Okolí

Definice

Pro reálná čísla c, ε, kde $\varepsilon > 0$, definujeme *ε-okolí bodu c* jako

$$B(c;\varepsilon) = (c-\varepsilon; c+\varepsilon)$$

(tj. otevřený interval s konci $c-\varepsilon$ a $c+\varepsilon$).

Definice

Pro reálná čísla c, ε, kde $\varepsilon > 0$, definujeme *prstencové ε-okolí bodu c* jako

$$P(c;\varepsilon) = B(c;\varepsilon) \setminus \{c\} = (c-\varepsilon; c) \cup (c; c+\varepsilon).$$

Limita

Stěžejní Definice

Řekneme, že *funkce f má v bodě c limitu A*, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in P(c;\delta)\colon f(x) \in B(A;\varepsilon).$$

Jinak řečeno:

- Pro jakkoliv malé okolí bodu A je možné nalézt dostatečně malé prstencové okolí bodu c takové, že funkční hodnoty bodů z tohoto prstencového okolí budou všechny v onom okolí A.
- Pro každé kladné ε existuje kladné δ takové, že pokud se x liší od c o méně jak δ (ovšem $x \neq c$), tak se $f(x)$ liší od A o méně jak ε.

To, že f má v c limitu A, zapisujeme jako

$$\lim_{x \to c} f(x) = A.$$

Důkaz, že $\lim_{x\to 1} x = 1$

- Chceme dokázat, že

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(\overset{c}{1}; \delta)\colon \overset{f(x)}{x} \in B(\overset{A}{1}; \varepsilon).$$

- Ideálně bychom chtěli nějaký *předpis*, jak pro zadané ε najít patřičné δ; ovšem zde si vždycky stačí vzít za δ přímo ε:

$$\forall x \in P(1; \varepsilon)\colon x \in B(1; \varepsilon).$$

- Je možné si zvolit i menší δ.
- Kdybychom chtěli dokázat, že $\lim_{x\to 1} 2x = 2$, budeme postupovat stejně, jen použijeme $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (nebo menší).

Poznámky

- Limita funkce v bodě *nijak nezávisí* na funkční hodnotě v onom bodě (prstencové okolí!).
- Limita funkce v nějakém bodě vůbec nemusí existovat; např. následující limity neexistují:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Pokud funkce má v nějakém bodě limitu, pak je tato určena jednoznačně (tj. nemůže se nám např. stát, že v jednom bodě bude limita funkce jak 1, tak 2).