

Vectores e índices

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



9 de febrero de 2024

- 1 Vectores e índices
 - Convención de Einstein
 - Componentes de tensores e índices libres
 - Kronecker y Levi-civita 1/2
- 2 Álgebra de Vectores e índices
- 3 Rotación de coordenadas
- 4 Transformación general de coordenadas de coordenadas
- 5 Escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores
- 6 Pseudovectores y transformación de coordenadas
- 7 Recapitulando
- 8 Para la discusión

El convenio de suma de Einstein es

- 1 Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i .$$

El convenio de suma de Einstein es

- 1 Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- 2 Los índices repetidos son mudos (no importa las letras que los etiquete) y representan suma. Así:

$$k^j a_j = k^m a_m = k^1 a_1 + k^2 a_2 + k^3 a_3 = b.$$

La posición de los índices (arriba y abajo) solo tiene sentido estético y solo así indican suma. Más adelante veremos que representan cantidades distintas.

El convenio de suma de Einstein es

- 1 Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- 2 Los índices repetidos son mudos (no importa las letras que los etiquete) y representan suma. Así:

$$k^j a_j = k^m a_m = k^1 a_1 + k^2 a_2 + k^3 a_3 = b.$$

La posición de los índices (arriba y abajo) solo tiene sentido estético y solo así indican suma. Más adelante veremos que representan cantidades distintas.

- 3 Llamaremos contracción cuando sumamos respecto a un par de índices, vale decir:

$$A_i^j \Rightarrow \sum_i A_i^j = A_1^j + A_2^j + A_3^j \Rightarrow A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3.$$

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores. Son arreglos bidimensionales (tridimensionales, tetradimensionales, según el número de índices). Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \rightarrow 1$, en un sólo número.

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores. Son arreglos bidimensionales (tridimensionales, tetradimensionales, según el número de índices). Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \rightarrow 1$, en un sólo número.
- Los índices libres (aquellos que no están sumados) indican el número de objetos disponibles y deben mantenerse a ambos lados de la ecuación. Por ejemplo:

$$B_i = K_i^k A_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_1^1 A_1 + K_1^2 A_2 + K_1^3 A_3 = B_1 \\ K_2^1 A_1 + K_2^2 A_2 + K_2^3 A_3 = B_2 \\ K_3^1 A_1 + K_3^2 A_2 + K_3^3 A_3 = B_1 \end{cases}$$

con lo cual $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones. La operación $B_{ij} = K_{ij}^k A_k$ representa 9.

- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$, y es nula en los otros casos:

$$K_{ij}^k \delta_k^i = K_{kj}^k = K_{ij}^i = K_{1j}^1 + K_{2j}^2 + K_{3j}^3.$$

- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_j^k = 1$ si $i = k$, y es nula en los otros casos:

$$K_{ij}^k \delta_k^i = K_{kj}^k = K_{ij}^i = K_{1j}^1 + K_{2j}^2 + K_{3j}^3.$$

- El símbolo de permutación de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{cuando } \{(i, j, k) = (1, 2, 3); (3, 1, 2); (2, 3, 1)\} \\ & \text{permutación cíclica} \\ -1 & \text{cuando } \{(i, j, k) = (1, 3, 2); (3, 2, 1); (2, 1, 3)\} \\ & \text{permutación impar o anticíclica} \\ 0 & \text{cuando } \{i = j, \quad i = k \quad \wedge \quad j = k\} \end{cases}$$

- Con lo cual:

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \Rightarrow \begin{cases} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

- Con lo cual:

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \Rightarrow \begin{cases} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

- Algunas propiedades de la delta de Kronecker y del símbolo de permutación de Levi-Civita son:

$$\begin{aligned} \delta_j^j &= 3, \\ \varepsilon_{jkm} \varepsilon^{ilm} &= \delta_j^i \delta_k^l - \delta_k^i \delta_j^l = \delta_j^i \delta_k^l - \delta_j^l \delta_k^i, \\ \varepsilon_{jmn} \varepsilon^{imn} &= 2\delta_j^i, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} &= 6. \end{aligned}$$

- La suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = (a^i + b^i) \mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i$
 $\Rightarrow c^i = a^i + b^i$ con $i = 1, 2, 3$.

- La suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = (a^i + b^i) \mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i$
 $\Rightarrow c^i = a^i + b^i$ con $i = 1, 2, 3$.
- El producto escalar : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\mathbf{ab}} = a^i b_i$ con $i = 1, 2, 3$.

