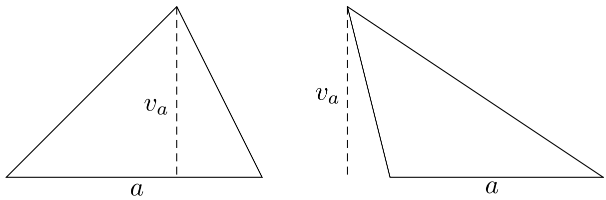
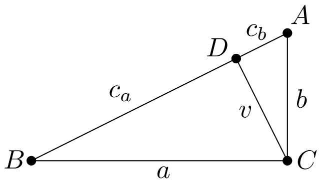
Geometrické důkazy

Úloha 1. Dokažte vzorec pro obsah trojúhelníka $S = \frac{1}{2} a v_a$ (v_a = výška na stranu a). (Nápověda: „Doplňte“ trojúhelník na obdélník.) Zvládnete to i pro *tupoúhlý*?



Úloha 2. Uvažme pravoúhlý trojúhelník rozdělený výškou z vrcholu C (naproti přeponě); označíme D patu oné výšky a $c_a = |BD|$, $c_b = |AD|$.



(a) Zdůvodněte, proč jsou všechny tři trojúhelníky na obrázku podobné; které vrcholy si odpovídají? (Nápověda: Stačí porovnat vnitřní úhly.)

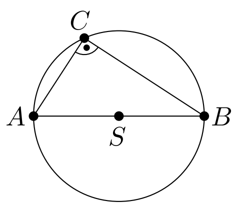
(b) Doplňte poměry podle podobností z předchozího bodu: $a : b : c = \square : \square : \square = \square : \square : \square$.

(c) Dokažte *Euklidovu větu o výšce*: $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$. (Nápověda: Stačí zkombinovat příslušné dva poměry z předchozího bodu.)

(d) Dokažte *Euklidovu větu o odvěsně*: $a = \sqrt{c \cdot c_a}$, $b = \sqrt{c \cdot c_b}$.

(e) Dokažte *Pythagorovu větu*: $a^2 + b^2 = c^2$. (Nápověda: Dosaďte z Euklidovy věty o odvěsně.)

Úloha 3. Dokažte *Thaletovu větu*: Je-li úsečka AB průměrem kružnice k a C libovolný bod k různý od A, B, pak je úhel ACB pravý.

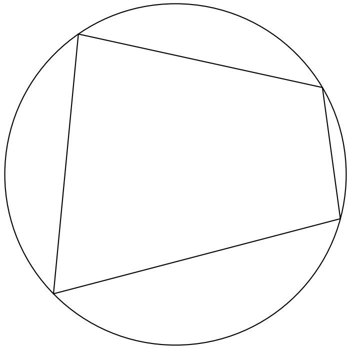


(Nápověda: Doplňte si do obrázku úsečku CS a počítejte úhly. Jsou tam rovnoramenné trojúhelníky.)

⋆ **Úloha 4.** Dokažte *Větu o středovém a obvodovém úhlu*: Máme-li kružnici se středem S, tři různé body A, B, C na jejím obvodu takové, že S leží uvnitř úhlu ACB,[1] tak platí $|\sphericalangle ASB| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$. (Nápověda: Doplňte úsečky a dopočtěte úhly; opět rovnoramenné trojúhelníky.)

[1] Tvrzení platí do jisté míry i bez této podmínky.

⋆ **Úloha 5.** *Tětivový čtyřúhelník* je takový, kterému lze opsat kružnice.



Dokažte, že součet protějších úhlů v každém tětivovém čtyřúhelníku je 180°. (Nápověda: Doplňte si do obrázku spojnice vrcholů se středem a počítejte úhly. Jsou tam rovnoramenné trojúhelníky.)