

# Hamilton Jacobi

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



27 de mayo de 2025

- 1 Las transformaciones canónicas  $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$
- 2 El Principio de Mínima Acción
- 3 La ecuación de Hamilton-Jacobi
- 4 La trayectoria del sistema
- 5 Función principal de Hamilton-Jacobi
- 6 Ecuación Independiente del tiempo
- 7 Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico
- 8 Comparando Métodos.
  - Conceptos y Técnicas
  - Ventajas y Limitaciones
  - El Oscilador Armónico: Tres Enfoques
- 9 Recapitulando
- 10 Para la discusión

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las 2s nuevas coordenadas y momentos son constantes.

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las 2s nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas 2s constantes  $Q_i$  y  $P_i$  pueden expresarse en función de las 2s condiciones iniciales:  $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$ ,  $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$ .

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las  $2s$  nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas  $2s$  constantes  $Q_i$  y  $P_i$  pueden expresarse en función de las  $2s$  condiciones iniciales:  $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$ ,  $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$ .
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento,  $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$ ,  $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$ .

- Una transformación canónica  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ , permite encontrar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.
- Esa transformación  $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ ,  $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$  lleva  $\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \rightarrow \mathcal{H}'(Q_i, P_i, t)$  un hamiltoniano en el cual una (o varias) coordenada  $Q_j$  o/y  $P_j$  son cíclicas
- Supongamos una transformación canónica  $\{q_i, p_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$  tal que,  $(P_i, Q_i)$ , las  $2s$  nuevas coordenadas y momentos son constantes.
- Esas  $2s$  constantes  $Q_i$  y  $P_i$  pueden expresarse en función de las  $2s$  condiciones iniciales:  $Q_i = q(q_j(0), p_j(0))$ ,  $P_i = p(q_j(0), p_j(0))$ .
- La transformación canónica que relacionan las nuevas y viejas variables proporcionan directamente la solución del problema del movimiento,  $q_i = q(q_j(0), p_j(0), t)$ ,  $p_i = p(q_j(0), p_j(0), t)$ .
- Si la transformación canónica conduce a nuevos momentos y coordenadas constantes,  $P_i \equiv \alpha_i = \text{cte}$ ,  $Q_i \equiv \beta_i = \text{cte}$ , tal que  $\mathcal{H}'(Q_i, P_i) = 0$ , entonces existe una función generadora  $\mathcal{F}$  tal que  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$



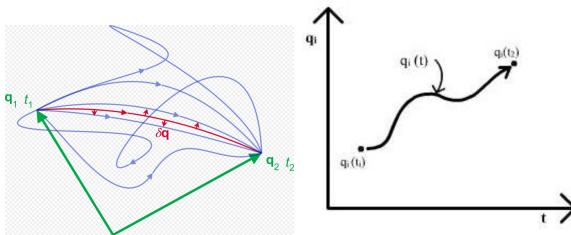
- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de  $S$ .

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de  $S$ .
- Supongamos que el tiempo  $t_2$  es variable, i.e,  $t_2 = t$ .

- Consideremos la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- El valor de la acción  $S$  (como integral definida) depende del conjunto de trayectorias  $\{q_i(t)\}$
- Las trayectorias que satisfacen la ecuaciones de Lagrange corresponden al valor mínimo (extremo) de  $S$ .
- Supongamos que el tiempo  $t_2$  es variable, i.e,  $t_2 = t$ .
- La acción dependerá de las trayectorias y del tiempo,  $S = S(q_i, t)$ .



- La derivada temporal de la acción es  $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$ .

- La derivada temporal de la acción es  $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$ .
- Por otro lado, si  $t_2 = t$  (variable), la definición de la acción implica que  $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$ .

- La derivada temporal de la acción es  $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$ .
- Por otro lado, si  $t_2 = t$  (variable), la definición de la acción implica que  $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$ .
- Comparando obtenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$  y  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$ ,



- La derivada temporal de la acción es  $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$ .
- Por otro lado, si  $t_2 = t$  (variable), la definición de la acción implica que  $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$ .
- Comparando obtenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$  y  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$ ,
- Las cuales se pueden expresar como  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$ .  
Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.

- La derivada temporal de la acción es  $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$ .
- Por otro lado, si  $t_2 = t$  (variable), la definición de la acción implica que  $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$ .
- Comparando obtenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$  y  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$ ,
- Las cuales se pueden expresar como  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$ .  
Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción  $S$  puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.

