Dinámica Newtoniana de Partículas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

4 de febrero de 2025

Agenda

1. Dinámica de Partículas
2. Limitaciones del Marco Newtoniano
3. Conceptos Básicos
   - Sistema de Referencia Inercial
   - Desplazamiento, velocidad y Aceleración
   - Cantidad de movimiento angular, energía cinética y trabajo
   - Fuerzas conservativas
   - Energía potencial y energía total
4. Sistemas de Partículas
   - Dinámica de sistemas de partículas
   - Cantidad de Movimiento Angular
   - Energía cinética de un sistemas de partículas
   - Energía potencial de un sistemas de partículas
   - Energía Total de un sistemas de partículas

Tres Leyes de Newton

- Primera Ley de Newton:
  Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.

Tres Leyes de Newton

- Primera Ley de Newton:
  Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.
- Segunda Ley de Newton:
  Existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ está descrito por la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

Tres Leyes de Newton

- Primera Ley de Newton:
  Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.
- Segunda Ley de Newton:
  Existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ está descrito por la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

- Tercera Ley de Newton:
  Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza que ejerce una partícula j sobre una partícula i, y $\mathbf{F}_{ij}$ es la fuerza que ejerce la partícula i sobre la partícula j, entonces

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}.$$

Limitaciones del Marco Newtoniano

El esquema newtoniano tiene limitaciones

- Si vamos muy rápido $v \approx c$ debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

Limitaciones del Marco Newtoniano

El esquema newtoniano tiene limitaciones

- Si vamos muy rápido $v \approx c$ debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

- La tercera ley de Newton, puede ser violada en sistemas fuera de equilibrio, como partículas mesoscópicas en plasmas complejos (Ivlev, A., et al (2014). Statistical Mechanics where Newton's Third Law is Broken. `https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.011035`)

Limitaciones del Marco Newtoniano

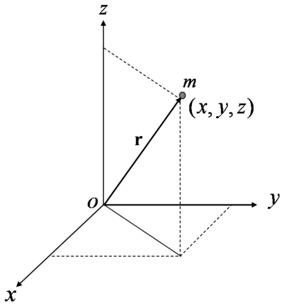
El esquema newtoniano tiene limitaciones

- Si vamos muy rápido $v \approx c$ debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

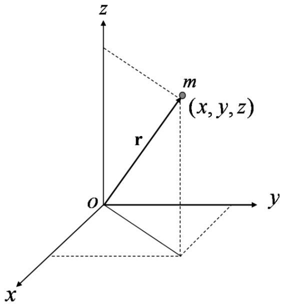
- La tercera ley de Newton, puede ser violada en sistemas fuera de equilibrio, como partículas mesoscópicas en plasmas complejos (Ivlev, A., et al (2014). Statistical Mechanics where Newton's Third Law is Broken. `https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.011035`)
- En mecánica de medios continuos de materiales compuestos, la relación entre la fuerza y la aceleración se vuelve no local. (Milton, G., & Willis, J. (2007). On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. `https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1795`.

Posición



- **Sistema de referencia u observador inercial**: convención para designar una posición (en coordenadas cartesianas) $\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ o ubicación espacial a una partícula u objeto con respecto a un origen o punto escogido O. El observador no puede estar acelerado

Posición



- **Sistema de referencia u observador inercial**: convención para designar una posición (en coordenadas cartesianas) $\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ o ubicación espacial a una partícula u objeto con respecto a un origen o punto escogido O. El observador no puede estar acelerado
- La posición puede depender del tiempo $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$

Sistema de Referencia Inercial

- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m} = 0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$

Sistema de Referencia Inercial

- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m} = 0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.

Sistema de Referencia Inercial

- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m} = 0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- Diez transformaciones, $S \to S'$, preservan la "inercialidad" y son:
  - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde $\mathbb{O}$ es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3.
  - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante $\mathbf{a}$.
  - tres impulsos (*boost*): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante $\mathbf{v}$.
  - una traslación temporal: $t' = t + \alpha$, con α un número real constante.

