Teorema del Residuo

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

12 de agosto de 2021

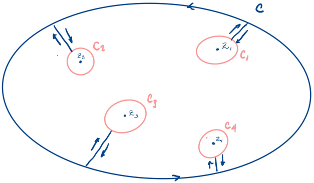
Agenda Teorema del Residuo

1. Teorema del Residuo
2. Ejemplo $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$
3. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x)$
4. Integrales (in)definidas $\int_a^b \mathrm{d}x \; f(x)$ con $\lim_{x \to x_0} |f(x)| \to \infty$
5. Recapitulando

Teorema del Residuo

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un número, m, finito de polos $z_{0_1}, z_{0_2}, z_{0_3}, \cdots z_{0_m}$ entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$

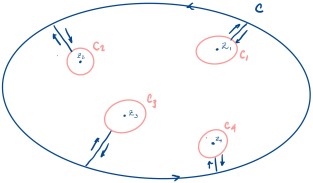
- Consideremos una región, también múltiplemente conexa con un número finito de polos.



Teorema del Residuo

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un número, m, finito de polos $z_{0_1}, z_{0_2}, z_{0_3}, \cdots z_{0_m}$ entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$

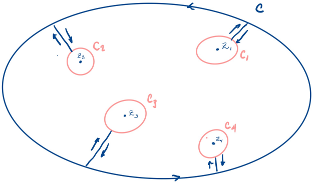
- Consideremos una región, también múltiplemente conexa con un número finito de polos.
- Una circulación ingeniosa aisla los distintos polos y como la función es analítica en la región bordeada por todos esos contornos, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z\ f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z\ f(z) + \cdots \oint_{\mathcal{C}_m} \mathrm{d}z\ f(z) = 0\,.$



Teorema del Residuo

Si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un número, m, finito de polos $z_{0_1}, z_{0_2}, z_{0_3}, \cdots z_{0_m}$ entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\; f(z)_{z=z_{0j}}$

- Consideremos una región, también múltiplemente conexa con un número finito de polos.
- Una circulación ingeniosa aisla los distintos polos y como la función es analítica en la región bordeada por todos esos contornos, entonces $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) + \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z \; f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z \; f(z) + \cdots \oint_{\mathcal{C}_m} \mathrm{d}z \; f(z) = 0\,.$
- Entonces
  $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}z \; f(z) + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}z \; f(z) + \cdots \oint_{\mathcal{C}_m} \mathrm{d}z \; f(z) \quad \Leftrightarrow$
  $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z \; f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\; f(z)_{z=z_{0j}}$



Ejemplo $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$

- Consideremos $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z} \equiv \frac{4-3z}{z(z-1)}$

$$\text{con polos en} \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=0} = \left.\dfrac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=0} = -4 \\ \\ z = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=1} = \left.\dfrac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=1} = 1 \end{array} \right.$$

Ejemplo $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$

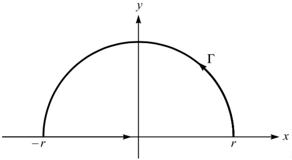
- Consideremos $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z} \equiv \frac{4-3z}{z(z-1)}$

$$\text{con polos en} \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=0} = \left.\dfrac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=0} = -4 \\ \\ z = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=1} = \left.\dfrac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=1} = 1 \end{array} \right.$$

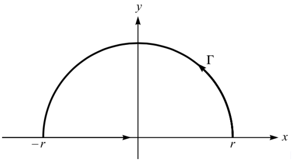
- Entonces el Teorema del Residuo $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\; f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\; f(z)_{z=z_{0j}}$, impone

$$\Rightarrow \oint_{C} \mathrm{d}z \frac{4-3z}{z^2-z} = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i\,.$$

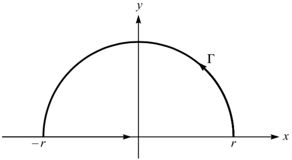
- Realizamos **la extensión analítica** $f(x) \to f(z)$ y es fácil convencernos que $\oint_C \mathrm{d}z\; f(z) = \int_\Gamma \mathrm{d}z\; f(z) + \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\; f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\; f(z)_{z=z_{0j}}$



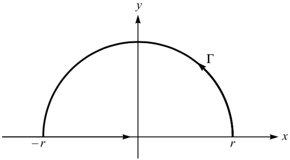
- Realizamos **la extensión analítica** $f(x) \to f(z)$ y es fácil convencernos que
  $\oint_C \mathrm{d}z\ f(z) = \int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$
- Supondremos que el integrando es una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $q(x) \neq 0\ \ \forall\ x$ y que $q(x) \sim x^2 p(x)$.



- Realizamos **la extensión analítica** $f(x) \to f(z)$ y es fácil convencernos que $\oint_C \mathrm{d}z\ f(z) = \int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$
- Supondremos que el integrando es una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $q(x) \neq 0\ \ \forall\ x$ y que $q(x) \sim x^2 p(x)$.
- Comprobaremos que $\int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) \to 0$ cuandoz $\to \infty$.
  Vale decir
  $q(x) \sim x^2 p(x) \Rightarrow |f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \Rightarrow \left|\int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z)\right| < \frac{k}{r^2}\pi r = \frac{k\pi}{r}$
  para $|z| = r \geq 0$.



