Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wrocławska

Grafika nieeuklidesowa na przestrzeni dwuwymiarowej

Maciej Hajduk
Nr indeksu: 236596

Praca inżynierska napisana
pod kierunkiem
Prof. dr hab. Jacka Cichonia

Politechnika
Wrocławska

Wrocław 2019

Spis treści

Wstęp

Rys hostoryczny

We wszystkich szkołach od 2500 lat nauczana jest geometria. Sama nazwa - geometria - kojarzyć się może z nauką przyrodniczą, z rzeczą poznawaną na codzień z doświaczenia. Taka właśnie geometria jest również czymś bardzo instynktownym i dobrze wydawałoby się poznanym. Nasuwa się pytanie, czy może istnieć jakaś konkurencyjna do niej teoria.

Sama nazwa tej geometrii - geometria euklidesowa, bierze się z faktu, że została ona sformułowana aksjomatycznie w dziele *Elementy* około 300 roku przed naszą erą, przez dyrektora Biblioteki Aleksandryjsciej - Euklidesa. Euklides przedstawił 5 postulatów z których wyprowadził całą geometrię, jaką przez kolejne wieki znano:

> 1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
> 2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
> 3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
> 4. Wszystkie kąty proste są przystające.
> 5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Piąty aksjomat wywołał wiele wątpliwości. Nawet Euklides unikał używania go w swoim dziele tak długo, jak to było możliwe. Przez kolejne 1500 lat kolejni matematycy próbowali udowodnić, że o wiele bardziej skomplikowany postulat musi wynikać z pozostałych czterech.

Jednym z pierwszych zajmujących się tym problemem uczonych, był żyjący w V wieku naszej ery Proklos. Stwierdził on w swoim komentarzu do dzieł Euklidesa:

> Nie jest możliwe, aby uczony tej miary co Euklides godził się na obecność tak długiego postulatu w aksjomatyce – obecność postulatu wzięła się z pospiesznego kończenia przez niego Elementów, tak aby zdążyć przed nadejściem słusznie oczekiwanej rychłej śmierci; my zatem – czcząc jego pamięć – powinniśmy ten postulat usunąć lub co najmniej znacznie uprościć.

Wyzwanie usunięcia piątego aksjomatu podjęło wielu matematyków w kolejnych wiekach, znane są dowody Ibn al-Haythama (Alhazen, XI wiek), Omar Khayyáma (XII wiek), Nasir al-Din al-Tūsīa (XIII wiek) i Giovanni Girolamo Saccheriego (XVIII wiek), wszystkie jednak, jak się później okazywało, były błędne. Fakt, że mimo prostych błędów funkcjonowały i były nawet nauczane, wskazuje na kłopot, jakim dla uczonych było przyjęcie do wiadomości, że mogą istnieć dwie różne a wręcz wykluczające się, ale jednocześnie poprawne geometrie, a więc dwie teorie opisujące w różny sposób ten sam obiekt. W szczególności Immanuel Kant w swoim dziele *Krytyka czystego rozumu* stwierdził, że intuicja geometryczna jest wrodzona, więc nie może istnieć wiele równoległych geometrii, a każdy kto chciałby zajmować się alternatywnymi geometriami nie nadaje się do nauki. Spotkało się to ze sprzeciwem. Johann Heinrich Lambert, zająwszy się taką alternatywną geometrią, ogłosił, że jeśli to nie jest nauka, to on chce uprawiać nienaukę. Udano się do największego w tamtym czasie autorytetu - Carla Friedricha Gaussa, ten jednak wycofał się, bojąc się - jak pisał - wrzasku Boetów. Problem jednak był i należało się do niego jakoś odnieść. Odważyło się na to dwóch młodych ludzi, którzy uparli się nie tylko na uprawianie tej geometrii, ale wręcz głosili jej równoprawność. Rosjanin, Nikołaj Łobaczewski oraz Węgier - Janos Bolyai, niezależnie od siebie opublikowali prace w których - chociaż odmiennie - nowa geometria była konsekwentnie wyprowadzona. Obu odkrywców spotkała też za to kara, Łobaczewski został wręcz zmuszony do opuszczenia uczelni.

