Úloha 1. Adriana je přesně o pět let starší než Bertold. Za deset let bude Adriana k-krát starší než Bertold.

(a) Sestavte soustavu rovnic s reálným parametrem $k \in \mathbb{R}$ a věky zúčastněných jakožto neznámými a zcela obecně ji vyřešte.

(b) Pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ má výsledek smysl vzhledem k zadání?

Řešení. **(a)** Označmě a věk Adriany a b věk Bertolda. První větu přepíšeme do rovnice

$$a = b + 5.$$

Za deset let bude Adrianě $a + 10$ a Bertoldovi $b + 10$ a jelikož má být první číslo podle zadání k-krát větší, než to druhé, máme další rovnici

$$a + 10 = k(b + 10).$$

Máme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a, b, přičemž už v první rovnici máme užitečně vyjádřeno a tak, aby šlo dosadit do druhé rovnice:

$$b + 5 + 10 = k(b + 10).$$

Nyní máme lineární rovnici s neznámou b (a parametrem k); upravme ji tak, abychom měli na jedné straně násobek b a na druhé jen členy bez b:

$$\begin{aligned} b + 15 &= kb + 10k \\ b - kb &= 10k - 15 \\ b(1 - k) &= 10k - 15. \end{aligned}$$

Výraz $1 - k$ nabývá nuly pro $k = 1$; v té situaci je pravá strana rovna -5, máme tedy neplatnou rovnost $0 = -5$ a rovnice – a tedy i celá soustava – nemá řešení. Je-li $k \neq 1$, pak můžeme dvojčlenem rovnici $1 - k$ dělit a získáváme

$$b = \frac{10k - 15}{1 - k}.$$

Dopočteme příslušnou hodnotu a pomocí první rovnice:

$$a = b + 5 = \frac{10k - 15}{1 - k} + 5 = \frac{10k - 15 + 5(1 - k)}{1 - k} = \frac{5k - 10}{1 - k}.$$

Shrnutí tedy vypadá takto:

$k = 1$	$K = \emptyset$
$k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$K = \left\{\left[\frac{5k-10}{1-k}; \frac{10k-15}{1-k}\right]\right\}$

Zde stojí za to se zmínit, proč je už ze zadání jasné, že pro hodnotu $k = 1$ nebude mít soustava rovnic žádné řešení. Pro onu hodnotu totiž zadání zní v podstatě následovně:

„Adriana je přesně o pět let starší než Bertold. Za deset let bude Adriana *stejně stará* jako Bertold.“

Pokud je nyní Adriana starší než Bertold, nikdy nebude *stejně stará* jako Bertold.

(b) Chceme-li, aby věky zúčastněných osob byly kladná čísla, musíme splnit podmínky

$$a = \frac{5k - 10}{1 - k} > 0 \qquad \text{a} \qquad b = \frac{10k - 15}{1 - k} > 0.$$

Jelikož $a = b + 5$, je a vždy větší než b, takže nám stačí řešit nerovnici

$$\frac{10k - 15}{1 - k} > 0,$$

která je splněna pro $1 < k < 1{,}5$. □

Úloha 2. Říční člun zvládá v jednom směru (A) toku řeky plout rychlostí $10\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, v opačném směru (B) pak t-krát rychleji. (Předpokládáme, že řeka teče konstantní rychlostí.)

(a) Sestavte soustavu rovnic s reálným parametrem $t \in \mathbb{R}$ a rychlostmi člunu a řeky jakožto neznámými a zcela obecně ji vyřešte.
(b) Pro které hodnoty parametru t teče řeka ve směru (A) a pro které ve směru (B)?
(c) Pro které hodnoty parametru t se člun není schopen prosadit proti proudu řeky?

Řešení. **(a)** Označíme-li c rychlost člunu a r rychlost řeky, pak z informace o rychlosti ve směru (A) máme rovnici

$$c + r = 10.$$

(Zde nejspíš ledaskdo namítne, že ještě nevíme, zda řeka teče směrem (A), proto není jasné, zda chceme r k c přičítat, nebo ho naopak odčítat. Vyjde to nastejno, pokud se domluvíme, že rychlost řeky může být i záporná – to tehdy, pokud teče směrem (B).)

Pluje-li člun opačným směrem, bude tok řeky na výslednou rychlost působit opačně; výsledná rychlost bude t-krát větší, než v předchozím případě, tedy $10t$. Dostáváme rovnici

$$c - r = 10t.$$

Nyní můžeme například obě rovnice sečíst, čímž se zbavíme r a dostáváme

$$\begin{aligned} 2c &= 10 + 10t \\ c &= 5 + 5t. \end{aligned}$$

V této lineární rovnici s neznámou c koeficient u c, tj. 1, nijak nezávisí na parametru t, takže má rovnice pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ právě jedno řešení – ono $5 + 5t$. Např. z první rovnice dopočteme r:

$$r = 10 - c = 10 - (5 + 5t) = 5 - 5t.$$

Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je tedy množina všech řešení soustavy jednoprvková, $\{[5 + 5t, 5 - 5t]\}$.

