Cuerpo Rígido:
Energía cinética, momento de inercia, cantidad de movimiento angular y ecuaciones de movimiento

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

20 de mayo de 2025

Agenda

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\rm cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\rm cm} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\rm cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\rm cm} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\rm cm} \cdot \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$
- El primer término es $\frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right) v_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2} M v_{\rm cm}^2$.

La energía cinética

- La energía potencial de interacción entre las partículas de un cuerpo rígido es constante.
- Entonces toda la energía potencial del sólido es la energía potencial del centro de masa.
- La energía cinética de un cuerpo rígido con velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, es $T = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j v_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots,$ donde $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$,
- Como la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es la misma para todas las partículas del cuerpo, tenemos $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$, es decir
  $T = \frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\mathrm{cm}}^2 + \sum_j m_j \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\sum_j m_j \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right)^2$
- El primer término es $\frac{1}{2}\sum_j m_j v_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j\right) v_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2$.
- El segundo término se simplifica usando
  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Entonces
  $\sum_j m_j \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} \cdot \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \cdot \left(\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} \times \mathbf{\Omega}\right) =$
  $= \left(\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} \times \mathbf{\Omega}\right) \cdot \cancelto{0}{\left(\sum_j m_j \mathbf{r}_j\right)} = 0$, ya que $\mathbf{R}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_j m_j \mathbf{r}_j}{M} = 0$

El Tensor de Inercia

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$

El Tensor de Inercia

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_j)^2 \right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$

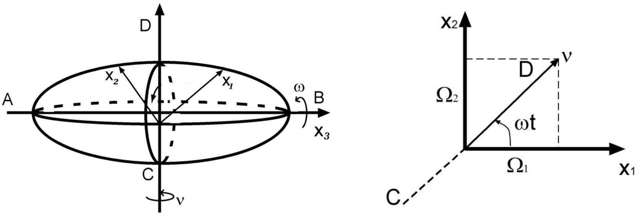
- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$
- La energía cinética será $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k}\left(\Omega_i\Omega_k r_j^2\delta_{ik} - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right)$, o mejor $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\sum_j m_j\left(r_j^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$

- El tercer término se evalúa usando $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, por lo tanto $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)^2 = (\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j)\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_j) = \Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2$
- Entonces $T = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j\left[\Omega^2 r_j^2 - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2\right] = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$
- Además, $(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}_j)^2 = \left(\sum_i \Omega_i x_{i\,j}\right)\left(\sum_k \Omega_k x_{i\,j}\right) = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k x_{i\,j}x_{i\,j},$, $\Omega_i = \sum_k \Omega_k\delta_{ik}, \quad \Rightarrow \Omega^2 = \sum_i \Omega_i^2 = \sum_i \Omega_i \sum_k \Omega_k\delta_{ik} = \sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}$
- La energía cinética será $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_j^{\text{cuerpo}} m_j \sum_{i,k}\left(\Omega_i\Omega_k r_j^2\delta_{ik} - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right)$, o mejor $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k\sum_j m_j\left(r_j^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Donde

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum_j m_j\left(x_2^2+x_3^2\right) & -\sum_j m_j x_1 x_2 & -\sum_j m_j x_1 x_3 \\ -\sum_j m_j x_2 x_1 & \sum_j m_j\left(x_1^2+x_3^2\right) & -\sum_j m_j x_2 x_3 \\ -\sum_j m_j x_3 x_1 & -\sum_j m_j x_3 x_2 & \sum_j m_j\left(x_1^2+x_2^2\right) \end{pmatrix}$$

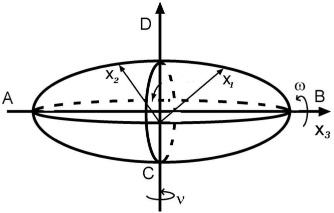
Elipsoide en rotación

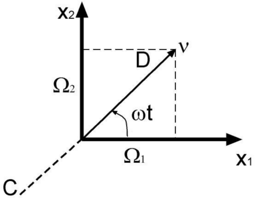
- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,



Elipsoide en rotación

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,

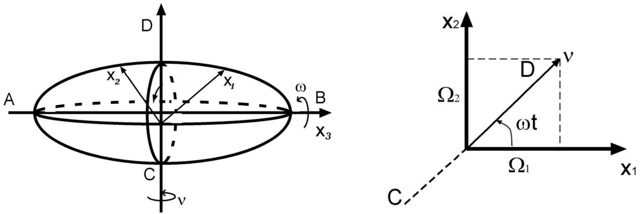




- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).