Sprawę nowej geometrii (nazywanej już geometrią Bolyaia-Łobaczewskiego) przejął Felix Klein. Postawił on tezę, że jeżeli za pomocą geometrii euklidesowej jesteśmy w stanie przedstawić tę nieeuklidesową

- i odwrotnie, to oba modele są sobie w istocie równoważne. Opublikował też w 1870 roku dzieło, w którym dowiódł równoprawności obu modeli.

Dosadnie do nowego modelu odniósł się fizyk - Hermann Helmholtz, publikując pracę, w której określił matematykę jako skrzynkę z narzędziami dla nauk przyrodniczych, czym odebrał jej walor nakuki przyrodniczej jako takiej.

Wybrane zagadnienie

W niniejszej pracy zaimplementowany zostanie prosty silnik graficzny skupiający się na renderowaniu wizualizjacji płaszczyny dysku w modelu Poincarégo geometrii hiperbolitycznej.

Praca swoim zakresem objemie obsługę rysowania lini, okręgów, wielokątów na tejże płaszczyźnie oraz implementacje przykładowych programów objemujących wizualizacje bardziej skomplikowanych struktur. Na tle innych implementacji, aplikacja wyróżnia się dostarczanymi możliwościami i realizacją problemu z pomocą matematycznego opisu pewnego modelu. Przykładowe demonstracje możliwości aplikacji są dostarczone razem z kodem źródłowym, jest to, poza możliwością narysowania dowolnego wielokątu, rysowaniem figur foremnych czy prostych animacji, także interakcja z urządzeniami peryferyjnymi i tesselacja przestrzeni hiperbolicznej. Niewątpliwą zaletą dostarczonej aplikacji jest prostota implementacja własnych rozwiązań, na co składa się silne typowanie języka Typescript wraz z dokładnymi interfejsami dla klas oraz funkcje dostarczone przez silnik, pozwalające na łatwie manipulowanie wyświetlającymi się obiektami, nie wymagające przy tym zrozumienia modelu.

Praca składa się z czterech rozdziałów:

Rozdział pierwszy: W rozdziale omówiono analizę wybranego problemu, przedstawiono motywacje podjęcia tego tematu oraz uzasadniono wybór modelu płaszczyzny Poincarégo. Rozdział zawiera poza tym komentarz do różnych rodzajów geometrii nieeuklidesowych, oraz krótki opis i porównanie innych modeli geometrii hiperbolicznej.

Rozdział drugi: Rozdział zawiera szczegółową charakterystykę systemu wraz z opisem poszczególnych plików oraz przeznaczeniem klas i funkcji składających się na program. Opisane w nim zostały algorytmy przekształcające byty w geometrii Euklidesowe na odpowiadające im elementy geometrii hiperbolicznej, funkcje pomocnicze, reprezentacje punktów i linii w obu modelach.

Rozdział trzeci: W rodziale wymieniono technologie użyte do implementacji projektu: wybrany język programowania, środowisko składające się na aplikację oraz biblioteki wykorzystane w programie.

Rozdział czwarty: Rozdział zawiera instrukcje instalacji i wdrożenia systemu w środowisku docelowym. Końcowy rozdział stanowi podsumowanie uzyskanych wyników i ewentualne możliwości rozwoju projektu.

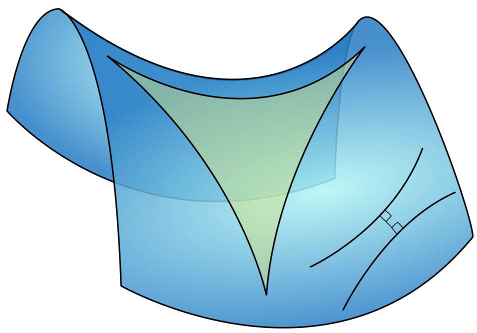
Analiza problemu

W niniejszym rozdziale przedstawiona będzie analiza problemu, opis matematyczny modelu płaszczyny dysku Poincarégo oraz przegląd kilku wybranych modeli geometrii nieeuklicesowej.