Sistema de Referencia Inercial

- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m} = 0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- Diez transformaciones, $S \to S'$, preservan la "inercialidad" y son:
    - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde $\mathbb{O}$ es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3.
    - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante $\mathbf{a}$.
    - tres impulsos (*boost*): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante $\mathbf{v}$.
    - una traslación temporal: $t' = t + \alpha$, con α un número real constante.
- Estas transformaciones constituyen el grupo de Galileo bajo el cual las leyes de Newton son invariantes.

Sistema de Referencia Inercial

- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m} = 0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- Diez transformaciones, $S \to S'$, preservan la "inercialidad" y son:
  - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde $\mathbb{O}$ es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3.
  - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante $\mathbf{a}$.
  - tres impulsos (*boost*): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante $\mathbf{v}$.
  - una traslación temporal: $t' = t + \alpha$, con α un número real constante.
- Estas transformaciones constituyen el grupo de Galileo bajo el cual las leyes de Newton son invariantes.
- En relatividad especial las leyes del movimiento de Einstein son invariantes bajo el grupo de transformaciones de Lorentz que, junto con las traslaciones, forman el grupo de Poincaré.

- Se define como un marco inercial S aquel en el cual una partícula libre (con $\dot{m} = 0$) se desplaza en línea recta, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$
- La primera ley de Newton garantiza que existen infinitos S.
- Diez transformaciones, $S \to S'$, preservan la "inercialidad" y son:
  - tres rotaciones: $\mathbf{r}' = \mathbb{O}\mathbf{r}$ donde $\mathbb{O}$ es un operador lineal representado por una matriz **ortogonal** de 3×3.
  - tres traslaciones $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ para un vector constante $\mathbf{a}$.
  - tres impulsos (*boost*): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ para una velocidad constante $\mathbf{v}$.
  - una traslación temporal: $t' = t + \alpha$, con α un número real constante.
- Estas transformaciones constituyen el grupo de Galileo bajo el cual las leyes de Newton son invariantes.
- En relatividad especial las leyes del movimiento de Einstein son invariantes bajo el grupo de transformaciones de Lorentz que, junto con las traslaciones, forman el grupo de Poincaré.
- Podemos recuperar el grupo de Galileo a partir del grupo de Poincaré en el límite de la velocidad tendiendo a infinito.

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

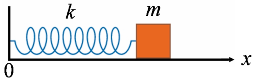
- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$

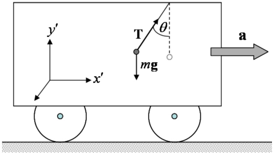
Desplazamiento, velocidad y Aceleración

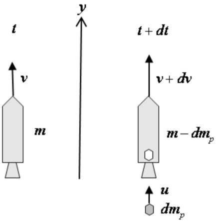
- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$
- cantidad de momento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$
- cantidad de momiento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
- Encuentre $\mathbf{r}(r)$ para los siguientes sistemas







Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathrm{cte}$

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathrm{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ es un escalar $T = \frac{1}{2}mv^2$

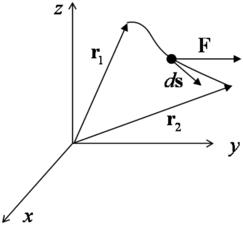
Cantidad de movimiento angular

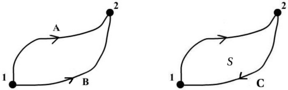
- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathrm{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ es un escalar $T = \frac{1}{2}mv^2$
- El trabajo realizado por una $\mathbf{F}$ externa sobre una partícula desde una posición $\mathbf{r}_1$ hasta una posición $\mathbf{r}_2$, como la integral de línea $W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ donde $\mathrm{d}\mathbf{s}$ es el vector tangente a la trayectoria que une la posición $\mathbf{r}_1$ con la posición $\mathbf{r}_2$.

