

WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

GRAFIKA NIEEUKLIDESOWA NA PRZESTRZENI DWUWYMIAROWEJ

MACIEJ HAJDUK

NR INDEKSU: 236596

Praca inżynierska napisana
pod kierunkiem
Prof. dr hab. Jacka Cichonia



Politechnika
Wrocławska

WROCŁAW 2019

Spis treści

- Spis treści
- Wstęp
- Rys historyczny
- Wybrane zagadnienie
- Analiza problemu
- Podstawowy podział
- Model Kleina
- Model półpłaszczyzny Poincaré
- Projekt systemu
- Implementacja systemu
- Opis technologii
- Instalacja i wdrożenie
- Serwer deweloperski
- Omówienie kodu źródłowego
- Podsumowanie
- Bibliografia

Wstęp

Rys historyczny

We wszystkich szkołach od 2500 lat nauczana jest geometria. Sama nazwa - geometria - kojarzyć się może z nauką przyrodniczą, z rzeczą poznawaną na codzień z doświadczenia. Taka właśnie geometria jest również czymś bardzo instynktownym i dobrze wydawałoby się poznanym. Nasuwa się pytanie, czy może istnieć jakaś konkurencyjna do niej teoria.

Sama nazwa tej geometrii - geometria euklidesowa, bierze się z faktu, że została ona sformułowana aksjomatycznie w dziele *Elementy* około 300 roku przed naszą erą, przez dyrektora Biblioteki Aleksandryjskiej - Euklidesa. Euklides przedstawił 5 postulatów z których wyprowadził całą geometrię, jaką przez kolejne wieki znano:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.

4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Piąty aksjomat wywołał wiele wątpliwości. Nawet Euklides unikał używania go w swoim dziele tak długo, jak to było możliwe. Przez kolejne 1500 lat kolejni matematycy próbowali udowodnić, że o wiele bardziej skomplikowany postulat musi wynikać z pozostałych czterech.

Jednym z pierwszych zajmujących się tym problemem uczonych, był żyjący w V wieku naszej ery Proklos. Stwierdził on w swoim komentarzu do dzieł Euklidesa:

Nie jest możliwe, aby uczony tej miary co Euklides godził się na obecność tak długiego postulatu w aksjomatyce – obecność postulatu wzięła się z pospiesznego kończenia przez niego Elementów, tak aby zdążyć przed nadejściem słusznie oczekiwanej rychłej śmierci; my zatem – czcząc jego pamięć – powinniśmy ten postulat usunąć lub co najmniej znacznie uprościć.

Wyzwanie usunięcia piątego aksjomatu podjęto wielu matematyków w kolejnych wiekach, znane są dowody Ibn al-Haythama (Alhazen, XI wiek), Omar Khayyáma (XII wiek), Nasir al-Din al-Tūsī (XIII wiek) i Giovanni Girolamo Saccheriego (XVIII wiek), wszystkie jednak, jak się później okazało, były błędne. Fakt, że mimo prostych błędów funkcjonowały i były nawet nauczane, wskazuje na kłopot, jakim dla uczonych było przyjęcie do wiadomości, że mogą istnieć dwie różne a wręcz wykluczające się, ale jednocześnie poprawne geometrie, a więc dwie teorie opisujące w różny sposób ten sam obiekt. W szczególności Immanuel Kant w swoim dziele *Krytyka czystego rozumu* stwierdził, że intuicja geometryczna jest wrodzona, więc nie może istnieć wiele równoległych geometrii, a każdy kto chciałby zajmować się alternatywnymi geometriami nie nadaje się do nauki. Spotkało się to ze sprzeciwem. Johann Heinrich Lambert, zajmując się taką alternatywną geometrią, ogłosił, że jeśli to nie jest nauka, to on chce uprawiać nienaukę. Udano się do największego w tamtym czasie autorytetu - Carla Friedricha Gaussa, ten jednak wycofał się, bojąc się - jak pisał - wrzasku Boetów. Problem jednak był i należało się do niego jakoś odnieść. Odważyło się na to dwóch młodych ludzi, którzy uparli się nie tylko na uprawianie tej geometrii, ale wręcz głosili jej równoprawność. Rosjanin, Nikołaj Łobaczewski oraz Węgier - Janos Bolyai, niezależnie od siebie opublikowali prace w których - chociaż odmiennie - nowa geometria była konsekwentnie wyprowadzona. Obu odkrywców spotkała też za to kara, Łobaczewski został wręcz zmuszony do opuszczenia uczelni.

