Nombre:

Considere las matrices de Pauli

$$\sigma_0 = \mathbf{1}_2 = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Con las siguientes propiedades, con $i = 1, 2, 3$ y también $\mu = 0, 1, 2, 3$

- $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i\, \varepsilon_{ijk} \sigma_k$
- $[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i, \sigma_j - \sigma_j, \sigma_i = 2i\, \varepsilon_{ijk} \sigma_k,$
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i, \sigma_j + \sigma_j, \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbf{1}$
- $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$
- $\sigma^\mu = (\mathbf{1}_2,\ \sigma_i), \qquad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_2,\ -\sigma_i).$

1. Construya las matrices de Dirac γ^μ como $\gamma^0 = \sigma_1 \otimes \mathbf{1}_2,\ \gamma^i = -i\sigma_2 \otimes \sigma_i,\ \gamma^5 = -\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_2$, donde $\otimes$ es el producto tensorial y pruebe que

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}.$$

2. Definimos un espinor de Dirac de dos componentes izquierdo/derecho,

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \chi_L = \begin{pmatrix} \chi_L^1 \\ \chi_L^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \chi_R = \begin{pmatrix} \chi_R^1 \\ \chi_R^2 \end{pmatrix}$$

Muestre que la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

se puede escribir como

$$i\partial_t \psi = H\psi, \quad \text{donde} \quad H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, \quad \text{con } \alpha^i \equiv \gamma^0 \gamma^i, \quad \text{y} \quad \beta \equiv \gamma^0$$

3. Muestre que

$$\sigma^\mu \partial_\mu \chi_R = -m\, \chi_L, \qquad \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi_L = -m\, \chi_R.$$