

# Transformaciones Canónicas

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



3 de diciembre de 2024

- 1 Transformaciones Puntuales
- 2 Transformaciones Canónicas
- 3 Transformación Canónica y Principio de Mínima Acción
- 4 Función Generadora
- 5 Ejemplo de Función Generadora
- 6 Algunos Tipos de funciones generadoras
- 7 Ejemplo:  $Q = q + e^p$  &  $P = p$

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas  $\{q_i\}$ : cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas  $\{q_i\}$ : cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas  $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$ :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas  $\{q_i\}$ : cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas  $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$ :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas**  $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas  $\{q_i\}$ : cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas  $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$ :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas**  $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos  $\{Q_i, P_i\}$ .

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas  $\{q_i\}$ : cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas  $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$ :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas**  $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos  $\{Q_i, P_i\}$ .
- Consideremos la siguiente transformación puntual  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  en el espacio de fase,  $Q_i = -p_i, \quad P_i = q_i$

- Las posiciones en el espacio pueden ser descritas por diferentes sistemas de coordenadas  $\{q_i\}$ : cartesianas, esféricas, cilíndricas, etc.
- La forma de las ecuaciones de Lagrange no depende del conjunto de coordenadas  $\{q_i\} \leftrightarrow \{Q_i\}$ :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$
- En el espacio de fase podemos realizar una **transformación puntual de coordenadas**  $\{q_i, p_i\} \leftrightarrow \{Q_i, P_i\} \Rightarrow \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$
- En general, la forma de las ecuaciones de Hamilton no se preserva en las nuevas coordenadas y momentos  $\{Q_i, P_i\}$ .
- Consideremos la siguiente transformación puntual  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  en el espacio de fase,  $Q_i = -p_i$ ,  $P_i = q_i$
- Entonces  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \Rightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) = \sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} (-\delta_{ik}) = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$   
 $\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{Q}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) = \sum_k \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k} (-\delta_{ik}) = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}$  Claramente no se cumplen



- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{array} \right| \rightarrow \text{Transformación canónica} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t) \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} \end{array} \right.$$

- Una **transformación canónica** es una transformación puntual que mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Hamilton.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{aligned} \right| \rightarrow \text{Transformación canónica} \rightarrow \left| \begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t) \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i} \end{aligned} \right.$$

- Las transformaciones canónicas son particularmente útiles cuando el Hamiltoniano transformado  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$  no depende explícitamente de alguna coordenada  $Q_j$  o momento  $P_j$ . Es decir, son cíclicas.

- La condición para que una transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica se deriva del *Principio de Mínima Acción* en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.

- La condición para que una transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica se deriva del *Principio de Mínima Acción* en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables  $\{q_i, p_i\}$ , implica
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$

- La condición para que una transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica se deriva del *Principio de Mínima Acción* en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables  $\{q_i, p_i\}$ , implica 
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$

- La condición para que una transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica se deriva del *Principio de Mínima Acción* en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables  $\{q_i, p_i\}$ , implica 
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos  $\delta S = \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$  genera las ecuaciones  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$

- La condición para que una transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica se deriva del *Principio de Mínima Acción* en ambos conjuntos de variables del espacio de fase.
- El Principio de Mínima Acción para las variables  $\{q_i, p_i\}$ , implica 
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$$
- Como el Hamiltoniano  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
- Tendremos  $\delta S = \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} \right) dt = 0 \Leftrightarrow$  genera las ecuaciones  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$
- Por su parte  $\delta \tilde{S} = \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} \right) dt = 0$  genera 
$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

- Como las variaciones  $\delta S = 0$  y  $\delta \tilde{S} = 0$  de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables  $\{q_i, p_i\}$  y  $\{Q_i, P_i\}$ .



- Como las variaciones  $\delta S = 0$  y  $\delta \tilde{S} = 0$  de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables  $\{q_i, p_i\}$  y  $\{Q_i, P_i\}$ .
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total  $\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$

- Como las variaciones  $\delta S = 0$  y  $\delta \tilde{S} = 0$  de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables  $\{q_i, p_i\}$  y  $\{Q_i, P_i\}$ .
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total  $\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$

- Como las variaciones  $\delta S = 0$  y  $\delta \tilde{S} = 0$  de forma independiente generan las correspondientes ecuaciones de Hamilton para las variables  $\{q_i, p_i\}$  y  $\{Q_i, P_i\}$ .
- Ambas formulaciones del Principio de Mínima Acción conducen a ecuaciones equivalentes si los integrandos difieren, en una derivada total  $\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i - \tilde{\mathcal{H}} + \frac{d\mathcal{F}}{dt}$
- Con lo cual  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$
- La función  $\mathcal{F}$  se llama función generadora de la transformación canónica  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ .

