13. Aplikace exponenciálních funkcí a logaritmů

Úloha 1 (biologická)**.** Za optimálních podmínek se jedna bakterie *Escherichia coli* rozdělí na dvě za 20 minut.

(a) Kolik bakterií takto dostaneme z jedné za devět hodin?

(b) Za kolik minut se z jedné bakterie stane 300? Určete s přesností na celé minuty.

(c) Jestliže máme kolonii 100 bakterií, jaké množství jich můžeme očekávat po deseti minutách?

(d) Napište obecný (přibližný) vztah, který udává počet bakterií B v kolonii po t minutách, jestliže jich na začátku bylo B_0.

Úloha 2 (radioaktivní)**.** Poločas rozpadu francia je cca 22 minut, což znamená, že když máme určité množství částic francia, za 22 minut už jich budeme mít jen polovinu (zbytek se prý rozpadne hlavně na radium).

(a) Kolik minut musíme počkat, aby nám z kusu francia zbyla jenom čtvrtina?

(b) Jaká část nerozpadlého francia zbyde po třech hodinách?

(c) Určete, za kolik minut se z jednoho kilogramu francia stane pouhý jeden gram.

(d) Určete poločas rozpadu isotopu uhlíku ^{14}C, jestliže za sto let se rozpadne 1,2 % tohoto isotopu.

Úloha 3 (protiradiační)**.** Pro ochranu před škodlivým zářením se používají různé materiály; tzv. *polotloušťka* pak udává, jakou tloušťku musí mít bariéra z onoho materiálu, aby odstínila polovinu dopadajícího záření.

(a) Polotloušťka betonu (pro γ záření) je 44,5 mm. Jaká část záření projde půlmetrovou vrstvou betonu?

(b) Určete polotloušťku olova, pokud vrstvou o tloušťce 1 cm projde 58 % záření.

Úloha 4 (gamblerská)**.** Šance, že nám při hodu jednou kostkou padne šestka, je 1/6. Šance, že nám při hodu dvěma kostkami padne na obou šestka, je $(1/6)^2$ atd. Jaký je nejmenší počet kostek (přirozené číslo), pro který platí, že šance, že nám na všech současně padne šestka, bude nižší než 10^{-10}?

Úloha 5 (finanční)**.** Máme-li spořící účet s ročním úrokem 1 % (tedy po roce vždy přibude 1 % částky, která tam byla předtím), za kolik let budeme mít na účtu alespoň (a) dvojnásobek, (b) trojnásobek částky, se kterou jsme začali? (Pro jednoduchost pomíjíme daně z úroků atd.)

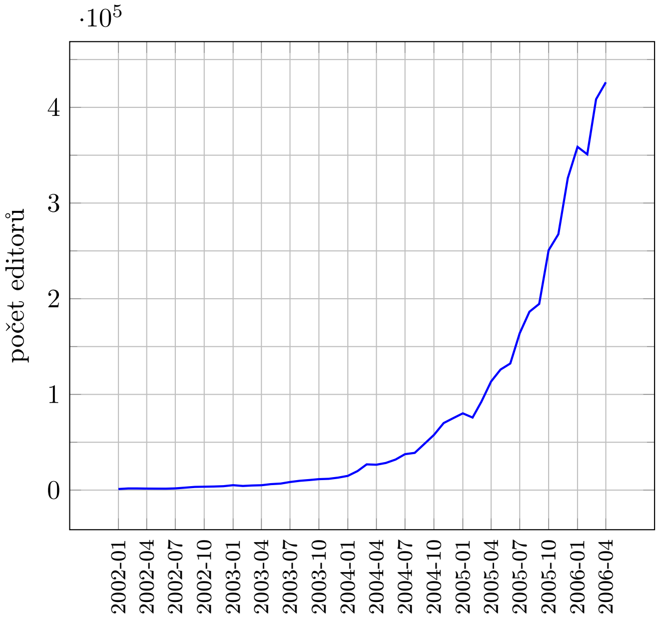
Úloha 6 (hudební)**.** Standardní tón A1, též známý jako *komorní A*, má frekvenci 440 Hz.

