Dinámica de Partículas

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

8 de agosto de 2024

Agenda

Tres Leyes de Newton

- Primera Ley de Newton:
  Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.

Tres Leyes de Newton

- Primera Ley de Newton:
  Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.
- Segunda Ley de Newton:
  Existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ está descrito por la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

Tres Leyes de Newton

- Primera Ley de Newton:
  Una partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme si la fuerza total sobre ella es nula.
- Segunda Ley de Newton:
  Existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ está descrito por la ecuación

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

- Tercera Ley de Newton:
  Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza que ejerce una partícula j sobre una partícula i, y $\mathbf{F}_{ij}$ es la fuerza que ejerce la partícula i sobre la partícula j, entonces

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}.$$

Limitaciones del Marco Newtoniano

El esquema newtoniano tiene limitaciones

- Si vamos muy rápido $v \approx c$ debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

Limitaciones del Marco Newtoniano

El esquema newtoniano tiene limitaciones

- Si vamos muy rápido $v \approx c$ debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

- La tercera ley de Newton, puede ser violada en sistemas fuera de equilibrio, como partículas mesoscópicas en plasmas complejos (Ivlev, A., et al (2014). Statistical Mechanics where Newton's Third Law is Broken. `https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.011035`)

Limitaciones del Marco Newtoniano

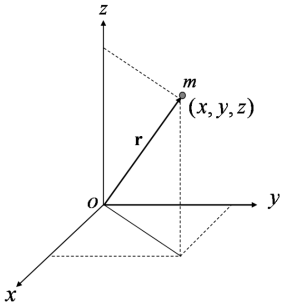
El esquema newtoniano tiene limitaciones

- Si vamos muy rápido $v \approx c$ debemos considerar la relatividad especial
- Si tenemos grandes masas, debemos considerar Relatividad General
- Si estamos en lo muy pequeño (escalas atómicas) debemos considerar la Mecánica Cuántica

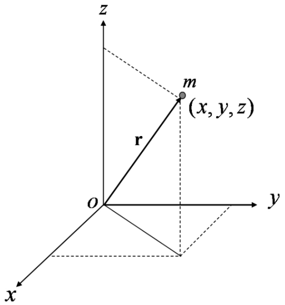
Pero también a escala mesoscópica y en dinámica de medios contínuos

- La tercera ley de Newton, puede ser violada en sistemas fuera de equilibrio, como partículas mesoscópicas en plasmas complejos (Ivlev, A., et al (2014). Statistical Mechanics where Newton's Third Law is Broken. `https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.011035`)
- En mecánica de medios continuos de materiales compuestos, la relación entre la fuerza y la aceleración se vuelve no local. (Milton, G., & Willis, J. (2007). On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. `https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1795`.

Posición



- **Sistema de referencia u observador inercial**: convención para designar una posición (en coordenadas cartesianas) $\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ o ubicación espacial a una partícula u objeto con respecto a un origen o punto escogido O. El observador no puede estar acelerado



- **Sistema de referencia u observador inercial**: convención para designar una posición (en coordenadas cartesianas) $\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ o ubicación espacial a una partícula u objeto con respecto a un origen o punto escogido O. El observador no puede estar acelerado
- La posición puede depender del tiempo $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

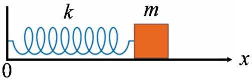
- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$

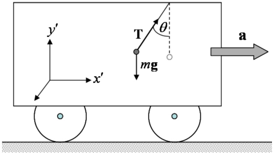
Desplazamiento, velocidad y Aceleración

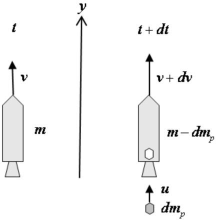
- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$
- cantidad de momento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Desplazamiento, velocidad y Aceleración

- desplazamiento $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$
- velocidad $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{r}}$
- aceleración $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$
- cantidad de momento $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
- Encuentre $\mathbf{r}(r)$ para los siguientes sistemas







Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \text{cte}$

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathrm{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ es un escalar $T = \frac{1}{2}mv^2$

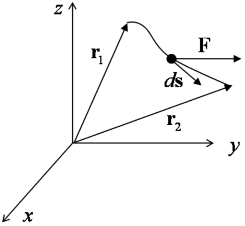
Cantidad de movimiento angular

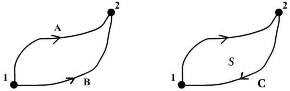
- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathrm{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ es un escalar $T = \frac{1}{2}mv^2$
- El trabajo realizado por una $\mathbf{F}$ externa sobre una partícula desde una posición $\mathbf{r}_1$ hasta una posición $\mathbf{r}_2$, como la integral de línea $W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ donde $\mathrm{d}\mathbf{s}$ es el vector tangente a la trayectoria que une la posición $\mathbf{r}_1$ con la posición $\mathbf{r}_2$.