- La derivada temporal de la acción es  $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$ .
- Por otro lado, si  $t_2 = t$  (variable), la definición de la acción implica que  $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$ .
- Comparando obtenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$  y  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$ ,
- Las cuales se pueden expresar como  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$ .  
Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción  $S$  puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción  $S$  puede interpretarse como una función generadora tipo  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ , tal que  $P_i = \alpha_i = \text{cte}$ ,  $Q_i = \beta_i = \text{cte}$ .

- La derivada temporal de la acción es  $\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$ .
- Por otro lado, si  $t_2 = t$  (variable), la definición de la acción implica que  $\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(p_i, q_i, t)$ .
- Comparando obtenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, t)$  y  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0$ ,
- Las cuales se pueden expresar como  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0$ .  
Que es la Ecuación de Hamilton Jacobi.
- La acción  $S$  puede interpretarse como una función generadora capaz de producir la transformación canónica.
- Más aún, la acción  $S$  puede interpretarse como una función generadora tipo  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$ , tal que  $P_i = \alpha_i = \text{cte}$ ,  $Q_i = \beta_i = \text{cte}$ .
- La derivada total  $\frac{d\mathcal{F}_2}{dt} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t}$   
 $\Rightarrow \frac{d\mathcal{F}_2}{dt} = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$
- Donde hemos usado:  $p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}$  y  $\dot{P}_i = 0$ .

- Comparando las relaciones de  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$  y  $S(q_i, P_i, t)$ , tenemos

$$\begin{array}{l|l} p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{array}$$

donde  $P_i = \text{cte} = \alpha_i$  y  $Q_i = \text{cte} = \beta_i$ .

- Comparando las relaciones de  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$  y  $S(q_i, P_i, t)$ , tenemos

$$\begin{array}{l|l} p_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \end{array}$$

donde  $P_i = \text{cte} = \alpha_i$  y  $Q_i = \text{cte} = \beta_i$ .

- Si  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$  y existe una transformación canónica  $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$ , generada por  $\mathcal{F}_2 = S$ , tal que  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$ , entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi,  $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$

- Comparando las relaciones de  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$  y  $S(q_i, P_i, t)$ , tenemos

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} &= \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right|$$

donde  $P_i = \text{cte} = \alpha_i$  y  $Q_i = \text{cte} = \beta_i$ .

- Si  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$  y existe una transformación canónica  $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$ , generada por  $\mathcal{F}_2 = S$ , tal que  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$ , entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi,  $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución  $S(q_i, P_i, t)$  de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación  $\{p_i, q_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ .

- Comparando las relaciones de  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$  y  $S(q_i, P_i, t)$ , tenemos

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} &= \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right|$$

donde  $P_i = \text{cte} = \alpha_i$  y  $Q_i = \text{cte} = \beta_i$ .

- Si  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$  y existe una transformación canónica  $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$ , generada por  $\mathcal{F}_2 = S$ , tal que  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$ , entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi,  $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución  $S(q_i, P_i, t)$  de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación  $\{p_i, q_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ .
- Las constantes  $P_i, Q_i \leftrightarrow \alpha_i, \beta_i$  se expresan en términos de las 2s condiciones iniciales  $(q_i(0), p_i(0))$ .



- Comparando las relaciones de  $\mathcal{F}_2(q_i, P_i, t)$  y  $S(q_i, P_i, t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) & p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, P_i, t) = p_i(q_i, P_i, t) \\ Q_i &= \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) & Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}(q_i, P_i, t) = Q_i(q_i, P_i, t) \\ \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} &= \mathcal{H}' & \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

donde  $P_i = \text{cte} = \alpha_i$  y  $Q_i = \text{cte} = \beta_i$ .

- Si  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) = \text{cte}$  y existe una transformación canónica  $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\} = \{\alpha_i, \beta_i\}$ , generada por  $\mathcal{F}_2 = S$ , tal que  $\mathcal{H}'(P_i, Q_i) \equiv \mathcal{H}'(\alpha_i, \beta_i) = 0$ , entonces se satisface ecuación de Hamilton-Jacobi,  $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- La solución  $S(q_i, P_i, t)$  de la ecuación de Hamilton-Jacobi genera la transformación  $\{p_i, q_i, t\} \rightarrow \{P_i, Q_i, t\}$ .
- Las constantes  $P_i, Q_i \leftrightarrow \alpha_i, \beta_i$  se expresan en términos de las 2s condiciones iniciales  $(q_i(0), p_i(0))$ .
- La solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema provee la trayectoria  $q_i(t) = q_i(q_i(0), p_i(0), t)$  y  $p_i(t) = p_i(q_i(0), p_i(0), t)$ .

