27. Úvod do posloupností

Úloha 1. U následujících rekurentních předpisů odhadněte, jaký bude předpis pro n-tý člen, a svůj odhad ověřte:

(a) $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 3$ pro $n > 1$

(b) $a_1 = 1$, $a_n = -a_{n-1}$ pro $n > 1$

(c) $a_1 = 2$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ pro $n > 1$

(d) $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1}$ pro $n > 1$

(e) $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} - 1$ pro $n > 1$

(f) $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} - 1$ pro $n > 1$

(g) $a_1 = -3$, $a_n = 2a_{n-1} + n$ pro $n > 1$

⋆ (h) $a_1 = 3$, $a_n = -2a_{n-1} + 3$ pro $n > 1$

(i) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ pro $n > 2$

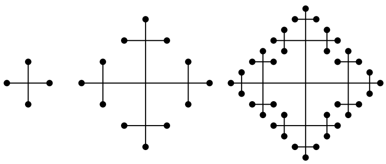
⋆ (j) $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ pro $n > 2$

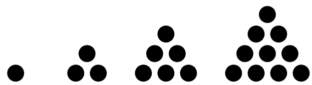
Úloha 2. Dopočtěte první dva členy posloupnosti, jestliže o ní víme

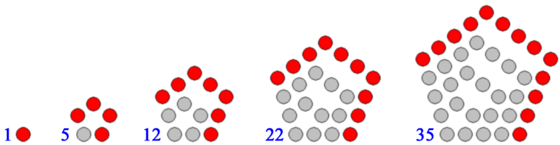
(a) $a_n = 2a_{n-1} - n$ pro $n > 1$, $a_3 = 33$

(b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro $n > 2$, $a_5 = 3$, $a_6 = 4$

Úloha 3. Napište rekurentní předpisy pro následující posloupnosti „zadané obrázkem“:

(a) 

(b) 

(c) 

⋆ **Úloha 4.** Dokažte, že pro n-té Fibonacciho číslo F_n (kde $F_1 = F_2 = 1$) platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

⋆⋆ **Úloha 5.** Kolik podmnožin množiny $\{1; 2; \ldots; n\}$ má tu vlastnost, že neobsahuje dvě po sobě jdoucí čísla? Např. pro $n = 3$ jde o množiny $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 3\}$ a prázdnou množinu (celkem pět podmnožin). Proč se tyto počty shodují s jinou známou posloupností?

1. **(a)** $3n+1$ **(b)** $(-1)^{n+1}$ **(c)** $2^{2^{1-n}}$ **(d)** $3 \cdot 2^{n-1}$ **(e)** 2^n+1 **(f)** 1 **(g)** $-n-2$ **(h)** $1-(-2)^n$ **(i)** $3n-2$ **(j)** $n \cdot 2^n$

2. **(a)** $a_1 = 10$, $a_2 = 18$ **(b)** $a_1 = 3$, $a_2 = -1$

3. **(a)** $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ **(b)** $a_n = a_{n-1} + n$ **(c)** $a_n = a_{n-1} + 3n - 2$