

35. Podmíněná pravděpodobnost – pokračování

Pozorování (Bayesova věta). Jsou-li A, B jevy a $P(B) \neq 0$, tak $P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$.

Úloha 1. V léčebně je 5 % diabetiků a 2 % diabetiků kuřáků. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný diabetik je kuřák?

Úloha 2. Dvě výrobní linky vyrábí robotické psy, přičemž výrobky z první fungují s pravděpodobností $p_1 = 0,98$, zatímco ty z druhé jenom $p_2 = 0,92$. Předpokládáme, že obě linky jsou stejně výkonné.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný robotický pes bude funkční?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný robotický pes bude nefunkční?
- (c) Narazíme na nefunkčního robopsa. S jakou pravděpodobností pochází z druhé linky?

Úloha 3. Stejná story jako v Úloze 2 s tím rozdílem, že nyní je první linka výkonnější, takže vyrobí dvakrát tolik robopsů co druhá.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný robotický pes bude funkční?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný robotický pes bude nefunkční?
- (c) Narazíme na nefunkčního robopsa. S jakou pravděpodobností pochází z druhé linky?

★ **Úloha 4.** Ještě k Úloze 2: Určete, kolikrát by musela být první linka výkonnější než druhá, aby pravděpodobnost, že nefunkční robopes pochází z 2. linky, byla $\frac{1}{2}$.

Úloha 5. Test na virové onemocnění funguje následovně: pokud jedinec je nakažený, pak toto test potvrdí s pravděpodobností 99 % (tzv. *sensitivita*), pokud nakažený není, tak je výsledek správný s pravděpodobností 93 % (tzv. *specifita*). S jakou pravděpodobností je jedinec s pozitivním testem skutečně nakažený, pokud předpokládáme, že výskyt viru v populaci je (a) 20 %, (b) 1 %, (c) 0,01 %?

Úloha 6. Máme následující situaci; figurka táhne zleva doprava, přičemž postoupí o tolik polí, kolik hodíme na šestistěnné kostce. Navíc pokud skončí na políčku 4, tak házíme a táhneme ještě jednou.



- (a) Určete pravděpodobnost, že skončíme na políčku 3.
- (b) Určete pravděpodobnost, že skončíme na políčku 7.
- (c) Určete pravděpodobnost, že skončíme na políčku 6.
- (d) Určete pravděpodobnost, že skončíme na políčku 5 nebo 6.
- (e) Skončili jsme na políčku 6. S jakou pravděpodobností jsme toho docílili hodem šestky?

Úloha 7. Pokud nějaký den prší, pak pravděpodobnost, že další den také prší, je $\frac{3}{5}$; naopak pokud neprší, tak další den také neprší s pravděpodobností $\frac{4}{5}$. Předpokládejme, že v pondělí prší.

- (a) S jakou pravděpodobností bude pršet v úterý?
- (b) S jakou pravděpodobností bude pršet ve středu?
- (c) S jakou pravděpodobností nebude pršet ve středu?
- (d) S jakou pravděpodobností bude pršet ve čtvrtek?
- (e) Jestliže prší ve středu, s jakou pravděpodobností přšlo v úterý?
- (f) Jestliže prší ve čtvrtek, s jakou pravděpodobností přšlo ve středu?
- ★ (g) Jestliže prší ve čtvrtek, s jakou pravděpodobností přšlo v úterý?

$$1. \frac{2}{5}$$

$$2. (a) \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = 0,95$$

$$(b) 1 - (a) = 0,05$$

$$(c) \frac{(1-p_2) \cdot \frac{1}{2}}{(b)} = 0,8$$

$$3. (a) \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 = 0,96$$

$$(b) 1 - (a) = 0,04$$

$$(c) \frac{(1-p_2) \cdot \frac{1}{3}}{(b)} = \frac{2}{3}$$

4. čtyřikrát; označíme-li q

pravděpodobnost druhé linky,

$$\text{pak řešíme } \frac{1}{2} = \frac{(1-p_2)q}{1-((1-q)p_1+qp_2)}$$

s řešením $q = \frac{1}{5}$

$$5. (a) \frac{99}{127} \doteq 78\%$$

$$(b) \frac{1}{8} = 12,5\%$$

$$(c) \frac{1}{708} \doteq 0,14\%$$

$$6. (a) \frac{1}{6} \quad (b) \frac{1}{36}$$

$$(c) \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

$$(d) 2 \cdot (c) = \frac{7}{18} \quad (e) \frac{1 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{7}{36}} = \frac{6}{7}$$

$$7. (a) \frac{3}{5} \quad (b) \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{25}$$

$$(c) 1 - (b) = \frac{14}{25}$$

$$(d) (b) \cdot \frac{3}{5} + (c) \cdot \frac{1}{5} = \frac{47}{125}$$

$$(e) \frac{\frac{3}{5} \cdot (a)}{(b)} = \frac{9}{14} \quad (f) \frac{\frac{3}{5} \cdot (b)}{(d)} = \frac{33}{47}$$

$$(g) \frac{(b) \cdot \frac{3}{5}}{(d)} = \frac{33}{47}$$