Elipsoide en rotación

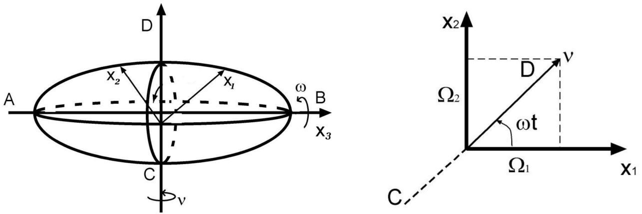
- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,



- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).
- Las componentes $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ son

$$\tilde{\Omega}_1 = \nu \cos \omega t, \quad \tilde{\Omega}_2 = \nu \operatorname{sen} \omega t \text{ y } \quad \tilde{\Omega}_3 = \omega,$$

- Energía cinética de un elipsoide ($I_{11} \neq I_{22} \neq I_{33}$) que rota sobre eje AB con velocidad angular ω, y sobre eje CD con velocidad angular ν,



- Escogemos eje AB en la dirección x_3. Entonces los ejes x_1 y x_2 rotan alrededor de $AB = x_3$. La dirección de $\omega = \dot{\phi}$ es a lo largo de x_3 y la dirección de ν está sobre el plano (x_1, x_2).
- Las componentes $\mathbf{\Omega} = \left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3\right)$ son

  $\tilde{\Omega}_1 = \nu \cos \omega t, \quad \tilde{\Omega}_2 = \nu \operatorname{sen} \omega t$ y $\quad \tilde{\Omega}_3 = \omega,$
- Finalmente $T = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{11} \tilde{\Omega}_1^2 + \frac{1}{2} I_{22} \tilde{\Omega}_2^2 + \frac{1}{2} I_{33} \tilde{\Omega}_3^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}\left(I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \operatorname{sen}^2 \omega t\right) \nu^2 + \frac{1}{2} I_{33} \omega^2$

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.

Cantidad de movimiento angular

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j \left(\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j\right)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j \left(\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j\right)$, con $\mathbf{v}_j = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j^N m_j \mathbf{r}_j \times \left(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j\right) \equiv \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \mathbf{\Omega} - \left(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{\Omega}\right) \mathbf{r}_j\right]$. Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

Cantidad de movimiento angular

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j^N m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$.
  Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
  $L_i = \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k^3 x_{kj} \Omega_k \right]$
  $L_i = \sum_j^N m_j \left[\sum_k^3 \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k^3 x_{ij} x_{kj} \Omega_k \right]$
  $L_i = \sum_j^N m_j \sum_k^3 \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right] = \sum_k^3 \Omega_k \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$

Cantidad de movimiento angular

- El sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) con origen en el centro de masa para definir el momento angular del sistema de N partículas rígidas.
- Si $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la particula j en (x_1, x_2, x_3), tenemos $\mathbf{L} = \sum_j^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{p}_j = \sum_j^N m_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j)$, con $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j$.
- Entonces $\mathbf{L} = \sum_j^N m_j \mathbf{r}_j \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j) \equiv \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_j \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_j \right]$. Hemos usado $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
- Las componentes del momento angular serán:
$$L_i = \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \Omega_i - x_{ij} \sum_k^3 x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j^N m_j \left[\sum_k^3 \Omega_k r_j^2 \delta_{ik} - \sum_k^3 x_{ij} x_{kj} \Omega_k \right]$$
$$L_i = \sum_j^N m_j \sum_k^3 \Omega_k \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right] = \sum_k^3 \Omega_k \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$$
- Finalmente $L_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \Omega_k \Leftrightarrow \mathbf{L} = I \boldsymbol{\Omega}$ ya que el tensor de inercia es $I_{ik} = \sum_j^N m_j \left[r_j^2 \delta_{ik} - x_{ij} x_{kj} \right]$

$\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$

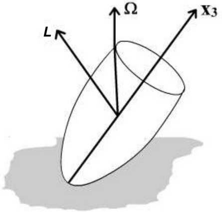
- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$

$\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$

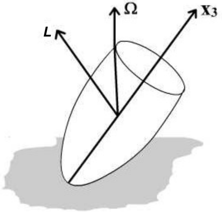
L y Ω

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



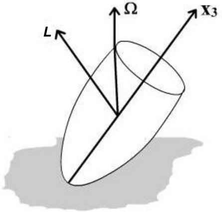
L y Ω

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



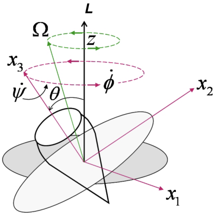
- Si el vector $\boldsymbol{\Omega}$ posee solamente una componente sobre un eje x_k, tenemos $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,\hat{\mathbf{x}}_k$ y por lo tanto $\mathbf{L} = I_{kk}\Omega\,\hat{\mathbf{x}}_k$.

