#### Pequeñas oscilaciones

#### Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia



9 de abril de 2025

#### Agenda



- Pequeñas oscilaciones 1D
- 2 Ejemplo: El péndulo simple
- Oscilaciones con varios grados de libertad
- 4 Ejemplo: El Péndulo doble



ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{
m ef}(q)$ 



- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$



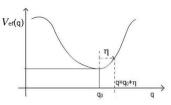
- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- ullet La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{\rm ef}\left(q_0\right)=0\Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0}=0$



- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- ullet La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{\rm ef}\left(q_0\right)=0\Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0}=0$
- Será estable si  $\left. \frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2} \right|_{q_0} > 0$

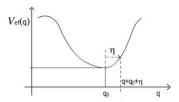


- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- ullet La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- ullet Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{
  m ef}\left(q_0
  ight)=0 \Rightarrow rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}igg|_{q_0}=0$
- Será estable si  $\left. \frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2} \right|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo





- ullet Como vimos en la clase de estabiliad dado un  $\mathcal{L}=rac{1}{2}c\dot{q}^2-V_{ ext{ef}}(q)$
- La ecuación de movimiento es  $c\ddot{q}=f_{
  m ef}(q)\equiv -rac{\partial V_{
  m ef}}{\partial q}$
- Que tendrá un mínimo en  $q_0$ , cuando  $f_{\rm ef}\left(q_0\right)=0\Rightarrow \left.\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial q}\right|_{q_0}=0$
- Será estable si  $\frac{\partial V_{\rm ef}^2}{\partial q^2}\Big|_{q_0} > 0$
- Igual que en el caso anterior perturbamos alrededor del mínimo



ullet Desarrollamos por Taylor,  $V_{
m ef}\left(q
ight)$  alrededor de  $q=q_0$ , y tenemos

$$V_{ ext{ef}}(q) = V_{ ext{ef}}\left(q_0 + \eta
ight) = V\left(q_0
ight) + \left. rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q} 
ight|_{q_0} \eta + \left. rac{1}{2} rac{\partial^2 V_{ ext{ef}}}{\partial q^2} 
ight|_{q_0} \eta^2 + \cdots,$$



• Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$ 



- Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$
- ullet La ecuación de movimiento será  $c\ddot{\eta}=-rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q}=-K\left(q-q_0
  ight)\equiv -K\eta$



- Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$
- ullet La ecuación de movimiento será  $c\ddot{\eta}=-rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q}=-K\left(q-q_{0}
  ight)\equiv-K\eta$
- Entonces,  $\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$ , donde  $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial q^2} \Big|_{q_0}$  es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de  $q_0$ .



- Despreciando términos en potencias de  $\eta$  de orden superior al cuadrático, tenemos  $V_{\rm ef}(q)=V_{\rm ef}\left(q_0+\eta\right)\approx \frac{1}{2}K\left(q-q_0\right)^2=\frac{1}{2}K\eta^2$
- ullet La ecuación de movimiento será  $c\ddot{\eta}=-rac{\partial V_{ ext{ef}}}{\partial q}=-K\left(q-q_0
  ight)\equiv -K\eta$
- Entonces,  $\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$ , donde  $\omega^2 \equiv \frac{\kappa}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V_{\rm ef}}{\partial q^2} \Big|_{q_0}$  es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones alrededor de  $q_0$ .
- Que tendrá como solución  $\eta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi) \equiv \text{Re}\left[Ae^{i(\omega t + \varphi)}\right] = \text{Re}\left(ae^{i\omega t}\right)$  donde  $a = Ae^{i\varphi}$  es la amplitud compleja



Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud  $\ell$ , que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

• El lagrangiano  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1-\cos\theta)$ , donde  $\theta = 0$ , es un punto de equilibrio estable.



Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud  $\ell$ , que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 mg\ell(1 \cos\theta)$ , donde  $\theta = 0$ , es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños:  $\cos\theta \approx 1 \frac{\theta^2}{2}$ , tendremos  $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$



Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud  $\ell$ , que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 mg\ell(1 \cos\theta)$ , donde  $\theta = 0$ , es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños:  $\cos\theta \approx 1 \frac{\theta^2}{2}$ , tendremos  $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$
- La ecuación de movimiento es  $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0$   $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$



Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud  $\ell$ , que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 mg\ell(1 \cos\theta)$ , donde  $\theta = 0$ , es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños:  $\cos\theta \approx 1 \frac{\theta^2}{2}$ , tendremos  $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$
- La ecuación de movimiento es  $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0$   $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$
- La frecuencia de oscilación será  $\omega^2 = \frac{K}{c} = \frac{g}{\ell} \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$



Una masa m está unida a una varilla rígida sin masa de longitud  $\ell$ , que oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad.

