Modos normales de oscilación

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

9 de abril de 2025

Agenda

Modos normales de oscilación $1/2$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$

Modos normales de oscilación 1/2

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- La condición $\det\left|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right| = 0$ es decir

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \ldots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

- Las s ecuaciones de movimiento para un sistema con pequeñas oscilaciones $\{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ alrededor del equilibrio de $\{q_{01}, \ldots, q_{0s}\}$ son $\sum_j \left(T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j \right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- Si suponemos una solución de la forma $\eta_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ tendremos $\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, s$
- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$ es decir

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \ldots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & & \\ \vdots & & \end{vmatrix} = 0$$

- Esto permite calcular las s frecuencias de pequeñas oscilaciones $\omega_n, \quad n = 1, 2, \ldots, s$ como soluciones al polinomio característico

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s=2$
  $i=1:\left(V_{11}-\omega_n^2 T_{11}\right) a_1+\left(V_{12}-\omega_n^2 T_{12}\right) a_2=0$
  $i=2:\left(V_{21}-\omega_n^2 T_{21}\right) a_1+\left(V_{22}-\omega_n^2 T_{22}\right) a_1=0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s=2$
  $i=1:\left(V_{11}-\omega_n^2 T_{11}\right) a_1+\left(V_{12}-\omega_n^2 T_{12}\right) a_2=0$
  $i=2:\left(V_{21}-\omega_n^2 T_{21}\right) a_1+\left(V_{22}-\omega_n^2 T_{22}\right) a_1=0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t)=\sum_n c_n a_j\left(\omega_n\right) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j\left(\omega_n\right) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j\left(\omega_n\right) \xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales

Modos normales de oscilación 2/2

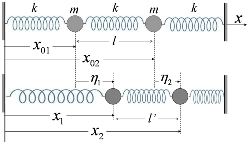
- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.

Modos normales de oscilación 2/2

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j(\omega_n)$.
  Si $s = 2$
  $i = 1 : \left(V_{11} - \omega_n^2 T_{11}\right) a_1 + \left(V_{12} - \omega_n^2 T_{12}\right) a_2 = 0$
  $i = 2 : \left(V_{21} - \omega_n^2 T_{21}\right) a_1 + \left(V_{22} - \omega_n^2 T_{22}\right) a_1 = 0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1(\omega_n)$ y $a_2(\omega_n)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t) = \sum_n c_n a_j(\omega_n) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \ldots, s$, tendremos $\eta_j(t) = \sum_n a_j(\omega_n)\xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0$.
- En el caso de $s = 2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son
  $\eta_1 = a_1(\omega_1)\xi_1 + a_1(\omega_2)\xi_2, \quad \eta_2 = a_2(\omega_1)\xi_1 + a_2(\omega_2)\xi_2$

- Para cada ω_n, existe un sistema de s ecuaciones para $a_j\left(\omega_n\right)$.
  Si $s=2$
  $i=1:\left(V_{11}-\omega_n^2 T_{11}\right) a_1+\left(V_{12}-\omega_n^2 T_{12}\right) a_2=0$
  $i=2:\left(V_{21}-\omega_n^2 T_{21}\right) a_1+\left(V_{22}-\omega_n^2 T_{22}\right) a_1=0$
  Para cada ω_n tendremos 2 ecuaciones lineales para $a_1\left(\omega_n\right)$ y $a_2\left(\omega_n\right)$
- La solución general, $\eta_j(t)$, será la superposición de las soluciones $\eta_j(t)=\sum_n c_n a_j\left(\omega_n\right) e^{i\omega_n t}$, donde c_n son las fases complejas.
- Si $\xi_n \equiv c_n e^{i\omega_n t}, \quad n=1,2,\ldots,s$, tendremos $\eta_j(t)=\sum_n a_j\left(\omega_n\right)\xi_n$ la solución es una combinación lineal de las coordenadas normales
- Cada coordenada normal ξ_n satisface la ecuación $\ddot{\xi}_n+\omega_n^2\xi_n=0$.
- En el caso de $s=2$, las soluciones generales para los pequeños desplazamientos son
  $\eta_1=a_1\left(\omega_1\right)\xi_1+a_1\left(\omega_2\right)\xi_2, \quad \eta_2=a_2\left(\omega_1\right)\xi_1+a_2\left(\omega_2\right)\xi_2$
- Para ξ_2 tenemos $\eta_1=a_1\left(\omega_2\right)\xi_2, \quad \eta_2=a_2\left(\omega_2\right)\xi_2$, 2 pequeños desplazamientos que oscilas con la frecuencia ω_2 alrededor de su posición de equilibrio con amplitudes $a_1\left(\omega_2\right)$ y $a_2\left(\omega_2\right)$.

