18. Sinová a kosinová věta

- sinová věta: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$; kosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
- užitečná pravidla: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; proti delší straně je větší úhel (a naopak); trojúhelníková nerovnost

Úloha 1 (kosinová věta – délky)**.** Určete všechny možné délky třetí strany ve (standardně značeném) trojúhelníku ABC, víte-li následující; uveďte výsledky s přesností na čtyři desetinná místa, pokud není uvedeno jinak.

(a) $a = 5$, $b = 6$, $\gamma = 29°$

(b) $c = 3{,}73$, $a = 1{,}28$, $\beta = 32°5'17''$

(c) $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{18}$, $\alpha = 60°$ (spočtěte přesně!)

(d) $a = 13$, $b = 7$, $\alpha = 70°$

(e) $b = 11$, $c = 5$, $\gamma = 25°$

(f) $b = 13$, $c = 2$, $\gamma = 40°$

Úloha 2 (kosinová věta – úhly)**.** Určete velikosti všech vnitřních úhlů s přesností na úhlové vteřiny v trojúhelníku ABC, víte-li

(a) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

(b) $a = 3$, $b = 8$, $c = 4$

Úloha 3 (sinová věta – délky)**.** Určete délku strany a v trojúhelníku ABC, víte-li

(a) $\alpha = 53°$, $b = 3$, $\beta = 19°$

(b) $c = 43{,}137$, $\gamma = 46°13'13''$, $\alpha = 111°52'18''$

(c) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $b = 3$ (spočtěte přesně!)

(d) $\alpha = 112°$, $\gamma = 76°$, $c = 6$

Úloha 4 (sinová věta – úhly)**.** Určete všechny možné velikosti úhlu α v trojúhelníku ABC, víte-li

(a) $a = 5$, $b = 4$, $\beta = 47°$

(b) $a = 5$, $b = 6$, $\beta = 47°$

(c) $a = 2$, $b = 7$, $\beta = 47°$

(d) $a = 7$, $b = 2$, $\beta = 47°$

(e) $a = 5$, $b = 2$, $\beta = 160°$

(f) $a = 4$, $b = 3$, $\beta = 10°$

Úloha 5. Kružnice opsaná trojúhelníku má poloměr 5. Jak velký vnitřní úhel může být naproti straně o délce 7?

Úloha 6 („řešte trojúhelníky“)**.** Dopočtěte velikosti všech stran a vnitřních úhlů ve standardně značeném trojúhelníku ABC, máte-li zadané následující údaje; nalezněte *všechna* řešení. Délky určujte s přesností na 4 desetinná místa a velikosti úhlů s přesností na úhlové vteřiny.

(a) $a = 5$, $\beta = 55°$, $\gamma = 65°$

(b) $a = 4$, $c = 5$, $\beta = 40°$

(c) $b = 11$, $c = 6$, $\alpha = 13°$

(d) $a = 3$, $c = 4$, $\alpha = 30°$

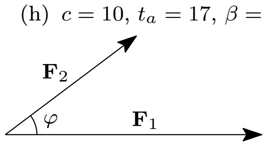
(e) $b = 21$, $c = 25$, $\beta = 81°$

(f) $a = 7$, $b = 4$, $\alpha = 100°$

(g) $a = 7$, $v_a = 5{,}5$, $\gamma = 115°$

(h) $c = 10$, $t_a = 17$, $\beta = 132°$

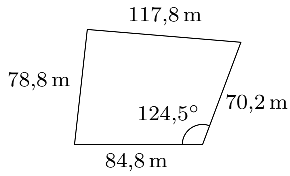
Úloha 7. Síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ mají společné působiště, velikosti 8 N a 5 N a svírají úhel $\varphi = 37°$. Jakou velikost má výslednice $\mathbf{F}$ těchto sil a jaký úhel svírá se silou $\mathbf{F}_1$?



⋆ **Úloha 8.** Určete obecně, jakou velikost bude mít výslednice dvou sil o velikostech F_1, F_2, které svírají (konvexní) úhel φ.

Úloha 9. Koumák Karel chce zjistit výšku topolu, který se nachází v sousedovic zahradě za plotem. Vrchol topolu vidí z určitého místa ve výškovém úhlu 22°. Když se (po vodorovné rovině) přiblíží směrem k topolu o 40 m, vidí jeho vrchol ve výškovém úhlu $45°12'$. Jak vysoký je topol?

Úloha 10. Určete výměru pozemku na obrázku a délky obou jeho úhlopříček. (Nápověda: Na výpočet obsahu se může hodit Heronův vzorec.)



Úloha 11. Vítr způsobuje, že letadla typicky neletí „rovnou za nosem“, ale jsou při přímém letu snášena na nějakou stranu. Aby tedy letadlo letělo tam, kam chceme, musí vliv větru kompenzovat určitou odchylkou od zamýšleného směru. Výsledná rychlost letadla vůči zemi (včetně směru) je pak vektorovým součtem rychlosti větru vůči zemi a teoretické rychlosti letadla za bezvětří.

Jestliže vítr fouká rychlostí $17\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod azimutem 31°, pilot chce letět ve směru 130° (tj. toto má být výsledný reálný směr) a rychlost letadla za bezvětří je $150\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, určete:

(a) jak moc a na jakou stranu má být letadlo natočeno od svého reálného směru letu,

(b) jak velká (v $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) bude skutečná rychlost letadla vůči zemi.

Poznámka: Azimut se měří od severu po směru hodinových ručiček.