(a) Určete frekvenci D2, což je tón o kvartu (tj. pět půltónů) výše oproti A1.

(b) Určete, o kolik půltónů pod A1 je tón o frekvenci 277 Hz.

Úloha 7 (meteorologická)**.** Je známo, že atmosférický tlak s nadmořskou výškou klesá exponenciálně. Jestliže meteostanice v Praze-Ruzyni (364 m n. m.) naměřila tlak 974 hPa a v Peci pod Sněžkou (816 m n. m.) 921,7 hPa, odhadněte tlak na vrcholu Lysé hory v Beskydech (1322 m n. m.). (Jde o skutečná data z 19. 3. 2023 21:00 SEČ.)

Úloha 8 (encyklopedická)**.** Podívejte se na graf, ze kterého je celkem vidět, že v počátcích rostl počet editorů anglické Wikipedie zhruba exponenciálně.



Zkuste z těchto dat co nejlépe odhadnout, kolikrát se „v průměru“ počet editorů zvýšil každý měsíc.

V následujících úlohách je použito značení $\lceil x \rceil$, které značí *nejmenší celé číslo, které není menší než x*, tj. „zaokrouhlení nahoru“ (např. $\lceil 3 \rceil = 3$, $\lceil 3{,}2 \rceil = 4$).

Úloha 9 (informatická)**.** Máme pole n čísel, která jsou navíc seřazená (tedy na první pozici je nejmenší číslo, na druhé pozici druhé nejmenší atd.). Popište algoritmus, který pro číslo na vstupu určí, zda se v poli nachází, přičemž mu na to bude stačit $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ přístupů k poli (tj. maximálně u tolik položek pole zjistí jejich hodnotu). (Nápověda: Jak to efektivně zjistit pro pole 3 prvků? A co 7 prvků?)

Úloha 10 (logická)**.** Máme n závaží, z nichž $n-1$ váží 10 g a jedno váží 10,001 g, ovšem nevíme, které z nich to je. K tomu máme rovnoramenné váhy, které spolehlivě určí, na které straně je větší hmotnost. Na obě misky vah můžeme umístit najednou libovolný počet závaží. Vymyslete postup, pomocí kterého ve všech případech najdeme ono těžší závaží, ale bude nám na to stačit $\lceil \log_3 n \rceil$ vážení. (Nápověda: Nejprve si rozmyslete postup pro 3 závaží, pak pro 9.)

1. (a) $2^{27} = 134\,217\,728$ (b) $20 \cdot \log_2 300 \doteq 165$
(c) $100 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \doteq 141$ (d) $B = 2^{\frac{t}{20}} \cdot B_0$

2. (a) 44 (b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 60/22} \doteq 0{,}344\,\%$ (c) $22 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{1000} \doteq 219$
(d) $100 \cdot \log_{1-0{,}012} \frac{1}{2} \doteq 5741$ (pozn. skutečná udávaná hodnota je 5730 let)

3. (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{500}{44{,}5}} \doteq 4{,}14611 \cdot 10^{-4}$ (b) $\log_{0{,}58} \frac{1}{2} \doteq 1{,}27\,\mathrm{cm}$

4. 13, jelikož $\log_{\frac{1}{6}} 10^{-10} \doteq 12{,}9$

5. (a) $\log_{1{,}01} 2 \doteq 69{,}7$, tedy 70 let (b) $\log_{1{,}01} 3 \doteq 110{,}4$, tedy 111 let

6. (a) $440 \cdot 2^{\frac{5}{12}} \doteq 587\,\mathrm{Hz}$ (b) $\log_{\sqrt[12]{2}} \frac{277}{440} \doteq -8$, tedy 8 půltónů (malá sexta)

7. $974 \cdot \left(\frac{921{,}7}{974}\right)^{\frac{1322-364}{816-364}} \doteq 866{,}5\,\mathrm{hPa}$ (pozn. skutečná naměřená hodnota byla 866,8 hPa)

8. cca 1,13-krát