

25. Důkazní materiál

Úloha 1. Zde jsou *axiomy* naší oblíbené „student-seminářové“ situace:

- (A1) Na každé přímce leží jiná kolekce bodů. (Neboli: Přímka *je* kolekce bodů.)
- (A2) Existují alespoň dva body.
- (A3) Každé dva různé body leží na právě jedné společné přímce.
- (A4) Pro každou přímku existuje bod, který na ní neleží.
- (A5) Jestliže na přímce p neleží bod A , pak existuje právě jedna přímka rovnoběžná s p , na které A leží.

Navíc jsme již dokázali tyto *věty*:

- (V1) Každý bod leží na alespoň dvou přímkách.
- (V2) Na každé přímce leží alespoň jeden bod.

Dokažte následující tvrzení:

- (V3) Na každé přímce leží alespoň dva body. (Nápověda: Postupujte sporem, již víme z (V2), že tam aspoň jeden bod leží, ten podle (V1) leží ještě na nějaké další přímce. Směřujte ke sporu s (A5) pomocí toho, že obě tyto přímky budou rovnoběžky k nějaké třetí.)
- (V4) Existují alespoň čtyři body. (Nápověda: První tři získáte snadno z axiomů, čtvrtý bod pak z (V3) a (A5).)
- (V5) Existuje alespoň šest přímek. (Nápověda: Začněte jako v důkazu (V4) a ukažte, že každá dvojice bodů leží na jiné přímce.)

★★ (V6) Na každé přímce leží stejný počet bodů (aspoň pokud je celkové množství bodů konečné.)

★ **Úloha 2.** Zkonstruuje situaci (tzv. *model*) splňující axiomy z předchozí úlohy, který bude obsahovat právě 9 bodů. (Nápověda: Uspořádejte si je do čtverce a dělejte „něco jako přímky“.)

Úloha 3. Nalezněte chybu v tomto důkazu $1 = 2$: Předpokládejme, že $1 = 2$, pak ze symetrie rovněž platí $2 = 1$. Součtem těchto dvou rovností dostaneme $3 = 3$, což je pravda, tudíž tvrzení platí.

Úloha 4. Nalezněte chybu v tomto důkazu $1 = 2$: Nechť jsou a, b nenulová reálná čísla, která se rovnají. Upravujeme:

$$\begin{aligned}a &= b \\a^2 &= ab \\a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\(a + b)(a - b) &= b(a - b) \\a + b &= b \\2b &= b \text{ (protože } a = b) \\2 &= 1\end{aligned}$$

Úloha 5 (Pro znalce integrálního počtu). Nalezněte chybu v tomto důkazu $0 = 1$:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{per partes}}{=} x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx,$$

tudíž $0 = 1$.

✧ **Úloha 6** (Anglický vtip; oceníte?). Proof that a dog has 9 legs:

- No dog has 5 legs.
- A dog has 4 more legs than no dog.
- Therefore, a dog has 9 legs.