Úloha 12. Jestliže ve standardně značeném trojúhelníku ABC platí $a = 3$, $b = 10$, určete všechny velikosti úhlu α, pro které

(a) budou existovat právě dva takové trojúhelníky,

(b) bude existovat právě jeden takový trojúhelník,

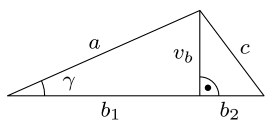
(c) nebude existovat žádný takový trojúhelník.

(Nápověda: Spíš si to zkuste nakreslit, až pak počítejte.)

⋆ **Úloha 13.** Určete obvod trojúhelníku ABC, pokud platí $a + b = 30$, $\alpha = 35°$, $\beta = 66°$.

⋆ **Úloha 14.** Pomocí sinové a kosinové věty určete hodnoty $\sin 75°$ a $\cos 75°$ (neboli $\sin\frac{5\pi}{12}$ a $\cos\frac{5\pi}{12}$). Návod: Uvažte trojúhelník s vnitřními úhly $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 75°$. Zafixujte velikost jedné strany (např. $a = 1$), dopočtěte sinovou větou b, kosinovou větou c a nakonec sinovou větou $\sin\gamma$ a kosinovou větou $\cos\gamma$.

⋆ **Úloha 15** (důkaz kosinové věty)**.** Dokažte kosinovou větu – např. pomocí tohoto obrázku:



Co by se změnilo, kdyby se výška v_b nacházela vně trojúhelníka?

⋆ **Úloha 16** (důkaz sinové věty)**.** Dokažte sinovou větu – např. s využitím faktu, že pokud v trojúhelníku ABC „hýbeme“ bodem A po kružnici opsané, tak se velikost úhlu $\sphericalangle BAC$ buď nemění, nebo se změní na doplněk do 180° (důsledek věty o středovém a obvodovém úhlu) + Thaletovy věty.

1. **(a)** $c \doteq 2{,}9194$ **(b)** $b \doteq 2{,}7315$ **(c)** $a = \sqrt{14}$ **(d)** $c \doteq 13{,}6072$ **(e)** $a_1 \doteq 8{,}1286$, $a_2 \doteq 11{,}8102$ (dvě řešení) **(f)** nemá řešení – takový $\triangle$ neexistuje

2. **(a)** $\alpha \doteq 28°57'18''$, $\beta \doteq 46°34'3''$, $\gamma \doteq 104°28'39''$ **(b)** takový $\triangle$ neexistuje (není splněna $\triangle$ nerovnost)

3. **(a)** $\doteq 7{,}3591$ **(b)** $\doteq 55{,}4456$ **(c)** $\sqrt{6}$ **(d)** takový $\triangle$ neexistuje (příliš velký součet úhlů)

4. **(a)** cca $66°5'29''$ nebo $113°54'31''$ **(b)** cca $37°33'2''$ (druhý možný výsledek je větší než β) **(c)** cca $12°3'41''$ (druhý možný výsledek je větší než β) **(d)** takový $\triangle$ neexistuje (vyjde $\sin\alpha > 1$) **(e)** takový $\triangle$ neexistuje (oba výsledky menší než β) **(f)** cca $13°23'14''$ nebo $166°36'46''$

5. cca $44°25'37''$ nebo $135°34'23''$

6. **(a)** $\alpha = 60°$, $b \doteq 4{,}7294$, $c \doteq 5{,}2326$ **(b)** $b \doteq 3{,}2184$, $\alpha \doteq 53°1'26''$, $\gamma \doteq 86°58'34''$ **(c)** $a \doteq 5{,}3276$, $\beta \doteq 152°19'28''$, $\gamma \doteq 14°40'32''$ **(d)** (I) $\gamma_1 \doteq 41°48'37''$, $\beta_1 \doteq 108°11'23''$, $b_1 \doteq 5{,}7002$ nebo (II) $\gamma_2 \doteq 138°11'23''$, $\beta_2 \doteq 11°48'37''$, $b_2 \doteq 1{,}2208$ **(e)** $\triangle$ neexistuje **(f)** $\beta \doteq 34°14'46''$, $\gamma \doteq 45°45'14''$, $c \doteq 5{,}0918$ **(g)** $b \doteq 6{,}0686$, $c \doteq 11{,}0333$, $\alpha \doteq 35°5'59''$, $\beta \doteq 29°54'1''$ **(h)** $a \doteq 17{,}1967$, $b \doteq 25{,}0173$, $\alpha \doteq 30°43'10''$, $\gamma \doteq 17°16'50''$

7. velikost $\doteq 12{,}3649\,\mathrm{N}$, úhel $\doteq 14°5'5''$

8. $\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}$

9. cca $26{,}9898\,\mathrm{m}$

10. obsah cca $7084{,}2233\,\mathrm{m}^2$, úhlopříčky mají délky cca $137{,}3414\,\mathrm{m}$ a $109{,}3134\,\mathrm{m}$

11. **(a)** musí se natočit doprava cca o $6°25'37''$ od směru, jakým chce letět **(b)** cca $146{,}3979\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

12. **(a)** $\alpha \in (0°; \arcsin\frac{3}{10})$ **(b)** $\alpha = \arcsin\frac{3}{10}$ **(c)** $\alpha \in (\arcsin\frac{3}{10}; 180°)$

13. $a \doteq 11{,}57$, $b \doteq 18{,}43$, $c \doteq 19{,}8$, $o \doteq 49{,}8$

14. $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$