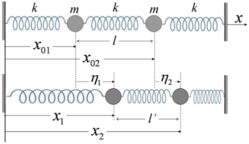
Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,

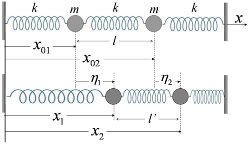
Los Osciladores

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$

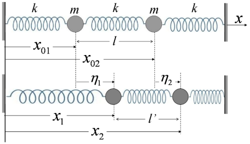
Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$

Los Osciladores

Encontrar las frecuencias de oscilación para un sistema de dos partículas de masa m conectadas com resortes horizontales, de constantes k y longitud en reposo l.



- El sistema tiene dos grados de libertad ($s = 2$). Para pequeños desplazamientos η_1 y η_2, con $x_i = x_{0i} + \eta_i$,
- La energía cinética para pequeños desplazamientos del equilibrio es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, con
  $T_{11} = m, \quad T_{22} = m, \quad T_{12} = T_{21} = 0$
- La energía potencial del sistema para pequeños desplazamientos es $V = \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\left(l' - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 = \frac{1}{2}k\left[\eta_1^2 + \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \eta_2^2\right]$
- Donde $l' - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$

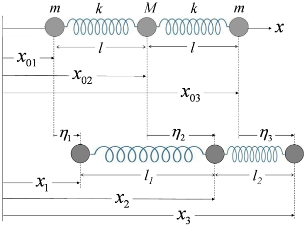
- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es $\left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$

- Entonces $V = \frac{1}{2}\left[2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - 2k\eta_1\eta_2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$ con $V_{11} = 2k, \quad V_{22} = 2k, \quad V_{12} = V_{21} = -k.$
- Por lo tanto $\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = 0$
- Es decir $\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$
- La ecuación característica resultante es $\left(2k - \omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow 2k - \omega^2 m = \pm k \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$
- Finalmente $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

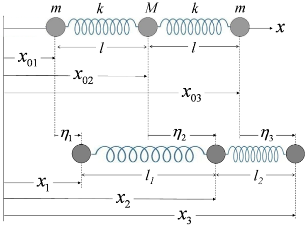
- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO2



M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1, l_2, las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Consideremos el siguiente sistema que representa la molécula de CO2



M masa del átomo C; m masa de los átomos O; l la separación entre posiciones de equilibrio; la constante elástica k de interacción C-O; l_1, l_2, las distancias de los átomos fuera del equilibrio.

- Sean x_{01}, x_{02}, x_{03} las posiciones de equilibrio de las tres partículas y $\eta_i = x_i - x_{0i}$, con $i = 1, 2, 3$ los desplazamientos del equilibrio.

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\eta_3 - \eta_2\right)^2 \Rightarrow$ $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2}k\left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\eta_3 - \eta_2\right)^2 \Rightarrow$ $V = \frac{1}{2}k\left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$

Energías cinética y potencial

- La energía cinética es $T = \frac{1}{2} m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} M\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2} m\dot{\eta}_3^2$
- La energía potencial es $V = \frac{1}{2} k \left(l_1 - l\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(l_2 - l\right)^2$.
- Como $l_1 - l = (x_2 - x_1) - (x_{02} - x_{01}) = \eta_2 - \eta_1$ y $l_2 - l = (x_3 - x_2) - (x_{03} - x_{02}) = \eta_3 - \eta_2$
- Tendremos $V = \frac{1}{2} k \left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\eta_3 - \eta_2\right)^2 \Rightarrow$ $V = \frac{1}{2} k \left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right)$
- Entonces, como $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j$, y $V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}\eta_i\eta_j$
- Tendremos $T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} = m & T_{12} = 0 & T_{13} = 0 \\ T_{21} = 0 & T_{22} = M & T_{23} = 0 \\ T_{31} = 0 & T_{32} = 0 & T_{33} = m \end{pmatrix}$
- y $V_{ij} = \begin{pmatrix} V_{11} = k & V_{12} = -k & V_{13} = 0 \\ V_{21} = -k & V_{22} = 2k & V_{23} = -k \\ V_{31} = 0 & V_{32} = -k & V_{33} = k \end{pmatrix}$

- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$, implica

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$

Las frecuencias de oscilación ω_n

- La condición $\det\left|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right| = 0$, implica
$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$
- La ecuación característica cúbica para ω_n, es
$$\left(k - \omega^2 m\right)\left[\left(2k - \omega^2 M\right)\left(k - \omega^2 m\right) - k^2\right] - k^2\left(k - \omega^2 m\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2\left(k - \omega^2 m\right)\left[k(M + 2m) - \omega^2 Mm\right] = 0$$

Las frecuencias de oscilación ω_n

- La condición $\det \left| V_{ij} - \omega^2 T_{ij} \right| = 0$, implica
$$\left| \begin{array}{ccc} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{array} \right| = 0 \text{ para las frecuencias } \omega_n$$
- La ecuación característica cúbica para ω_n, es
$$\left(k-\omega^2 m\right)\left[\left(2k-\omega^2 M\right)\left(k-\omega^2 m\right)-k^2\right]-k^2\left(k-\omega^2 m\right)=0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2\left(k-\omega^2 m\right)\left[k(M+2m)-\omega^2 Mm\right]=0$$
- Con soluciones $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$

Modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n,

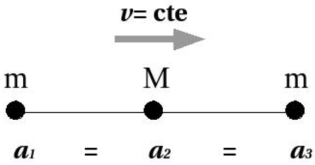
$$
\begin{array}{lrcl}
i = 1: & \left(k - \omega_n^2 m\right) a_1 - k a_2 & = & 0 \\
i = 2: & -k a_1 + \left(2k - \omega_n^2 M\right) a_2 - k a_3 & = & 0 \\
i = 3: & -k a_2 + \left(k - \omega_n^2 m\right) a_3 & = & 0
\end{array}
$$

Modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n,
$$\begin{array}{lcl} i=1: & \left(k-\omega_n^2 m\right) a_1 - k a_2 & = & 0 \\ i=2: & -k a_1 + \left(2k-\omega_n^2 M\right) a_2 - k a_3 & = & 0 \\ i=3: & -k a_2 + \left(k-\omega_n^2 m\right) a_3 & = & 0 \end{array}$$
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 =$ cte $\Rightarrow$ reposo o velocidad constante

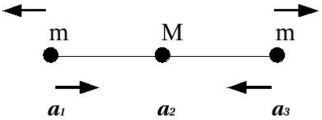
Modo normal de oscilación para $\omega_1 = 0$

- Las amplitudes a_i surgen de las 3 ecuaciones para cada ω_n,
$$\begin{array}{lrcl} i=1: & \left(k-\omega_n^2 m\right)a_1 - ka_2 & = & 0 \\ i=2: & -ka_1 + \left(2k-\omega_n^2 M\right)a_2 - ka_3 & = & 0 \\ i=3: & -ka_2 + \left(k-\omega_n^2 m\right)a_3 & = & 0 \end{array}$$
- La frecuencia angular $\omega_1 = 0$ es una traslación uniforme de la molécula ya que $\ddot{\zeta}_1 = 0 \Rightarrow \dot{\zeta}_1 =$ cte $\Rightarrow$ reposo o velocidad constante
- Entonces para $\omega_1 = 0$, tenemos $a_1(\omega_1) = a_2(\omega_1) = a_3(\omega_1)$



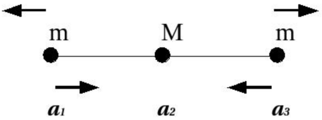
Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
  Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$

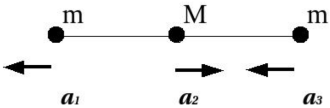


Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
  Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$

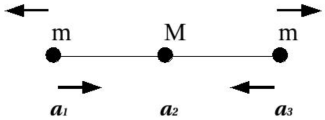


- Ahora para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$,
  Tenemos $a_1(\omega_3) = a_3(\omega_3)$ y $a_2(\omega_3) = \frac{k - \omega_3^2 m}{k} a_1(\omega_3) \equiv -\frac{2m}{M} a_1(\omega_3)$

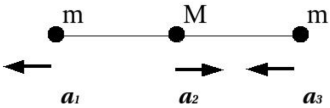


Modos para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$

- Entonces para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
  Tenemos $a_1(\omega_2) = -a_3(\omega_2)$ y $a_2(\omega_2) = 0$



- Ahora para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$,
  Tenemos $a_1(\omega_3) = a_3(\omega_3)$ y $a_2(\omega_3) = \frac{k-\omega_3^2 m}{k} a_1(\omega_3) \equiv -\frac{2m}{M} a_1(\omega_3)$



- Los modos normales reflejan que el momento lineal total de la molécula es constante, puesto que la fuerza externa total sobre la molécula es cero.