- El lagrangiano  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 mg\ell(1 \cos\theta)$ , donde  $\theta = 0$ , es un punto de equilibrio estable.
- Para ángulos pequeños:  $\cos \theta \approx 1 \frac{\theta^2}{2}$ , tendremos  $V(\theta) \approx mg\ell \cdot \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow \mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$
- La ecuación de movimiento es  $m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\theta = 0$   $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$
- La frecuencia de oscilación será  $\omega^2 = \frac{K}{c} = \frac{g}{\ell} \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

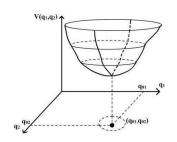
Comparación	General	Péndulo
Coordenada	q	$\theta$
Equilibrio	$q_0$	0
Perturbación	$\eta = q - q_0$	heta
Potencial expandido	$V(q_0) + \frac{1}{2}K\eta^2$	$\frac{1}{2}$ mgl $\theta^2$
Frecuencia angular	$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{c}}$	$\sqrt{\frac{g}{I}}$



• Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i : i = 1, ..., s\}$  con energía potencial  $V(q_1, ..., q_s)$ .

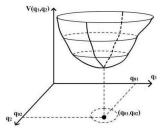


- Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i : i = 1, ..., s\}$  con energía potencial  $V(q_1, ..., q_s)$ .
- La configuración de equilibrio del sistema en  $\{q_{0i}: i=1,\ldots,s\}$ , con  $\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{0i}}=0, \quad i=1,2,\ldots,s$





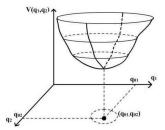
- Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i : i = 1, ..., s\}$  con energía potencial  $V(q_1, ..., q_s)$ .
- La configuración de equilibrio del sistema en  $\{q_{0i}: i=1,\ldots,s\}$ , con  $\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{0i}}=0, \quad i=1,2,\ldots,s$



ullet Perturbando las  $q_i$ , tendremos  $q_i=q_{0i}+\eta_i,$  con  $\eta_i o 0$   $\left(rac{\eta_i}{q_{0i}}\ll 1
ight)$ 



- Dado un sistema con s grados de libertad  $\{q_i: i=1,\ldots,s\}$  con energía potencial  $V(q_1,\ldots,q_s)$ .
- La configuración de equilibrio del sistema en  $\{q_{0i}: i=1,\ldots,s\}$ , con  $\frac{\partial V}{\partial q_i}\Big|_{q_{0i}}=0, \quad i=1,2,\ldots,s$



- ullet Perturbando las  $q_i$ , tendremos  $q_i=q_{0i}+\eta_i,$  con  $\eta_i o 0$   $\left(rac{\eta_i}{q_{0i}}\ll 1
  ight)$
- El valor del potencial  $V(q_1, ..., q_s)$  cerca de la configuración de equilibrio se obtiene de la expansión de Taylor en varias variables de  $V(q_1, ..., q_s)$  alrededor de  $\{q_{0i}\}$ , con  $q_i = q_{0i} + q_{ii}$



• Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$ 



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \frac{0}{q_i} + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01},...,q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\}=(q_{01},...,q_{0s})$ .



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \frac{1}{q_{0i}} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \frac{1}{q_{0i}} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V\left(q_1,\ldots,q_s\right) = V\left(\eta_1,\ldots,\eta_s\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}\eta_i\eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{q_{0i}\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01},...,q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\}=(q_{01},...,q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{q_{0i}\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es  $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$  donde los coeficientes  $T_{ij} = T_{ji}$  representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).



- Esto es  $V(q_1, ..., q_s) = V(q_{01}, ..., q_{0s}) + \sum_{i} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\{q_{0i}\}} \frac{1}{q_{0i}} \sum_{i} \sum_{j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q_{0i}\}} \eta_i \eta_j + \cdots$
- Los  $V(q_{01}, \ldots, q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\} = (q_{01}, \ldots, q_{0s})$ .
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1, \ldots, q_s) = V(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{q_{0i}\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es  $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$  donde los coeficientes  $T_{ij}=T_{ji}$  representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos  $T=rac{1}{2}\sum_{i,j}T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$



