C3. Uspořádání i neuspořádání

Úloha 1. Kolik různých (kladných) dělitelů má číslo $2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^3$?

Úloha 2. Identifikátor každého videa na YouTube je řetězec jedenácti znaků z množiny a–z, A–Z, 0–9 a - nebo _ (celkem 64 možností).

(a) Kolik různých takovýchto identifikátorů existuje?

(b) Jestliže se každou minutu nahraje na YT 500 hodin videa a průměrná délka jednoho videa je 12 minut, zhruba za jak dlouho by byly vyčerpány všechny identifikátory?

Úloha 3. Zkrácené url na mapy.cz obsahují vždy deset malých písmen, kde na lichých pozicích jsou anglické souhlásky bez q, w, x (celkem 17 znaků) a na sudých pozicích mohou být pouze písmena a, e, o, u (např. `https://mapy.cz/s/ragebudunu` je platná adresa).

(a) Kolik různých zkrácených url existuje?

(b) Pokud by se povrch Země rozdělil na oblasti o stejném obsahu, kde každé oblasti by příslušela jedna url, jak velké by ty oblasti byly?

Úloha 4. Nový stát Tramtárie potřebuje navrhnout vlajku. Volba padla na léty prověřený design tří horizontálních jednobarevných pruhů, přičemž každý pruh musí mít jinou barvu. Na výběr je z osmi barev.

(a) Kolik je celkem různých vlajek na výběr?

(b) Co když jedna z použitých barev musí být bílá (což je jedna z těch osmi barev)?

(c) Co když musíme použít bílou a červenou barvu?

(d) Co když musíme použít bílou a červenou barvu a bílý pruh musí být nad tím červeným (nemusí nutně sousedit)? (Nápověda: Pro každou takovoutu vyhovující vlajku existuje právě jedna vlajka, která má ty dvě barvy v opačném pořadí; dohromady tyto možnosti dávají všechny vlajky obsahující bílou a červenou.)

(e) Co když naopak *nesmíme* použít současně bílou a červenou barvu?

⋆ (f) Tramtárie má společnou hranici se Sierrou Leone, které má vlajku zelená-bílá-modrá. Kolik je na výběr vlajek, pokud odpovídající si pruhy na vlajce Tramtárie a Sierry Leone musí mít různou barvu?

Úloha 5. Kolik nejméně by muselo být na výběr barev, aby výsledek Úlohy 4 (a) byl alespoň 10 000? (Nápověda: Výsledná kubická nerovnice je jen velmi obtížně přesně řešitelná. Použijte metodu *pokus-omyl*.)

Úloha 6. Jak by se změnil výsledek Úlohy 4 (a), pokud bychom namísto unikátních barev požadovali pouze, aby sousední pruhy měly různou barvu?

Úloha 7. Eldorádo, které sousedí s Tramtárií, si rovněž vybírá novou vlajku a jak už to v těch končinách chodí, budou to samozřejmě tři horizontální pruhy. Paleta osmi barev zůstává stejná, stejně jako podmínka, že se žádná barva nesmí opakovat.

(a) Kolika různými způsoby mohou dopadnout tyto „dvojvolby“ vlajek?

(b) Jak se výsledek změní, pokud požadujeme, aby Eldorádo a Tramtárie neměly úplně stejnou vlajku?

(c) Co když vlajka Tramtárie musí obsahovat bílou a červenou, ale Eldorádu je to jedno, jen nesmí mít úplně stejnou?

Úloha 8. Alice tráví dovolenou v ČR, i rozhodla se, že postupně navštíví 12 památek UNESCO (každou právě jednou).

(a) Kolika způsoby může tento plán uskutečnit?

(b) Co když chce začít v Praze a skončit v Brně?

(c) Co když chce nejprve navštívit všechny v Čechách (4) a posléze všechny na Moravě (8)?

(d) Co když chce naopak nejprve navštívit všechny na Moravě a potom ty v Čechách?

(e) Co když chce jenom skončit na Moravě?

(f) Co když chce začít i skončit v Čechách?

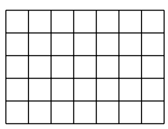
(g) Co když jediná podmínka, kteoru má, je, že Třebíč musí navštívit dříve než Olomouc?

(h) Co když Olomouc chce navštívit okamžitě po Třebíči? (Nápověda: Tímto požadavkem se vlastně dvě položky v plánu „sloučily do jedné“.)

⋆ (i) Co když chce Prahu, Český Krumlov a Kutnou Horu navštívit v tomto pořadí (jinak je to jedno)?

(j) Co když chce začít tou nejstarší památkou a postupně je projít podle stáří až k té nejnovější?

Úloha 9. Kolik čtverců je na obrázku? A kolik je tam obdélníků?



1. $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$

2. (a) 64^{11} (b) cca $5{,}6 \cdot 10^{10}$ let; pro srovnání stáří vesmíru je cca $1{,}4 \cdot 10^{10}$ let

3. (a) $17^5 \cdot 4^5$ (b) velmi zhruba $351\,000\,\mathrm{m}^2$

4. (a) $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ (b) $3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$ (c) $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$ (d) $3 \cdot 2 \cdot 6/2 = 18$ (e) $336 - 36 = 300$
(f) $227 = 5 \cdot (5 \cdot 5 + 1 \cdot 6) + 2 \cdot (6 \cdot 5 + 1 \cdot 6)$

5. 23

6. $8 \cdot 7 \cdot 7 = 392$

7. (a) $336^2 = 112\,869$ (b) $336^2 - 336 = 336 \cdot 335 = 112\,560$ (c) $36 \cdot 335 = 12\,060$

8. (a) $12! = 479\,001\,600$ (b) $10! = 3\,628\,800$ (c) $4! \cdot 8! = 967\,680$ (d) $4! \cdot 8! = 967\,680$ (e) $8 \cdot 11! = 319\,334\,400$
(f) $4 \cdot 3 \cdot 10! = 43\,545\,600$ (g) $12!/2 = 239\,500\,800$ (h) $11! = 39\,916\,800$ (i) $12!/3! = 79\,833\,600$ (j) 1

9. čtverců $85 = 7 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1$; obdélníků $420 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}$