

31. Pascalův trojúhelník a binomická věta

Úloha 1. $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$, vidíte to taky? Proč to funguje? Kdy se to poprvé pokazí? (Nápověda: $11 = 10 + 1$, binomická věta)

Úloha 2. Roznásobte (= dosaďte do binomické věty) a pokud to nějak jde, tak výsledek zjednodušte: (a) $(2 + a)^3$ (b) $\left(\frac{1}{x} + 2x\right)^5$ (c) $(x - \sqrt{x})^4$

Úloha 3. Spočítejte *bez kalkulačky (!)*, kolik je (a) $(1 + \sqrt{2})^5$ (b) $(1 - \sqrt{2})^5$ (c) $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})^4$

Úloha 4. Jaký je desátý člen binomického rozvoje $(2a + b)^{15}$?

Úloha 5. Určete $x \in \mathbb{R}$ tak, aby pátý člen binomického rozvoje $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ byl roven 2016.

Úloha 6. Který člen binomického rozvoje $(y^2 + y^{-1})^9$ obsahuje y^3 ?

Úloha 7. Vypočítejte takový člen binomického rozvoje $(3\sqrt{a} - a^{-2})^{10}$, který neobsahuje a .

Úloha 8. Dokažte, že následující čísla jsou celá pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

(a) $(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ (jde o vzorec pro n -té Fibonacciho číslo)

★ **Úloha 9.** Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{4^n - 1}{3}$ celé číslo. (Nápověda: $4 = 3 + 1$.)

★ **Úloha 10.** Součty následujících „šikmých příček“ dávají jistou známou posloupnost. Proč tomu tak je?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

★ **Úloha 11.** Derivace součinu se spočte jako $(fg)' = f'g + fg'$. Jak se spočte druhá derivace součinu? A jak to bude pokračovat? Proč? Sedí to i pro „nultou derivaci“?

★ **Úloha 12.** Dokažte následující tvrzení: je-li p prvočíslo, pak jsou všechna čísla

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \dots, \binom{p}{p-1}$$

násobky p . (Nápověda: Využijte $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ a zvažte, kde se v tomto zlomku objeví p .)

2. (a) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$ **(b)** $32x^5 + \frac{1}{x^5} + 80x^3 + \frac{10}{x^3} + 80x + \frac{40}{x}$

(c) $x^4 - 4x^3\sqrt{x} + 6x^3 - 4x^2\sqrt{x} + x^2$

3. (a) $29\sqrt{2} + 41$ **(b)** $-29\sqrt{2} + 41$ **(c)** $6 + 8 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + 12 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 8 \cdot 2^{\frac{3}{4}}$

4. $\binom{15}{9}(2a)^9b^6 = 320320a^9b^6$

5. $\sqrt[3]{2}$

6. šestý

7. třetí, 295 245