Vector Laplace-Runge-Lenz

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

16 de septiembre de 2024

Agenda

El vector **A**

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.

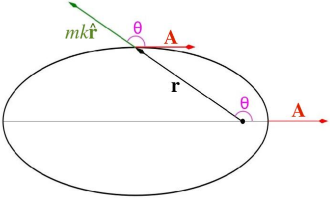
El vector **A**

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \text{cte}$.

El vector **A**

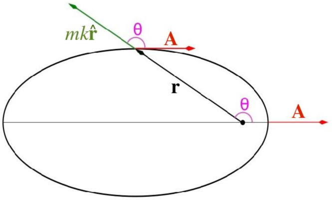
Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \mathrm{cte}$.
- **A** es un vector de magnitud es constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x, $\mathbf{A} = \mu k e\hat{\mathbf{i}}$.



El vector $\mathbf{A}$

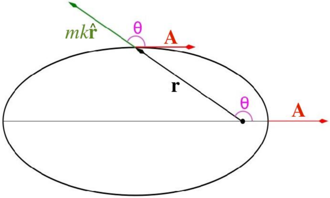
- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu k r$, con $A \equiv \mu k e = \text{cte}$.
- $\mathbf{A}$ es un vector de magnitud es constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x, $\mathbf{A} = \mu k e\hat{\mathbf{i}}$.



- Como $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k\hat{\mathbf{r}}]$

El vector A

- La trayectoria del problema de Kepler con el potencial central $V(r) = -k/r$ y la fuerza gravitacional $\mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, con $f(r) = -k/r^2$, es una sección cónica, $\frac{q}{r} = 1 + e\cos\theta$, donde $q = L^2/\mu k$, y $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$.
- Podemos definir $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = rA\cos\theta = L^2 - \mu kr$, con $A \equiv \mu ke = \text{cte}$.
- $\mathbf{A}$ es un vector de magnitud es constante y dirección debe estar en la dirección del perihelio. Si la dirección está en el eje x, $\mathbf{A} = \mu ke\hat{\mathbf{i}}$.



- Como $L^2 = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) \Rightarrow \mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{r}\cdot[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - \mu k\hat{\mathbf{r}}]$
- Donde $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$ y también $\mathbf{A}\cdot\mathbf{L} = 0$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

A es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
  ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
- Además $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}$

$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu \frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2 \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
- Además $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$

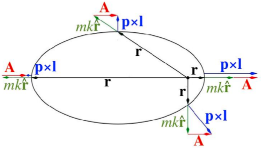
$\mathbf{A}$ es cantidad conservada

- Consideremos $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - \mu k \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$
- El primer término $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\times\mathbf{L} + \mathbf{p}\times \cancelto{0}{\frac{d\mathbf{L}}{dt}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\times(\mathbf{r}\times\mu\mathbf{v})$
- Por otro lado, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(r) = f(r)\hat{\mathbf{r}} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$
- Entonces $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] = \mu\frac{f(r)}{r}\left[\mathbf{r}\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) - r^2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$ ya que $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
- Como $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = 2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r^2\right) = 2r\frac{dr}{dt}$
- Tendremos $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \mu f(r)\left[\mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$
- Además $\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mathbf{r}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathbf{r}}{dt}$
- Con lo cual $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = -\mu f(r) r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \mu k\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ para $f(r) = -k/r^2$
- y finalmente $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}} =$cte

Kepler superintegrable

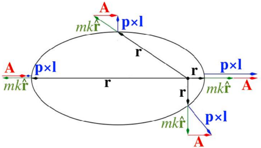
- La magnitud del vector $\mathbf{A}$ para la fuerza gravitacional se expresa en términos de L y E como $A^2 = (\mu k e)^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E L^2 = \text{cte}$

- La magnitud del vector **A** para la fuerza gravitacional se expresa en términos de L y E como $A^2 = (\mu k e)^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E L^2 = \text{cte}$
- La dirección de **A**, correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



Kepler superintegrable

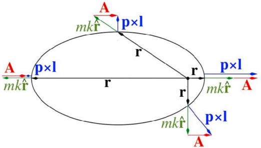
- La magnitud del vector **A** para la fuerza gravitacional se expresa en términos de L y E como $A^2 = (\mu k e)^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E L^2 = \text{cte}$
- La dirección de **A**, correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable. La constancia de la dirección $\hat{\mathbf{A}}$ implica que una órbita en el potencial $V(r) = -k/r$ no presenta precesión.

Kepler superintegrable

- La magnitud del vector **A** para la fuerza gravitacional se expresa en términos de L y E como $A^2 = (\mu k e)^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E L^2 = \text{cte}$
- La dirección de **A**, correspondiente a la dirección del perihelio, provee una nueva cantidad conservada en el problema de Kepler.



- El sistema de dos cuerpos sujetos a la fuerza gravitacional que varía como el inverso del cuadrado de la distancia constituye un sistema superintegrable. La constancia de la dirección $\hat{\mathbf{A}}$ implica que una órbita en el potencial $V(r) = -k/r$ no presenta precesión.
- Existen seis grados de libertad (tres para cada partícula) y siete cantidades conservadas: las tres componentes de la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_{cm}$, la dirección del momento angular $\mathbf{L}$, su magnitud L, la energía E y la dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz $\hat{\mathbf{A}}$

Título transparencia

-

Título transparencia

Título transparencia

-