Odkrycie, że piątego aksjomatu nigdy nie można udowodnić na podstawie pozostałych czterech aksjomatów, było dla naukowców niespodzianką. Zrobiono to, demonstrując istnienie geometrii, w której pierwsze cztery aksjomaty utrzymywały się, ale piąty nie. Debata nad piątym postulatem Euklidesa stworzyła problem, jak alternatywna geometria powinna wyglądać. Umiano pokazać zaledwie poszczególne właściwości takich geometrii. Pierwszy model geometrii nieeuklidesowej został stworzony przez Kleina. W sprawę zaangażowało się wielu matematyków, w tym również Bernard Rieman. Stwierdził on, że można opisać nieskończenie wiele struktur matematycznych, które nie będą spełniały postulatów Euklidesa, będąc dalej geometriami.

Podstawowy podział

Geometria nieeuklidesowa to każda geometria, która nie spełnia przynajmniej jednego z postulatów Euklidesa. Geometrie nieeuklidesowe możemy podzielić na dwa rodzaje:



Rysunek 1: Trójkąt oraz dwie proste przedstawione na powierzchni o geometrii hiperbolicznej

Geometria Łobaczewskiego-Bólyaia (hiperboliczna):

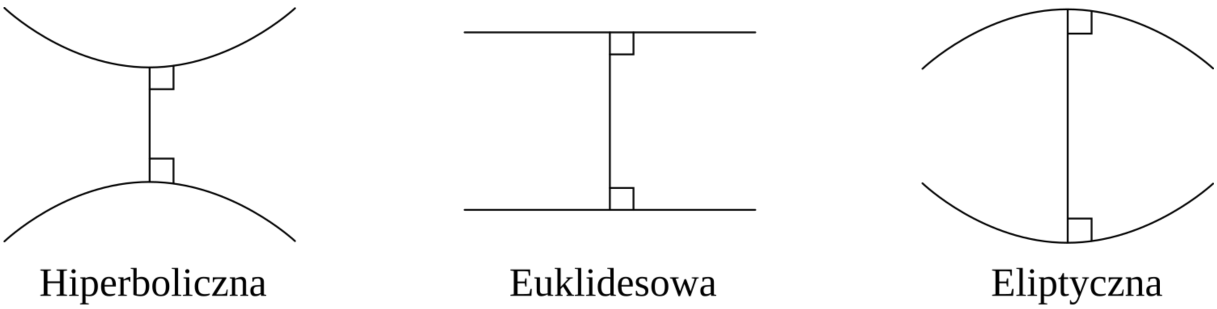
Geometria hiperboliczna jest bliżej związana z geometrią euklidesową, niż się wydaje: jedyną różnicą aksjomatyczną jest postulat równoległy. Po usunięciu postulatu równoległego z geometrii euklidesowej geometria wynikowa jest geometrią absolutną. Wszystkie twierdzenia o geometrii absolutnej, w tym pierwsze 28 twierdzeń zaprezentowanych przez Euklisdesa, obowiązują w geometrii i euklidesowej i hiperbolicznej.

W modelu hiperbolicznym, w płaszczyźnie dwuwymiarowej, dla dowolnej linii L i punktu X, który nie jest na L, istnieje nieskończenie wiele linii przechodzących przez X, które się nie przecinają L.

Geometria Riemanna (eliptyczna):

Najprostszym modelem geometrii eliptycznej jest kula, w której linie są kołami wielkimi (takimi jak równik lub południki na kuli ziemskiej). Jest to również jeden ze standardowych modeli prawdziwej płaszczyzny projekcyjnej. Różnica polega na tym, że jako model geometrii eliptycznej wprowadza się metrykę umożliwiającą pomiar długości i kątów, natomiast jako model płaszczyzny rzutowej takiej metryki nie ma.

W modelu eliptycznym dla dowolnej linii L i punktu X, który nie jest na L, wszystkie linie przechodzące przez X przecinają się L.



