26. Matematická indukce

Úloha 1. Dokažte matematickou indukcí následující vztahy platné pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

(c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(d) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

(e) $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^n - 2^n + 1$

Úloha 2. U následujících součtů stanovte hypotézu, jakému (jednoduššímu) výrazu by se mohly rovnat, a dokažte ji matematickou indukcí:

(a) $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n$,

(b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Úloha 3. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n jsou následující výrazy dělitelné šesti:

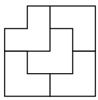
(a) $2n^3 + 3n^2 + n$,

(b) $4n^3 - 3n^2 - n$.

Úloha 4. Pro každé přirozené číslo n dokažte

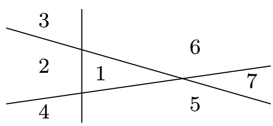
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Úloha 5. Dokažte, že pro každé přirozené n je možné pokrýt tabulku $2^n \times 2^n$, ze které odstraníme jedno rohové pole, triminy tvaru L. Obrázek znázorňuje jedno takové pokrytí pro $n = 2$.



(Nápověda: Útvar o straně 2^{k+1} se dá „skoro“ poskládat z těch o straně 2^k, pak už stačí jen něco málo přidat.)

Úloha 6. Mějme v rovině $n \in \mathbb{N}$ různoběžných přímek takových, že žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že tyto přímky dělí rovinu na $1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ oblastí. Obrázek znázorňuje situaci pro $n = 3$ s rozdělením na $7 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ oblastí.



⋆ **Úloha 7** (Bernoulliho nerovnost)**.** Dokažte, že pro všechna reálná $x > -1$ a všechna přirozená n platí $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

⋆ **Úloha 8.** Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ dokažte

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

⋆ **Úloha 9.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje n-ciferné přirozené číslo, které je dělitelné 2^n a jeho cifry jsou pouze 1 nebo 2.

⋆⋆ **Úloha 10.** Dokažte pro všechna $n \in \mathbb{N}$, že mezi libovolnými 3^{n+1} přirozenými čísly lze najít 3^n čísel, jejichž součet je dělitelný 3^n. (Nápověda: V indukčním kroku nahlédněte, že mezi 3^{k+2} čísly lze nalézt pět disjunktních skupin, jejichž součet je dělitelný 3^k, a rozdělte je podle zbytku po dělení 3^{k+1}.)