Modelli di Sistemi Sequenziali e Concorrenti

Esercizi per l'esame di MSSC

Anno Accademico 2015/2016

Tommaso Papini
tommaso.papini1@stud.unifi.it
5537529

Esercizio 3.9

> Scrivere una grammatica dipendente da contesto per il linguaggio $L \triangleq \{a^n b a^n c a^n | n \geq 1\}$.

La grammatica G che genera il linguaggio L richiesto è una quadrupla $G \triangleq < A, V, S, P >$. Seguendo la convenzione nota per rappresentare le grammatiche in forma compatta[1], proponiamo di seguito le produzioni della grammatica G di interesse:

$$S ::= AF \tag{1}$$
$$A ::= abTC | aABC \tag{2}$$
$$TF ::= Tc \tag{3}$$
$$Tc ::= ac \tag{4}$$
$$swap(C, B) \tag{5}$$
$$swap(T, B) \tag{6}$$
$$swap(C, F) \tag{7}$$
$$bB ::= ba \tag{8}$$
$$aB ::= aa \tag{9}$$
$$cC ::= ca \tag{10}$$
$$aC ::= aa \tag{11}$$

L'idea generale è quella di usare due nonterminali segnaposto B e C che, intuitivamente, rappresentano i simboli a dopo la b e dopo la c, rispettivamente. Per riordinare le B e le C e farle andare nella loro posizione finale (ovvero prima tutte le B e poi tutte le C) si usano due nonterminali delimitatori, T ed F: la T rappresenta l'ultima a dopo la b e serve a spostare tutte le B verso sinistra, mentre la F rappresenta il simbolo c ed ha lo scopo di spostare tutte le C verso destra. Una volta che le B risulteranno a sinistra della T, esse saranno nella loro posizione finale e potranno trasformarsi in una a (regole (8) e (9). Analogamente per le C, con la differenza che per trasformarsi in a avranno bisogno del simbolo c (regola (10)), che comparirà solo dopo aver messo tutte le B e le C in ordine (ovvero quando i delimitatori T ed F si toccano, regola (3)). Una volta riordinate tutte le B e le C, esse potranno essere trasformate in a (si osservi che le B possono essere trasformate anche prima di questo punto, ma questo non ci disturba), mentre i delimitatori T ed F potranno essere trasformati in a e c, rispettivamente (regole (3) e (4).

Le regole (5), (6) e (7) servono, intuitivamente, a scambiare nonterminali tra loro, sfruttan-

[1] Le lettere minuscole indicano simboli terminali, le maiuscole indicano nonterminali ed il nonterminale nel lato sinistro della prima produzione rappresenta il simbolo iniziale (solitamente S).

do la potenza delle *grammatiche context-sensitive* (questo trucco non sarebbe infatti possibile usando *grammatiche context-free*). La regola (5) serve a riordinare le coppie CB in BC, mettendole nell'ordine corretto. La regola (6) serve a "mettere al sicuro" una B ogni volta che viene trovata dal delimitatore T. Analogamente per la regola (7).

Le regole dalla (5) alla (7) sono state proposte in questa forma compatta per migliorare la chiarezza e la leggibilità dell'insieme di produzioni della grammatica. Di seguito, la loro implementazione formale con grammatiche context-sensitive:

$$\begin{aligned} &swap(C,B) = \{ \\ &\qquad CB ::= XB \\ &\qquad XB ::= XY \\ &\qquad XY ::= BY \\ &\qquad BY ::= BC \\ &\} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &swap(T,B) = \{ \\ &\qquad TB ::= MB \\ &\qquad MB ::= MN \\ &\qquad MN ::= BN \\ &\qquad BN ::= BT \\ &\} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &swap(C,F) = \{ \\ &\qquad CF ::= IF \\ &\qquad IF ::= IJ \\ &\qquad IJ ::= FJ \\ &\qquad FJ ::= FC \\ &\} \end{aligned} \tag{14}$$

