12. Lineární kombinace

Úloha 1. Vyjádřete vektor $\mathbf{z}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, případně $\mathbf{w}$, jestliže

(a) $\mathbf{z} = (2; 10)$, $\mathbf{u} = (1; 3)$, $\mathbf{v} = (-2; 2)$,

(b) $\mathbf{z} = (2; 10; 0)$, $\mathbf{u} = (1; 3; 0)$, $\mathbf{v} = (-2; 2; 0)$, $\mathbf{w} = (0; 0; 1)$,

(c) $\mathbf{z} = (2; -2; -10)$, $\mathbf{u} = (2; 1; -1)$, $\mathbf{v} = (2; 3; 2)$, $\mathbf{w} = (4; 5; -2)$,

(d) $\mathbf{z} = (1; 0)$, $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

Úloha 2. Nalezněte všechna reálná čísla x taková, že vektor $\mathbf{z} = (1; 5; x)$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u} = (1; -1; 2)$ a $\mathbf{v} = (1; 2; -1)$.

Úloha 3. Mějme trojúhelník ABC a označme $\mathbf{u} = C - B$, $\mathbf{v} = C - A$. Zapište jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ vektor

(a) $\mathbf{w}_1 = B - A$,

(b) $\mathbf{w}_2 = S_{BC} - A$,

(c) $\mathbf{w}_3 = T - A$, kde T je těžiště $\triangle ABC$. (Nápověda: Těžiště se nachází ve dvou třetinách těžnice.)

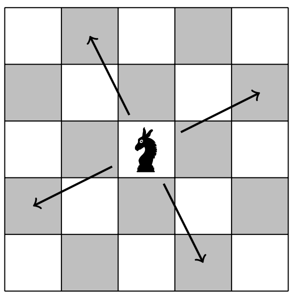
Úloha 4. Mějme krychli $ABCDEFGH$. Zapište vektory $\mathbf{x}_1 = G - H$, $\mathbf{x}_2 = G - A$, $\mathbf{x}_3 = B - S_{AH}$ jako lineární kombinaci vektorů

(a) $\mathbf{e}_1 = A - D$, $\mathbf{e}_2 = C - D$, $\mathbf{e}_3 = H - D$,

(b) $\mathbf{i} = B - A$, $\mathbf{j} = C - A$, $\mathbf{k} = H - A$.

⋆ **Úloha 5.** Nalezněte všechny vektory $\mathbf{w}$, které budou lineárními kombinacemi vektorů $\mathbf{u} = (2; 1; 1)$ a $\mathbf{v} = (1; 2; 1)$, budou kolmé na vektor $(1; 1; 1)$ a jejich velikost bude rovna 2.

Úloha 6. *Osel* je figurka, která umí táhnout cca jako jezdec, ale jen „na jednu stranu“:



(a) Jak musíme s oslem táhnout, abychom ho posunuli přesně o 10 polí „západně“?

(b) Je možné s oslem doskákat z jednoho rohu šachovnice 8×8 do protějšího?

⋆ (c) Zkuste popsat pole, na která se osel (ne)může dostat.

1.

(a) $\mathbf{z} = 3\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$

(b) $\mathbf{z} = 3\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\ (+\,0\mathbf{w})$

(c) $\mathbf{z} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w}$

(d) $\mathbf{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}$

2. $x = -4$

3.

(a) $\mathbf{w}_1 = -\mathbf{u} + \mathbf{v}$

(b) $\mathbf{w}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{v}$

(c) $\mathbf{w}_3 = -\frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$

4.

(a) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$

(b) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$

5. $\mathbf{w}_1 = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0) = \sqrt{2}\mathbf{u} - \sqrt{2}\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_2 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0) = -\sqrt{2}\mathbf{u} + \sqrt{2}\mathbf{v}$.

6.

(a) 4 tahy „doleva dolů“ a 2 tahy „doleva nahoru“

(b) ne