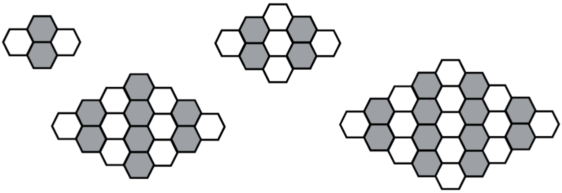
29. Opáčko před čtvrtletkou

Úloha 1.

Obrazce jsou tvořeny bílými a tmavými šestiúhelníky uspořádanými do sloupců.

Počet šestiúhelníků ve sloupcích se postupně zvětšuje, a to od levého, resp. pravého okraje obrazce směrem ke středu.

Každý obrazec vždy začíná a končí sloupcem s jediným bílým šestiúhelníkem.



V jednom z dalších obrazců je v **nejdelším** sloupci 59 šestiúhelníků nad sebou. Určete, kolik je v onom obrazci **bílých** šestiúhelníků.

Úloha 2. Megasněhulák se skládá z n sněhových koulí, přičemž poloměr každé koule je vždy $\frac{3}{4}$ poloměru koule pod ní. **Druhá** koule odspodu má poloměr $1\,\mathrm{m}$. Určete **objem** celého sněhuláka, pokud se skládá z

(a) $n = 20$ koulí,

(b) $n = \infty$ koulí.

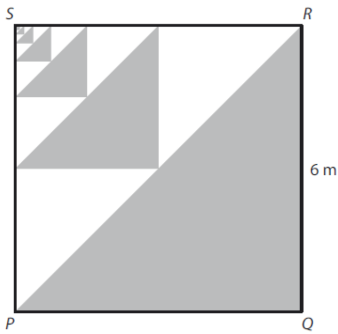
(Připomenutí: objem koule o poloměru r je $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Napovím, že objemy koulí tvoří geom. posloupnost.)

Úloha 3.

Ve čtverci *PQRS* o straně délky 6 m je nekonečně mnoho stále se zmenšujících tmavých rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Největší z nich je trojúhelník *PQR*.

Každý následující trojúhelník má vrchol pravého úhlu uprostřed přepony předchozího trojúhelníku, což je i jediný společný bod obou trojúhelníků.

Středem stejnolehlosti libovolné dvojice těchto trojúhelníků je vrchol *S*.



Určete celkový obsah šedé oblasti.

Úloha 4. U následujících řad určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ konvergují, a potom jejich součet (který zjednodušte): (a) $\sum_{k=1}^{\infty}(x^2-2)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^k$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{3k}$

⋆ **Úloha 5.** Určete součet následujících řad (které **nejsou geometrické**):

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$ (Nápověda: např. $\frac{3}{2^3} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}$)

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$ (Nápověda: přepište sčítaný zlomek na rozdíl dvou zlomků)

1. 1741

2. **(a)** $(\frac{4}{3})^4\pi\frac{(\frac{3}{4})^{60}-1}{(\frac{3}{4})^3-1}$ **(b)** $(\frac{4}{3})^4\pi\frac{1}{1-(\frac{3}{4})^3}$

3. 24

4. **(a)** $x \in (-\sqrt{3}; -1) \cup (1; \sqrt{3})$, $\frac{2-x^2}{x^2-3}$ **(b)** $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$, $-1-x$ **(c)** $x \in (-1; 1)$, $\frac{x^3}{1-x^3}$

5. **(a)** 2 **(b)** 1