Sprawę nowej geometrii (nazywanej już geometrią Bolyaia-Łobaczewskiego) przejął Felix Klein. Postawił on tezę, że jeżeli za pomocą geometrii euklidesowej jesteśmy w stanie przedstawić tę nieeuklidesową - i odwrotnie, to oba modele są sobie w istocie równoważne. Opublikował też w 1870 roku dzieło, w którym dowiódł równoprawności obu modeli.

Dosadnie do nowego modelu odniósł się fizyk - Hermann Helmholtz, publikując pracę, w której określił matematykę jako skrzynkę z narzędziami dla nauk przyrodniczych, czym odebrał jej walor nauk

przyrodniczej jako takiej.

Wybrane zagadnienie

W niniejszej pracy zaimplementowany zostanie prosty silnik graficzny skupiający się na renderowaniu wizualizacji płaszczyzny dysku w modelu Poincarégo geometrii hiperbolicznej.

Praca swoim zakresem objmie obsługę rysowania linii, okręgów, wielokątów na tejże płaszczyźnie oraz implementacje przykładowych programów obejmujących wizualizacje bardziej skomplikowanych struktur. Na tle innych implementacji, aplikacja wyróżnia się dostarczającymi możliwościami i realizacją problemu z pomocą matematycznego opisu pewnego modelu. Przykładowe demonstracje możliwości aplikacji są dostarczone razem z kodem źródłowym, jest to, poza możliwością narysowania dowolnego wielokątu, rysowaniem figur foremnych czy prostych animacji, także interakcja z urządzeniami peryferyjnymi i tesselacja przestrzeni hiperbolicznej. Niewątpliwą zaletą dostarczonej aplikacji jest prostota implementacja własnych rozwiązań, na co składa się silne typowanie języka Typescript wraz z dokładnymi interfejsami dla klas oraz funkcje dostarczone przez silnik, pozwalające na łatwie manipulowanie wyświetlającymi się obiektami, nie wymagające przy tym zrozumienia modelu.

Praca składa się z czterech rozdziałów:

Rozdział pierwszy: W rozdziale omówiono analizę wybranego problemu, przedstawiono motywacje podjęcia tego tematu oraz uzasadniono wybór modelu płaszczyzny Poincarégo. Rozdział zawiera poza tym komentarz do różnych rodzajów geometrii nieeuklidesowych, oraz krótki opis i porównanie innych modeli geometrii hiperbolicznej.

Rozdział drugi: Rozdział zawiera szczegółową charakterystykę systemu wraz z opisem poszczególnych plików oraz przeznaczeniem klas i funkcji składających się na program. Opisane w nim zostały algorytmy przekształcające byty w geometrii Euklidesowej na odpowiadające im elementy geometrii hiperbolicznej, funkcje pomocnicze, reprezentacje punktów i linii w obu modelach.

Rozdział trzeci: W rozdziale wymieniono technologie użyte do implementacji projektu: wybrany język programowania, środowisko składające się na aplikację oraz biblioteki wykorzystane w programie.

Rozdział czwarty: Rozdział zawiera instrukcje instalacji i wdrożenia systemu w środowisku docelowym. Końcowy rozdział stanowi podsumowanie uzyskanych wyników i ewentualne możliwości rozwoju projektu.