Cantidad de movimiento angular

- Para una partícula ubicada en la posición $\mathbf{r}$, con velocidad $\mathbf{v}$, el momento angular será $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$
- El torque ejercido por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula ubicada en $\mathbf{r}$ es $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}(\mathbf{L})}{\mathrm{d}t}$
- Para una fuerza central $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, el torque se anula y $\mathbf{L} = \mathrm{cte}$
- La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad $\mathbf{v}$ es un escalar $T = \frac{1}{2}mv^2$
- El trabajo realizado por una $\mathbf{F}$ externa sobre una partícula desde una posición $\mathbf{r}_1$ hasta una posición $\mathbf{r}_2$, como la integral de línea $W_{12} \equiv \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ donde $\mathrm{d}\mathbf{s}$ es el vector tangente a la trayectoria que une la posición $\mathbf{r}_1$ con la posición $\mathbf{r}_2$.
- Entonces $m\int_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\mathbf{v}\mathrm{d}t) = \frac{1}{2}m\int_1^2 \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\int_1^2 \mathrm{d}\left(v^2\right) = T_2 - T_1$. El trabajo de $\mathbf{F}$ desde la posición $\mathbf{r}_1$ hasta la posición $\mathbf{r}_2$ depende solamente de la diferencia entre la energía cinética en las posiciones $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_1$.

Fuerzas conservativas

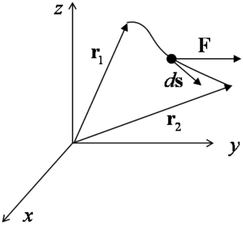


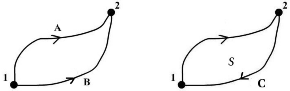


- Si el trabajo W_{12} de una fuerza externa **F** es independiente de la trayectoria entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, entonces **F** se llama fuerza conservativa:

$$\underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} = \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino B}} \Rightarrow \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} + \underbrace{\int_2^1 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino -B}} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

Fuerzas conservativas





- Si el trabajo W_{12} de una fuerza externa $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria entre $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, entonces $\mathbf{F}$ se llama fuerza conservativa:

$$\underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} = \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino B}} \Rightarrow \underbrace{\int_1^2 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino A}} + \underbrace{\int_2^1 \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{\text{camino -B}} = 0 \Rightarrow \oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

- Más aún

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$$

Energía potencial y energía total

- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d} x_i \right) = -\int_1^2 \mathrm{d} V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).

Energía potencial y energía total

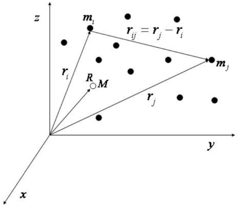
- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_2 - V_1 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva

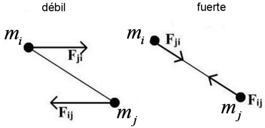
- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_2 - V_1 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}T+V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.

- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_2 - V_1 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}T+V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.
- Luego, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\nabla V \cdot \mathbf{v} + \nabla V \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$, i.e. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$

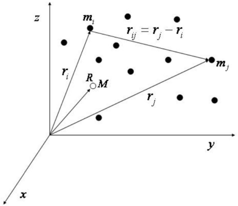
Energía potencial y energía total

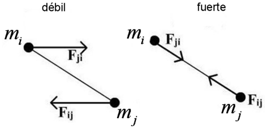
- Se define la función escalar $V(\mathbf{r}) = V(x,y,z)$ tal que $W_{12} = -\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right) = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2$. Para una fuerza conservativa, el trabajo es la variación de la función potencial (energía potencial).
- Para una fuerza conservativa $T_2 - T_1 = W_{12} = V_2 - V_1 \Rightarrow T_1 + V_1 = E_1 = E_2 = T_2 + V_2$, la enegía total se conserva
- Si $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}\,T+V}{\mathrm{d}t}$. Como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} == m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = -\nabla V \cdot \mathbf{v}$. Por otro lado $\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{r},t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V\cdot\mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t}$.
- Luego, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\nabla V\cdot\mathbf{v} + \nabla V\cdot\mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$, i.e. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$
- La energía potencial V puede ser definida para sistemas no conservativos, pero V depende explícitamente tanto de la posición como del tiempo, $V(\mathbf{r},t)$. La fuerza puede expresarse como $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r},t)$. El trabajo para mover una partícula entre los puntos $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ no es $V_1 - V_2$, puesto que V cambia con el tiempo. La energía total es $E = T + V$, no se conserva durante el movimiento.