Esercizio 3.15

> Dimostrare che, per ogni espressione aritmetica E descritta nella Sezione 3.3,
>
> $$E \to E_1, E \to E_2 \text{ implica } E_1 \twoheadrightarrow n, E_2 \twoheadrightarrow n.$$

Quello che si richiede in questo esercizio è di dimostrare che quando una stessa espresione aritmetica E (generata tramite la grammatica in Tabella 3.3) viene *computata* in due modi distinti, producendo le nuove espressioni E_1 ed E_2, allora possiamo dire che queste due nuove espressioni vengono *valutate* entrambe lo stesso numero n.

Procediamo per casi. I modi con cui si può eseguire un passo di computazione sono descritti dalle regole di inferenza in Tabella 3.4. Immaginiamoci quindi di aver applicato ognuna di queste regole per la computazione $E \to E_1$.

- regola *(op)*
  Caso banale. Se si è applicato l'assioma *(op)* allora significa che quella era l'unica regola

applicabile e quindi risulta $E_1 = E_2 = n$, per un qualche n. Per la prima regola di valutazione della Tabella 3.5, banalmente $n \twoheadrightarrow n$.

- regola *(redl)*
  Consideriamo il caso in cui E_1 sia stata computata tramite *(redl)* ed E_2 tramite *(redr)* (il caso in cui vengono computate entrambe da *(redl)* è banale, come visto prima).
  L'espressione E ha quindi la forma:

$$E = E_a \ op \ E_b$$

  Di conseguenza E_1 ed E_2 hanno una forma:

$$E_1 = E'_a \ op \ E_b$$
$$E_2 = E_a \ op \ E'_b$$

  In altre parole, il problema si riduce a dimostrare che ogni espressione aritmetica viene valutata allo stesso modo indifferentemente da quale argomento viene computato per primo.

  Per convincersi che questo è vero basta osservare che quando si computa un'espressione E con operatore binario (regole *(redl)* e *(redr)*) la sua computazione va a "modificare" soltanto la struttura dell'argomento computato, lasciando invariati sia l'operatore che l'altro argomento. Quindi, indifferentemente dall'ordine in cui vengono computati i vari argomenti, alla fine l'espressione assumerà obbligatoriamente la forma $a \ op \ b$. I simboli a e b saranno sempre gli stessi numeri indipendentemente dall'ordine di computazione proprio perché la computazione di un argomento è indipendente dall'altro, per come abbiamo definito le regole *(redl)* e *(redr)*. Quindi, sia $a \ op \ b = n$, possiamo conludere che:

$$E_1 \xrightarrow{*} a \ op \ b \rightarrow n \twoheadrightarrow n$$
$$E_2 \xrightarrow{*} a \ op \ b \rightarrow n \twoheadrightarrow n$$

- regola *(redr)*
  Dimostrazione speculare a quella di *(redl)*.

Esercizio 4.7

Costruire gli automi associati alle espressioni regolari $a; b + c$ e $a; b + a; c$.

L'automa a stati finiti relativo all'espressione regolare $a; b + c$ è rappresentato in Figura 1.

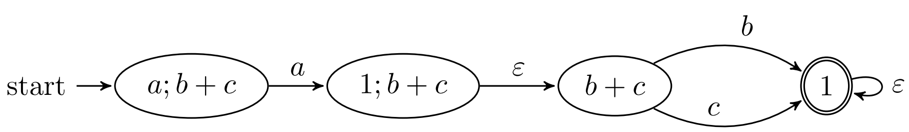

Figura 1: Automa a stati finiti dell'espressione regolare $a; b + c$.