- Dada una  $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ , su derivada total  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$  debe satisfacer la condición  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$  para que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica.

- Dada una  $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ , su derivada total  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$  debe satisfacer la condición  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$  para que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica.
- Las derivadas parciales de  $\mathcal{F}$  con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ , permiten establecer la relación entre las variables  $\{Q_i, P_i\}$  y  $\{q_i, p_i\}$  y los tipos de función generadora.

- Dada una  $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ , su derivada total  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$  debe satisfacer la condición  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$  para que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica.
- Las derivadas parciales de  $\mathcal{F}$  con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ , permiten establecer la relación entre las variables  $\{Q_i, P_i\}$  y  $\{q_i, p_i\}$  y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora  $\mathcal{F}$  es una propiedad característica de la función  $\mathcal{F}$  y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.

- Dada una  $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ , su derivada total  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$  debe satisfacer la condición  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$  para que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica.
- Las derivadas parciales de  $\mathcal{F}$  con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ , permiten establecer la relación entre las variables  $\{Q_i, P_i\}$  y  $\{q_i, p_i\}$  y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora  $\mathcal{F}$  es una propiedad característica de la función  $\mathcal{F}$  y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora  $\mathcal{F}$ , es posible encontrar una transformación canónica asociada a  $\mathcal{F}$ .

- Dada una  $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ , su derivada total  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$  debe satisfacer la condición  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$  para que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica.
- Las derivadas parciales de  $\mathcal{F}$  con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ , permiten establecer la relación entre las variables  $\{Q_i, P_i\}$  y  $\{q_i, p_i\}$  y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora  $\mathcal{F}$  es una propiedad característica de la función  $\mathcal{F}$  y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora  $\mathcal{F}$ , es posible encontrar una transformación canónica asociada a  $\mathcal{F}$ .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora,  $\mathcal{F}$ , que produce esa transformación.



- Dada una  $\mathcal{F}(q_i, p_i, Q_i, P_i, t)$ , su derivada total  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$  debe satisfacer la condición  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^s P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$  para que la transformación  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  sea canónica.
- Las derivadas parciales de  $\mathcal{F}$  con respecto a sus argumentos, contenidas en la expresión de  $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ , permiten establecer la relación entre las variables  $\{Q_i, P_i\}$  y  $\{q_i, p_i\}$  y los tipos de función generadora.
- La transformación canónica asociada a una función generadora  $\mathcal{F}$  es una propiedad característica de la función  $\mathcal{F}$  y no depende del Hamiltoniano de un sistema específico.
- Dada una función generadora  $\mathcal{F}$ , es posible encontrar una transformación canónica asociada a  $\mathcal{F}$ .
- Dada una transformación canónica, en principio es posible obtener la función generadora,  $\mathcal{F}$ , que produce esa transformación.
- La relación entre el Hamiltoniano  $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$  y el Hamiltoniano transformado  $\tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i, t)$  resultante de la transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{Q_i, P_i, t\}$  generada por una  $\mathcal{F}$  siempre es  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$

# Ejemplo de Función Generadora 1/2

Encontrar la transformación canónica  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , generada por la función  $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$ .

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow$   
 $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$

Encontrar la transformación canónica  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , generada por la función  $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$ .

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow$   
 $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^2 P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}) \Rightarrow$   
 $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$

Encontrar la transformación canónica  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , generada por la función  $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$ .

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^2 P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$
- Para llevarlo a esa forma hacemos  $p_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} (p_2 q_2) - q_2 \dot{p}_2$ ;  
 $P_1 \dot{Q}_1 = \frac{d}{dt} (P_1 Q_1) - Q_1 \dot{P}_1$ ;  $P_2 \dot{Q}_2 = \frac{d}{dt} (P_2 Q_2) - Q_2 \dot{P}_2$

Encontrar la transformación canónica  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , generada por la función  $\mathcal{G} = q_1 (P_1 + 2p_2) + p_2 P_2$ .

