

Órbitas y fuerzas centrales

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



26 de febrero de 2025

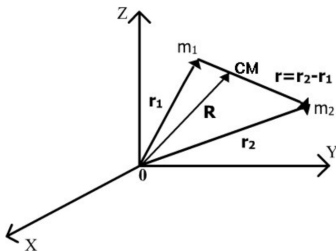
- 1 Problema de dos cuerpos
- 2 Los grados de libertad
- 3 La equivalencia unidimensional
- 4 Potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$
- 5 Resolviendo en coordenadas polares
- 6 El Sistema es integrable
- 7 Integrando el sistema

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas,
 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Se conoce como el problema de dos cuerpos.

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas,
 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Se conoce como el problema de dos cuerpos.
- Posee seis grados de libertad: tres coordenadas para \mathbf{r}_1 y tres para \mathbf{r}_2 .

- Consideremos dos partículas m_1 y m_2 en \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respecto a un origen O de un sistema de referencia inercial.
- Supongamos que las partículas interactúan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas,
 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Se conoce como el problema de dos cuerpos.
- Posee seis grados de libertad: tres coordenadas para \mathbf{r}_1 y tres para \mathbf{r}_2 .
- Definimos el vector de posición del centro de masa del sistema como $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ y posición relativa como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$



- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rel}}$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rel}}$
- Entonces $T_{\text{cm}} = \frac{1}{2}M_T\dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rel}}$
- Entonces $T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dot{\mathbf{r}}^2$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rel}}$
- Entonces $T_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M_T \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\text{rel}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rel}}$
- Entonces $T_{\text{cm}} = \frac{1}{2}M_T\dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$
- El Lagrangiano del sistema es $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) = T - V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$

- Las posiciones de las partículas relativas al centro de masa son $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}$
- Es decir: $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(m_1 + m_2)} = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{r}$
- La energía cinética total del sistema será $T = T_{\text{cm}} + T_{\text{rel}}$
- Entonces $T_{\text{cm}} = \frac{1}{2}M_T\dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2$
- y $T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$
- y si definimos la masa reducida, $\mu \equiv \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$
- El Lagrangiano del sistema es $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) = T - V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$
- Los seis grados de libertad del sistema se describen mediante las componentes de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{R} .

- Las componentes cartesianas de \mathbf{R} son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_T \dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$

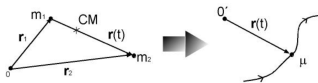
Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**

- Las componentes cartesianas de \mathbf{R} son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_T \dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$
Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
 $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_T = M_T \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$ El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{cte.}$

- Las componentes cartesianas de \mathbf{R} son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_T \dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$
Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
 $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_T = M_T \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$ El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{cte.}$
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.

- Las componentes cartesianas de \mathbf{R} son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_T \dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$
Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
 $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_T = M_T \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$ El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{cte.}$
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
- El término T_{cm} , la energía cinética del centro de masa es constante y se omite en el Lagrangiano, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$

- Las componentes cartesianas de \mathbf{R} son coordenadas cíclicas, lo que implica $M_T \dot{\mathbf{R}} \equiv (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$
Es decir: **el momento lineal total del sistema se conserva**
- Como no hay fuerzas externas sobre el sistema :
 $\mathbf{F}_{\text{externa total}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}_T = M_T \dot{\mathbf{R}} = \text{cte.}$ El centro de masa se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{cte.}$
- Existirán tres cantidades conservadas correspondientes a las tres componentes del momento lineal total o, equivalentemente, a las tres componentes de la velocidad del centro de masa.
- El término T_{cm} , la energía cinética del centro de masa es constante y se omite en el Lagrangiano, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})$
- El problema de dos cuerpos se reduce al de una partícula de masa μ en la posición relativa $\mathbf{r}(t)$ con respecto a un origen O' .



- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.

- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.
- Entonces la fuerza central es $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}$

- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.
- Entonces la fuerza central es $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$
- Las fuerza centrales no ejercen torque neto sobre las partículas y el momento angular total \mathbf{L} se conserva,
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{cte}$$

- El problema se simplifica más para potenciales centrales, $V(\mathbf{r})$.
- Entonces la fuerza central es $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$
- Las fuerza centrales no ejercen torque neto sobre las partículas y el momento angular total \mathbf{L} se conserva,
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{cte}$$
- La conservación del vector momento angular total, \mathbf{L} , significa que tanto su dirección como magnitud son constantes.