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si  $S$  es solución, entonces  $\tilde{S} = S + C_1$  también lo es.

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si  $S$  es solución, entonces  $\tilde{S} = S + C_1$  también lo es.
- Una de las  $(s + 1)$  constantes de integración es irrelevante.

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si  $S$  es solución, entonces  $\tilde{S} = S + C_1$  también lo es.
- Una de las  $(s + 1)$  constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma  $S(q_i, P_i, t)$ , tomamos las  $s$  constantes  $P_i = \alpha_i$ .

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si  $S$  es solución, entonces  $\tilde{S} = S + C_1$  también lo es.
- Una de las  $(s + 1)$  constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma  $S(q_i, P_i, t)$ , tomamos las  $s$  constantes  $P_i = \alpha_i$ .
- La solución  $S = S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$ .

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si  $S$  es solución, entonces  $\tilde{S} = S + C_1$  también lo es.
- Una de las  $(s + 1)$  constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma  $S(q_i, P_i, t)$ , tomamos las  $s$  constantes  $P_i = \alpha_i$ .
- La solución  $S = S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$ .
- Si el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema,  $\mathcal{H}(q_i, p_i) = cte = \mathcal{E}$ .



- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si  $S$  es solución, entonces  $\tilde{S} = S + C_1$  también lo es.
- Una de las  $(s + 1)$  constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma  $S(q_i, P_i, t)$ , tomamos las  $s$  constantes  $P_i = \alpha_i$ .
- La solución  $S = S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$ .
- Si el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema,  $\mathcal{H}(q_i, p_i) = cte = \mathcal{E}$ .
- Suponemos que la solución  $S$  tiene la forma  
$$S(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, P_i) - \mathcal{E}t = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t.$$
Una de las  $s$  constantes  $\alpha_i$  es  $\mathcal{E}$

- Matemáticamente, la ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación en derivadas parciales de primer orden para  $S(q_i, t)$  con  $s + 1$  variables,  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, \dots, q_s, t) + H\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$
- La función  $S$  no es incógnita, sólo aparecen sus derivadas.
- Si  $S$  es solución, entonces  $\tilde{S} = S + C_1$  también lo es.
- Una de las  $(s + 1)$  constantes de integración es irrelevante.
- Para que la acción tenga la forma  $S(q_i, P_i, t)$ , tomamos las  $s$  constantes  $P_i = \alpha_i$ .
- La solución  $S = S(q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s, t) = S(q_i, \alpha_i, t)$ .
- Si el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es independiente del tiempo, entonces es una constante, igual a la energía total del sistema,  $\mathcal{H}(q_i, p_i) = cte = \mathcal{E}$ .
- Suponemos que la solución  $S$  tiene la forma  $S(q_i, P_i, t) = S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, P_i) - \mathcal{E}t = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t$ .  
Una de las  $s$  constantes  $\alpha_i$  es  $\mathcal{E}$
- La función  $\mathcal{W}(q_i, P_i) = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i)$  se llama función característica o principal de Hamilton.

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$ , donde escogimos  $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \dots, s$ .

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$ , donde escogimos  $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \dots, s$ .
- En términos de la función característica  $W(q_i, P_i)$  tenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \forall i \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad i \neq 1$

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$ , donde escogimos  $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \dots, s$ .
- En términos de la función característica  $W(q_i, P_i)$  tenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \forall i \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad i \neq 1$
- Con, la condición  $\mathcal{H}(q_i, p_i) = \mathcal{E}$  tenemos  $\mathcal{H}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}(q_i, P_i), q_i\right) = \mathcal{E}$

- Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q_i, t) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, \mathcal{E}, \alpha_j), q_i\right) = \mathcal{E}$ , donde escogimos  $P_1 = \alpha_1 = \mathcal{E}, P_j = \alpha_j, j = 2, \dots, s$ .
- En términos de la función característica  $\mathcal{W}(q_i, P_i)$  tenemos  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}, \quad \forall i \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial P_i}, \quad i \neq 1$
- Con, la condición  $\mathcal{H}(q_i, p_i) = \mathcal{E}$  tenemos  $\mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}(q_i, P_i), q_i\right) = \mathcal{E}$
- Si el Hamiltoniano es constante, entonces tendremos una solución de la forma  $S(q_i, P_i, t) = \mathcal{W}(q_j, P_i) + P_k q_k - \mathcal{E}t, \quad j \neq k$

# Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$

# Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + \mathcal{H}(p, q) = 0$



# Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + \mathcal{H}(p, q) = 0$
- Como  $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)$ , obtenemos  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = 0$ .

Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

# Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + \mathcal{H}(p, q) = 0$
- Como  $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)$ , obtenemos  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = 0$ .

Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

# Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + \mathcal{H}(p, q) = 0$
- Como  $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)$ , obtenemos  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = 0$ .

Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ , el Hamiltoniano es constante e igual a la energía total del sistema,  $\mathcal{H} = \mathcal{E}$

# Ejemplo: Una vez mas el Oscilador Armónico

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + \mathcal{H}(p, q) = 0$
- Como  $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)$ , obtenemos  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = 0$ .

Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ , el Hamiltoniano es constante e igual a la energía total del sistema,  $\mathcal{H} = \mathcal{E}$
- Buscamos una solución por separación de variables,  
 $S(q, \mathcal{E}, t) = W(q, \mathcal{E}) - \mathcal{E}t$ , con  $P = \mathcal{E} = \alpha$  constante de integración

Ecuación de Hamilton-Jacobi para un oscilador armónico simple y la acción asociada a este sistema.

- El Hamiltoniano es  $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$
- La ecuación de Hamilton-Jacobi es  $\frac{\partial S}{\partial t}(q, t) + \mathcal{H}(p, q) = 0$
- Como  $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, t)$ , obtenemos  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = 0$ .

Una ecuacion diferencial parcial de primer orden

- Puesto que  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ , el Hamiltoniano es constante e igual a la energía total del sistema,  $\mathcal{H} = \mathcal{E}$
- Buscamos una solución por separación de variables,  
 $S(q, \mathcal{E}, t) = W(q, \mathcal{E}) - \mathcal{E}t$ , con  $P = \mathcal{E} = \alpha$  constante de integración
- Entonces,

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right] = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = (2m\mathcal{E} - m^2 \omega^2 q^2)^{1/2} \Rightarrow,$$

$$W(q, \mathcal{E}) = \int (2m\mathcal{E} - m^2 \omega^2 q^2)^{1/2} dq \equiv S(q, \mathcal{E}, t) + \mathcal{E}t$$

- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$

- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$

- Integrando obtenemos  $Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \omega q \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \right)$

- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,  
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$
$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$
- Integrando obtenemos  $Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \omega q \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \right)$
- Con cual,  $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta')$ , con  $\beta' = Q\omega = \text{cte.}$



- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,  
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$
$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$
- Integrando obtenemos  $Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \omega q \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \right)$
- Con cual,  $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta')$ , con  $\beta' = Q\omega = \text{cte.}$
- Entonces  $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega t + \beta')$

- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,  
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$
$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$
- Integrando obtenemos  $Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \omega q \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \right)$
- Con cual,  $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta')$ , con  $\beta' = Q\omega = \text{cte.}$
- Entonces  $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para  $t = 0$ , tendremos  $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega Q)$  y  
 $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$

- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,  
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$
$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$
- Integrando obtenemos  $Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \omega q \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \right)$
- Con cual,  $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta')$ , con  $\beta' = Q\omega = \text{cte.}$
- Entonces  $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para  $t = 0$ , tendremos  $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega Q)$  y  
 $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual  $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left( m\omega \frac{q_0}{p_0} \right).$

- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,  
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$
$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$
- Integrando obtenemos  $Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \omega q \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \right)$
- Con cual,  $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta')$ , con  $\beta' = Q\omega = \text{cte.}$
- Entonces  $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para  $t = 0$ , tendremos  $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega Q)$  y  
 $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual  $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left( m\omega \frac{q_0}{p_0} \right).$
- Mientras que  $\mathcal{E} = \frac{1}{2m} (p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2) = P$

