

Operadores Lineales:

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



23 de enero de 2021

- 1 Definición
- 2 Ejemplos transformaciones lineales
- 3 Espacio vectorial de operadores lineales
- 4 Composición de operadores lineales
- 5 Recapitulando

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle / \mathbb{T}[\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T}|v_1\rangle + \beta \mathbb{T}|v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle \text{ y } |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}|v\rangle = |v'\rangle = \lambda |v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}[\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \alpha \mathbb{T}|v\rangle + \beta \mathbb{T}|w\rangle = \alpha \lambda |v\rangle + \beta \lambda |w\rangle.$

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle / \mathbb{T}[\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T}|v_1\rangle + \beta \mathbb{T}|v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle \text{ y } |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}|v\rangle = |v'\rangle = \lambda |v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}[\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \alpha \mathbb{T}|v\rangle + \beta \mathbb{T}|w\rangle = \alpha \lambda |v\rangle + \beta \lambda |w\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}|v\rangle = \lambda \Leftrightarrow \langle u | v \rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}[\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \langle u | [\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \alpha \langle u | v \rangle + \beta \langle u | w \rangle$,

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle / \mathbb{T}[\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T}|v_1\rangle + \beta \mathbb{T}|v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle \text{ y } |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}|v\rangle = |v'\rangle = \lambda |v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}[\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \alpha \mathbb{T}|v\rangle + \beta \mathbb{T}|w\rangle = \alpha \lambda |v\rangle + \beta \lambda |w\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}|v\rangle = \lambda \Leftrightarrow \langle u | v \rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}[\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \langle u | [\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \alpha \langle u | v \rangle + \beta \langle u | w \rangle$,
- Un proyector $[|s\rangle \langle s|] |v\rangle = \langle s | v \rangle |s\rangle = |v_s\rangle$.
 $|s\rangle \langle s| [\alpha |v\rangle + \beta |w\rangle] = \alpha \langle s | v \rangle |s\rangle + \beta \langle s | w \rangle |s\rangle$ por lo tanto para $\mathbb{T} : \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbf{S}_n$ tendremos
 $\mathbb{P}_m |v\rangle \equiv (|u_i\rangle \langle u^i|_m) |v\rangle = \langle u^i | v \rangle_m |u_i\rangle = |v_m\rangle$,

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
 $|y\rangle = \mathbb{T} |x\rangle \Rightarrow (y^1, y^2, y^3, \dots, y^m) = \mathbb{T} [(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)]$,
entonces $y^i = a_j^i x^j$ donde $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$, con a_j^i , $n \times m$ números,

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es

$$|y\rangle = \mathbb{T} |x\rangle \Rightarrow (y^1, y^2, y^3, \dots, y^m) = \mathbb{T} [(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)],$$

entonces $y^i = a_j^i x^j$ donde $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$, con a_j^i , $n \times m$ números,

- La derivada es un operador lineal

$$|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D} |y\rangle \rightarrow \mathbb{D} [y(x)] \equiv \frac{dy(x)}{dx} \equiv y'(x),$$

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
 $|y\rangle = \mathbb{T} |x\rangle \Rightarrow (y^1, y^2, y^3, \dots, y^m) = \mathbb{T} [(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)]$,
entonces $y^i = a_j^i x^j$ donde $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$, con a_j^i , $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
 $|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D} |y\rangle \rightarrow \mathbb{D} [y(x)] \equiv \frac{dy(x)}{dx} \equiv y'(x)$,
- Las ecuaciones diferenciales también lo son
 $y'' - 3 y' + 2 y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2) y(x)$,

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
 $|y\rangle = \mathbb{T} |x\rangle \Rightarrow (y^1, y^2, y^3, \dots, y^m) = \mathbb{T} [(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)]$,
entonces $y^i = a_j^i x^j$ donde $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$, con a_j^i , $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
 $|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D} |y\rangle \rightarrow \mathbb{D} [y(x)] \equiv \frac{dy(x)}{dx} \equiv y'(x)$,
- Las ecuaciones diferenciales también lo son
 $y'' - 3 y' + 2 y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2) y(x)$,
- La integral también : $g(x) = \int_a^x f(t)dt \Leftrightarrow \mathbb{T} [f(t)]$.
- y las transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t)dt \Leftrightarrow \mathbb{T} [f(t)] ,$$

donde $\mathcal{K}(s, t)$ es una función conocida de s y t , denominada el *núcleo* de la transformación.