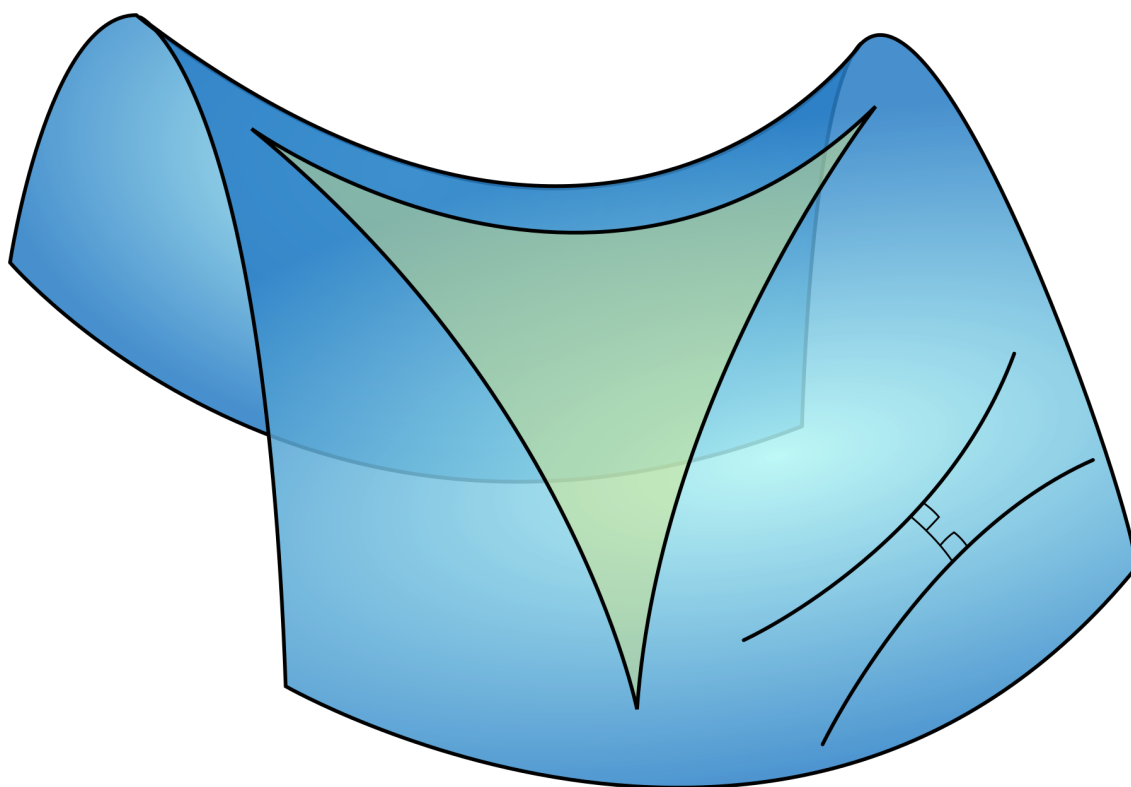
Analiza problemu

W niniejszym rozdziale przedstawiona będzie analiza problemu, opis matematyczny modelu płaszczyzny dysku Poincarégo oraz przegląd kilku wybranych modeli geometrii nieeuklidesowej.

Odkrycie, że piątego aksjomatu nigdy nie można udowodnić na podstawie pozostałych czterech aksjomatów, było dla naukowców niespodzianką. Zrobiono to, demonstrując istnienie geometrii, w której pierwsze cztery aksjomaty utrzymywały się, ale piąty nie. Debata nad piątym postulatem Euklidesa stworzyła problem, jak alternatywna geometria powinna wyglądać. Umiano pokazać zaledwie poszczególne właściwości takich geometrii. Pierwszy model geometrii nieeuklidesowej został stworzony przez Kleina. W sprawę zaangażowało się wielu matematyków, w tym również Bernard Rieman. Stwierdził on, że można opisać nieskończenie wiele struktur matematycznych, które nie będą spełniały postulatów Euklidesa, będąc dalej geometriami.

