13. Determinanty všeho druhu

Úloha 1. Spočtete následující velmi zajímavé determinanty:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

Úloha 2. Spočtěte obsah trojúhelníka ABC, který má vrcholy v bodech o souřadnicích $A[1;2]$, $B[2;5]$ a $C[5;6]$. (Nápověda: Trojúhelník je „polovina“ rovnoběžníka.)

Úloha 3. Rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ má vrcholy v bodech o souřadnicích $A[0;0;0]$, $B[1;1;2]$, $D[2;3;1]$, $E[3;4;-5]$.

(a) Určete souřadnice zbývajících čtyř vrcholů.

(b) Určete objem onoho rovnoběžnostěnu.

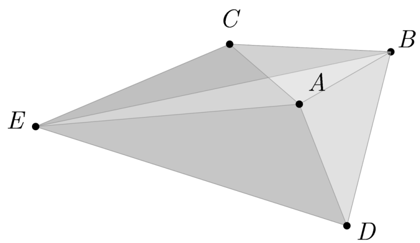
(c) Určete objem (nepravidelného) čtyřstěnu $ABDE$. (Nápověda: Jakou část rovnoběžnostěnu tvoří čtyřstěn? Jak by to bylo pro kvádr?)

Úloha 4. Nalezněte všechna reálná x, aby platilo

(a) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ x & 5 & 5 \\ 7 & x & x-2 \end{vmatrix} = 0$

Úloha 5. Určete všechna reálná čísla x tak, aby trojúhelník s vrcholy o souřadnicích $A[1;2]$, $B[2;5]$ a $C[x;x+1]$ měl obsah 4.

⋆ **Úloha 6.** Určete objem naprosto nepravidelného mnohostěnu $ABCDE$, jehož vrcholy mají souřadnice $A[1;2;3]$, $B[4;5;6]$, $C[-1;4;3]$, $D[5;2;1]$, $E[-3;7;-3]$. (Nápověda: Podívejte se na obrázek a rozdělte mnohostěn na dva vhodné čtyřstěny.)



⋆ **Úloha 7.** Rozmyslete si následující:

(a) *Transpozice*, tj. následující operace „záměny řádků a sloupců“

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

nezmění hodnotu determinantu.

(b) Prohození dvou řádků (sloupců) v determinantu změní jeho znaménko.

(c) Když celý jeden řádek (sloupec) vynásobíme nějakým číslem, výsledný determinant se taky tímto číslem vynásobí.

⋆ (d) Když k jednomu řádku (sloupci) přičteme libovolný násobek jiného řádku (sloupce), hodnota determinantu se nezmění.

1. (a) -23 (b) 0 (c) -8 (d) $5\sqrt{3}+3\sqrt{6}-12$

2. 4

3. (a) $C[3;4;3]$, $F[4;5;-3]$, $G[6;8;-2]$, $H[5;7;-4]$ (b) 8 (c) $\frac{1}{6}\cdot 8=\frac{4}{3}$

4. (a) $x=1$ (b) $x_1=1$, $x_2=5$

5. $x_1=-3$, $x_2=5$

6. 44 ($ABEC$ má objem 13 a $ABED$ 31)