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \text{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ es un escalar $T = \frac{1}{2}mv^2$
- El trabajo realizado por una $\mathbf{F}$ externa sobre una partícula desde una posición $\mathbf{r}_1$ hasta una posición $\mathbf{r}_2$, como la integral de línea $W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ donde $\mathrm{d}\mathbf{s}$ es el vector tangente a la trayectoria que une la posición $\mathbf{r}_1$ con la posición $\mathbf{r}_2$.
- Entonces $m \int_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\mathbf{v}\mathrm{d}t) = \frac{1}{2}m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{1}{2}m \int_1^2 \mathrm{d}\left(v^2\right) = T_2 - T_1$. El trabajo de $\mathbf{F}$ desde la posición $\mathbf{r}_1$ hasta la posición $\mathbf{r}_2$ depende solamente de la diferencia entre la energía cinética en las posiciones $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_1$.

Fuerzas conservativas

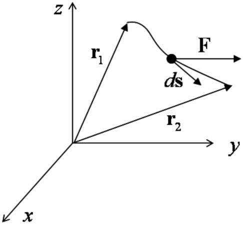


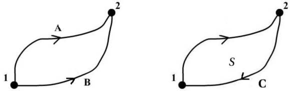


- Si el trabajo W_{12} de una fuerza externa **F** es independiente de la trayectoria entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, entonces **F** se llama fuerza conservativa:

$$\underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} = \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino B}} \Rightarrow \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} + \underbrace{\int_2^1 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino -B}} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

Fuerzas conservativas





- Si el trabajo W_{12} de una fuerza externa $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, entonces $\mathbf{F}$ se llama fuerza conservativa:

$$\underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} = \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino B}} \Rightarrow \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} + \underbrace{\int_2^1 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino -B}} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

- Más aún

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$$

Energía potencial y energía total

- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d} x_i \right) = -\int_1^2 \mathrm{d} V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).

Energía potencial y energía total

- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_1 - V_2 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva

Energía potencial y energía total

- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_1 - V_2 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}T+V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.

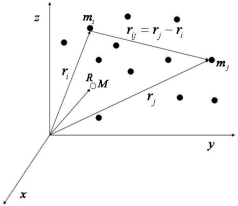
Energía potencial y energía total

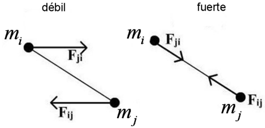
- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_1 - V_2 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}T+V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.
- Luego, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\nabla V \cdot \mathbf{v} + \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$, i.e. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$

Energía potencial y energía total

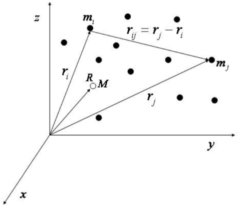
- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_1 - V_2 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}\,T+V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.
- Luego, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\nabla V \cdot \mathbf{v} + \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$, i.e. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$
- La energía potencial V puede ser definida para sistemas no conservativos, pero V depende explícitamente tanto de la posición como del tiempo, $V(\mathbf{r}, t)$. La fuerza puede expresarse como $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}, t)$. El trabajo para mover una partícula entre los puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ no es $V_1 - V_2$, puesto que V cambia con el tiempo. La energía total es $E = T + V$, no se conserva durante el movimiento.

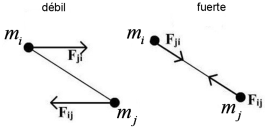
Sistemas de Partículas





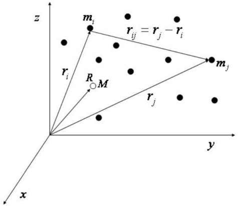
- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.

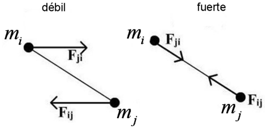




- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.
- La velocidad del centro de masa es $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M_{\mathrm{T}}} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$

Sistemas de Partículas





- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.
- La velocidad del centro de masa es $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M_{\mathrm{T}}} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$
- El momento lineal total del sistema de N partículas es $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M_{\mathrm{T}} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = M_{\mathrm{T}} \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$

- Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i)$ es la fuerza externa total sobre la partícula i.
  Entonces $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$.

- Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\,(i)$ es la fuerza externa total sobre la partícula i.
  Entonces $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$.
- Si $\mathbf{F}_{ij}$ es central, $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$. Entonces las fuerzas sobre las partículas van en la dirección (paralela o antiparalela) del vector $\mathbf{r}_{ij}$.

Dinámica de sistemas de partículas

- Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y $\mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i)$ es la fuerza externa total sobre la partícula i.
  Entonces $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$.
- Si $\mathbf{F}_{ij}$ es central, $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)\frac{\mathbf{r}_{ij}}{\left|\mathbf{r}_{ij}\right|}$. Entonces las fuerzas sobre las partículas van en la dirección (paralela o antiparalela) del vector $\mathbf{r}_{ij}$.
- Esta condición sobre fuerzas centrales se conoce como **forma fuerte de la ley de acción y reacción**. No todas las fuerzas cumplen esta condición. Las fuerzas magnéticas entre dos cargas en movimiento no siempre son centrales

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i}\mathbf{F}^0_{ji}+\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)=\dot{\mathbf{p}}_i$

Dinámica de sistemas de partículas

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i}\mathbf{F}^{0}_{ji}+\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)=\dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i\sum_{j\neq i}\mathbf{F}^{0}_{ji}+\sum_i\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)=\sum_i\dot{\mathbf{p}}_i=\sum_i\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i\right)$

Dinámica de sistemas de partículas

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji}^0 + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji}^0 + \sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i\right)$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = 0$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.

Dinámica de sistemas de partículas

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}^{0} + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}^{0} + \sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i\right)$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = 0$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.
- Si m_i es constante $\forall i$, entonces $\sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = M_T \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$

Dinámica de sistemas de partículas

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}^{0} + \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}^{0} + \sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij} = 0$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.
- Si m_i es constante $\forall i$, entonces $\sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = M_T \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$
- Luego, $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(\text{ total }) \equiv \sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \frac{d\mathbf{P}_{\mathrm{T}}}{dt}$

Cantidad de Movimiento Angular

- La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$

Cantidad de Movimiento Angular

- La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$
- Si la posición de la partícula i, respecto al centro de masa es $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$, la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa será $\mathbf{v}'_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$.

Cantidad de Movimiento Angular

- La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$
- Si la posición de la partícula i, respecto al centro de masa es $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$, la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa será $\mathbf{v}'_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$.
- En términos del centro de masa podemos escribir

$$\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}) = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) +$$

$$+ \underbrace{\left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i\right)}_{=0} + \mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}\right)$$

- Los términos que se anulan son la posición del centro de masa respecto al centro de masa y la velocidad del centro de masa respecto al centro de masa, respectivamente.

Cantidad de Movimiento Angular

- La cantidad de movimiento angular total del sistema de partículas es $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$
- Si la posición de la partícula i, respecto al centro de masa es $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$, la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa será $\mathbf{v}'_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$.
- En términos del centro de masa podemos escribir $\mathbf{L}_{\mathrm{T}} = \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}) = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) +$
$$+ \underbrace{\left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i\right) \times \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i\right)}_{=0} + \mathbf{R} \times \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}\right)$$
- Los términos que se anulan son la posición del centro de masa respecto al centro de masa y la velocidad del centro de masa respecto al centro de masa, respectivamente.
- El momento angular de un sistema de partículas es $\mathbf{L}_T = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i) + \mathbf{R} \times \mathbf{p}_{\mathrm{cm}}$.
Cantidad de movimiento angular respecto CM + la del CM.

- La variación de la cantidad de movimiento angular respecto a un sistema de partículas es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right) = \underbrace{\sum_i \left(\mathbf{v}_i \times m\mathbf{v}_i\right)}_{=0} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}\right)}_{=0}$$

Cantidad de Movimiento Angular

- La variación de la cantidad de movimiento angular respecto a un sistema de partículas es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right) = \underbrace{\sum_i \left(\mathbf{v}_i \times m\mathbf{v}_i\right)}_{=0} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}\right)}_{=0}$$

- Entonces, $\frac{d\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\,(i) = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}}\,(i) = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}}\,(\text{total}\ )$.

