

9. Exponenciální rovnice s „hezkými“ výsledky

Úloha 1. Nalezněte všechna řešení těchto velmi zajímavých rovnic:

(a) $\sqrt{5} \cdot 25^{2x-1} = 125^x$

(j) $\frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x = 9$

(b) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{7}}\right)^x = \frac{\sqrt{7}}{49^x \cdot 7^x}$

(k) $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

(c) $4^x = 2^{x^2}$

(l) $9 \cdot 3^x + 3^{-x} = 10$

(d) $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$

(m) $8^{2x+1} + 4 = 8^x + 8^{x+\frac{5}{3}}$

(e) $3^x + 3^{x+1} = 108$

★ (n) $256 \cdot 2^{4^x} = 64^{2^x}$

(f) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$

★ (o) $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$

(g) $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$

★ (p) $2^{x-1} - 2^{x-2} = 5^{x-3} + 2^{x-3}$

(h) $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$

★ (q) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

(i) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

★ (r) $16^x = 8 \cdot 4^x + 2 \cdot 8^x$

★ **Úloha 2** (zcela nesouvisející). Určete poslední cifru následujících čísel: (a) 2^{1000} (b) 3^{1000}
(c) 5^{1000} (d) 7^{1000} (e) 10^{1000} (f) 11^{1000}

1. (a) $\{\frac{3}{2}\}$ **(b)** $\{\frac{3}{19}\}$ **(c)** $\{0; 2\}$ **(d)** $\{2\}$ **(e)** $\{3\}$ **(f)** $\{-2\}$ **(g)** $\{2\}$ **(h)** $\{-1\}$
(i) $\{\frac{1}{2}; 2\}$ **(j)** $\{2\}$ **(k)** $\{-2\}$ **(l)** $\{-2; 0\}$ **(m)** $\{-1; \frac{2}{3}\}$ **(n)** $\{1; 2\}$ **(o)** $\{1\}$ **(p)** $\{3\}$
(q) $\{0\}$ **(r)** $\{2\}$

2. (a) 6 **(b)** 1 **(c)** 5 **(d)** 1 **(e)** 0 **(f)** 1