-

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
$$x = r \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta,$$
$$y = r \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
$$x = r \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta,$$
$$y = r \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$
- Luego, $\dot{r}^2 = v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
$$x = r \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta,$$
$$y = r \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$
- Luego, $\dot{r}^2 = v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
$$x = r \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta,$$
$$y = r \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$
- Luego, $\dot{r}^2 = v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$
- La coordenada θ es cíclica, entonces
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$$

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
$$x = r \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta,$$
$$y = r \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$
- Luego, $\dot{r}^2 = v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$
- La coordenada θ es cíclica, entonces
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$$
- La cantidad conservada es el momento conjugado a la coordenada angular θ , i.e. $L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$

- Las coordenadas polares generalizada (r, θ) implican
$$x = r \cos \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta,$$
$$y = r \sin \theta \Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$
- Luego, $\dot{\mathbf{r}}^2 = v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$
- El Lagrangiano será $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r)$
- La coordenada θ es cíclica, entonces
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$$
- La cantidad conservada es el momento conjugado a la coordenada angular θ , i.e. $L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{cte.}$
- El Lagrangiano es independiente del tiempo y el potencial es independiente de las velocidades, por lo que la energía mecánica total se conserva, $E = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) = \text{cte.}$

- Entonces, en el problema de dos cuerpos existen seis grados de libertad y al menos seis cantidades conservadas. Por lo tanto, se trata de un sistema integrable.

- Entonces, en el problema de dos cuerpos existen seis grados de libertad y al menos seis cantidades conservadas. Por lo tanto, se trata de un sistema integrable.
- Las seis cantidades conservadas $I_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = C_k (k = 1, \dots, 6)$ del problema de dos cuerpos sujetos a un potencial central $V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = V(r)$ son:
 - 1 Las tres componentes del vector velocidad del centro de masa $\dot{\mathbf{R}}$:
 $I_1 = \dot{x}_{cm} = \text{cte}$, $I_2 = \dot{y}_{cm} = \text{cte}$, $I_3 = \dot{z}_{cm} = \text{cte}$. Esto reduce el problema al movimiento del vector de posición relativa \mathbf{r} .
 - 2 La dirección del momento angular $\mathbf{L} = \text{cte}$, reduce el movimiento a un plano y se expresa como $I_4 = z = 0$.
 - 3 La magnitud del momento angular $I_5 = \mu r^2 \dot{\theta} = L$.
 - 4 La energía total $I_6 = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + V(r) = E$.

- Entonces, en el problema de dos cuerpos existen seis grados de libertad y al menos seis cantidades conservadas. Por lo tanto, se trata de un sistema integrable.
- Las seis cantidades conservadas $I_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = C_k (k = 1, \dots, 6)$ del problema de dos cuerpos sujetos a un potencial central $V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) = V(r)$ son:
 - 1 Las tres componentes del vector velocidad del centro de masa $\dot{\mathbf{R}}$:
 $I_1 = \dot{x}_{cm} = \text{cte}$, $I_2 = \dot{y}_{cm} = \text{cte}$, $I_3 = \dot{z}_{cm} = \text{cte}$. Esto reduce el problema al movimiento del vector de posición relativa \mathbf{r} .
 - 2 La dirección del momento angular $\mathbf{L} = \text{cte}$, reduce el movimiento a un plano y se expresa como $I_4 = z = 0$.
 - 3 La magnitud del momento angular $I_5 = \mu r^2 \dot{\theta} = L$.
 - 4 La energía total $I_6 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$.
- Las cantidades conservadas E y L , permiten reducir el problema de dos cuerpos a un problema unidimensional equivalente y la integración de las coordenadas r y θ , i.e. $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + V(r) = \text{cte}$.

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}$

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dt}{dr}$
- Con lo cual $\frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dt}{dr}$
- Con lo cual $\frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$
- Finalmente, $\theta(r) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}} + \theta_0$

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dt}{dr}$
- Con lo cual $\frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$
- Finalmente, $\theta(r) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}} + \theta_0$
- En total hay cuatro constantes de integración, E, L, r_0, θ_0 , para las coordenadas r y θ .

- De la energía obtenemos $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right)}$
- Para $t = 0$ y $r = r_0$ tenemos: $t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}}$
- Igualmente $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dt}{dr}$
- Con lo cual $\frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}$
- Finalmente, $\theta(r) = \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V(r') - \frac{L^2}{2\mu r'^2}}} + \theta_0$
- En total hay cuatro constantes de integración, E, L, r_0, θ_0 , para las coordenadas r y θ .
- Las cuatro constantes aparecen porque tenemos una ecuación de Lagrange para r y otra para θ ; ambas son ecuaciones diferenciales de segundo orden que requieren dos constantes de integración cada una.