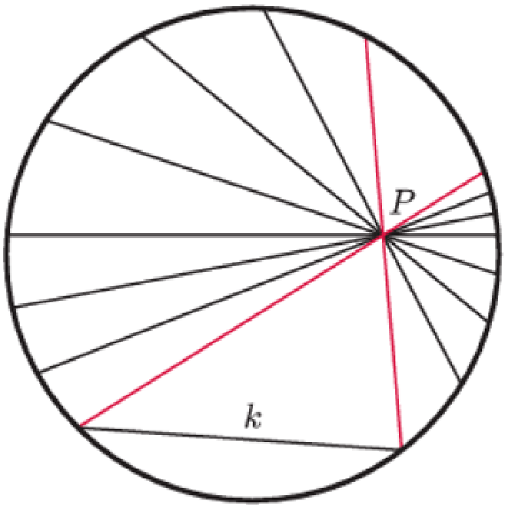
Rysunek 2: Zachowanie linii ze wspólną prostopadłą w każdym z trzech rodzajów geometrii

Sposobem opisania różnic między tymi geometriami jest rozważenie dwóch linii prostych rozciągniętych w nieskończoność w płaszczyźnie dwuwymiarowej, które są prostopadłe do trzeciej linii:

- W geometrii euklidesowej linie pozostają w stałej odległości od siebie (co oznacza, że linia narysowana prostopadle do jednej linii w dowolnym punkcie przecina drugą linię, a długość odcinka linii łączącego punkty przecięcia pozostaje stała) i są znane jako równoległe.
- W geometrii hiperbolicznej linie *zakrzywiają się* od siebie, zwiększając odległość w miarę przesuwania się dalej od punktów przecięcia ze wspólną prostopadłą; linie te są często nazywane ultraparallelami .
- W geometrii eliptycznej linie *zakrzywiają się* do siebie i w końcu przecinają.

Ta praca skupia się na geometrii hiperbolicznej. Istnieje kilka możliwych sposobów wykorzystania części przestrzeni euklidesowej jako modelu płaszczyzny hiperbolicznej. Wszystkie te modele spełniają ten sam zestaw aksjomatów i wyrażają tę samą abstrakcyjną płaszczyznę hiperboliczną. Dlatego wybór modelu nie ma znaczenia dla twierdzeń czysto hiperbolicznych. Jednak robi to różnicę podczas wizualizacji geometrii hiperbolicznej. Następne podrozdziały są poświęcone krótkiemu omówieniu najpopularniejszych z nich.

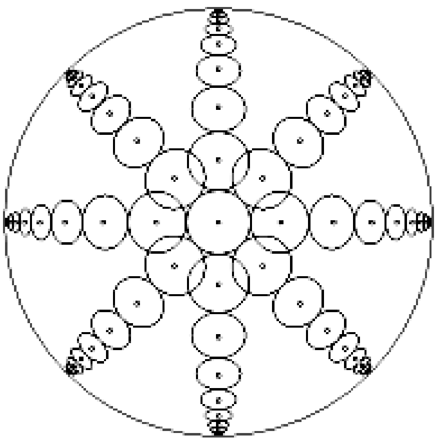
Model Kleina



Rysunek 3: Model Kleina

Model Kleina - a w zaszadzie model dysku Beltrami–Kleina jest modelem geometrii hiperbolicznej, w którym punkty są reprezentowane przez punkty we wnętrzu dysku. Przyjmuje on następujące założenia:

- Płaszczyną jest wnętrze koła bez krawędzi
- Prostymi są cięciwy tego koła (końce prostej)
- Proste będą prostopadłe wtedy, gdy przedłużenie jednej z nich przechodzi przez punkt przecięcia stycznych do math w końcach drugiej.