Le transizioni dell'automa in Figura 1 sono giustificate dalle seguenti derivazioni:

$$\dfrac{\dfrac{}{a \overset{a}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Atom})}{a;b+c \overset{a}{\rightarrow} 1;b+c}\ (\textsc{Seq1}) \tag{15}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{1 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Tic})}{1;b+c \overset{\varepsilon}{\rightarrow} b+c}\ (\textsc{Seq2}) \tag{16}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{b \overset{b}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Atom})}{b+c \overset{b}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Sum1}) \tag{17}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{c \overset{c}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Atom})}{b+c \overset{c}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Sum2}) \tag{18}$$

$$\dfrac{}{1 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Tic}) \tag{19}$$

Vediamo adesso in Figura 2 l'automa relativo all'espressione $a;b+a;c$.

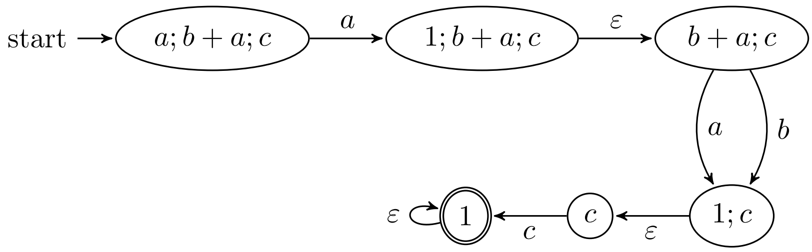

Figura 2: Automa a stati finiti dell'espressione regolare $a;b+a;c$.

Come prima, proponiamo di seguito le derivazioni che giustificano le transizioni del secondo automa:

$$\dfrac{\dfrac{}{a \overset{a}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Atom})}{a;b+a;c \overset{a}{\rightarrow} a;b+a;c}\ (\textsc{Seq1}) \tag{20}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{1 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Tic})}{1;b+a;c \overset{\varepsilon}{\rightarrow} b+a;c}\ (\textsc{Seq2}) \tag{21}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{b \overset{b}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Atom})}{b+a \overset{b}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Sum1})}{b+a;c \overset{b}{\rightarrow} 1;c}\ (\textsc{Seq1}) \tag{22}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a \overset{a}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Atom})}{b+a \overset{a}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Sum2})}{b+a;c \overset{a}{\rightarrow} 1;c}\ (\textsc{Seq1}) \tag{23}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{1 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Tic})}{1;c \overset{\varepsilon}{\rightarrow} c}\ (\textsc{Seq2}) \tag{24}$$

$$\dfrac{}{c \overset{c}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Atom}) \tag{25}$$

$$\dfrac{}{1 \overset{\varepsilon}{\rightarrow} 1}\ (\textsc{Tic}) \tag{26}$$

Esercizio 4.10

Si dimostrino le seguenti uguaglianze usando il sistema di inferenza della semantica assiomatica:

$c)\ E = F \Longrightarrow E^* = F^*$

$d)\ E^* + 1 = E^*$

$e)\ E^* + E = E^*$

Sfruttando gli assiomi e le due regole in Tabella 4.4 delle dispense, si dimostrano le uguaglianze proposte.

$c)\ E = F \Longrightarrow E^* = F^*$

Come già mostrato nelle dispense, si può dimostrare che l'uguaglianza $=$ è riflessiva e simmetrica:

$$\frac{E + E = E \qquad E + E = E}{E = E \qquad E = E + E}\ \textsc{regola1} \tag{27}$$

$$\frac{E = F \qquad E = F}{F = F \qquad F = E}\ (\textsc{regola1}) \tag{28}$$

Da qui in avanti useremo i risultati della (27) e della (28) come fossero regole, indicandole con $(rifl)$ e $(simm)$, rispettivamente.

