Monotónní funkce a derivace

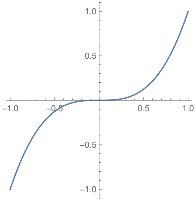
Monotónní funkce = rostoucí, klesajcí, neklesající, nerostoucí...

Věta

Nechť funkce f má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci, která je navíc ve všech bodech onoho intervalu kladná / záporná / nezáporná / nekladná. Pak je f na tomto intervalu rostoucí / klesající / neklesající / nerostoucí.

Je-li f definovaná a spojitá i v bodech a nebo b nebo obou, pak závěr platí i pro intervaly $\langle a; b)$ nebo $(a; b\rangle$ nebo $\langle a; b\rangle$.

Funkce může být na nějakém intervalu např. rostoucí a přitom tam mít nulovou derivaci; např $f(x) = x^3$:



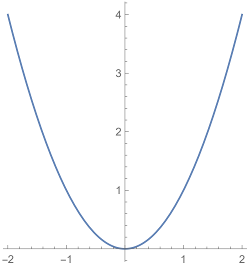
Použití

- „Typicky“ půjde definiční obor f rozdělit na intervaly, ve kterých bude funkce rostoucí či klesající.
- To zjistíme tak, že zjišťujeme znaménko derivace.

Klíčová věta o extrémech

Věta

Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ (neostré) lokální maximum či minimum a existuje-li derivace $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.



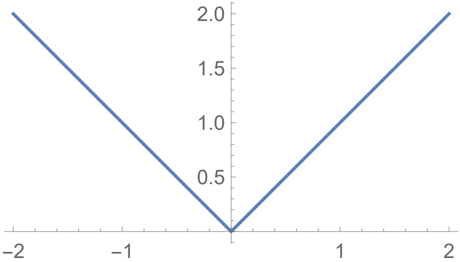
Např. funkce $f(x) = x^2$ má v nule minimum a derivace tam existuje; vskutku tedy $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

Co NEplatí I

Neplatí!

Funkce má v x_0 lokální extrém $\Rightarrow$ má tam nulovou derivaci.

$f(x) = |x|$ má v nule minimum, ovšem derivace tam vůbec neexistuje.

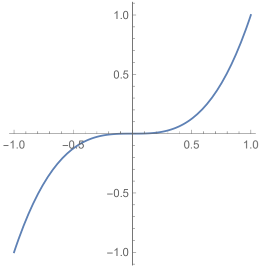


Co NEplatí II

Neplatí!

Funkce má v x_0 nulovou derivaci $\Rightarrow$ má tam lokální extrém.

$f(x) = x^3$ má v nule nulovou derivaci, ovšem není tam minimum ani maximum.



Typické použití

Máme nějakou funkci f.

1. Spočteme její derivaci.
2. Nalezneme nulové body derivace, tzv. stacionární body či též body podezřelé z extrému (řešíme rovnici $f'(x) = 0$).
3. Rozhodneme, které z těchto bodů jsou opravdu extrémy a jaké extrémy to jsou.
4. (Nějak naložíme s body, ve který derivace neexistuje.)

Jak poznat extrémy

Jak poznat, které ze stacionárních bodů (tj. nulových bodů derivace) jsou opravdu extrémy?

Věta

Pokud

- existuje derivace funkce f na nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$,
- je $f'(x_0) = 0$,
- v x_0 derivace „mění znaménko“, tj. na nějakém prstencovém pravém okolí je derivace jen kladná a na nějakém prstencovém levém okolí je jen záporná (nebo naopak),

tak má f v x_0 lokální extrém; je to lokální maximum, pokud je derivace vlevo kladná a vpravo záporná, a lokální minimum, pokud je vlevo záporná a vpravo kladná.