Rysunek 4: Koła w modelu Kleina

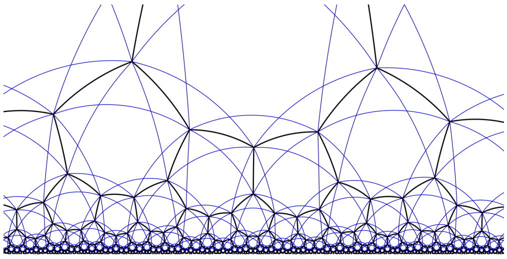
Linie w modelu pozostają proste, a cały model można łatwo osadzić w ramach rzeczywistej geometrii rzutowej. Model ten nie jest jednak zgodny, co oznacza, że kąty są zniekształcone, a okręgi na płaszczyźnie hiperbolicznej na ogół nie są okrągłe w modelu.

Model półpłaszczyzny Poincaré

Model półpłaszczysny Poincare to płaszczyzna:

$$\{(x, y) \mid y > 0; x, y \in \mathbb{R}\}\{(x, y) \mid y > 0; x, y \in \mathbb{R}\}$$

Jest to również model dwuwymiarowej geometrii hiperbolicznej (geometrii Lobaczewskiego).



Rysunek 5: Tesselacja w modelu półpłaszczyzny Poincaré

Model nosi imię Henri Poincare, ale został stworzony przez Eugenio Beltramiego, który użył go wraz z modelem Klein i modelem Poincare, aby pokazać, że geometria hiperboliczna jest równie spójna, jak spójna jest geometria euklidesowa. Ten model jest zgodny, co oznacza, że kąty zmierzone w punkcie modelu są równe kątom na płaszczyźnie hiperbolicznej.

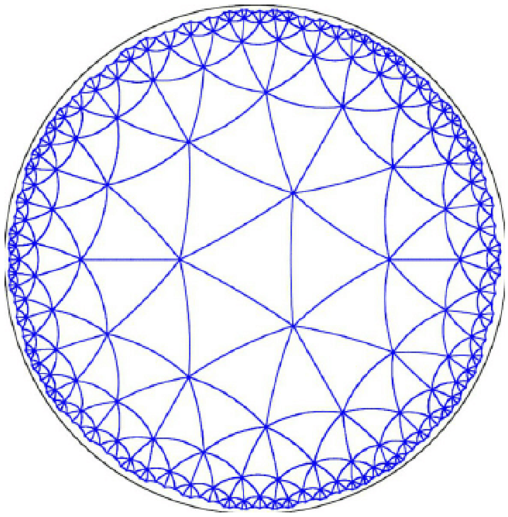
Model dysku Poincaré

Model dysku Poincaré wykorzystuje wnętrze dysku jako model płaszczyzny hiperbolicznej. Najbardziej oczywistym wyborem dla dysku jest dysk jednostkowy, który będzie również przedmiotem dalszych rozważań.

- **Punkty hiperboliczne** to punkty wewnątrz dysku jednostkowego.
- **Linie hiperboliczne** to łuki koła prostopadłe do dysku. Linie hiperboliczne przechodzące przez początek degenerują się do średnic, o których można pomyśleć jako łuki kół o nieskończonym promieniu.
- **Kąty** są mierzone jako kąt euklidesowy między stycznymi w punkcie przecięcia.
- **Odległości** między punktami hiperbolicznymi można mierzyć w oparciu o normę euklideso

$$\delta(u,v) = 2\frac{\|u-v\|^2}{(1-\|u\|^2)(1-\|v\|^2)}$$

Ponieważ rozpatrywany jest dysk jednostkowy, formuła nie zawiera w zmiennej dla promienia.



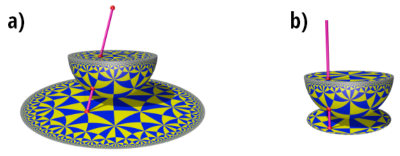
Rysunek 6: Tesselacja w modelu dysku Poincare

Model jest zgodny, to znaczy, że zachowuje kąty. Oznacza to, że kąty hiperboliczne między krzywymi są równe kątom euklidesowym w punkcie przecięcia. Wadą jest fakt, że ponieważ linia hiperboliczna jest modelowana przez łuk koła euklidesowego, linie proste wydają się zakrzywione.