Ejemplos de transformaciones integrales

Nombre	$F(s) = \mathbb{T} \{f(t)\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1} \{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} f(t) dt$	$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} F(s) ds$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} F(s) ds$
Hankel	$F(s) = \int_0^{\infty} t J_n(st) f(t) dt$	$f(t) = \int_0^{\infty} s J_n(ts) F(s) ds$
Mellin	$F(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s) ds$

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\}$, es claro que

$$\bullet (\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv \lambda \mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle / \begin{cases} \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \mathbb{B} |v_2\rangle \end{cases}$$

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\}$, es claro que

- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
 $\lambda \mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle / \begin{cases} \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \mathbb{B} |v_2\rangle \end{cases}$
- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] =$
 $\lambda \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle]$

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\}$, es claro que

- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
 $\lambda \mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle / \begin{cases} \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \mathbb{B} |v_2\rangle \end{cases}$
- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] =$
 $\lambda \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con \mathbb{A} , \mathbb{B} y \mathbb{C} lineales en \mathbf{V} ,

Es posible definir un conjunto de operadores lineales

$\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\}$, es claro que

- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
 $\lambda \mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle / \begin{cases} \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \mathbb{B} |v_2\rangle \end{cases}$
- $(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] =$
 $\lambda \mathbb{A} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con \mathbb{A} , \mathbb{B} y \mathbb{C} lineales en \mathbf{V} ,
- La transformación cero de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2 : \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle \quad \forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V}_1$,
- El elemento simétrico
 $(-\mathbb{A}) |v\rangle = -\mathbb{A} |v\rangle \Rightarrow (\mathbb{A} - \mathbb{A}) |v\rangle = \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle .$

El producto o composición de dos operadores lineales, \mathbb{A} y \mathbb{B} se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}|\nu\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B}|\nu\rangle) = \mathbb{A}|\tilde{\nu}\rangle = |\tilde{\nu}'\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} &= \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C}); & \alpha(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= (\alpha\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(\alpha\mathbb{B}); \\ (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\mathbb{B} &= \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; & \mathbb{A}(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) &= \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2.\end{aligned}$$

Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

El producto o composición de dos operadores lineales, \mathbb{A} y \mathbb{B} se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}|\nu\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B}|\nu\rangle) = \mathbb{A}|\tilde{\nu}\rangle = |\tilde{\nu}'\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} &= \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C}); & \alpha(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= (\alpha\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(\alpha\mathbb{B}); \\ (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\mathbb{B} &= \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; & \mathbb{A}(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) &= \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2.\end{aligned}$$

Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

- En general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow [\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}]|\nu\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}|\nu\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}|\nu\rangle.$$

El producto o composición de dos operadores lineales, A y B se denotará AB tal que $AB|v\rangle = A(B|v\rangle) = A|\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$(AB)C = A(BC); \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B);$$
$$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B; \quad A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2.$$

Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

- En general $AB \neq BA$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:

$$[A, B] = AB - BA \Rightarrow [AB - BA]|v\rangle = AB|v\rangle - BA|v\rangle.$$

- Entonces

$$[A, B] = -[B, A]$$
$$[A, (B + C)] = [A, B] + [A, C]$$
$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$
$$[A, [B, C]] = -[B, [C, A]] - [C, [A, B]]$$

- Definimos un operador lineal

$$|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle / \mathbb{T} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T} |v_1\rangle + \beta \mathbb{T} |v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

- Definimos un operador lineal

$$|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle / \mathbb{T} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T} |v_1\rangle + \beta \mathbb{T} |v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre las cuales destacan
 - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3y' + 2y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y(x)$,
 - y las transformaciones integrales
$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t) dt \Leftrightarrow \mathbb{T}[f(t)],$$

- Definimos un operador lineal

$$|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle / \mathbb{T} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T} |v_1\rangle + \beta \mathbb{T} |v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre las cuales destacan
 - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3y' + 2y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y(x)$,
 - y las transformaciones integrales
$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t) dt \Leftrightarrow \mathbb{T}[f(t)],$$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.

- Definimos un operador lineal

$$|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle / \mathbb{T} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T} |v_1\rangle + \beta \mathbb{T} |v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre las cuales destacan

- Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3y' + 2y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y(x)$,
- y las transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t) dt \Leftrightarrow \mathbb{T}[f(t)],$$

- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.
- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, \mathbb{A} y \mathbb{B} , como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B} |v\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B} |v\rangle) = \mathbb{A} |\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle.$

- Definimos un operador lineal

$$|v'\rangle = \mathbb{T} |v\rangle / \mathbb{T} [\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle] = \alpha \mathbb{T} |v_1\rangle + \beta \mathbb{T} |v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre las cuales destacan

- Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3y' + 2y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y(x)$,
- y las transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t) dt \Leftrightarrow \mathbb{T}[f(t)],$$

- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.

- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, \mathbb{A} y \mathbb{B} , como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B} |v\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B} |v\rangle) = \mathbb{A} |\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle$.

- Como, en general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, construimos el conmutador de estos operadores como:

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow [\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}] |v\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B} |v\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A} |v\rangle.$$