

Hyperbolicko-eliptická soutěž

V závorkách jsou uvedeny počty bodů.

Úloha 1 (1,5). Nalezněte všechny průsečíky přímky p a hyperboly h , jestliže jejich rovnice jsou

$$p: 3x - 2y + 2 = 0, \quad h: -(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 1.$$

Úloha 2 (2). Nalezněte rovnice všech hyperbol, jejichž asymptoty mají rovnice $y = 2x + 4$ a $y = -2x - 2$ a délka hlavní poloosy je 2.

Úloha 3 (2). Elipsa má ohniska v bodech $[-3; 1]$ a $[5; 1]$, přičemž délka vedlejší poloosy je 2. Určete rovnici oné elipsy.

Úloha 4 (2). Hyperbola má ohniska v bodech $[-3; 1]$ a $[5; 1]$, přičemž délka vedlejší poloosy je 2. Určete rovnici oné hyperboly.

Úloha 5 (3). Elipsa má ohniska v bodech $[-1; -2]$ a $[-1; 4]$ a prochází bodem $[0; 5]$. Určete rovnici oné elipsy.

Úloha 6 (3). Hyperbola má ohniska v bodech $[-1; -2]$ a $[-1; 4]$ a prochází bodem $[0; 5]$. Určete rovnici oné hyperboly.

Úloha 7 (5). Nalezněte rovnice všech tečen k elipse dané rovnicí $4x^2 + y^2 = 4$ procházejících bodem $[-2; 0]$.

Úloha 8 (4). Nalezněte rovnice všech elips, které budou současně splňovat:

- jejich osy budou rovnoběžné s osami souřadnic,
- osy souřadnic budou jejich tečny,
- střed bude ležet na přímce $y = x + 1$,
- délka hlavní poloosy bude 7.

Úloha 9 (4,5). Na elipse o rovnici $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ nalezněte bod nejbližší přímce o rovnici $y = x - 6$.

Úloha 10 (1,5). Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$, pro který je rovnice

$$3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y = c$$

rovnici nějaké elipsy v rovině.

Úloha 11 (1,5). Určete všechny hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$, pro který je rovnice

$$3x^2 - 2y^2 - 6x + 8y = c$$

rovnici nějaké hyperboly v rovině.

Úloha 12 (2,5). Je dána hyperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$. Vypočítejte délku takové její tětiny, která je kolmá na osu x a prochází ohniskem hyperboly.

Úloha 13 (2). Určete odchylku asymptot hyperboly dané rovnicí $2x^2 - x - 3y^2 - 7y + 13 = 0$.

Úloha 14 (4). Množina všech bodů, jejichž vzdálenosti od bodu $[5; 0]$ a od přímky $x = \frac{16}{5}$ jsou v poměru $5 : 4$, je jistá hyperbola; určete souřadnice jejího středu a délky poloos.

1. $[2; 4]$ a $\left[\frac{22}{5}; \frac{38}{5}\right]$
2. $\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ a $-\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
3. $\frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
4. $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
5. $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{18} = 1$
6. $-\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$
7. $y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}(x+2)$
8. $\frac{(x-6)^2}{6^2} + \frac{(y-7)^2}{7^2} = 1$ a $\frac{(x+7)^2}{7^2} + \frac{(y+6)^2}{6^2} = 1$
9. $\left[\frac{9}{\sqrt{13}}; -\frac{4}{\sqrt{13}}\right]$
10. $c > -11$
11. $c \neq 5$
12. $\frac{9}{2}$
13. $\arccos \frac{1}{5} \doteq 78^\circ 28'$
14. střed $[0; 0]$, hlavní poloosa 3, vedlejší poloosa 4