- La variación de la cantidad de movimiento angular respecto a un sistema de partículas es

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i\right) = \underbrace{\sum_i \left(\mathbf{v}_i \times m\mathbf{v}_i\right)}_{=0} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} \left(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}\right)}_{=0}$$

- Entonces, $\frac{d\mathbf{L}_{\mathrm{T}}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\,(i) = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}}\,(i) = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}}\,(\text{total}\ )$.
- Si el torque externo total en un sistema es cero, entonces el momento angular total $\mathbf{L}_{\mathrm{T}}$ es constante.

Energía cinética de un sistemas de partículas

- La energía cinética total sistema de partículas es $T_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$.

Energía cinética de un sistemas de partículas

- La energía cinética total sistema de partículas es $T_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$.
- En coordenadas del centro de masa, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\rm cm}$, podemos escribir

$$T_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\rm cm}\right)\cdot\left(\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\rm cm}\right)$$

$$T_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}2\mathbf{v}_{\rm cm}\cdot\underbrace{\sum_i m_i\mathbf{v}'_i}_{=0}$$

Por lo tanto $T_{\text{total}} = \frac{1}{2}M_T v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$

Energía cinética de un sistemas de partículas

- La energía cinética total sistema de partículas es $T_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$.
- En coordenadas del centro de masa, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\rm cm}$, podemos escribir
  $T_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\rm cm}\right)\cdot\left(\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\rm cm}\right)$
  $T_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}2\mathbf{v}_{\rm cm}\cdot\underbrace{\sum_i m_i \mathbf{v}'_i}_{=0}$

  Por lo tanto $T_{\text{total}} = \frac{1}{2}M_T v_{\rm cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$
- La energía cinética total tiene dos contribuciones:
  (i) la energía cinética del centro de masa, $\frac{1}{2}M_T v_{\rm cm}^2$;
  (ii) la energía cinética relativa al centro de masa, $\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$.

Energía potencial de un sistemas de partículas

- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula
  $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)$

Energía potencial de un sistemas de partículas

- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$

Energía potencial de un sistemas de partículas

- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) + \sum_{j\neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i\right)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\left|\mathbf{r}_{ij}\right|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = \left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right)$
- Si la energía potencial de interacción es $V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)$ tendremos $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)$, con $\nabla_i = \partial/\partial \mathbf{r}_i$. Como $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, las funciones $f_{ij} = f_{ji}$ son simétricas con respecto al intercambio de i y j.

Energía potencial de un sistemas de partículas

- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$
- Si la energía potencial de interacción es $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$ tendremos $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$, con $\nabla_i = \partial/\partial \mathbf{r}_i$. Como $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, las funciones $f_{ij} = f_{ji}$ son simétricas con respecto al intercambio de i y j.
- Entonces $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$ y, ambas $\mathbf{F}_{ji}$ y $\mathbf{F}_{ij}$ son derivables de una energía potencial de interacción entre la partícula i y la partícula j. Así $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \equiv -\nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$.

Energía potencial de un sistemas de partículas

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Partimos de la ecuación de movimiento para una partícula $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)$
- Las partículas interactuan mediante fuerzas centrales, entonces $\mathbf{F}_{ji} \propto f_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$, donde $\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$
- Si la energía potencial de interacción es $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$ tendremos $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$, con $\nabla_i = \partial/\partial \mathbf{r}_i$. Como $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$, las funciones $f_{ij} = f_{ji}$ son simétricas con respecto al intercambio de i y j.
- Entonces $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$ y, ambas $\mathbf{F}_{ji}$ y $\mathbf{F}_{ij}$ son derivables de una energía potencial de interacción entre la partícula i y la partícula j. Así $\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \equiv -\nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$.
- Las masas m_i son constantes, entonces $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) - \sum_{j \neq i} \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}$. Hacemos el producto escalar con $\mathbf{v}_i$, obtenemos $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) - \mathbf{v}_i \cdot \sum_{j \neq i} \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = \frac{1}{2} m_i \frac{\mathrm{d}v_i^2}{\mathrm{d}t}$