- La suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = (a^i + b^i) \mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i$
 $\Rightarrow c^i = a^i + b^i$ con $i = 1, 2, 3$.
- El producto escalar : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\mathbf{ab}} = a^i b_i$ con $i = 1, 2, 3$.
- producto vectorial se puede expresar como: $c^i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k$
con $i, j, k = 1, 2, 3$.

- La suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = (a^i + b^i) \mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i$
 $\Rightarrow c^i = a^i + b^i$ con $i = 1, 2, 3$.
- El producto escalar : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\mathbf{ab}} = a^i b_i$ con $i = 1, 2, 3$.
- producto vectorial se puede expresar como: $c^i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k$
con $i, j, k = 1, 2, 3$.
- multiplicación mixta: $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle} =$
$$c^i \varepsilon_{ijk} a^j b^k = \varepsilon_{ijk} c^i a^j b^k = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y su base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, si rotamos el sistema de coordenadas un ángulo ϕ alrededor del eje z tendremos un nuevo sistema de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y una nueva base $\{\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\}$.

- La regla de transformación que relaciona ambos sistemas de coordenadas es:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos(\phi) - \tilde{y} \sin(\phi) \\ y = \tilde{x} \sin(\phi) + \tilde{y} \cos(\phi) \\ z = \tilde{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x} = x \cos(\phi) + y \sin(\phi) \\ \tilde{y} = -x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \\ \tilde{z} = z \end{cases}$$

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y su base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, si rotamos el sistema de coordenadas un ángulo ϕ alrededor del eje z tendremos un nuevo sistema de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y una nueva base $\{\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\}$.

- La regla de transformación que relaciona ambos sistemas de coordenadas es:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos(\phi) - \tilde{y} \sin(\phi) \\ y = \tilde{x} \sin(\phi) + \tilde{y} \cos(\phi) \\ z = \tilde{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x} = x \cos(\phi) + y \sin(\phi) \\ \tilde{y} = -x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \\ \tilde{z} = z \end{cases}$$

- Las bases transformarán como:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} \cos(\phi) + \mathbf{j} \sin(\phi) \\ \tilde{\mathbf{j}} = -\mathbf{i} \sin(\phi) + \mathbf{j} \cos(\phi) \\ \tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \end{cases}$$

- Diremos que un triplete de números (a^1, a^2, a^3) definen las componente de un vector $\mathbf{a} = a^1\mathbf{i} + a^2\mathbf{j} + a^3\mathbf{k}$ si estas cantidades transforman bajo la rotación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 &= a_1 \cos(\phi) + a_2 \sin(\phi), & \tilde{a}_2 &= -a_1 \sin(\phi) + a_2 \cos(\phi) \\ \tilde{a}_3 &= a_3.\end{aligned}$$

- Al usar la notación de índices podemos escribir las ecuaciones de transformación de coordenadas así:

$$\begin{cases} \tilde{x} &= x \cos(\phi) + y \sin(\phi) \\ \tilde{y} &= -x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \\ \tilde{z} &= z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^1 &= A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + A_3^1 x^3 \\ \tilde{x}^2 &= A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + A_3^2 x^3 \\ \tilde{x}^3 &= A_1^3 x^1 + A_2^3 x^2 + A_3^3 x^3 \end{cases} \Rightarrow \tilde{x}^i = \tilde{A}_j^i x^j, \text{ con: } i, j = 1, 2, 3.$$

Es decir

$$\tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j},$$

- como la transformación de coordenadas es invertible, se tiene que:
 $\tilde{x}^i = \tilde{A}_j^i x^j \Leftrightarrow x^j = A_i^j \tilde{x}^i$, con: $A_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}$, y $\tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$. Entonces,
 $\tilde{A}_k^i A_i^j = \delta_k^j$.