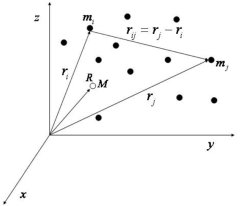


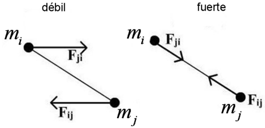
- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.





- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_\mathrm{T}}$, donde $M_\mathrm{T} = \sum_i m_i$ es la masa total.
- La velocidad del centro de masa es $\mathbf{v}_\mathrm{cm} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M_\mathrm{T}} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$





- La posición del centro de masa de un sistema de partículas es $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M_{\mathrm{T}}}$, donde $M_{\mathrm{T}} = \sum_i m_i$ es la masa total.
- La velocidad del centro de masa es $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M_{\mathrm{T}}} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$
- El momento lineal total del sistema de N partículas es $\mathbf{P}_{\mathrm{T}} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M_{\mathrm{T}} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = M_{\mathrm{T}} \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$

- Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y $\mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i)$ es la fuerza externa total sobre la partícula i.
  Entonces $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$.

- Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y $\mathbf{F}_{\text{ext}}(i)$ es la fuerza externa total sobre la partícula i.
  Entonces $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$.
- Si $\mathbf{F}_{ij}$ es central, $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}\left(\left|\mathbf{r}_{ij}\right|\right)\frac{\mathbf{r}_{ij}}{\left|\mathbf{r}_{ij}\right|}$. Entonces las fuerzas sobre las partículas van en la dirección (paralela o antiparalela) del vector $\mathbf{r}_{ij}$.

- Si $\mathbf{F}_{ji}$ es la fuerza (interna) que la partícula j ejerce sobre la partícula i, y $\mathbf{F}_{\text{ext}}\,(i)$ es la fuerza externa total sobre la partícula i.
  Entonces $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$.
- Si $\mathbf{F}_{ij}$ es central, $\mathbf{F}_{ij} = f_{ij}\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)\frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}$. Entonces las fuerzas sobre las partículas van en la dirección (paralela o antiparalela) del vector $\mathbf{r}_{ij}$.
- Esta condición sobre fuerzas centrales se conoce como forma fuerte de la ley de acción y reacción. No todas las fuerzas cumplen esta condición. Las fuerzas magnéticas entre dos cargas en movimiento no siempre son centrales

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i} \mathbf{F}^{0}_{ji} + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i} \mathbf{F}^0_{ji} + \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i \sum_j \mathbf{F}^0_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}}(i) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)$

Dinámica de sistemas de partículas

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i}\mathbf{F}^0_{ji}+\mathbf{F}_{\rm ext}(i)=\dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i\sum_j\mathbf{F}^0_{ji}+\sum_i\mathbf{F}_{\rm ext}(i)=\sum_i\dot{\mathbf{p}}_i=\sum_i\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i\right)$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji}+\mathbf{F}_{ij}$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i} \mathbf{F}^0_{ji} + \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i \sum_j \mathbf{F}^0_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \mathbf{v}_i\right)$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.
- Si m_i es constante $\forall i$, entonces $\sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = M_T \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$

- La ecuación de movimiento para la partícula i se escribe $\sum_{j\neq i} \mathbf{F}^0_{ji} + \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \dot{\mathbf{p}}_i$
- Para la fuerza total sobre el sistema, sumamos sobre todas las partículas $\sum_i \sum_j \mathbf{F}^0_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i)$
- El primer término es cero porque contiene sumas de pares de fuerzas $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}$ que se anulan debido a la Tercera Ley de Newton.
- Si m_i es constante $\forall i$, entonces $\sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = M_T \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$
- Luego, $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(\text{ total }) \equiv \sum_i \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}(i) = \frac{d\mathbf{P}_{\mathrm{T}}}{dt}$