- La función  $S(q, \mathcal{E}, t)$  permite encontrar transformación canónica generada por  $S$  a partir de sus derivadas parciales,  
$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \text{ y}$$
$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} = \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\mathcal{E}}}} - t = \beta = \text{cte.}$$
- Integrando obtenemos  $Q + t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \omega q \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \right)$
- Con cual,  $q(Q, \mathcal{E}, t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta')$ , con  $\beta' = Q\omega = \text{cte.}$
- Entonces  $p = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} = \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} \equiv \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega t + \beta')$
- Evaluando para  $t = 0$ , tendremos  $q_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega Q)$  y  
 $p_0 = \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos(\omega Q)$
- Con lo cual  $\tan(\omega Q) = m\omega \frac{q_0}{p_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \left( m\omega \frac{q_0}{p_0} \right).$
- Mientras que  $\mathcal{E} = \frac{1}{2m} (p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2) = P$
- Las ecuaciones  $p = p(q_0, p_0, t)$  y  $q = q(q_0, p_0, t)$  expresan la solución de las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico en términos de las condiciones iniciales.

## • Los Conceptos de los formalismos

- **Lagrangiano:** Se basa en el principio de mínima acción  $\delta S = 0$ , con  $S = \int \mathcal{L} dt$ . Utiliza coordenadas generalizadas  $q_i$  y velocidades  $\dot{q}_i$ . Las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Euler-Lagrange.
- **Hamiltoniano:** Surge de una transformación de Legendre del lagrangiano. Las variables son  $q_i$  y sus momentos conjugados  $p_i$ . Las ecuaciones de movimiento son de primer orden.
- **Hamilton-Jacobi:** Busca una función generadora  $S(q, t)$  que satisfice una ecuación en derivadas parciales no lineal. Es una reformulación avanzada que unifica el análisis dinámico con métodos integrables.

## • Los Conceptos de los formalismos

- **Lagrangiano:** Se basa en el principio de mínima acción  $\delta S = 0$ , con  $S = \int \mathcal{L} dt$ . Utiliza coordenadas generalizadas  $q_i$  y velocidades  $\dot{q}_i$ . Las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Euler-Lagrange.
- **Hamiltoniano:** Surge de una transformación de Legendre del lagrangiano. Las variables son  $q_i$  y sus momentos conjugados  $p_i$ . Las ecuaciones de movimiento son de primer orden.
- **Hamilton-Jacobi:** Busca una función generadora  $S(q, t)$  que satisfice una ecuación en derivadas parciales no lineal. Es una reformulación avanzada que unifica el análisis dinámico con métodos integrables.

## • Las Técnicas

- **Lagrangiano:** espacio de configuración y ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- **Hamiltoniano:** espacio de fases, y ecuaciones de primer orden.
- **Hamilton-Jacobi** reduce el problema a una única ecuación en derivadas parciales; las soluciones de  $S$  generan toda la dinámica.
- **Simetrías y cantidades conservadas** se identifican más fácilmente en el formalismo Hamiltoniano, aunque el teorema de Noether también se aplica al lagrangiano.

## • Ventajas y Limitaciones

- **Lagrangiano:** Ideal para sistemas con ligaduras y simetrías. Se adapta bien a sistemas con coordenadas generalizadas. Menos eficiente en análisis de estabilidad.
- **Hamiltoniano:** Proporciona una visión clara del espacio de fases y permite análisis cualitativos. Es la base para el paso a la mecánica cuántica.
- **Hamilton-Jacobi:** Potente para sistemas integrables. Su conexión con la mecánica ondulatoria lo hace fundamental para el tránsito clásico-cuántico. Sin embargo, resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser muy difícil.



## • Ventajas y Limitaciones

- **Lagrangiano:** Ideal para sistemas con ligaduras y simetrías. Se adapta bien a sistemas con coordenadas generalizadas. Menos eficiente en análisis de estabilidad.
- **Hamiltoniano:** Proporciona una visión clara del espacio de fases y permite análisis cualitativos. Es la base para el paso a la mecánica cuántica.
- **Hamilton-Jacobi:** Potente para sistemas integrables. Su conexión con la mecánica ondulatoria lo hace fundamental para el tránsito clásico-cuántico. Sin embargo, resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser muy difícil.