- Hay casos particulares en los cuales podremos escribir $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$
- El momento angular y la velocidad angular apuntan en una misma dirección y sentido. Entonces $L_1 = I_{11}\Omega_1$, $L_2 = I_{22}\Omega_2$, y $L_3 = I_{33}\Omega_3$
- Pero en general, el momento angular $\mathbf{L}$ no es paralelo a la dirección de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$



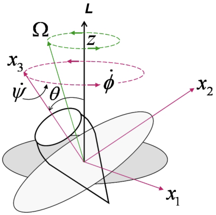
- Si el vector $\boldsymbol{\Omega}$ posee solamente una componente sobre un eje x_k, tenemos $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,\hat{\mathbf{x}}_k$ y por lo tanto $\mathbf{L} = I_{kk}\Omega\,\hat{\mathbf{x}}_k$.
- Para cuerpos esféricos, $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, y $\mathbf{L} = I_{11}\boldsymbol{\Omega}$: $\mathbf{L}$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



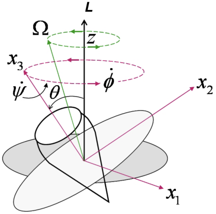
Rotación libre, mas general, de un trompo 1/2

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



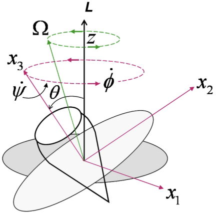
- Tal y como se muestra en la figura $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ no están alineados.

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



- Tal y como se muestra en la figura $\mathbf{L}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ no están alineados.
- Como no existen torques externos $\mathbf{L} = cte$ y elegimos el eje z del sistema laboratorio tal que $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{z}}$

- Consideremos la rotación mas general de un trompo (objeto axialmente simétrico con $I_{11} = I_{22} = I \neq I_{33}$).



- Tal y como se muestra en la figura **L** y **Ω** no están alineados.
- Como no existen torques externos $\mathbf{L} = cte$ y elegimos el eje z del sistema laboratorio tal que $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{z}}$
- Como el cuerpo tiene simetría axial no la velocidad angular no puede depender de ψ. Entonces $\boldsymbol{\Omega}$ en el sistema CM: $\begin{cases} \tilde{\Omega}_1 = \dot{\theta} \\ \tilde{\Omega}_2 = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta \\ \tilde{\Omega}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{cases}$

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \mathrm{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{II_{33}} = \mathrm{cte}$$

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \mathrm{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{I I_{33}} = \mathrm{cte}$$

- La velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ son $\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\theta} = 0 \\ \Omega_2 = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_{11}} = \mathrm{cte} \\ \Omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_{33}} = \mathrm{cte} \end{cases}$

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \mathrm{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{II_{33}} = \mathrm{cte}$$

- La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ son $\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\theta} = 0 \\ \Omega_2 = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_{11}} = \mathrm{cte} \\ \Omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_{33}} = \mathrm{cte} \end{cases}$
- El vector $\boldsymbol{\Omega}$ está sobre el plano $x_2 - x_3$.

- Las componente del momento angular respecto al CM serán

$$L_1 = I\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{cte}$$

$$L_2 = I\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta = L\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{I} = \mathrm{cte}$$

$$L_3 = I_{33}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = L\cos\theta \quad \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L\cos\theta(I - I_{33})}{II_{33}} = \mathrm{cte}$$

- La velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ son $\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\theta} = 0 \\ \Omega_2 = \frac{L\,\mathrm{sen}\,\theta}{I_{11}} = \mathrm{cte} \\ \Omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_{33}} = \mathrm{cte} \end{cases}$
- El vector $\boldsymbol{\Omega}$ está sobre el plano $x_2 - x_3$.
- Como el plano $x_2 - x_3$ rota alrededor de z, entonces $\boldsymbol{\Omega}$ también precesa alrededor de la dirección de $\mathbf{L}$ con velocidad angular $\dot{\phi} = \mathrm{cte}$.