Per dimostrare quindi che $E = F \Longrightarrow E^* = F^*$ basta applicare la regola della sostituzione assumendo riflessività e simmetria della relazione $=$.

$$\dfrac{\dfrac{E = F \qquad \dfrac{}{E^* = E^*}\ (\textsc{rifl})}{F^* = E^*}\ (\textsc{regola1})}{E^* = F^*}\ (\textsc{simm}) \tag{29}$$

$d)\ E^* + 1 = E^*$

Dimostriamo innanzitutto la sostitutività rispetto alla somma (che indicheremo con $(sost+)$) come suggerito dalla Proposizione 4.13 delle dispense:

$$\dfrac{\dfrac{G = H \qquad \dfrac{E = F \qquad \dfrac{}{E + G = E + G}\ (\textsc{rifl})}{F + G = E + G}\ (\textsc{regola1})}{F + H = E + G}\ (\textsc{regola1})}{E + G = F + H}\ (\textsc{simm}) \tag{30}$$

La dimostrazione che $E^* + 1 = E^*$ si ottiene quindi come segue (abbiamo diviso la dimostrazione in quattro parti per questioni di leggibilità):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E^* = 1 + E^*E}\ (\textsc{unfolding}) \qquad \dfrac{}{1 = 1}\ (\textsc{rifl})}{E^* + 1 = 1 + E^*E + 1}\ (\textsc{sost}+)}{1 + E^*E + 1 = E^* + 1}\ (\textsc{simm}) \tag{31}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{1 + E^*E + 1 = 1 + 1 + E^*E}\ (\textsc{comm}+) \qquad \dfrac{}{1 + E^*E + 1 = E^* + 1}\ (31)}{1 + 1 + E^*E = E^* + 1}\ (\textsc{regola1}) \tag{32}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{1 + 1 = 1}\ (\textsc{idem}+) \qquad \dfrac{}{1 + 1 + E^*E = E^* + 1}\ (32)}{1 + E^*E = E^* + 1}\ (\textsc{regola1}) \tag{33}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E^* = 1 + E^*E}\,(\textsc{unfolding})}{1 + E^*E = E^*}\,(\textsc{simm}) \qquad \dfrac{}{1 + E^*E = E^* + 1}\,(33)}{E^* = E^* + 1}\,(\textsc{regola}1)}{E^* + 1 = E^*}\,(\textsc{simm}) \tag{34}$$

In parole povere, si è fatto un primo passo di unfolding di E^*, ci si è sommato 1 e si è fatto vedere che i due 1 si riducono ad un solo 1. Quindi abbiamo rimesso le cose a posto per avere la formulazione finale richiesta.

e) $E^* + E = E^*$
L'idea di quest'ultima dimostrazione è sulla falsariga della dimostrazione precedente, ovvero si dimostra facendo un passo di unfolding e poi rimettendo tutto a posto. Ad un certo punto sarà molto utile anche sfruttare il risultato della dimostrazione precedente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E^* = 1 + E^*E}\,(\textsc{unfolding}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{1E = E}\,(\textsc{neutro};)}{E = 1E}\,(\textsc{simm})}{E^* + E = 1 + E^*E + 1E}\,(\textsc{sost}+)}{1 + E^*E + 1E = E^* + E}\,(\textsc{simm}) \tag{35}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{E^*E + 1E = (E^* + 1)E}\,(\textsc{distrib}\mathrm{D}) \qquad \dfrac{}{1 + E^*E + 1E = E^* + E}\,(35)}{1 + (E^* + 1)E = E^* + E}\,(\textsc{regola}1) \tag{36}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{E^* + 1 = E^*}\,(34) \qquad \dfrac{}{1 + (E^* + 1)E = E^* + E}\,(36)}{1 + E^*E = E^* + E}\,(\textsc{regola}1) \tag{37}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E^* = 1 + E^*E}\,(\textsc{unfolding})}{1 + E^*E = E^*}\,(\textsc{simm}) \qquad \dfrac{}{1 + E^*E = E^* + E}\,(37)}{E^* = E^* + E}\,(\textsc{regola}1)}{E^* + E = E^*}\,(\textsc{simm}) \tag{38}$$

Esercizio 7.6

Esercizio 8.6

Esercizio 9.6

Esercizio 11.3

Esercizio 11.5

Esercizio 12.2