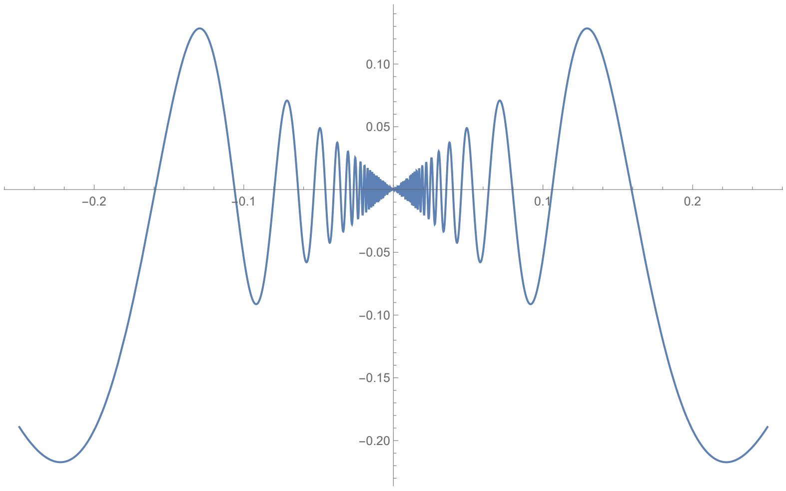
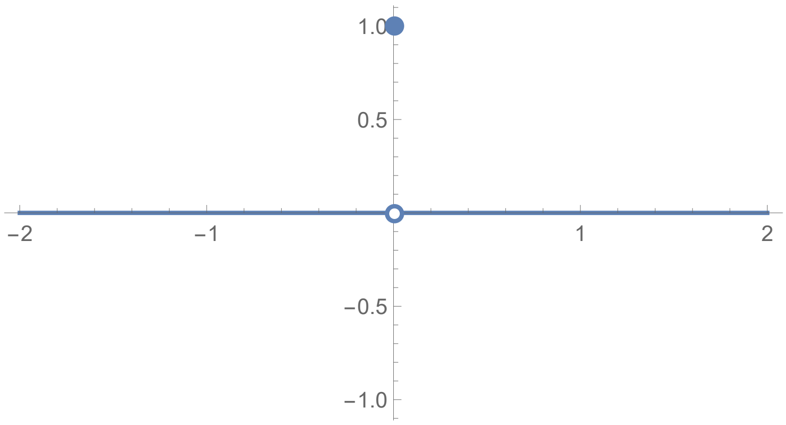
Selhání podmínky (P)

Ve Větě o limitě složené funkce chce podmínka (P), aby se vnitřní funkce „vyhýbala“ své limitní hodnotě na nějakém prstencovém okolí. Standardní příklad, kdy toto může selhat, je funkce $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$:



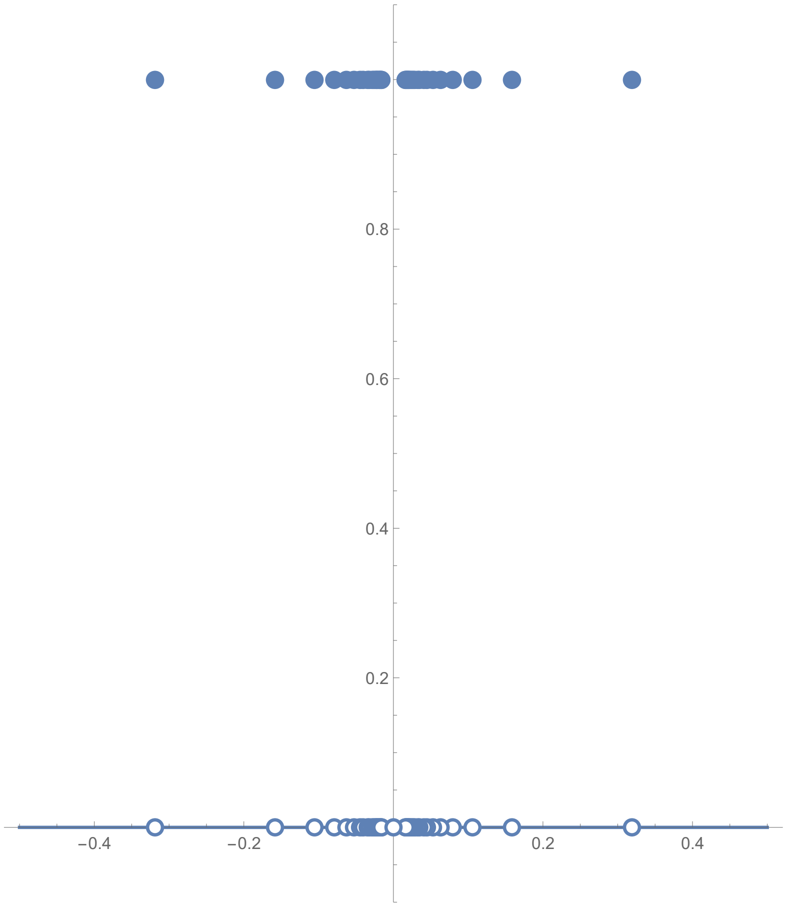
Platí, že $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, ovšem g přitom nabývá hodnoty 0 na *každém* prstencovém okolí nuly (protože $g(\frac{1}{k\pi}) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

Uvažme nyní funkci f, která nabývá ve všech nenulových reálných číslech hodnotu 0, jenom v 0 je to 1:



Pro tuto funkci platí, že $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Budeme-li se dívat na složenou funkci $f(g(x))$, tak ta bude nabývat hodnoty 1 právě pro $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, v ostatních nenulových číslech bude 0 (a v nule nebude definována). Její graf tedy vypadá cca takto:



Tato funkce na libovolně malém prstencovém okolí nuly nabývá hodnot jak 0, tak 1, proto $\lim_{x\to 0} f(g(x))$ neexistuje.