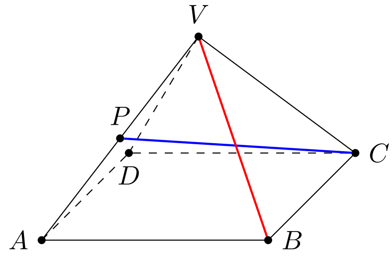
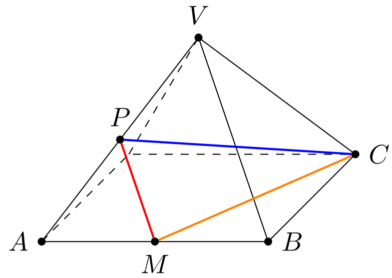
Řešení úlohy 1 (d)

Zadání: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky, kde P střed hrany AV. Určete odchylky přímek BV a CP.



Bodem P vedeme rovnoběžku s přímkou BV („posuneme“ BV); jelikož bod P i přímka BV se nachází v rovině ABV, i tato rovnoběžka se bude nacházet v této rovině. Označíme M průsečík této rovnoběžky s podstavnou hranou AB.



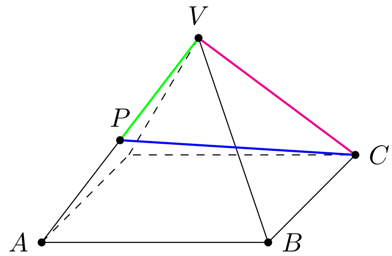
Nyní už „jen“ chceme určit úhel u vrcholu P v trojúhelníku MCP. Žádné úhly nejsou evidentní, takže chceme postupovat tak, že spočteme délky všech stran tohoto trojúhelníka a (nejspíš) využijeme kosinovou větu.

Nejjednodušeji se určí délka PM – to totiž je střední příčka v rovnostranném trojúhelníku ABV, takže její délka je $\frac{1}{2}$ (počítáme, že všechny hrany jehlanu mají délku 1). Z toho samého důvodu je M střed hrany AB.

Délku úsečky MC zjistíme pomocí Pythagorovy věty: trojúhelník MBC, nacházející se v rovině podstavy, je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B, tedy platí

$$|MC| = \sqrt{|MB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Pro určení délky úsečky PC využijeme trojúhelník PVC; v něm známe délky dvou stran ($|CV| = 1$, $|PV| = \frac{1}{2}$), stačilo by nám tedy určit velikost úhlu $\sphericalangle PVC$ a mohli bychom využít kosinovou větu na určení $|PC|$.



Zřejmě je $|\sphericalangle PVC| = |\sphericalangle AVC|$, přičemž pro trojúhelník AVC platí $|AV| = 1$, $|CV| = 1$, $|AC| = \sqrt{2}$ (je to úhlopříčka v podstavě), takže vidíme, že tento trojúhelník je dokonce pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu V (je to ten trojúhelník à la „půlka čtverce“). Zjistili jsme tedy, že $|\sphericalangle PVC| = 90°$, tedy i trojúhelník PVC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu V a úplně stejně jako výše můžeme určit délku PC:

$$|PC| = \sqrt{|PV|^2 + |CV|^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Navrátivše se k trojúhelníku MCP, můžeme určit hledaný úhel:

$$|\sphericalangle MPC| = \arccos\left(\frac{|PM|^2 + |PC|^2 - |MC|^2}{2 \cdot |PM| \cdot |PC|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \doteq 77°5'.$$

Mimochodem, dá se asi i jen „vykoukat“, že PC bude stejně dlouhá jako MC: když úplně zapomeneme na bod D a představíme si jen ty dva rovnostranné trojúhelníky ABV a BCV spojené v prostoru, tak jde o útvar („zrcadlově“) souměrný podle roviny ACS_{BV}. V této symetrii si body P a M odpovídají, takže jejich vzdálenost do C (ležícího na rovině symetrie) musí být stejná.