Algebraické manipulace pro pokročilé

Úloha 1. Nalezněte všechna řešení soustav a dokažte, že žádná další neexistují.

1. $\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2x \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 - 3y + 4 = z \\ y^2 - 3z + 4 = x \\ z^2 - 3x + 4 = y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - 3y + 3 = z \\ y^2 - 3z + 4 = x \\ z^2 - 3x + 5 = y \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + 1 = 4z \\ 2y^2 + 2yz + 1 = 4x \\ 2z^2 + 2zx + 1 = 4y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y + z = 2 \\ y^2 + z + x = 2 \\ z^2 + x + y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 2 \\ y^2 + z^2 + x = 2 \\ z^2 + x^2 + y = 2 \end{cases}$

Úloha 2. Dokažte, že pro všechna reálná čísla x, y platí $x^2 + y^2 \geq 2xy$ a rozhodněte, ve kterých případech nastane rovnost.

Úloha 3. Dokažte, že pro všechna *kladná* reálná čísla x, y platí $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ a rozhodněte, ve kterých případech nastane rovnost.

Úloha 4. Dokažte, že pro všechna reálná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ a rozhodněte, ve kterých případech nastane rovnost.

Úloha 5 (66–C–III–4)**.** Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla $a \leq b \leq c$ platí

$$(-a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3$$

Úloha 6 (61–C–III–1)**.** Pro libovolná reálná čísla x, y, z splňující $x < y < z$ dokažte nerovnost

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2$$

Úloha 7 (63–C–III–3)**.** Pro kladná reálná čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Ukažte, že pak také platí $c^2 + ab \leq ac + bc$.

Úloha 8 (63–C–II–1)**.** Určete, jakých hodnot může nabývat výraz $V = ab+bc+cd+da$, splňují-li reálná čísla a, b, c, d dvojici podmínek

$$2a - 5b + 2c - 5d = 4,$$
$$3a + 4b + 3c + 4d = 6.$$

Úloha 9 (60–C–III–4)**.** Nechť x, y, z jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že čísla

$$x + y + z - xyz \quad \text{a} \quad xy + yz + zx - 3$$

nemohou být současně záporná.

Úloha 10 (65–C–III–1)**.** Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $3x^2 - 12xy + y^4$, ve kterém x a y jsou libovolná nezáporná *celá* čísla.

Výsledky soustav rovnic

1. $\{[1;1]\}$ **2.** $\{[2;2;2]\}$ **3.** $\emptyset$ **4.** $\left\{\left[\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right\}$ **5.** $\big\{[-1-\sqrt{3};-1-\sqrt{3};-1-\sqrt{3}];$ $[-1+\sqrt{3};-1+\sqrt{3};-1+\sqrt{3}];[1;1;0];[1;0;1];[0;1;1]\big\}$

6. $\big\{\big[\frac{1}{4}(-1-\sqrt{17});\frac{1}{4}(-1-\sqrt{17});\frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})\big];\big[\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17});\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17});\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17})\big];[1;1;0];$ $[1;0;1];[0;1;1];\big[-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\big];\big[-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\big];\big[\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\big]\big\}$