Podstawowy podział

Geometria nieeuklidesowa to każda geometria, która nie spełnia przynajmniej jednego z postulatów Euklidesa. Geometrie nieeuklidesowe możemy podzielić na dwa rodzaje:



Rysunek 1: Trójkąt oraz dwie proste przedstawione na powierzchni o geometrii hiperbolicznej

Geometria Łobaczewskiego-Bólyaia (hiperboliczna):

Geometria hiperboliczna jest bliżej związana z geometrią euklidesową, niż się wydaje: jedyną różnicą

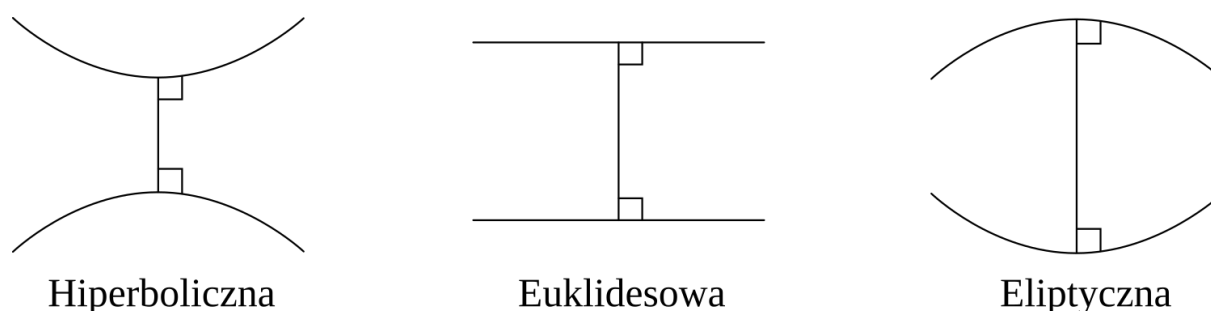
aksjomatyczną jest postulat równoległy. Po usunięciu postulatu równoległego z geometrii euklidesowej geometria wynikowa jest geometrią absolutną. Wszystkie twierdzenia o geometrii absolutnej, w tym pierwsze 28 twierdzeń zaprezentowanych przez Euklidesa, obowiązują w geometrii i euklidesowej i hiperbolicznej.

W modelu hiperbolicznym, w płaszczyźnie dwuwymiarowej, dla dowolnej linii L i punktu X , który nie jest na L , istnieje nieskończenie wiele linii przechodzących przez X , które się nie przecinają L .

Geometria Riemanna (eliptyczna):

Najprostszym modelem geometrii eliptycznej jest kula, w której linie są kołami wielkimi (takimi jak równik lub południki na kuli ziemskiej). Jest to również jeden ze standardowych modeli prawdziwej płaszczyzny projekcyjnej. Różnica polega na tym, że jako model geometrii eliptycznej wprowadza się metrykę umożliwiającą pomiar długości i kątów, natomiast jako model płaszczyzny rzutowej takiej metryki nie ma.

W modelu eliptycznym dla dowolnej linii L i punktu X , który nie jest na L , wszystkie linie przechodzące przez X przecinają się L .



Rysunek 2: Zachowanie linii ze wspólną prostąpadłą w każdym z trzech rodzajów geometrii