Model hemisfery

Hemisfera nie jest często używana jako model płaszczyzny hiperbolicznej jako taka. Jest to jednak bardzo przydatna w łączeniu różnych innych modeli za pomocą różnych rzutów, jak pokazano na poniższym rysunki.

- **Punkty hiperboliczne** to punkty na półkuli południowej.
- **Linie hiperboliczne** to półkola powstałe z przecięcia półkuli południowej z płaszczyznami prostopadłymi do równika.



Rysunek 7: Rzut na dysk Poincarégo (a) i projekcja do modelu Klein-Beltrami (b)

Wadą tego rozwiązania, jest dodatkowy wymiar, jaki należy rozpatrywać przy pracy z tym modelem.

Uzasadnienie wybory modelu dysku Poincare

Jak stwierdzono na początku tego rozdziału, kolejne rozdziały, a także opisane implementacje będą prawie wyłącznie korzystać z modelu dysku Poincaré. Podczas renderowania geometrii hiperbolicznej wydaje się to być właściwym wyborem, z uwagi na wartości estetyczne i zgodność modelu.

Projekt systemu

W niniejszym rozdziale przedstawiony zostanie szczegółowy projekt systemu, jego matematyczną interpretacje, zależności pomiędzy klasami oraz podstawowe algorytmy składające się na logikę funkcjonowania silnika.

Implementacja systemu

W niniejszym rozdziale omówiona zostanie technologia, konfiguracja oraz wdrożenie systemu wraz z krótkim opisem poszczególnych części systemu i kodu źródłowego.

Opis technologii

Do implementacji systemu użyto języka `TypeScript` w wersji `3.6.3`, bundlera (transpilatora nowoczesnych wersji języka `JavaScript` do wersji zrozumiałych dla przeglądarek) `webpack` w wersji `2.3.3` oraz `CSS3` i `HTML5` wraz z elementem `<canvas>` odpowiedzialnym za rysowanie grafiki na ekranie. Pełna lista wszystkich bibliotek wraz z ich wersjcami znajduje się w pliku `package.json`, w katalogu głównym projektu.

Instalacja i wdrożenie

Rozdział ten zawiera informacje o sposobie zbudowania aplikacji w celu jej uruchomienia i opcjonalnie - wdrożenia na serwerze WWW.

Do zbudowania aplikacji konieczny będzie menager pakietów npm w wersji przynajmniej `6.5.0` oraz środowisko uruchomieniowe języka `JavaScript` - `node.js` w wersji `10.6.0` lub nowszej. Instalacja wymaganych pakietów odbywa się poprzez wpisanie w konsoli polecenia

```
npm install
```

w katalogu głównym projektu. Następnie należy zbudować aplikację poleceniem

```
npm run build
```

Po zbudowaniu aplikacji, w katalogu głównym pojawi się folder `dist` z plikami, które wraz z plikem `index.html` składają się na gotowy program możliwy do uruchomiania w przeglądarce.

Serwer deweloperski

Aplikacja wspiera tryb deweloperski, w którym bieżące zmiany w kodzie automatycznie są budowane do plików wynikowych. Do uruchomienia trybu deweloperskiego potrzebne są te same pakiety instalowane poleceniem:

```
npm install
```

Wywołanie trybu odbywa się komendą:

```
npm run build-watch
```

Omówinie kodu źródłowego

Podsumowanie

Bibliografia

- Caroline Series With assistance from Sara Maloni, Hyperbolic geometry MA448
- Bjørn Jahren, An introduction to hyperbolic geometry, MAT4510/3510
- Martin Freiherr von Gagern, Creation of Hyperbolic OrnamentsAlgorithmic and Interactive Methods, Technischen Universitat Munchen

- Izabela Przezdzink, Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej, Wrocław 2010, Uniwersytet Wrocławski Wydział Matematyki i Informatyki Instytut Matematyczny
- Mateusz Kłeczek, Geometria hiperboliczna, Chrzanów 2016
- Steve Szydlik, Hyperbolic Constructions inGeometer’s Sketchpad, December 21, 2001
- Marek Kordos, Geometria Bolyaia–Łobaczewskiego, http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/g Sierpień 2018