_k^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega_k^2 T_{22}) a_2 = 0$$

Para cada ω_k tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_k)$ y $a_2(\omega_k)$

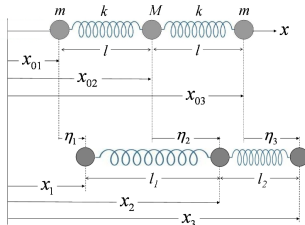
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_k c_k a_j(\omega_k) e^{i\omega_k t}$, donde c_k son las fases complejas.
- Si $\xi_k \equiv c_k e^{i\omega_k t}$, $k = 1, 2, \dots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_k a_j(\omega_k) \xi_k$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_k satisface la ecuación $\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son
$$\eta_1 = a_1(\omega_1) \xi_1 + a_1(\omega_2) \xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_1) \xi_1 + a_2(\omega_2) \xi_2$$
- Para ξ_2 tenemos $\eta_1 = a_1(\omega_2) \xi_2$, $\eta_2 = a_2(\omega_2) \xi_2$, 2 pequeños desplazamientos que oscilan con la frecuencia ω_2 alrededor de su posición de equilibrio con amplitudes $a_1(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2)$.

- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO₂



M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1 , l_2 , las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO₂



M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1 , l_2 , las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

- Sean x_{01} , x_{02} , x_{03} las posiciones de equilibrio de las tres partículas y $\eta_i = x_i - x_{0i}$, con $i = 1, 2, 3$ los desplazamientos del equilibrio.

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \Rightarrow$
 $V = \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \Rightarrow$
 $V = \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k(l_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(l_2 - l)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y
 $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \Rightarrow$
 $V = \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$
- y $V_{ij} = \begin{pmatrix} V_{11} = k & V_{12} = -k & V_{13} = 0 \\ V_{21} = -k & V_{22} = 2k & V_{23} = -k \\ V_{31} = 0 & V_{32} = -k & V_{33} = k \end{pmatrix}$

- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$, implica

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_k$$

- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$, implica

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_k$$

- La ecuación característica cúbica para ω_k , es

$$(k - \omega^2 m) [(2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2] - k^2 (k - \omega^2 m) = 0$$
$$\Rightarrow \omega^2 (k - \omega^2 m) [k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0$$

- La condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$, implica

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_k$$

- La ecuación característica cúbica para ω_k , es

$$(k - \omega^2 m) [(2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2] - k^2 (k - \omega^2 m) = 0$$
$$\Rightarrow \omega^2 (k - \omega^2 m) [k(M + 2m) - \omega^2 Mm] = 0$$

- Con soluciones $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_k ,

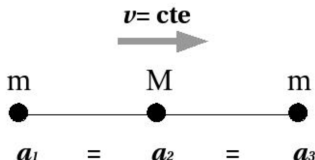
$$i = 1 : \quad (k - \omega_k^2 m) a_1 - k a_2 = 0$$

$$i = 2 : \quad -k a_1 + (2k - \omega_k^2 M) a_2 - k a_3 = 0$$

$$i = 3 : \quad -k a_2 + (k - \omega_k^2 m) a_3 = 0$$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_k ,
$$i = 1 : \quad (k - \omega_k^2 m) a_1 - k a_2 = 0$$
$$i = 2 : \quad -k a_1 + (2k - \omega_k^2 M) a_2 - k a_3 = 0$$
$$i = 3 : \quad -k a_2 + (k - \omega_k^2 m) a_3 = 0$$
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 = \text{cte} \Rightarrow$ reposo o velocidad constante

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_k ,
 $i = 1 : \quad (k - \omega_k^2 m) a_1 - k a_2 = 0$
 $i = 2 : \quad -k a_1 + (2k - \omega_k^2 M) a_2 - k a_3 = 0$
 $i = 3 : \quad -k a_2 + (k - \omega_k^2 m) a_3 = 0$
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 = \text{cte} \Rightarrow$ reposo o velocidad constante
- Entonces para $\omega_1 = 0$, tenemos $a_1(\omega_1) = a_2(\omega_1) = a_3(\omega_1)$



Modo normal de oscilación para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