## • Resumen

- Los tres métodos describen la misma física, pero desde perspectivas distintas.
- El enfoque lagrangiano es más geométrico y útil con ligaduras.
- El hamiltoniano es estructuralmente más rico y se presta al análisis de conservación y estabilidad.
- El enfoque de Hamilton-Jacobi es el más general y conecta elegantemente con la mecánica cuántica.

Partícula de masa  $m$ , sujeta a una fuerza  $F = -kx \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

## • Método Lagrangeano

- Lagrangiano:  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
- Ecuación de Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$
- Solución:  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Partícula de masa  $m$ , sujeta a una fuerza  $F = -kx \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

- **Método Lagrangeano**

- Lagrangiano:  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
- Ecuación de Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$
- Solución:  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- **Ventajas del enfoque Lagrangiano**

- Se basa en el principio de mínima acción.
- Ideal para sistemas con ligaduras y coordenadas generalizadas.
- Geométricamente intuitivo y extendible a campos.

Partícula de masa  $m$ , sujeta a una fuerza  $F = -kx \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

## • Método Lagrangeano

- Lagrangiano:  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
- Ecuación de Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$
- Solución:  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

## • Ventajas del enfoque Lagrangiano

- Se basa en el principio de mínima acción.
- Ideal para sistemas con ligaduras y coordenadas generalizadas.
- Geométricamente intuitivo y extendible a campos.

## • Método Hamiltoniano

- Hamiltoniano a partir de  $\mathcal{L} \Rightarrow p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ,  $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$
- Ecuaciones de Hamilton  $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ ,  $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx$
- **Resultado:**  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Partícula de masa  $m$ , sujeta a una fuerza  $F = -kx \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

## • Método Lagrangeano

- Lagrangiano:  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
- Ecuación de Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$
- Solución:  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

## • Ventajas del enfoque Lagrangeano

- Se basa en el principio de mínima acción.
- Ideal para sistemas con ligaduras y coordenadas generalizadas.
- Geométricamente intuitivo y extendible a campos.

## • Método Hamiltoniano

- Hamiltoniano a partir de  $\mathcal{L} \Rightarrow p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ,  $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$
- Ecuaciones de Hamilton  $\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ ,  $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx$
- **Resultado:**  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

## • Ventajas del enfoque Hamiltoniano

- Describe la evolución en el espacio de fases.
- Revela estructura conservativa y simetrías.
- Puente natural hacia mecánica cuántica y estadística.

## • Método Hamilton-Jacobi

- Ecuación de Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

- Separación de variables

$$S(x, t) = W(x) - Et \Rightarrow \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 = 2m \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

- Solución  $W(x) = \int \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)} dx$

## ● Método Hamilton-Jacobi

- Ecuación de Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

- Separación de variables

$$S(x, t) = W(x) - Et \Rightarrow \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 = 2m \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

- Solución  $W(x) = \int \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)} dx$

## ● Ventajas del enfoque Hamilton-Jacobi

- Método más general: permite obtener soluciones completas.
- Potente para sistemas integrables.
- Conexión profunda con la mecánica ondulatoria (Schrödinger).

## ● Método Hamilton-Jacobi

- Ecuación de Hamilton-Jacobi  $\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

- Separación de variables

$$S(x, t) = W(x) - Et \Rightarrow \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 = 2m \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

- Solución  $W(x) = \int \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right)} dx$

## ● Ventajas del enfoque Hamilton-Jacobi

- Método más general: permite obtener soluciones completas.
- Potente para sistemas integrables.
- Conexión profunda con la mecánica ondulatoria (Schrödinger).

## ● Resumiendo

- Los tres métodos predicen la misma dinámica.
- **Lagrangiano:** Intuitivo, útil con ligaduras.
- **Hamiltoniano:** Estructural, simétrico, fundamental en física moderna.
- **Hamilton-Jacobi:** Avanzado, integra el sistema completo, conecta con teoría cuántica.



## • Transformaciones canónicas

- Transformación canónica:  $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$
- Permiten hallar soluciones donde  $Q_i, P_i$  sean constantes.
- Si  $H'(Q_i, P_i) = 0$ , entonces:  $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
- Esta  $F$  es la función generadora del cambio.

## • Transformaciones canónicas

- Transformación canónica:  $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$
- Permiten hallar soluciones donde  $Q_i, P_i$  sean constantes.
- Si  $H'(Q_i, P_i) = 0$ , entonces:  $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
- Esta  $F$  es la función generadora del cambio.