- Realizamos **la extensión analítica** $f(x) \to f(z)$ y es fácil convencernos que $\oint_C \mathrm{d}z\ f(z) = \int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) + \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$
- Supondremos que el integrando es una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $q(x) \neq 0\ \ \forall\ x$ y que $q(x) \sim x^2 p(x)$.
- Comprobaremos que $\int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) \to 0$ cuandoz $\to \infty$. Vale decir $q(x) \sim x^2 p(x) \Rightarrow |f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \Rightarrow \left|\int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z)\right| < \frac{k}{r^2}\pi r = \frac{k\pi}{r}$ para $|z| = r \geq 0$.
- Es decir $\int_\Gamma \mathrm{d}z\ f(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$



Ejemplo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

- Comprobamos que el integrando es $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0, \ \forall\ x$.

Ejemplo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

- Comprobamos que el integrando es $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$, $\forall\ x$.
- Además que al menos se cumple que $p(x) \sim x^2 q(x) \equiv f(x) \sim \frac{1}{x^2}$.

Ejemplo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

- Comprobamos que el integrando es $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$, $\forall\ x$.
- Además que al menos se cumple que $p(x) \sim x^2 q(x) \equiv f(x) \sim \frac{1}{x^2}$.
- Procedemos con la extensión analítica $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$

Ejemplo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

- Comprobamos que el integrando es $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$, $\forall\ x$.
- Además que al menos se cumple que $p(x) \sim x^2 q(x) \equiv f(x) \sim \frac{1}{x^2}$.
- Procedemos con la extensión analítica $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$
- Note que $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ tendrá cuatro polos simples:
  $z = e^{\pm \frac{i\pi}{4}}$; $z = e^{\pm \frac{3i\pi}{4}}$

Ejemplo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

- Comprobamos que el integrando es $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$, $\forall\, x$.
- Además que al menos se cumple que $p(x) \sim x^2 q(x) \equiv f(x) \sim \frac{1}{x^2}$.
- Procedemos con la extensión analítica $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$
- Note que $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ tendrá cuatro polos simples:
  $z = e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$; $z = e^{\pm\frac{3i\pi}{4}}$
- Los residuos $\mathrm{Res}\, \left.\frac{p(z)}{q(z)}\right|_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \left.\dfrac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \dfrac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{4} = \dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4} \\ \\ z = e^{\frac{3i\pi}{4}} \Rightarrow \mathrm{Res}\, f(z)|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \left.\dfrac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \dfrac{e^{\frac{-9i\pi}{4}}}{4} = \dfrac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{4} \end{array} \right.$$

- Comprobamos que el integrando es $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$, $\forall\ x$.
- Además que al menos se cumple que $p(x) \sim x^2 q(x) \equiv f(x) \sim \frac{1}{x^2}$.
- Procedemos con la extensión analítica $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$
- Note que $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ tendrá cuatro polos simples: $z = e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$; $z = e^{\pm\frac{3i\pi}{4}}$
- Los residuos $\operatorname{Res} \left.\frac{p(z)}{q(z)}\right|_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \Rightarrow$

$$\begin{cases} z = e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow \operatorname{Res} f(z)\big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4} \\ z = e^{\frac{3i\pi}{4}} \Rightarrow \operatorname{Res} f(z)\big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{-9i\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{4} \end{cases}$$

- Para los polos para el semiplano complejo $y > 0$ tendremos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) = \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1^4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

Integrales $\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$ con $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$

Integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración.

- En general $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$
  $\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta\to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\xi}^{b} \mathrm{d}x\ f(x)$

Integrales $\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$ con $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$

Integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración.

- En general $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$
  $\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta\to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\xi}^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe $\lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\ f(x) \right) \Leftrightarrow P \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$

Integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración.

- En general $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$
  $\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta\to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\xi}^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe $\lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\ f(x) \right) \Leftrightarrow P \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy*.

Integrales $\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$ con $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$

Integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración.

- En general $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$
  $\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta\to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\xi}^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe $\lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\ f(x) \right) \Leftrightarrow P \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy*.
- Diseñamos un circuito tal que evite los polos de la extensión analítica.

Integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración.

- En general $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$
  $\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta\to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\xi}^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe $\lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\ f(x) \right) \Leftrightarrow P \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy*.
- Diseñamos un circuito tal que evite los polos de la extensión analítica.
- Supongamos $f(z)$ tiene un polo simple en el eje real en $x = x_0$ y es analítica en todos los demás puntos del plano complejo.

