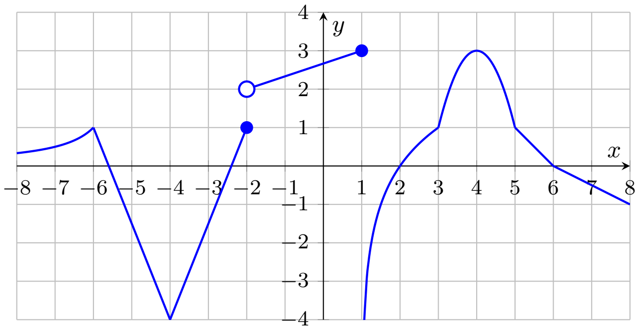
3. Vlastnosti funkcí – souhrn

Úloha 1. Určete co největší intervaly, na kterých je vyobrazená funkce rostoucí či klesající.



Úloha 2. Rozhodněte, zda v následujících bodech má funkce z úlohy 1 extrém, a pokud ano, o jaký typ (jaké typy) se jedná: (a) $x = -6$ (b) $x = -4$ (c) $x = -5$ (d) $x = 3$ (e) $x = 4$ (f) $x = 8$.

Úloha 3. Rozhodněte, zda je funkce z úlohy 1 (a) shora omezená, (b) zdola omezená, (c) omezená.

Úloha 4. Kvadratická funkce f je dána předpisem $f(x) = -x^2 + 4x - 6$.

(a) Určete obor hodnot f. (Nápověda: Nejprve si najděte souřadnice vrcholu.)

(b) Určete, zda je f shora omezená / zdola omezená / omezená.

(c) Určete co největší intervaly, na kterých je f rostoucí / klesající.

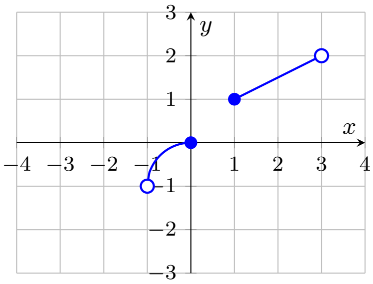
(d) Má tato funkce nějaké extrémy? Pokud ano, kde a jaké?

(e) Rozmyslete si, jaké budou odpovědi na předchozí otázky pro obecnou kvadratickou funkci g s předpisem ve vrcholovém tvaru $g(x) = a(x - m)^2 + n$. (Odpovědi budou nejspíš nějak záviset na a, m, n.)

Úloha 5. U následujících funkcí rozhodněte, zda jsou sudé / liché:

(a) $y = 2x$
(b) $y = -x + 1$
(c) $y = 5$
(d) $y = -4 \cdot |x|$
(e) $y = 5 + 2 \cdot |x|$
(f) $y = |x + 1|$
(g) $y = -4x^2$
(h) $y = (1 - x)^2$
(i) $y = \frac{|x|}{x}$
(j) $y = x^3$
(k) $y = \frac{1}{x^{10}}$
(l) $y = x^2 + x$

Úloha 6. Z grafu funkce h, jejíž definiční obor je $(-3; 3)$, se dochoval jenom fragment. Dokreslete ho tak, aby h byla (a) lichá funkce, (b) sudá funkce.



Úloha 7. Načrtněte graf funkce f s následujícími vlastnostmi (pro každý podbod jeden graf funkce):

(a) $D(f) = \langle -4; 4\rangle$, f je omezená, není prostá, $f(1) = 2$, na intervalu $\langle 1; 2\rangle$ je f rostoucí.

(b) $D(f) = \langle -4; 4\rangle$, $H(f) = \langle -1; 2\rangle$, f je sudá funkce, v $x = 1$ má f ostré lokální maximum, které ovšem není globálním maximem.

(c) $D(f) = (-4; 4)$, f je zdola omezená, ale shora ne, je prostá, na intervalu $(-3; 2)$ je neklesající, není sudá.

(d) $D(f) = \langle -3; 3\rangle$, f je lichá, v $x = -1$ je ostré globální minimum, $f(-1) = -2$, na intervalu $\langle 2; 3\rangle$ je neklesající.

Úloha 8. Nechť k je lichá funkce, pro kterou je $0 \in D(k)$. Jakých hodnot může nabývat $k(0)$?

⋆ **Úloha 9.** Rozhodněte, které z těchto výroků vždy platí: (a) Součet rostoucích funkcí je rostoucí funkce. (b) Součet nerostoucích funkcí je nerostoucí funkce. (c) Součet prostých funkcí je prostá funkce. (d) Součet lichých funkcí je lichá funkce. (e) Součet sudých funkcí je sudá funkce. (f) Součin rostoucích funkcí je rostoucí funkce. (g) Součin nerostoucích funkcí je nerostoucí funkce. (h) Součin prostých funkcí je prostá funkce.

⋆ **Úloha 10.** Jakou funkci dostaneme, pokud vynásobíme (a) dvě liché funkce (b) dvě sudé funkce (c) lichou a sudou funkci?

1. rostoucí na: $(-\infty; -6\rangle$, $\langle -4; 1\rangle$, $\langle 1; 4\rangle$; klesající na: $\langle -6; -4\rangle$, $\langle 4; \infty)$

2. **(a)** ostré lok. maximum **(b)** ostré lok. minimum **(c)** není extrém **(d)** není extrém **(e)** glob. maximum + ostré lok. maximum **(f)** není extrém

4. **(a)** $H(f) = (-\infty; -2\rangle$ **(b)** pouze shora omezená **(c)** roustoucí na $(-\infty; 2\rangle$, klesající na $\langle 2; \infty)$ **(d)** v $x = 2$ je ostré globální maximum **(e)** Pokud $a > 0$: $H(f) = \langle n; \infty)$, klesající na $(-\infty; m\rangle$, rostoucí na $\langle m; \infty)$, v $x = m$ je ostré globální minimum. Pokud $a < 0$: $H(f) = (-\infty; n\rangle$, rostoucí na $(-\infty; m\rangle$, klesající na $\langle m; \infty)$, v $x = m$ je ostré globální maximum.

5. **(a)** lichá **(b)** ani jedno **(c)** sudá **(d)** sudá **(e)** sudá **(f)** ani jedno **(g)** sudá **(h)** ani jedno **(i)** lichá **(j)** lichá **(k)** sudá **(l)** ani jedno

8. pouze 0, jelikož musí platit $f(0) = f(-0) = -f(0)$

9. **(a)** ano **(b)** ano **(c)** ne **(d)** ano **(e)** ano **(f)** ne, ale platilo by to, pokud by jedna nabývala pouze nezáporných hodnot **(g)** ne **(h)** ne

10. **(a)** sudou **(b)** sudou **(c)** lichou