(b) Ze zadání je jasné, že pokud $t > 1$, pak je ve výsledku rychlejší směr (B), takže v takovém případě teče řeka ve směru (B). Je-li $t = 1$, tak máme na obě strany stejnou rychlost, takže řeka neteče vůbec. Je-li $t < 1$, je rychlejší směr (A), ve kterém tedy teče řeka. Toto ostatně souvisí s tím, jak jsme si v bodě (a) zvolili, že rychlost řeky budeme přičítat ve směru (A): Je-li $t < 1$, pak je $r = 5 - 5t > 0$, takže opravdu pro směr (A) přičítáme *kladnou* rychlost řeky; naopak pro $t > 1$ je r záporné číslo.

(c) Ze zadání víme, že člun se ve směru (A) dokáže hýbat ve správném směru. Tedy situace, že se nedokáže prosadit, může nastat jen tehdy, když směr (B) je proti proudu, a ještě musí být výsledná rychlost *nekladná*, takže toto nastane pro $t \leq 0$ (pro $t = 0$ člun stojí na místě). □

Úloha 3. Máme dva roztoky, A a B. Když smícháme dva litry A a s dvěma litry B, získáme roztok o koncentraci 25 %. Pokud do tohoto roztoku ještě dále přilijeme t litrů roztoku A, vzroste koncentrace o $5t$ %.

(a) Sestavte soustavu rovnic s reálným parametrem $t \in \mathbb{R}$ a koncentracemi roztoků jakožto neznámými a zcela obecně ji vyřešte.
(b) Pro které hodnoty parametru t dávají zádání a výsledky smysl „v reálném světě“?

Řešení. **(a)** Nechť mají roztoky po řadě koncentrace a a b (které chápeme jako reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$). Sestavíme rovnice podle množství rozpouštěné látky: v prvním případě máme celkem čtyři litry o koncentraci $25\,\% = 1/4$, takže máme rovnici

$$2a + 2b = 4 \cdot \tfrac{1}{4} = 1.$$

V druhém případě máme dva litry B, $2 + t$ litrů A a výsledný roztok má $4 + t$ litrů a koncentraci $(25 + 5t)\,\% = 1/4 + t/20$, tedy

$$(2 + t)a + 2b = (4 + t)\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{t}{20}\right),$$

po roznásobení

$$2a + ta + 2b = 1 + \tfrac{9}{20}t + \tfrac{1}{20}t^2.$$

Asi nejlepší je v tuto chvíli první rovnici odečíst od druhé, čímž se zbavíme neznámé b a dostáváme

$$ta = \tfrac{9}{20}t + \tfrac{1}{20}t^2.$$

Koeficient u neznámé a je $2t$, což je nulové pro $t = 0$; v tom případě dostáváme do dosazení do obou stran rovnici $0 = 0$, tedy a může být libovolné reálné číslo. Pokud je naopak $t \neq 0$, můžeme celou rovnici číslem t dělit a dostáváme

$$a = \tfrac{9}{20} + \tfrac{1}{20}t.$$

Dopočítáme b pomocí první rovnice:

$$b = \tfrac{1}{2} - a = \tfrac{1}{20} - \tfrac{1}{20}t.$$

Závěr „obecného řešení“ tedy je:

$t = 0$	$K = \left\{ \left[a, \tfrac{1}{2} - a\right]; a \in \mathbb{R} \right\}$
$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$K = \left\{ \left[\tfrac{9}{20} + \tfrac{1}{20}t; \tfrac{1}{20} - \tfrac{1}{20}t\right] \right\}$

Všimněme si, že opět je už ze zadání „jasné“, že pro hodnotu $t = 0$ dostaneme nekonečně mnoho řešení: v onom případě totiž druhá věta v zadání v podstatě říká

„Pokud do roztoku *nic* nepřidáme, *nijak* se nezmění jeho koncentrace.“

To je ovšem samozřejmé. Lze si také všimnout, že při $t = 0$ je druhá rovnice úplně stejná, jako ta první.

(b) Koncentrace roztoku by měla být číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Řešíme-li příslušné nerovnice

$$0 \leq \tfrac{9}{20} + \tfrac{1}{20}t \leq 1 \qquad \text{a} \qquad 0 \leq \tfrac{1}{20} - \tfrac{1}{20}t \leq 1,$$

dostaneme po řadě výsledky $t \in \langle -9; 11\rangle$ a $t \in \langle -19; 1\rangle$, jejichž průnikem je $t \in \langle -9; 1\rangle$. Ještě bychom asi pro „reálnost“ měli vzít v potaz, že objem $2 + t$ roztoku A v druhém případě by měl být nezáporné číslo, čímž navíc obdržíme $t \geq -2$, takže dostáváme $t \in \langle -2; 1\rangle$.

(Jiní vykladači zadání mohou poukázat na to, že máme do roztoku *přilévat* t litrů, takže by mělo být $t \geq 0$, v kterémžto případě je závěrem $t \in \langle 0; 1\rangle$. Nechávám na vás, co se vám více líbí.) $\square$