

Dos monedas

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



2 de noviembre de 2024

- 1 Moneda que rueda sin deslizar
 - Ligaduras
 - El Lagrangeano
 - Las ecuaciones de movimiento

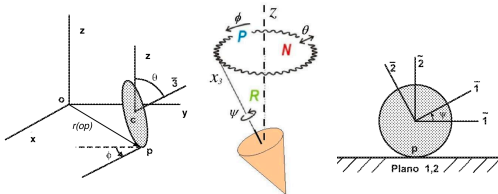
- 2 Moneda en un plano inclinado
 - Planteamiento del problema
 - Coordenadas y ligaduras
 - Integración de ligaduras
 - Energías Cinética, Potencial y el Lagrangeano

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



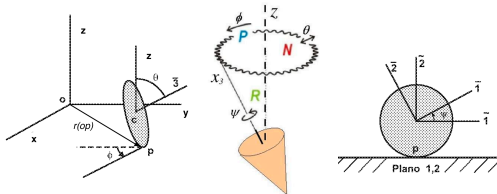
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



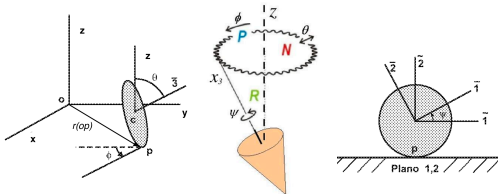
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



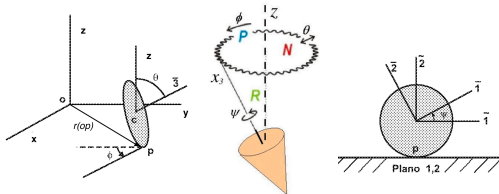
- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.

Algunas animaciones ilustrativas en

<https://rotations.berkeley.edu/the-rolling-disk/#Korteweg>



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$;
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$;
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$;
 $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y
 $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
 $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$;
 $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.

- Como $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, al proyectar la primera ecuación tendremos $x_{op} = x - a\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$, $y_{op} = y - a\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$ y $0 = z - a\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$.
- Que se convierten en $x_{op} = x + a(\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi)$; $y_{op} = y + a(\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \theta \cos \phi)$ y $z_{op} = 0 = z - a \cos \psi \sin \theta$
- Por su parte, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$
- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos $\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$; $\dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0$.
- Es decir $\dot{x} + a\dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - a\dot{\theta} \sin \phi \sin \theta + a\dot{\psi} \cos \phi = 0$; $\dot{y} + a\dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + a\dot{\theta} \cos \phi \sin \theta + a\dot{\psi} \sin \phi = 0$; $\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right]$

- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$.

- La energía cinética será

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$

$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right]$

- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

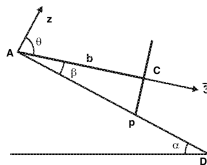
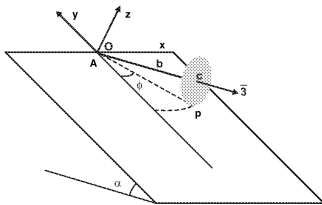
- Por su parte, la energía potencial $V = mgz = mga \sin \theta$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$.
- La energía cinética será
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$
$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$
- $$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right]$$
- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mgz = mga \sin \theta$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right] - mga \sin \theta$

- La tercera ecuación es integrable y nos da $z = a \sin \theta$.
- La energía cinética será
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Como $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$
$$\tilde{\Omega}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$
- $$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right]$$
- Donde $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mgz = mga \sin \theta$
- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2 \left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2 \right] - mga \sin \theta$
- La ecuación de movimiento será

Planteamiento del problema

Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b . El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo α con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O , eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema \tilde{S} origen también en O y eje $\tilde{3}$ en la dirección AC . Encontrar las ecuaciones de movimiento para



- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}.$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$ y cinco ligaduras
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$,

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3) \text{ con cual respecto al}$$

$$\text{centro de masa } b\dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3) = 0$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{\mathbf{x}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{\mathbf{y}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{\mathbf{z}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[\frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0; \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0.$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$
- y usando las otras ecuaciones de ligadura
$$\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0, \text{ obtenemos}$$
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[\frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$
- Donde hemos sustituido el valor de θ que implica $\sin \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$.

- Como siempre la energía cinética se construye como

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2} \dot{\phi}^2$.

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2b^2+6b^4}{a^2+b^2} \dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será
$$V = Mgb(y \sin \alpha + z \cos \alpha) \equiv Mgb(-\cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$$

- Como siempre la energía cinética se construye como
$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(I_{11}\tilde{\Omega}_1^2 + I_{22}\tilde{\Omega}_2^2 + I_{33}\tilde{\Omega}_3^2)$$
- Los momentos de inercia son: $I_{11} = I_{22} = \frac{1}{4}Ma^2$ y $I_{33} = \frac{1}{2}Ma^2$.
- Las componentes de la velocidad angular son
$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi; & \tilde{\Omega}_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi; \\ \tilde{\Omega}_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}$$
- Finalmente la energía cinética queda como $T = \frac{M}{8} \frac{a^2 b^2 + 6b^4}{a^2 + b^2} \dot{\phi}^2$.
- En general la energía potencial la derivamos de la única fuerza posible: la gravitacional $\mathbf{F} = -Mg(\sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}) = -\nabla V$
- La energía potencial será
$$V = Mg(y \sin \alpha + z \cos \alpha) \equiv Mgb(-\cos \phi \sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \alpha)$$
- La ecuación de movimiento será $\ddot{\phi} = -g \sin \alpha \frac{4(a^2 + b^2)^{3/2}}{a^2 + 6b^2} \sin \phi$