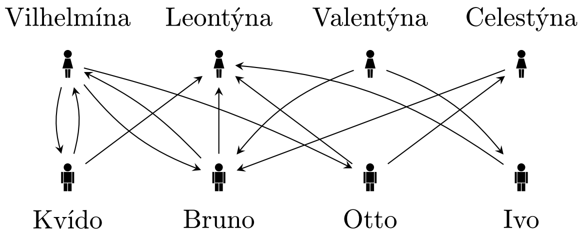
Výroky s kvantifikátory 2

Úloha 1. Následující diagram označuje, kdo s kým chce chodit. Označme M množinu všech mužů v tomto diagramu, $\check{Z}$ množinu všech žen a L množinu všech lidí. Šipkou $a \to b$ značíme, že a chce chodit s b, zatímco $a \not\to b$ negaci $a \to b$.



Přeložte následující výroky do „lidské řeči" a rozhodněte o jejich platnosti.

(a) $\exists \check{z} \in \check{Z}\colon \text{Bruno} \to \check{z}$

(b) $\forall \check{z} \in \check{Z}\colon \text{Bruno} \to \check{z}$

(c) $\exists m \in M\colon \text{Vilhelmína} \not\to m$

(d) $\exists \check{z} \in \check{Z}\ \forall m \in M\colon m \to \check{z}$

(e) $\forall m \in M\ \exists \check{z} \in \check{Z}\colon m \to \check{z}$

(f) $\exists m \in M\ \forall \check{z} \in \check{Z}\colon m \to \check{z}$

(g) $\forall m \in M\ \exists \check{z} \in \check{Z}\colon \check{z} \to m$

(h) $\exists \check{z} \in \check{Z}\ \forall m \in M\colon \check{z} \to m$

(i) $\forall l \in L\ \exists k \in L\colon l \to k$

(j) $\forall l \in L\ \exists k \in L\colon l \not\to k$

(k) $\forall l \in L\ \exists k \in L\colon k \not\to l$

(l) $\exists k, l \in L\colon (k \to l) \land (l \to k)$

(m) $\exists k, l \in L\colon (k \not\to l) \land (l \not\to k)$

(n) $\forall k, l \in L\colon (k \to l) \lor (l \not\to k)$

⋆ (o) $\exists \check{z} \in \check{Z}\ \forall y \in \check{Z}\ \forall m \in M\colon (m \to y) \Rightarrow (y = \check{z})$

(p) $\forall \check{z} \in \check{Z}\ \exists y \in \check{Z}\ \forall m \in M\colon (y \neq \check{z}) \land \big((\check{z} \to m) \Rightarrow (y \to m)\big)$

(q) $\exists m, n \in M\ \forall \check{z} \in \check{Z}\colon (m \neq n) \land \big((\check{z} \to m) \Leftrightarrow (\check{z} \to n)\big)$

(r) $\exists m \in M\ \forall \check{z} \in \check{Z}\colon (\check{z} \to m) \Rightarrow \big(\exists n \in M\colon (m \neq n) \land (\check{z} \to n)\big)$

(s) $\exists \check{z} \in \check{Z}\ \forall m \in M\colon (m \to \check{z}) \Rightarrow (m \to m)$

Úloha 2. Výroky (o), (p), (q), (r) a (s) z předchozí úlohy znegujte.

Úloha 3. Jakou (jedinou) šipku musíme doplnit do diagramu, aby platil výrok

(a) $\exists m \in M\ \forall \check{z} \in \check{Z}\colon \check{z} \to m$,

(b) $\exists \check{z} \in \check{Z}\ \forall m \in M\colon \check{z} \to m$?

Úloha 4. Vymyslete příklad diagramu, ve kterém bude aspoň jedna šipka a bude platit (n).

1.

(a) Existuje žena, se kterou chce Bruno chodit; 1

(b) Bruno chce chodit se všemi ženami; 0

(c) Existuje muž, který nechce chodit s Vilhelmínou; 1

(d) Existuje žena, se kterou chtějí chodit všichni muži; 1

(e) Každý muž chce chodit s nějakou ženou; 1

(f) Nějaký muž chce chodit se všemi ženami; 0

(g) S každým mužem chce chodit nějaká žena; 1

(h) Nějaká žena chce chodit se všemi muži; 0

(i) Každý chce s někým chodit; 0

(j) Každý chce s někým nechodit; 1

(k) S každým chce někdo nechodit; 1

(l) Existují dva lidé, kteří spolu chtějí chodit; 1

(m) Existují dva lidé, že ani jeden nechce chodit s tím druhým; 1

(n) Pro každé dva lidi platí, že první chce chodit s druhým nebo druhý nechce chodit s prvním; 0 (není splněno např. pro $k =$ Leontýna, $l =$ Bruno)

(o) Existuje žena taková, že všichni muži, kteří vůbec chtějí chodit s nějakou ženou, vlastně chtějí chodit jenom s ní; 0

(p) Ke každé ženě existuje jiná, která chce chodit se všemi, co ta první; 0 (nesplňují to Vilhelmína a Valentýna)

(q) Existuje dvojice různých mužů, se kterými chtějí chodit ty samé ženy; 1 (jsou to Kvído a Otto)

(r) Existuje muž takový, že každá žena, která s ním chce chodit, chce také chodit i s nějakým jiným mužem; 1 (splňují všichni muži kromě Bruna)

(s) Existuje žena taková, že všichni muži, kteří s ní chtějí chodit, chtějí taky chodit sami se sebou; 1 (je to Valentýna)

2. (o) $\forall ž \in Ž\ \exists y \in Ž\ \forall m \in M\colon (m \to y) \wedge (y \neq ž)$

(p) $\exists ž \in Ž\ \forall y \in Ž\ \exists m \in M\colon (y = ž) \vee \big((ž \to m) \wedge (y \not\to m)\big)$

(q) $\forall m, n \in N\ \exists ž \in Ž\colon (m = n) \vee \big((ž \not\to m) \Leftrightarrow (ž \to n)\big)$

(r) $\forall m \in M\ \exists ž \in Ž\colon (ž \to m) \wedge \big(\forall n \in M\colon (m = n) \vee (ž \not\to n)\big)$

(s) $\forall ž \in Ž\ \exists m \in M\colon (m \to ž) \wedge (m \not\to m)$

3.

(a) Leontýna $\to$ Bruno

(b) Vilhelmína $\to$ Ivo