- Esto es  $V(q_1,\ldots,q_s) =$  $V\left(q_{01},\ldots,q_{0s}
  ight)+\sum_{j}\left(rac{\partial V}{\partial q_{i}}
  ight)_{\{q_{0i}\}}\eta_{i}+rac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j}\left(rac{\partial^{2} V}{\partial q_{i}\partial q_{j}}
  ight)_{\{q_{0i}\}}\eta_{i}\eta_{j}+\cdots$
- Los  $V(q_{01},...,q_{0s})$  es un valor constante y las derivadas parciales están evaluadas en  $\{q_{0i}\}=(q_{01},\ldots,q_{0s}).$
- En la configuración de equilibrio  $q_i = q_{0i} + \eta_i$ , el potencial se puede expresar como  $V(q_1,\ldots,q_s)=V(\eta_1,\ldots,\eta_s)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_{ij}\eta_i\eta_j$
- ullet donde los coeficientes  $V_{ij}\equiv\left(rac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}
  ight)_{\{m{q}_0\}}$  son simétricos,  $V_{ij}=V_{ji}$
- La energía cinética del sistema es  $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$  donde los coeficientes  $T_{ii} = T_{ji}$  representan parámetros constantes que dependen de propiedades del sistema (masas, longitudes, etc).
- Para pequeños desplazamientos  $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$
- El Lagrangiano del sistema cerca de la configuración de equilibrio es  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i.i.} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j)$   $i, j = 1, 2, \dots, s$

7/11



• La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$ 



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es  $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$  tenemos  $\sum_j \left( -\omega^2 T_{kj} + V_{kj} \right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n \left( V_{mn} \omega^2 T_{mn} \right) a_n = 0$



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es  $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$  tenemos  $\sum_j \left( -\omega^2 T_{kj} + V_{kj} \right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n \left( V_{mn} \omega^2 T_{mn} \right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad s = 1,2 tendremos

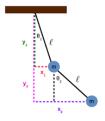
$$m = 1 : (V_{11} - \omega^2 T_{11}) a_1 + (V_{12} - \omega^2 T_{12}) a_2 = 0$$
  
 $m = 2 : (V_{21} - \omega^2 T_{21}) a_1 + (V_{22} - \omega^2 T_{22}) a_2 = 0$ 



- La ecuación de Lagrange en  $\eta_k$  es  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \left( \delta_{ik} \dot{\eta}_j + \delta_{jk} \dot{\eta}_i \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j + \sum_i T_{ik} \dot{\eta}_i \right) = \sum_j T_{kj} \dot{\eta}_j$
- $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (V_{ij} \delta_{ik} \eta_j + V_{ij} \delta_{jk} \eta_i) = -\sum_j V_{kj} \eta_j$
- la ecuación de movimiento para  $\eta_k$  queda  $\sum_j (T_{kj}\ddot{\eta}_j + V_{kj}\eta_j) = 0$ , donde cada término de la suma tiene la forma de una ecuación para un oscilador armónico.
- Como la solución es  $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$  tenemos  $\sum_j \left( -\omega^2 T_{kj} + V_{kj} \right) a_j e^{i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_n \left( V_{mn} \omega^2 T_{mn} \right) a_n = 0$
- Es decir, para dos grados de libertad s=1,2 tendremos  $m=1: (V_{11}-\omega^2 T_{11}) a_1 + (V_{12}-\omega^2 T_{12}) a_2 = 0$   $m=2: (V_{21}-\omega^2 T_{21}) a_1 + (V_{22}-\omega^2 T_{22}) a_2 = 0$
- En general, existe solución no trivial  $\eta_j(t) \neq 0$  si  $a_j \neq 0, \forall j$ , cuando det  $\left| V_{ij} \omega^2 T_{ij} \right| = 0$ . Las frecuencias características  $\omega$  deben ser reales para que las soluciones tengan sentido físico.



Encontrar las frecuencias de oscilación del péndulo doble en el régimen de pequeñas oscilaciones. Sean dos masas puntuales  $m_1=m_2=m$ , suspendidas por dos varillas rígidas e inextensibles de longitud  $\ell$ . Donde los angulos  $\theta_1,\theta_2$ , son las desviaciones de las varillas respecto a la vertical. Suponga el que movimiento se desarrolla en un plan, la gravedad es uniforme y  $\theta_1,\theta_2\ll 1$ 



Las posiciones de las masas son

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell \sin \theta_1 \approx \ell \theta_1, & y_1 &= -\ell \cos \theta_1 \approx -\ell + \frac{1}{2} \ell \theta_1^2 \text{ y} \\ x_2 &= x_1 + \ell \sin \theta_2 \approx \ell (\theta_1 + \theta_2), & y_2 &= y_1 - \ell \cos \theta_2 \approx -2\ell + \frac{1}{2} \ell \theta_1^2 + \frac{1}{2} \ell \theta_2^2 \end{aligned}$$



• La energía cinética  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$   $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$ 



- La energía cinética  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$   $T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial  $V=-mgy_1-mgy_2pprox mg\ell\left( heta_1^2+rac{1}{2} heta_2^2
  ight)$



- La energía cinética  $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$   $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial  $V=-mgy_1-mgy_2pprox mg\ell\left( heta_1^2+rac{1}{2} heta_2^2
  ight)$
- El Lagrangiano  $\mathcal{L} = T V = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) \frac{1}{2}mg\ell\left(2\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$