## • Principio de mínima acción

- La acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- Si  $t_2 = t$  es variable, entonces  $S = S(q_i, t)$
- Las trayectorias reales minimizan esta acción.

## • Transformaciones canónicas

- Transformación canónica:  $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$
- Permiten hallar soluciones donde  $Q_i, P_i$  sean constantes.
- Si  $H'(Q_i, P_i) = 0$ , entonces:  $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
- Esta  $F$  es la función generadora del cambio.

## • Principio de mínima acción

- La acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- Si  $t_2 = t$  es variable, entonces  $S = S(q_i, t)$
- Las trayectorias reales minimizan esta acción.

## • Ecuación de Hamilton-Jacobi

- Derivada total de  $S$ :  $\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$
- Comparando con  $\mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$ , se deduce:  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi.

## • Transformaciones canónicas

- Transformación canónica:  $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$
- Permiten hallar soluciones donde  $Q_i, P_i$  sean constantes.
- Si  $H'(Q_i, P_i) = 0$ , entonces:  $\frac{\partial F}{\partial t} + H = 0$
- Esta  $F$  es la función generadora del cambio.

## • Principio de mínima acción

- La acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$
- Si  $t_2 = t$  es variable, entonces  $S = S(q_i, t)$
- Las trayectorias reales minimizan esta acción.

## • Ecuación de Hamilton-Jacobi

- Derivada total de  $S$ :  $\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$
- Comparando con  $\mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}$ , se deduce:  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0$
- Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi.

## • Trayectoria del sistema

- La solución  $S(q_i, \alpha_i, t)$  genera la transformación canónica.
- Las constantes  $\alpha_i$  se determinan a partir de las condiciones iniciales.
- Las trayectorias resultan como:

$$q_i(t) = q_i(q_0, p_0, t), \quad p_i(t) = p_i(q_0, p_0, t)$$

## • Función principal de Hamilton

- Si  $\mathcal{H}$  no depende del tiempo:  $S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t$
- $\mathcal{W}$  se llama función principal o característica de Hamilton.
- Se reduce a resolver:  $\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}\right) = \mathcal{E}$

## • Función principal de Hamilton

- Si  $\mathcal{H}$  no depende del tiempo:  $S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t$
- $\mathcal{W}$  se llama función principal o característica de Hamilton.
- Se reduce a resolver:  $\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}\right) = \mathcal{E}$

## • Oscilador Armónico

- Hamiltoniano:  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
- Ecuación de H-J:  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2 q^2 \right) = 0$
- Separación de variables:  $S = \mathcal{W}(q) - \mathcal{E}t$
- Se obtiene:  $\left( \frac{d\mathcal{W}}{dq} \right)^2 = 2m \left( \mathcal{E} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right)$
- $\mathcal{W}(q) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} dq$ . Usando derivadas:  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ ,  $Q = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}$
- Solución completa:  $q(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$

## • Función principal de Hamilton

- Si  $\mathcal{H}$  no depende del tiempo:  $S(q_i, \alpha_i, t) = \mathcal{W}(q_i, \alpha_i) - \mathcal{E}t$
- $\mathcal{W}$  se llama función principal o característica de Hamilton.
- Se reduce a resolver:  $\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i}\right) = \mathcal{E}$

## • Oscilador Armónico

- Hamiltoniano:  $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$
- Ecuación de H-J:  $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + m^2\omega^2 q^2 \right) = 0$
- Separación de variables:  $S = \mathcal{W}(q) - \mathcal{E}t$
- Se obtiene:  $\left( \frac{d\mathcal{W}}{dq} \right)^2 = 2m \left( \mathcal{E} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right)$
- $\mathcal{W}(q) = \int \sqrt{2m\mathcal{E} - m^2\omega^2 q^2} dq$ . Usando derivadas:  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ ,  $Q = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}$
- Solución completa:  $q(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \beta)$

## • Comparación de métodos

- **Lagrangiano:** Ideal para ligaduras y ecuaciones de segundo orden.
- **Hamiltoniano:** Espacio de fase y ecuaciones de primer orden.
- **Hamilton-Jacobi:** Reducción a una PDE; conecta con mecánica cuántica.

Desarrolle el péndulo simple (una masa  $m$  que cuelga de una cuerda inextensible sin masa, de longitud  $l$ ) por los tres métodos antes mencionados