

Dos Problemas Sólidos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



31 de octubre de 2024

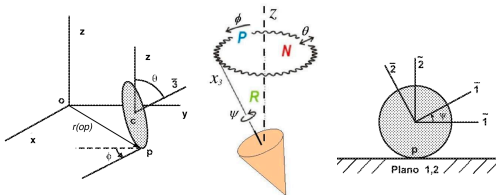
- 1 Moneda que rueda sin deslizar
 - Ligaduras
 - El Lagrangeano
 - Sección

- 2 Moneda en un plano inclinado
 - Planteamiento del problema
 - Coordenadas y ligaduras

- 3 Sección

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

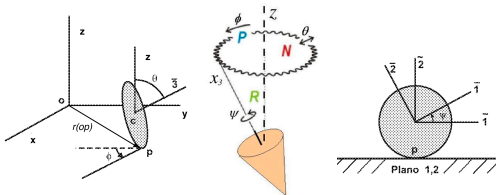
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

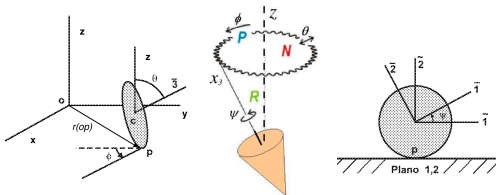
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

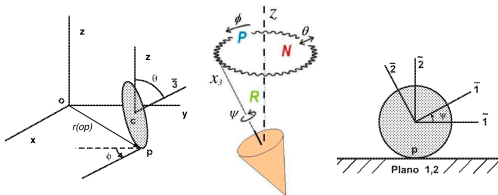
Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.

Moneda que rueda sin deslizar: Ligaduras

Un disco homogéneo (una moneda) de radio a y masa M rueda sin deslizar por una superficie plana. Escriba las ecuaciones de movimiento y encuentre una solución en el caso en que la inclinación del disco sea constante.



- En principio tendremos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$: tres de traslación y tres ángulos de Euler.
- La ligadura de rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p , en contacto con la superficie, es instantáneamente cero.
- Esto es: $\vec{r}(op) = \vec{R} + \vec{r}(cp) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(op)_p = 0 = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp)$

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos

$$\vec{r}(cp) = -a\hat{\mathbf{x}}^2, \text{ y } \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}^1 & \hat{\mathbf{x}}^2 & \hat{\mathbf{x}}^3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \Omega^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\Omega^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \Omega^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Por su parte, respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos

$$\vec{r}(cp) = -a\hat{\mathbf{x}}^2, \text{ y } \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}^1 & \hat{\mathbf{x}}^2 & \hat{\mathbf{x}}^3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \Omega^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\Omega^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \Omega^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$$

- Respecto al sistema centro de masa $\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$
 $\Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$ y $\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$
- Proyectamos la ecuación $0 = \vec{R} + \vec{\Omega} \times \vec{r}(cp)$ al sistema S , $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$
tendremos $\dot{\mathbf{x}} + a(\Omega_3 \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 - \Omega_1 \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3) = 0$
 $\dot{\mathbf{y}} + a(\Omega_3 \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 - \Omega_1 \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3) = 0$
 $\dot{\mathbf{z}} + a(\Omega_3 \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 - \Omega_1 \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3) = 0$

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[I_1(c)(\Omega_1)^2 + I_2(c)(\Omega_2)^2 + I_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[l_1(c)(\Omega_1)^2 + l_2(c)(\Omega_2)^2 + l_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right]$
- Donde $l_1 = l_2 = Ma^2/4$ y $l_3 = Ma^2/2$.

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[l_1(c)(\Omega_1)^2 + l_2(c)(\Omega_2)^2 + l_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right]$
- Donde $l_1 = l_2 = Ma^2/4$ y $l_3 = Ma^2/2$.
- Por su parte, la energía potencial $V = mga \sin \theta$

- La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left[I_1(c)(\Omega_1)^2 + I_2(c)(\Omega_2)^2 + I_3(c)\Omega_3\right]^2.$$

- $T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right]$

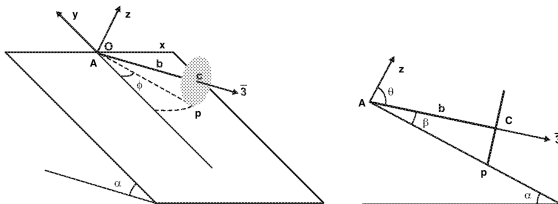
- Donde $I_1 = I_2 = Ma^2/4$ y $I_3 = Ma^2/2$.

- Por su parte, la energía potencial $V = mga \sin \theta$

- El Lagrangeano $\mathcal{L} = T - V$, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{8}Ma^2\left[\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + 2(\dot{\phi} \cos \theta^2 + \dot{\psi})^2\right] - mga \sin \theta$

Planteamiento del problema

Un disco delgado, uniforme, de masa M y radio a está enganchado a una varilla AC sin masa de longitud b . El sistema está en un plano inclinado perfectamente rugoso que forma un ángulo α con la horizontal. El punto A de la varilla se mantiene fijo en un punto O del plano inclinado mientras que el disco puede rodar libremente sin deslizar. Tomamos como sistema S uno con origen en O , eje z perpendicular al plano inclinado y el eje y hacia arriba del plano y para el sistema \tilde{S} origen también en O y eje $\tilde{3}$ en la dirección AC . Encontrar las ecuaciones de movimiento.



- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.

- En principio tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \psi, \theta)$
- $\theta = \text{constante}$ implica $\theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, $\tan \beta = \frac{a}{b}$, $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a}{b}$
- $|\mathbf{R}| = b$. Más aún, $\mathbf{R} = b\hat{\mathbf{x}}_3 = b[\sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}]$,
- Entonces $x = b \sin \phi \sin \theta$; $y = -b \cos \phi \sin \theta$ y $z = b \cos \theta$ que cumplen con la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$
- Derivándolas con $\theta = \text{const.}$, se obtiene:
 $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta$, $\dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta$, $\dot{z} = 0$
- Rodar sin deslizar implica que la velocidad del punto p es cero :
 $\mathbf{r}_{op} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{cp} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{op} = 0 = \dot{\mathbf{R}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp}$.
- Respecto al sistema centro de masa, \tilde{S} tenemos $\mathbf{r}_{cp} = -a\hat{\mathbf{x}}_2$, y

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3) \text{ con cual respecto al}$$

$$\text{centro de masa } b\dot{\hat{\mathbf{x}}}_3 + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3) = 0$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{\mathbf{x}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{\mathbf{y}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0 \quad \dot{\mathbf{z}} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0 \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0 \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$
- Usando las otras ecuaciones de ligadura $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[\frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$

- Al proyectar la ecuación de ligadura $0 = \dot{\mathbf{R}} + a(\tilde{\Omega}^3 \hat{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{\mathbf{x}}_3)$ respecto a la base del Sistema laboratorio tendremos
$$\dot{x} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
$$\dot{y} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0 \quad \dot{z} + a(\tilde{\Omega}^3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3)) = 0;$$
- que se convierte en $\dot{x} + a(\dot{\psi} \cos \phi + \dot{\phi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta) = 0$
$$\dot{y} + a(\dot{\psi} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta) = 0$$
$$\dot{z} - a\dot{\theta} \cos \theta = 0$$
- Usando las otras ecuaciones de ligadura $\dot{x} = b\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta, \quad \dot{y} = b\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta, \quad \dot{z} = 0$, obtenemos
$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \left[\frac{b}{a} \sin \theta + \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \phi$$
- Donde hemos sustituido el valor de θ que implica $\sin \theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\cos \theta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$.