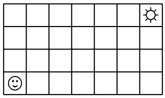
30. Aplikace kombinačních čísel

Úloha 1. Martin má sedm knih, o které se zajímá Ivana; oproti tomu Ivana má deset knih, o které se zajímá Martin. Určete, kolika způsoby si mohou Martin a Ivana vyměnit (a) dvě, (b) tři knihy.

Úloha 2. Tentokrát už naposledy: kolik je na obrázku obdélníků? (Nápověda: Každý obdélník je popsán dvojicí vodorovných a dvojicí svislých čar.)



Úloha 3. Kolika způsoby se v tabulce v Úloze 2 můžeme dostat z políčka ☺ do políčka ☼, jestliže jsou povoleny pouze tahy o jedna nahoru nebo o jedna doprava? (Nápověda: Kolik uděláme celkem tahů? Kolik jich bude nahoru?)

Úloha 4. Určete, kolika způsoby lze vybrat (neuspořádanou) čtveřici (různých) čísel z $1, 2, \ldots, 20$ tak, aby (a) jejich součin byl sudý, (b) jejich součin byl lichý, (c) jejich součet byl sudý, (d) jejich součet byl lichý.

⋆ **Úloha 5.** Najděte chybu v následující „úvaze“, proč by v Úloze 4 měly (c) a (d) vyjít stejně: „Mezi čísly $1, \ldots, 20$ je stejně sudých jako lichých, takže se ve čtveřicích budou sudá a lichá čísla vyskytovat stejně často, proto budou i součty stejně často sudé jako liché.“

Úloha 6. Mějme šachovnici 8×8. Kolika způsoby na ní lze vybrat trojici políček, pokud

(a) (žádná další podmínka),

(b) nesmí být všechna téže barvy,

(c) nesmí ležet všechna v jednom řádku,

(d) nesmí ležet všechna v jednom řádku ani v jednom sloupci,

⋆ (e) žádná dvě nesmí být v témže řádku,

⋆ (f) žádná dvě nesmí být v témže řádku ani sloupci.

Úloha 7. V rovině se nachází $n \in \mathbb{N}$ bodů. Kolik je těmito body určeno

(a) přímek, jestliže žádné tři body neleží na jedné přímce?

(b) trojúhelníků, jestliže žádné tři neleží na jedné přímce?

(c) přímek, jestliže jich p leží na jedné přímce a kromě nich už žádné tři neleží?

(d) trojúhelníků, jestliže jich p leží na jedné přímce a kromě nich už žádné tři neleží?

⋆ **Úloha 8.** Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$ s touto vlastností: $(n+1)$-prvková množina má o 8515 víc tříprvkových podmnožin, než kolik jich má n-prvková.

⋆⋆ **Úloha 9.** Celkem n pirátů uložilo svůj společný poklad do truhly. Na truhlu umístili celkem ℓ zámků, ke kterým si potom rozdali klíče, a to tak, že kdykoliv se sejde více jak k pirátů, tak se budou moct do truhly dostat, zatímco když se jich sejde nejvýše k, tak truhlu neotevřou (tj. od nějakého zámku jim bude chybět klíč). Jaký je nejmenší počet zámků ℓ, pro který lze totoho dosáhnout, a jak si mají od nich rozdat klíče?

1. **(a)** $\binom{7}{2} \cdot \binom{10}{2} = 945$ **(b)** $\binom{7}{3} \cdot \binom{10}{3} = 4200$

2. $\binom{8}{2} \cdot \binom{5}{2} = 280$

3. $\binom{9}{3} = 84$

4. **(a)** $\binom{20}{4} - \binom{10}{4} = 4635$ **(b)** $\binom{10}{4} = 210$ **(c)** $2 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2} = 2445$ **(d)** $2 \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{3} = 2400$

6. **(a)** $\binom{64}{3} = 41\,664$ **(b)** $\binom{64}{3} - 2 \cdot \binom{32}{3} = 2 \cdot \binom{32}{2} \cdot \binom{32}{1} = 31\,744$ **(c)** $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = 41\,216$
(d) $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = 40\,768$ **(e)** $8^3 \cdot \binom{8}{3} = 28\,672$ **(f)** $\frac{1}{3!} \cdot 64 \cdot 49 \cdot 36 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \binom{8}{3} = 18\,816$

7. **(a)** $\binom{n}{2}$ **(b)** $\binom{n}{3}$ **(c)** $\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1$ **(d)** $\binom{n}{3} - \binom{p}{3}$

8. $n = 131$

9. $\ell = \binom{n}{k}$; každý zámek odpovídá jedné k-prvkové podmnožině pirátů, přičemž klíče od něj dostanou právě ti, kteří v oné množině nejsou