Nějaká další fakta

Věta („O třech limitách“, též „O dvou policajtech“). *Nechť tři funkce f, g, h splňují $f(x) \le g(x) \le h(x)$ pro všechna x z nějakého prstencového okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$. Dále nechť f a h mají v c vlastní limitu A. Pak i g má v c limitu A.*

Z aplikací a obrázků bude snad dobře „vidět“, proč tato věta platí; prostřední funkce je „sevřena“ těmi krajními, takže nemá jinou možnost, než mít v c tutéž limitu:

Úloha 1. Dokažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin x} = 1.$$

Řešení. Pro všechna reálná x platí $-1 \le \sin x \le 1$, proto pro $x > 1$ platí

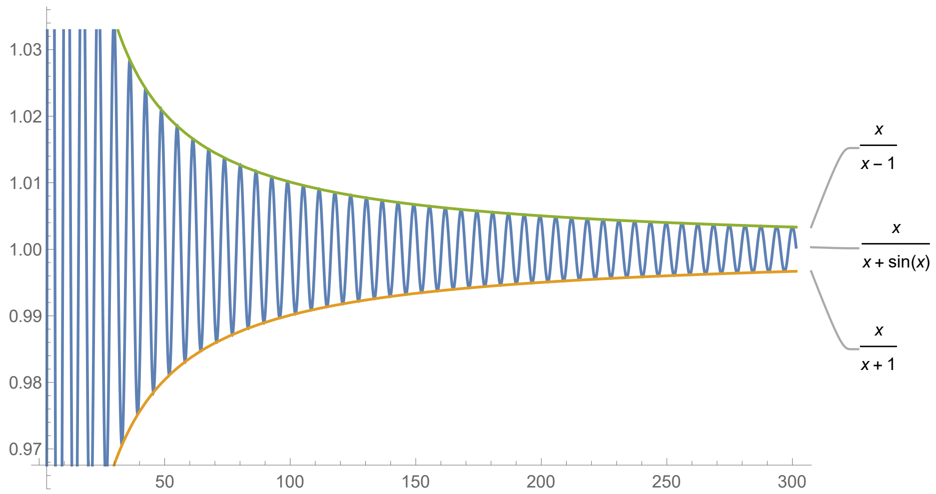
$$\frac{x}{x+1} \le \frac{x}{x+\sin x} \le \frac{x}{x-1}.$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

je také

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin x} = 1.$$



□

Úloha 2. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} x \sin \tfrac{1}{x} = 0.$$

Řešení. Pro všechna $x \ne 0$ platí $-1 \le \sin \frac{1}{x} \le 1$, proto pro $x \ne 0$ rovněž platí

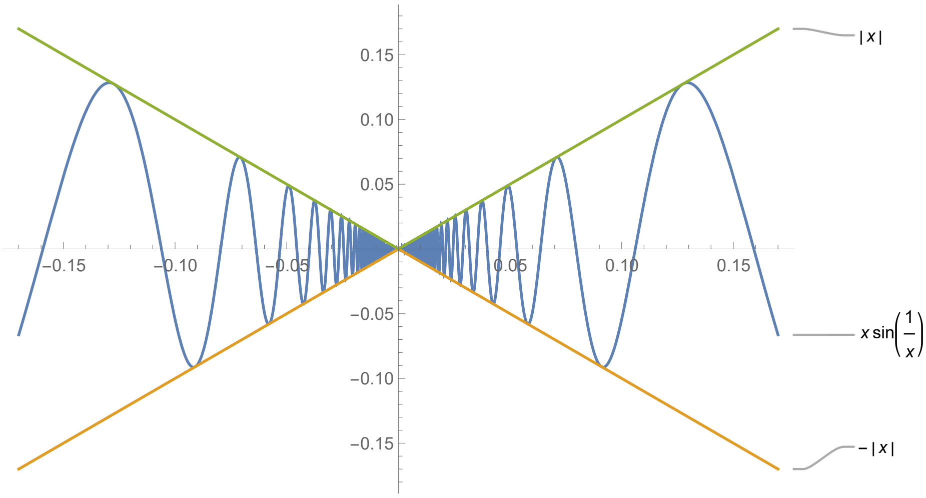
$$-|x| \le x \sin \tfrac{1}{x} \le |x|.$$