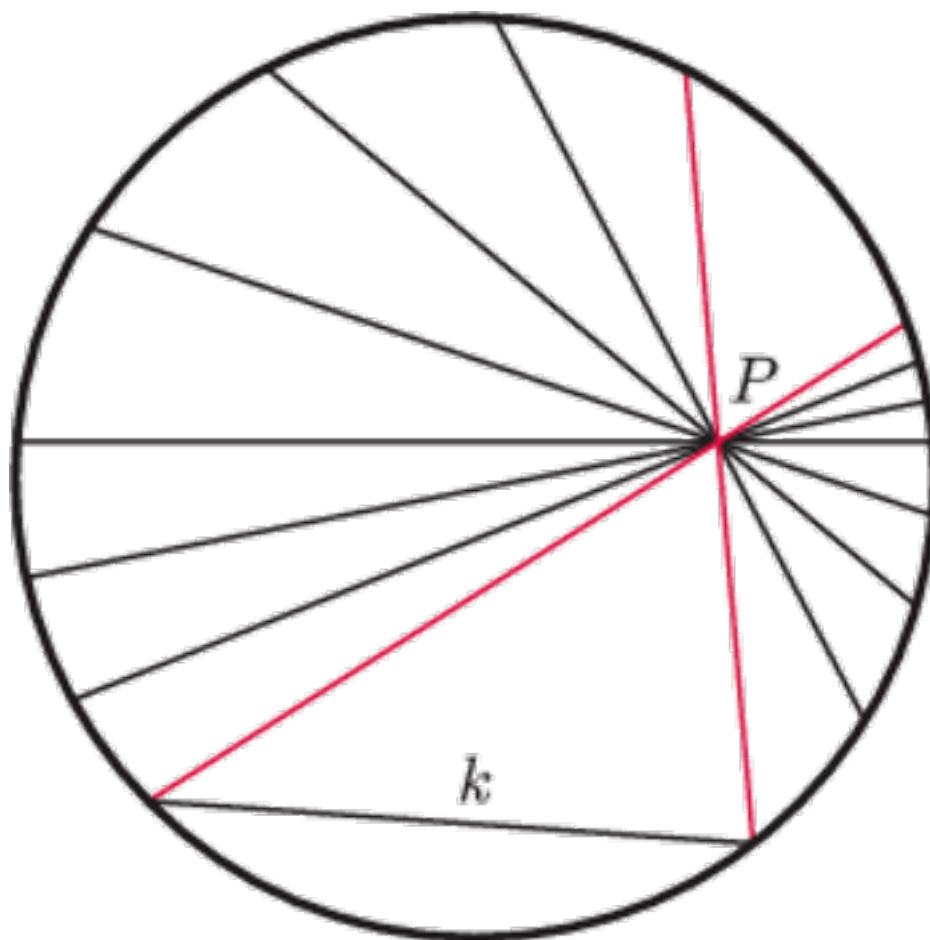
Sposobem opisanie różnic między tymi geometriami jest rozważenie dwóch linii prostych rozciągniętych w nieskończoność w płaszczyźnie dwuwymiarowej, które są prostopadłe do trzeciej linii:

- W geometrii euklidesowej linie pozostają w stałej odległości od siebie (co oznacza, że linia narysowana prostopadle do jednej linii w dowolnym punkcie przecina drugą linię, a długość odcinka linii łączącego punkty przecięcia pozostaje stała) i są znane jako równoległe.
- W geometrii hiperbolicznej linie *zakrzywiają się* od siebie, zwiększając odległość w miarę przesuwania się dalej od punktów przecięcia ze wspólną prostopadłą; linie te są często nazywane ultraparallelami.
- W geometrii eliptycznej linie *zakrzywiają się* do siebie i w końcu przecinają.

Ta praca skupia się na geometrii hiperbolicznej. Istnieje kilka możliwych sposobów wykorzystania części przestrzeni euklidesowej jako modelu płaszczyzny hiperbolicznej. Wszystkie te modele speł-

nią ten sam zestaw aksjomatów i wyrażają tę samą abstrakcyjną płaszczyznę hiperboliczną. Dlatego wybór modelu nie ma znaczenia dla twierdzeń czysto hiperbolicznych. Jednak robi to różnicę podczas wizualizacji geometrii hiperbolicznej. Następne rozdziały są poświęcone krótkiemu omówieniu najpopularniejszych z nich.

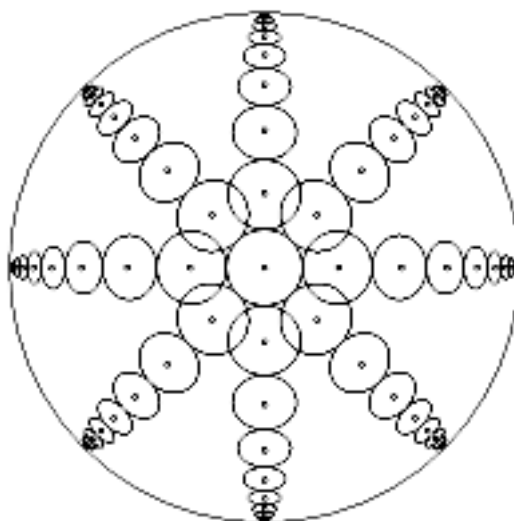
Model Kleina



Rysunek 3: Model Kleina

Model Kleina - a w zasadzie model dysku Beltrami–Kleina jest modelem geometrii hiperbolicznej, w którym punkty są reprezentowane przez punkty we wnętrzu dysku. Przyjmuje on następujące założenia:

- Płaszczyzną jest wnętrze koła bez krawędzi
- Prostymi są cięciwy tego koła (końce prostej)
- Proste będą prostopadłe wtedy, gdy przedłużenie jednej z nich przechodzi przez punkt przecięcia stycznych do koła w końcach drugiej.



Rysunek 4: Koła w modelu Kleina

Zalety: Linie pozostają proste, a cały model można łatwo osadzić w ramach rzeczywistej geometrii rzutowej.

Wady: Model nie jest zgodny, co oznacza, że kąty są zniekształcone, a okręgi na płaszczyźnie hiperbolicznej na ogół nie są okrągłe w modelu.

Model półpłaszczyzny Poincaré

Projekt systemu

W niniejszym rozdziale przedstawiony zostanie szczegółowy projekt systemu, zależności pomiędzy klasami oraz podstawowe algorytmy składające się na logikę funkcjonowania silnika.

Implementacja systemu

W niniejszym rozdziale omówiona zostanie technologia, konfiguracja oraz wdrożenie systemu wraz z krótkim opisem poszczególnych części systemu i kodu źródłowego.

Opis technologii

Do implementacji systemu użyto języka TypeScript w wersji 3.6.3, bundlera (transpilatora nowoczesnych wersji języka JavaScript do wersji zrozumiałych dla przeglądarek) webpack w wersji

2.3.3 oraz CSS3 i HTML5 wraz z elementem `<canvas>` odpowiedzialnym za rysowanie grafiki na ekranie. Pełna lista wszystkich bibliotek wraz z ich wersjami znajduje się w pliku `package.json`, w katalogu głównym projektu.

Instalacja i wdrożenie

Rozdział ten zawiera informacje o sposobie zbudowania aplikacji w celu jej uruchomienia i opcjonalnie - wdrożenia na serwerze WWW.

Do zbudowania aplikacji konieczny będzie menager pakietów `npm` w wersji przynajmniej 6.5.0 oraz środowisko uruchomieniowe języka JavaScript - `node.js` w wersji 10.6.0 lub nowszej. Instalacja wymaganych pakietów odbywa się poprzez wpisanie w konsoli polecenia

```
npm install
```

w katalogu głównym projektu. Następnie należy zbudować aplikację poleceniem

```
npm run build
```

Po zbudowaniu aplikacji, w katalogu głównym pojawi się folder `dist` z plikami, które wraz z plikiem `index.html` składają się na gotowy program możliwy do uruchomienia w przeglądarce.

Serwer deweloperski

Aplikacja wspiera tryb deweloperski, w którym bieżące zmiany w kodzie automatycznie są budowane do plików wynikowych. Do uruchomienia trybu deweloperskiego potrzebne są te same pakiety instalowane poleceniem:

```
npm install
```

Wywołanie trybu odbywa się komendą:

```
npm run build-watch
```

Omówienie kodu źródłowego

Podsumowanie

Bibliografia

- Caroline Series With assistance from Sara Maloni, Hyperbolic geometry MA448
- Bjørn Jahren, An introduction to hyperbolic geometry, MAT4510/3510
- Martin Freiherr von Gagern, Creation of Hyperbolic Ornaments Algorithmic and Interactive Methods, Technischen Universität München
- Izabela Przezdzińska, Geometria Poincarégo i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej, Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny
- Mateusz Kłęczek, Geometria hiperboliczna, Chrzanów 2016
- Steve Szidlik, Hyperbolic Constructions in Geometer's Sketchpad, December 21, 2001
- Marek Kordos, Geometria Bolyai–Łobaczewskiego, <http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/g> Sierpień 2018