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} I_{ik} \Omega_i \Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$

Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

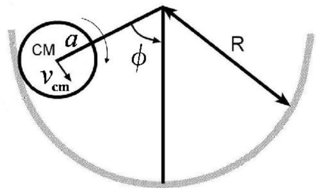
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas

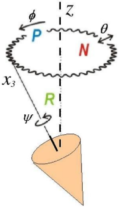
Ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos

- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos se plantean en términos de los ángulos de Euler.
- La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido es $T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k$
- Las componentes Ω_i de la velocidad angular pueden expresarse en función de los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y de sus velocidades
- La energía potencial del cuerpo corresponde a la energía potencial de su centro de masa, y se expresa en términos de los ángulos de Euler
- El Lagrangiano queda como $\mathcal{L} = T - V = \mathcal{L}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, t)$
- Las ecuaciones de Lagrange para cuerpos rígidos son complicadas
- Los casos más simples son los que presentan simetrías: axial (trompos) o esférica

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

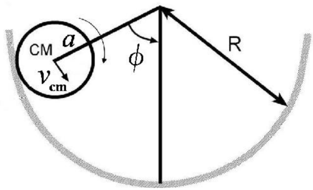
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

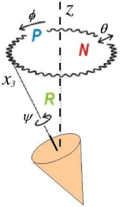




Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

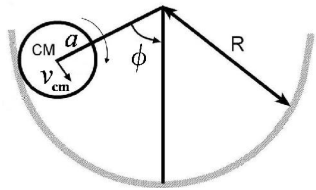
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

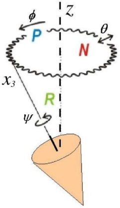




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.

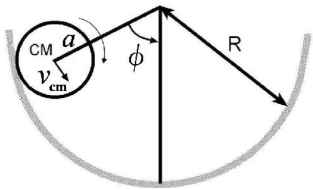
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

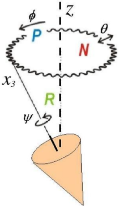




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.

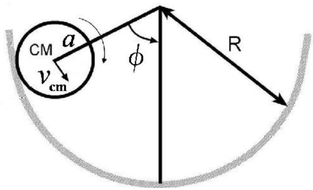
- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

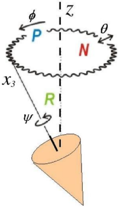




- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

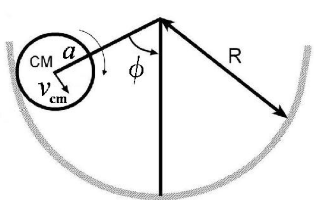


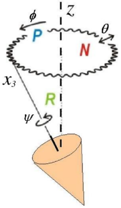


- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\rm cm} + T_{\rm rot}$.

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.

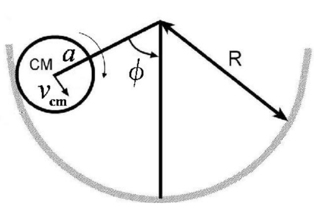


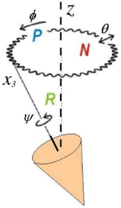


- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\mathrm{cm}} + T_{\mathrm{rot}}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2$, con $v_{\mathrm{cm}} = (R - a)\dot{\phi}$

Ejemplo: Cilindro de masa M y radio a. 1/2

- Consideremos un cilindro de masa M y radio a, rodando sin deslizar dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $R > a$.





- Sea z el eje del cilindro fijo de radio R y x_3 el del rodante de radio a.
- El ángulo de nutación entre los ejes x_3 y z es $\theta = 0$.
- El ángulo de precesión alrededor de z es ϕ.
- La energía cinética respecto al sistema fijo es $T = T_{\rm cm} + T_{\rm rot}$.
- La energía cinética del centro de masa es $T_{\rm cm} = \frac{1}{2} M v_{\rm cm}^2$, con $v_{\rm cm} = (R - a)\dot{\phi}$
- La energía cinética de rotación es $T_{\rm rot} = \frac{1}{2} I_{33} \Omega_3^2$

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$

- Rodar sin deslizar implica $v_{\rm cm} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\rm cm}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$.

Cilindro de masa M y radio a. 2/2

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\operatorname{sen}\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.

- Rodar sin deslizar implica $v_{\mathrm{cm}} = a\Omega_3 \Rightarrow \Omega_3 = \frac{v_{\mathrm{cm}}}{a} = \frac{(R-a)\dot{\phi}}{a}$
- El momento de inercia del cilindro rodante es $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Entonces $T = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2$
- La energía potencial del centro de masa es $V = -Mg(R-a)\cos\phi$.
- El Lagrangiano es $\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$
- La ecuación de movimiento queda $\frac{3}{2}\ddot{\phi} + \frac{g}{(R-a)}\,\mathrm{sen}\,\phi = 0$.
- Para pequeñas oscilaciones tenemos $\ddot{\phi} + \frac{2g}{3(R-a)}\phi = 0$.
- La ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple con frecuencia $\omega^2 = \frac{2g}{3(R-a)}$.