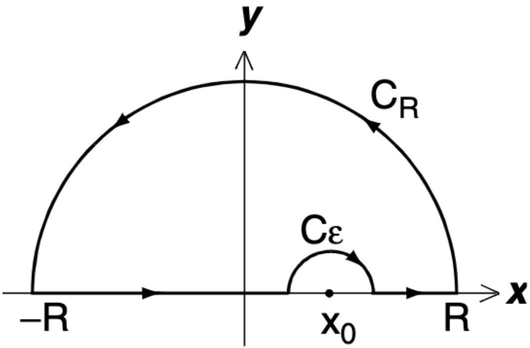
Integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración.

- En general $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$
  $\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta\to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\xi}^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe $\lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\ f(x) \right) \Leftrightarrow P \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$
- Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy*.
- Diseñamos un circuito tal que evite los polos de la extensión analítica.
- Supongamos $f(z)$ tiene un polo simple en el eje real en $x = x_0$ y es analítica en todos los demás puntos del plano complejo.
- Entonces
  $\oint f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{x_0+\varepsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$

Integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración.

- En general $\lim_{x\to x_0} |f(x)| \to \infty$
  $\Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{\zeta\to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\, f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\xi}^b \mathrm{d}x\, f(x)$
- Puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe $\lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\, f(x) + \lim_{\xi\to 0} \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\, f(x) \right) \Leftrightarrow P \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)$
- Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy*.
- Diseñamos un circuito tal que evite los polos de la extensión analítica.
- Supongamos $f(z)$ tiene un polo simple en el eje real en $x = x_0$ y es analítica en todos los demás puntos del plano complejo.
- Entonces
  $\oint f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{x_0+\varepsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$
- Sobre el eje de las x se cumple
  $\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \right] = P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$

Circuito de integración



- Como $f(z)$ tiene un polo simple en $z = x_0$, tiene una expresión en serie de Laurent alrededor de x_0, de la forma $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$

- Como $f(z)$ tiene un polo simple en $z = x_0$, tiene una expresión en serie de Laurent alrededor de x_0, de la forma $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$
- Entonces en el circuito C_ϵ tendremos $z - x_0 = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$, donde ϵ es el radio del semicírculo.

- Como $f(z)$ tiene un polo simple en $z = x_0$, tiene una expresión en serie de Laurent alrededor de x_0, de la forma $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$
- Entonces en el circuito C_ϵ tendremos $z - x_0 = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta$, donde ϵ es el radio del semicírculo.
- La integral el circuito C_ϵ se escribe como $\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_\pi^0 \left(\frac{a_{-1}}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \right) \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta.$

- Como $f(z)$ tiene un polo simple en $z = x_0$, tiene una expresión en serie de Laurent alrededor de x_0, de la forma $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$
- Entonces en el circuito C_ϵ tendremos $z - x_0 = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta$, donde ϵ es el radio del semicírculo.
- La integral el circuito C_ϵ se escribe como $\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_\pi^0 \left(\frac{a_{-1}}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \right) \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta.$
- En el límite $\epsilon \to$ todos los términos se anulan menos el primero $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_\pi^0 a_{-1}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi a_{-1} = -\mathrm{i}\pi \operatorname{Res}_{z=x_0}[f(z)]$

- Como $f(z)$ tiene un polo simple en $z = x_0$, tiene una expresión en serie de Laurent alrededor de x_0, de la forma $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$
- Entonces en el circuito C_ϵ tendremos $z - x_0 = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$, donde ϵ es el radio del semicírculo.
- La integral el circuito C_ϵ se escribe como $\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_\pi^0 \left(\frac{a_{-1}}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n\right) \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta.$
- En el límite $\epsilon \to$ todos los términos se anulan menos el primero $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_\pi^0 a_{-1}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi a_{-1} = -\mathrm{i}\pi \operatorname{Res}_{z=x_0}[f(z)]$
- En el límite $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$, tendremos $\oint f(z)\mathrm{d}z = 0 = P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi \operatorname{Res}[f(z)] = 0 \Rightarrow P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi \operatorname{Res}[f(z)].$

- Como $f(z)$ tiene un polo simple en $z = x_0$, tiene una expresión en serie de Laurent alrededor de x_0, de la forma $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$
- Entonces en el circuito C_ϵ tendremos $z - x_0 = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta$, donde ϵ es el radio del semicírculo.
- La integral el circuito C_ϵ se escribe como $\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_\pi^0 \left(\frac{a_{-1}}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \right) \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta.$
- En el límite $\epsilon \to$ todos los términos se anulan menos el primero $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_\pi^0 a_{-1} \mathrm{i}\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi a_{-1} = -\mathrm{i}\pi \operatorname{Res}_{z=x_0}[f(z)]$
- En el límite $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$, tendremos $\oint f(z)\mathrm{d}z = 0 = P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi \operatorname{Res}[f(z)] = 0 \Rightarrow P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi \operatorname{Res}[f(z)]$.
- En general

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \pi i \left(\sum \text{residuos sobre el eje } x \right) + 2\pi\mathrm{i} \left(\sum \text{ residuos en el plano } y > 0. \right)$$

Recapitulando

En presentación consideramos

1.