4. Funkce s absolutní hodnotou

Úloha 1. Načrtněte grafy funkcí

(a) $f_1(x) = |x| - 1$

(b) $f_2(x) = |2x - 1| - x$

(c) $f_3(x) = |1 - x| + |x - 1|$

(d) $f_4(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - |x + 1| + 2$

(e) $f_5(x) = |x| - |x - 2| + 2|x + 1| - 3 - x$

(f) $f_6(x) = |1 - 2x| - |1 - 3x| + |1 - 4x|$

Úloha 2. Podívejte se na graf $f_6(x)$ z úlohy 1 a určete:

(a) všechny lokální extrémy f_6 a jejich typy (maximum/minimum? je ostré?),

(b) všechny globální extrémy a jejich typy,

(c) počet řešení rovnice $f_6(x) = c$ v závislosti na reálném parametru c (jinak řečeno, pro jaké hodnoty bude mít tato rovnice kolik řešení),

(d) všechna řešení rovnice $f_6(x) = 10$ (tady bude potřeba i počítat, ale graf může pomoct – na jakých intervalech může být řešení?).

Úloha 3. Ověřte (početně, tj. dosazením $-x$), že

(a) funkce $h_1(x) = |x + 6| + |x - 6|$ je sudá,

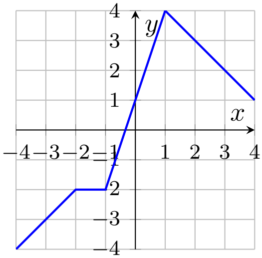
(b) funkce $h_2(x) = |x + 6| - |x - 6| - x$ je lichá.

⋆ **Úloha 4.** Označme $\operatorname{relu}(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$. Předpis funkce g_1 níže lze vyjádřit jako

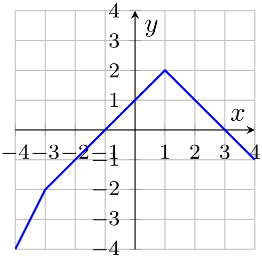
$$g_1 : y = x - \operatorname{relu}(x + 2) + 3 \operatorname{relu}(x + 1) - 4 \operatorname{relu}(x - 1).$$

Rozmyslete si, jak toto funguje, a najděte obdobný předpis pro další dvě funkce.

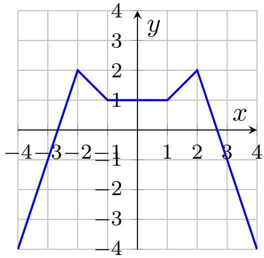
$g_1:$



$g_2:$



$g_3:$



Úloha 5. Načrtněte grafy funkcí

(a) $k_1(x) = |x^2 - 1|$

(b) $k_2(x) = -|x^2 - 1| + 1$

(c) $k_3(x) = x \cdot |x|$

(d) $k_4(x) = x^2 - 2|x + 1|$

(e) $k_5(x) = x \cdot |x + 1|$

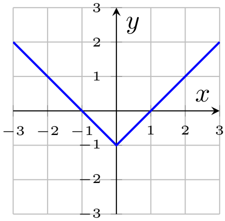
(f) $k_6(x) = |x^2 - 1| + x$

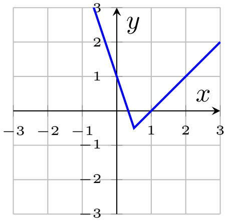
⋆ **Úloha 6.** Řešte rovnice ($\max(a, b)$ = to větší z čísel a, b, $\min(a, b)$ = to menší)

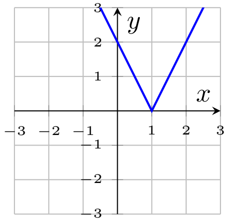
(a) $\max(x + 1, -2x) + 3 \min(x + 2, -x + 3) = 8$

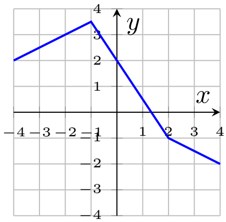
(b) $\min(x + 3, x^2) = 1$

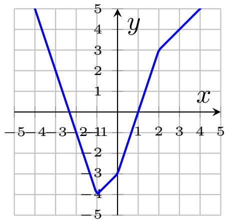
Výsledky

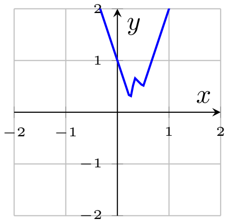
1. (a) 

(b) 

(c) 

(d) 

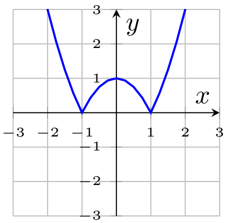
(e) 

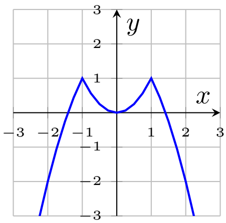
(f) 

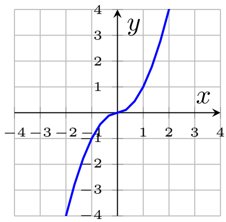
2. (a) v $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ jsou ostrá lokální minima, v $\frac{1}{3}$ je ostré lokální maximum **(b)** pouze v $\frac{1}{4}$ je ostré globální minimum **(c)** $c \in (-\infty; \frac{1}{4}) \Rightarrow 0$ řešení, $c = \frac{1}{4} \Rightarrow 1$ řešení, $c \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; \infty) \Rightarrow 2$ řešení, $c \in \{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\} \Rightarrow 3$ řešení, $c \in (\frac{1}{2}; \frac{2}{3}) \Rightarrow 4$ řešení
(d) $K = \{-3; \frac{11}{3}\}$

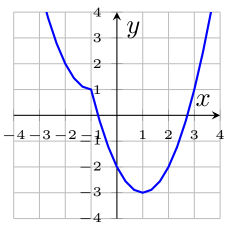
3. (a) $h_1(-x) = |-x+6| + |-x-6| = |x-6| + |x+6| = h_1(x)$
(b) $h_2(-x) = |-x+6| - |-x-6| + x = |x-6| - |x+6| + x = -h_2(x)$

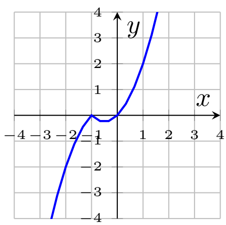
4. $g_2\colon y = 2x + 4 - \operatorname{relu}(x+3) - 2\operatorname{relu}(x-1)$,
$g_3\colon y = 3x + 8 - 4\operatorname{relu}(x+2) + \operatorname{relu}(x+1) + \operatorname{relu}(x-1) - 4\operatorname{relu}(x-2)$

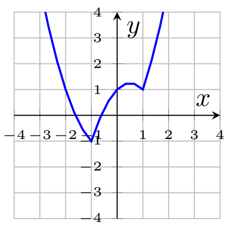
5. (a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

6. (a) $K = \{\frac{1}{4}; 1\}$ **(b)** $K = \{-2; -1; 1\}$