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{I} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \Omega_i I^i_k \Omega^k$

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j} x_{k,j} \right)$

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$
  $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2\delta_{ik} - x_{i,j}x_{k,j}\right)$
- **Velocidad angular:** $\boldsymbol{\Omega}(t) = (\nu \cos\omega t, \nu \sin\omega t, \omega)$

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j} x_{k,j} \right)$
- **Velocidad angular:** $\mathbf{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega}$

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j}x_{k,j}\right)$
- **Velocidad angular:** $\mathbf{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega}$
- En general $\mathbf{L} \nparallel \mathbf{\Omega}$. Sólo para cuerpos esféricos o con $\mathbf{\Omega}$ en eje principal, ocurre $\mathbf{L} \parallel \mathbf{\Omega}$.
- **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2}(I_{11}\cos^2 \omega t + I_{22}\sin^2 \omega t)\nu^2 + \frac{1}{2}I_{33}\omega^2$

Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j}x_{k,j} \right)$
- **Velocidad angular:** $\mathbf{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega}$
- En general $\mathbf{L} \not\parallel \mathbf{\Omega}$. Sólo para cuerpos esféricos o con $\mathbf{\Omega}$ en eje principal, ocurre $\mathbf{L} \parallel \mathbf{\Omega}$.
- **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2}(I_{11} \cos^2 \omega t + I_{22} \sin^2 \omega t)\nu^2 + \frac{1}{2} I_{33}\omega^2$
- **Elipsoide en rotación:** precesión de los ejes principales del elipsoide.

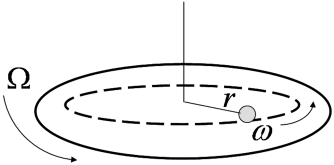
Recapitulando 1/2

En presentación consideramos

- **Energía Cinética Total:** $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_j m_j(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j)^2 \Rightarrow$ $T = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i I_k^i \Omega^k$
- **Tensor de Inercia:** $I_{ik} = \sum_j m_j \left(r_j^2 \delta_{ik} - x_{i,j}x_{k,j}\right)$
- **Velocidad angular:** $\mathbf{\Omega}(t) = (\nu \cos \omega t, \nu \sin \omega t, \omega)$
- **Momento Angular:** $\mathbf{L} = \sum_j m_j \mathbf{r}_j \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_j) = \boldsymbol{I}\mathbf{\Omega}$
- En general $\mathbf{L} \nparallel \mathbf{\Omega}$. Sólo para cuerpos esféricos o con $\mathbf{\Omega}$ en eje principal, ocurre $\mathbf{L} \parallel \mathbf{\Omega}$.
- **Energía cinética:** $T = \frac{1}{2}(I_{11}\cos^2 \omega t + I_{22} \sin^2 \omega t)\nu^2 + \frac{1}{2}I_{33}\omega^2$
- **Elipsoide en rotación:** precesión de los ejes principales del elipsoide.
- **Ecuaciones de Movimiento**
  - Se plantean con ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ).
  - Lagrangiano: $\mathcal{L} = T(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}) - V(\theta, \phi, \psi)$
  - Casos con simetría (esfera o trompo) permiten reducción del sistema.

Ejemplo: Cilindro Rodante

- **Sistema:** Cilindro de masa M, radio a, en cavidad de radio $R > a$
- **Condiciones:** $v_{cm} = (R - a)\dot{\varphi}, \quad \Omega_3 = \frac{v_{cm}}{a}, \quad I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$
- **Energías:** $T = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\varphi}^2 \quad V = -Mg(R-a)\cos\varphi \quad \mathcal{L} = T - V$
- **Ecuación de movimiento:** $\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-a)}\varphi = 0$, que es un oscilador armónico simple con $\omega^2 = \frac{2g}{3(R-a)}$.



Considere una esfera de radio a, masa M y momento de inercia I respecto de un diámetro cualquiera que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.

- Escriba la condición de rodadura sin deslizamiento suponiendo que el plano horizontal está fijo.
- Demuestre que el centro de masas se mueve en línea recta y a velocidad constante.
- Escriba la condición de rodadura sin deslizamiento suponiendo que el plano horizontal rota con una velocidad angular Ω constante alrededor del eje z tal y como muestra la figura.