- como la transformación de coordenadas es invertible, se tiene que:
 $\tilde{x}^i = \tilde{A}_j^i x^j \Leftrightarrow x^j = A_i^j \tilde{x}^i$, con: $A_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}$, y $\tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$. Entonces,
 $\tilde{A}_k^i A_i^j = \delta_k^j$.
- Por lo tanto, las componentes de un vector transformarán de la manera siguiente:

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} a^j \equiv \tilde{A}_j^i a^j \quad \Leftrightarrow \quad a^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{a}^i \equiv A_i^j \tilde{a}^i .$$

- como la transformación de coordenadas es invertible, se tiene que:

$$\tilde{x}^i = \tilde{A}_j^i x^j \Leftrightarrow x^j = A_i^j \tilde{x}^i, \text{ con: } A_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}, \text{ y } \tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}. \text{ Entonces, } \tilde{A}_k^i A_i^j = \delta_k^j.$$

- Por lo tanto, las componentes de un vector transformarán de la manera siguiente:

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} a^j \equiv \tilde{A}_j^i a^j \Leftrightarrow a^j = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{a}^i \equiv A_i^j \tilde{a}^i.$$

- y en general un objeto con varios índices (componentes de un tensor) transformará como:

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m} T^{km} \Leftrightarrow T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{T}^{km}, \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta_l^i,$$

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \rightarrow a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \rightarrow a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.
- Si dos vectores polares \mathbf{a} y \mathbf{b} , son transformados bajo reflexión como en el caso anterior, entonces un vector axial \mathbf{c} transformará como: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{c}}$. Es decir, los vectores axiales o pseudovectores cambian de signo bajo reflexión de los vectores que los generan.

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \rightarrow a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.
- Si dos vectores polares \mathbf{a} y \mathbf{b} , son transformados bajo reflexión como en el caso anterior, entonces un vector axial \mathbf{c} transformará como: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{c}}$. Es decir, los vectores axiales o pseudovectores cambian de signo bajo reflexión de los vectores que los generan.
- De igual manera $d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ queda invariante bajo la transformación de reflexión, mientras que $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ cambia de signo. Llamaremos escalar a d y pseudoescalar a V .

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \rightarrow a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.
- Si dos vectores polares \mathbf{a} y \mathbf{b} , son transformados bajo reflexión como en el caso anterior, entonces un vector axial \mathbf{c} transformará como: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{c}}$. Es decir, los vectores axiales o pseudovectores cambian de signo bajo reflexión de los vectores que los generan.
- De igual manera $d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ queda invariante bajo la transformación de reflexión, mientras que $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ cambia de signo. Llamaremos escalar a d y pseudoescalar a V .
- Pseudovectores: la cantidad de momento angular, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$; el torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ y el campo de inducción magnética, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$.

- En general, podemos representar la reflexión (??) bajo el esquema que presentamos en (10), es decir, como transformaciones del tipo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{a}_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} .$$

donde: $\tilde{a}^i = \tilde{A}_j^i a^j$, donde $\tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es la matriz

de transformación de coordenadas.

- Las componentes de vectores y pseudovectores transforman:

$$\text{si: } \tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{a}^i = \tilde{A}_j^i a^j, & \text{vectores,} \\ \tilde{p}^i = \det |\tilde{A}| \tilde{A}_j^i p^j, & \text{pseudovectores.} \end{cases}$$

$\det |\tilde{A}| = 1$ transformaciones propias y $\det |\tilde{A}| = -1$ transformaciones impropias,

- Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores: $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones.

- Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores: $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones.
- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ de otro modo se anula. El símbolo de permutación de Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$

- Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores: $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones.
- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ de otro modo se anula. El símbolo de permutación de Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$
- Algebra de Vectores e índices

- Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores: $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones.
- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ de otro modo se anula. El símbolo de permutación de Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$
- Algebra de Vectores e índices
- Rotación de Sistemas de coordenadas

- Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores: $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones.
- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ de otro modo se anula. El símbolo de permutación de Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$
- Algebra de Vectores e índices
- Rotación de Sistemas de coordenadas
- Transformación general de coordenadas de coordenadas

- Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:
$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$
- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores: $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones.
- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ de otro modo se anula. El símbolo de permutación de Levi-Civita $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$
- Algebra de Vectores e índices
- Rotación de Sistemas de coordenadas
- Transformación general de coordenadas de coordenadas
- Escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores

- Si tenemos tres vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ queremos ver si se cumple:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

- Si tenemos tres vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ queremos ver si se cumple:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

- Vimos que los vectores polares transforman bajo una reflexión respecto al plano yz de la forma:

$$\hat{\mathbf{i}}_1 \rightarrow -\hat{\mathbf{i}}_1 \Rightarrow (a^{1'}, a^{2'}, a^{3'}) = (-a^1, a^2, a^3).$$

Para saber que pasa con el vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, cuando lo sometemos a esta reflexión, estudiemos como se transforman sus componentes directamente de la definición del producto vectorial, miremos con respecto a la componente x de \mathbf{c} . Calcule $\mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$