Energía Total de un sistemas de partículas

- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) =$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)\right]$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_j\right]$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
donde hemos usado $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$

Energía Total de un sistemas de partículas

- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) =$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)\right]$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_j\right]$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
  donde hemos usado $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
- Entonces, podemos escribir
  $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)\right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i)$

Energía Total de un sistemas de partículas

- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) =$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\left(i\right) - \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\left(i\right) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)\right]$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\left(i\right) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[\nabla_i V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right) \cdot \mathbf{v}_j\right]$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\left(i\right) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)$
donde hemos usado $V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right) = V_{ji}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)$
- Entonces, podemos escribir
$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)\right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i)$
- Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\text{ext}}\left(i\right) = -\nabla V_{\text{ext}}\left(i\right)$, tenemos, $\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\left(i\right) = -\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla V_{\text{ext}}\left(i\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i V_{\text{ext}}\left(i\right)\right)$.

Energía Total de un sistemas de partículas

- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) =$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|)$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji}\,(|\mathbf{r}_{ij}|)\right]$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \left[\nabla_i V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_j\right]$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{d}{dt} V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|)$
  donde hemos usado $V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}\,(|\mathbf{r}_{ij}|)$
- Entonces, podemos escribir
  $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|)\right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$
- Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) = -\nabla V_{\text{ext}}\,(i)$, tenemos, $\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) = -\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla V_{\text{ext}}\,(i) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i V_{\text{ext}}\,(i)\right)$.
- Entonces $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}\,(|\mathbf{r}_{ij}|) + \sum_i V_{\mathrm{ext}}(i)\right] = 0$

Energía Total de un sistemas de partículas

- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\right) =$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)\right]$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \left[\nabla_i V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) \cdot \mathbf{v}_j\right]$
  $= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) - \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} \frac{d}{dt} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
  donde hemos usado $V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) = V_{ji}(|\mathbf{r}_{ij}|)$
- Entonces, podemos escribir
  $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)\right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$
- Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = -\nabla V_{\text{ext}}(i)$, tenemos, $\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = -\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla V_{\text{ext}}(i) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i V_{\text{ext}}(i)\right)$.
- Entonces $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|) + \sum_i V_{\mathrm{ext}}(i)\right] = 0$
- La energía cinética total es $T_{\text{total}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$ y la energía potencial total, $V_{\text{total}} = \sum_i V_{\text{ext}}(i) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}(|\mathbf{r}_{ij}|)$.

Energía Total de un sistemas de partículas

- Sumando sobre todas las partículas, obtenemos $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) =$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \sum_i \sum_{j\neq i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \left[\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right) + \mathbf{v}_j \cdot \nabla_j V_{ji}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\right]$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \left[\nabla_i V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right) \cdot \mathbf{v}_i + \nabla_j V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right) \cdot \mathbf{v}_j\right]$
$= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} \frac{d}{dt} V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$
donde hemos usado $V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right) = V_{ji}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$
- Entonces, podemos escribir
$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\right] = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i)$
- Como las fuerzas externas son conservativas, $\mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) = -\nabla V_{\text{ext}}\,(i)$, tenemos, $\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i) = -\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla V_{\text{ext}}\,(i) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i V_{\text{ext}}\,(i)\right)$.
- Entonces $\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right) + \sum_i V_{\mathrm{ext}}(i)\right] = 0$
- La energía cinética total es $T_{\text{total}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ y la energía potencial total, $V_{\text{total}} = \sum_i V_{\text{ext}}\,(i) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j\neq i} V_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$.
- Finalmente, la energía total del sistema se conserva,
$E_{\text{total}} = T_{\text{total}} + V_{\text{total}} =$ constante.