- $\mathcal{G}(q_1, P_1, p_2, P_2) \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_2} \dot{P}_2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Comparando con  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \sum_{i=1}^2 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^2 P_i \dot{Q}_i + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{F}}{dt} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - P_1 \dot{Q}_1 - P_2 \dot{Q}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$
- Para llevarlo a esa forma hacemos  $p_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} (p_2 q_2) - q_2 \dot{p}_2$ ;  
 $P_1 \dot{Q}_1 = \frac{d}{dt} (P_1 Q_1) - Q_1 \dot{P}_1$ ;  $P_2 \dot{Q}_2 = \frac{d}{dt} (P_2 Q_2) - Q_2 \dot{P}_2$
- Con lo cual  $\frac{d\mathcal{F}}{dt} =$   
 $p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + \frac{d}{dt} (p_2 q_2 - P_1 Q_1 - P_2 Q_2) + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$

- Es decir  $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$

- Es decir  $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables  $(q_i, p_i, Q_i, P_i), i = 1, 2,$

- Es decir  $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables  $(q_i, p_i, Q_i, P_i), i = 1, 2,$
- Comparando con  $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$



- Es decir  $\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables  $(q_i, p_i, Q_i, P_i), i = 1, 2,$
- Comparando con  $\frac{d\mathcal{G}}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos  $\mathcal{G} = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2; \quad p_1 = P_1 + 2p_2;$   
 $Q_1 = q_1; \quad -q_2 = 2q_1 + P_2; \quad Q_2 = p_2$

- Es decir  $\frac{d}{dt}(\mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2) = p_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{p}_2 + Q_1 \dot{P}_1 + Q_2 \dot{P}_2 + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H})$
- El lado izquierdo es la derivada total de una función que depende de las variables  $(q_i, p_i, Q_i, P_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,
- Comparando con  $\frac{dG}{dt} = (P_1 + 2p_2) \dot{q}_1 + q_1 \dot{P}_1 + (2q_1 + P_2) \dot{p}_2 + p_2 \dot{P}_2$
- Tenemos  $G = \mathcal{F} + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - p_2 q_2$ ;  $p_1 = P_1 + 2p_2$ ;  
 $Q_1 = q_1$ ;  $-q_2 = 2q_1 + P_2$ ;  $Q_2 = p_2$
- La transformación canónica  $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i, P_i\}$  generada por  $G$  es  
 $P_1 = p_1 - 2p_2$   $Q_1 = q_1$ ;  $P_2 = -2q_1 - q_2$   $Q_2 = p_2$ .

# Tipos de Funciones Generadoras

Funciones Generadoras	Funciones Generadoras y derivadas	Un ejemplo sencillo
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial q_i}; \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_1 = q_i Q_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_2 = q_i P_i, \quad Q_i = q_i, \quad P_i = p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial p_i}; \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial Q_i}$	$\mathcal{F}_3 = p_i Q_i, \quad Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i$
$\mathcal{F} = \mathcal{F}_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial p_i}; \quad Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial P_i}$	$\mathcal{F}_4 = p_i P_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$

Ejemplo:  $Q = q + e^p$  &  $P = p$

Dada una transformación  $Q = q + e^p$  &  $P = p$ , encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora  $F$  supondremos una función generadora del tipo  $F_2(q, P)$ , que depende de  $q$  y  $P$

## Ejemplo: $Q = q + e^p$ & $P = p$

Dada una transformación  $Q = q + e^p$  &  $P = p$ , encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora  $F$  supondremos una función generadora del tipo  $F_2(q, P)$ , que depende de  $q$  y  $P$
- Las relaciones para  $F_2(q, P)$  son:  $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$  y  $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

## Ejemplo: $Q = q + e^P$ & $P = p$

Dada una transformación  $Q = q + e^P$  &  $P = p$ , encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora  $F$  supondremos una función generadora del tipo  $F_2(q, P)$ , que depende de  $q$  y  $P$
- Las relaciones para  $F_2(q, P)$  son:  $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$  y  $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo  $p = P$  en  $Q = q + e^P$ , como  $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$ ,  
 $F_2(q, P) = qP + \int e^P dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$  y  $C = 0$

## Ejemplo: $Q = q + e^P$ & $P = p$

Dada una transformación  $Q = q + e^P$  &  $P = p$ , encontrar sus función generadora

- Para encontrar la función generadora  $F$  supondremos una función generadora del tipo  $F_2(q, P)$ , que depende de  $q$  y  $P$
- Las relaciones para  $F_2(q, P)$  son:  $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$  y  $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
- Sustituyendo  $p = P$  en  $Q = q + e^P$ , como  $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \Rightarrow$ ,  
 $F_2(q, P) = qP + \int e^P dP \Rightarrow F_2(q, P) = qP + e^P + C$  y  $C = 0$
- La función generadora es  $F_2(q, P) = qP + e^P$