- La energía cinética  $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$   $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial  $V=-mgy_1-mgy_2pprox mg\ell\left( heta_1^2+rac{1}{2} heta_2^2
  ight)$
- El Lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{T} \mathcal{V} = \frac{1}{2} m \ell^2 \left( 2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right) \frac{1}{2} mg\ell \left( 2\theta_1^2 + \theta_2^2 \right)$
- Si definimos  $\eta_1=\theta_1$ , y  $\eta_2=\theta_2$ , tendremos, respectivamente, la energía cinética y potencial de la forma

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2 \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$
 $V = \frac{1}{2}mg\ell \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ 





- La energía cinética  $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2 \Rightarrow$   $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m\ell^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right)$
- Energía potencial  $V=-mgy_1-mgy_2pprox mg\ell\left( heta_1^2+rac{1}{2} heta_2^2
  ight)$
- El Lagrangiano  $\mathcal{L} = \mathcal{T} \mathcal{V} = \frac{1}{2} m \ell^2 \left( 2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right) \frac{1}{2} mg\ell \left( 2\theta_1^2 + \theta_2^2 \right)$
- Si definimos  $\eta_1=\theta_1$ , y  $\eta_2=\theta_2$ , tendremos, respectivamente, la energía cinética y potencial de la forma

$$T = rac{1}{2}m\ell^2 \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix}$$
 y  $V = rac{1}{2}mg\ell \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ 

• La ecuación de movimiento es  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0$ 



• Si buscamos soluciones de la forma  $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$  tendremos

$$\det \begin{bmatrix} mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0, \text{ con lo cual}$$



- Si buscamos soluciones de la forma  $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$  tendremos det  $\begin{bmatrix} mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$ , con lo cual
- $\bullet \begin{vmatrix} g 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g 2\ell\omega^2)(2g \ell\omega^2) (\ell\omega^2)^2 = 0$



- Si buscamos soluciones de la forma  $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$  tendremos det  $\begin{bmatrix} mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$ , con lo cual
- $2g^2 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$



- Si buscamos soluciones de la forma  $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$  tendremos det  $\begin{bmatrix} mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$ , con lo cual
- $\bullet \ \begin{vmatrix} g 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g 2\ell\omega^2)(2g \ell\omega^2) (\ell\omega^2)^2 = 0$
- $2g^2 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$
- $\omega^2 = \frac{3g\ell \pm \sqrt{(3g\ell)^2 8g^2\ell^2}}{2\ell^2} = \frac{3g \pm \sqrt{9g^2 8g^2}}{2\ell} = \frac{3g \pm g}{2\ell}$



- Si buscamos soluciones de la forma  $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$  tendremos det  $\begin{bmatrix} mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$ , con lo cual
- $\bullet \begin{vmatrix} g 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g 2\ell\omega^2)(2g \ell\omega^2) (\ell\omega^2)^2 = 0$
- $2g^2 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$
- $\omega^2 = \frac{3g\ell \pm \sqrt{(3g\ell)^2 8g^2\ell^2}}{2\ell^2} = \frac{3g \pm \sqrt{9g^2 8g^2}}{2\ell} = \frac{3g \pm g}{2\ell}$
- y las frecuencias de oscilación son:  $\omega_1^2=\frac{4g}{2\ell}=\frac{2g}{\ell}$ , y  $\omega_2^2=\frac{2g}{2\ell}=\frac{g}{\ell}$

L.A. Núñez (UIS)



- Si buscamos soluciones de la forma  $\eta_i(t) = a_i e^{i\omega t}$  tendremos det  $\begin{bmatrix} mg\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \omega^2 m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$ , con lo cual
- $\bullet \begin{vmatrix} g 2\ell\omega^2 & -\ell\omega^2 \\ -\ell\omega^2 & 2g \ell\omega^2 \end{vmatrix} = (g 2\ell\omega^2)(2g \ell\omega^2) (\ell\omega^2)^2 = 0$
- $2g^2 3g\ell\omega^2 + 2\ell^2\omega^4 \ell^2\omega^4 = 0 \Rightarrow 2g^2 3g\ell\omega^2 + \ell^2\omega^4 = 0$
- $\omega^2 = \frac{3g\ell \pm \sqrt{(3g\ell)^2 8g^2\ell^2}}{2\ell^2} = \frac{3g \pm \sqrt{9g^2 8g^2}}{2\ell} = \frac{3g \pm g}{2\ell}$
- y las frecuencias de oscilación son:  $\omega_1^2=\frac{4g}{2\ell}=\frac{2g}{\ell}$ , y  $\omega_2^2=\frac{2g}{2\ell}=\frac{g}{\ell}$
- Para  $\omega_1$ : masas oscilan en oposición de fase Para  $\omega_2$ : masas oscilan en fase