Jelikož

$$\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

je také

$$\lim_{x\to 0} x \sin \tfrac{1}{x} = 0.$$



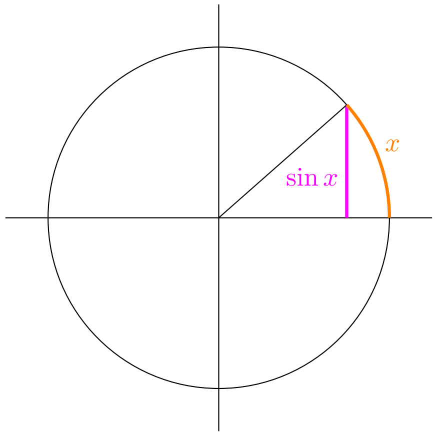
□

Konečně se dostáváme k naší oblíbené limitě!

Úloha 3. Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Z hodiny víme, že $\sin x \leq x$ pro $x \geq 0$, což se nahlédne z definice sinu pomocí jednotkové kružnice:

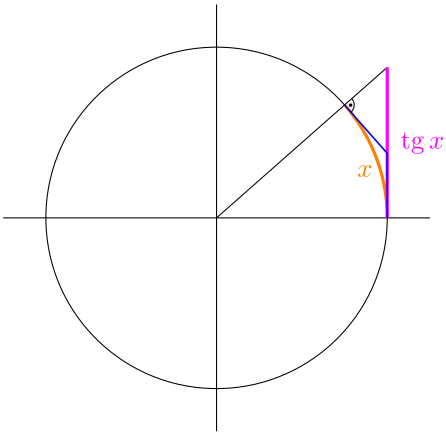


Pro $x \leq 0$ naopak dostaneme $\sin x \geq x$, ovšem obě tyto nerovnosti přejdou po podělení x ve

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1$$

pro $x \neq 0$ (v té záporné se otočilo znaménko).

V druhém kroce nahlédneme, že pro $x \in (0; \pi/2)$ ještě platí $\operatorname{tg} x \geq x$; opět budeme postupovat přes jednotkovou kružnici, ale teď to bude lehce zajímavější:



Délka oblouku, což je x, je menší než délka modré lomené čáry (která je tečná k oblouku v krajních bodech). Úsečka odpovídající $\operatorname{tg} x$ je ovšem ještě delší – „horní“ usek je přepona v pravoúhlém trojúhelníku, zatímco modrý segment je pouze odvěsnou.

Pro $x \in (\pi/2; 0)$ máme opět opačnou nerovnost $\operatorname{tg} x \leq x$; každopádně po vydělení x získáváme

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} \geq 1$$

což si po přenásobení $\cos x$ (který je kladný na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$) ještě změníme na

$$\frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \neq 0$ (což se dá říct i jako $x \in P(0; \pi/2)$).

Vidíme tedy, že pro $x \in P(0; \pi/2)$ máme

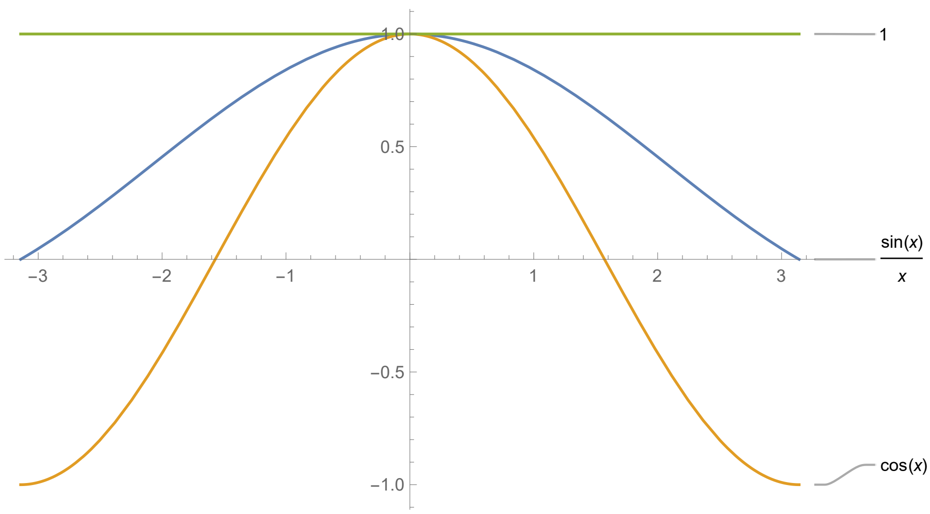
$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

a jelikož

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

je také

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



$\square$