# 4. Opáčko na čtvrtletku – řešení Úlohy 3

**Úloha 3.** V pravidelném čtyřbokém jehlanu, jehož podstavná hrana má délku 4 a výška je 6, určete

(a) vzdálenost bodu $S_{CV}$ od přímky $AV$

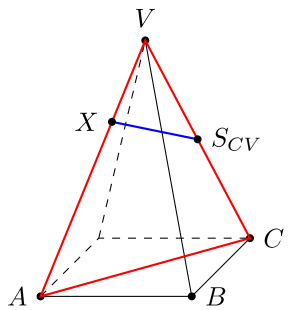
(b) vzdálenost bodu $A$ od roviny $BCV$

(c) odchylku přímek $AC$ a $VS_{BC}$

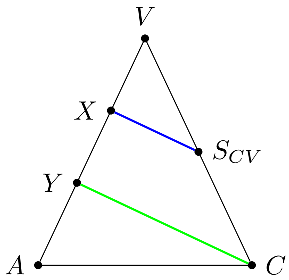
(d) odchylku rovin $ADV$ a $BCS_{AV}$

Obecně se nám bude hodit vědět, že výška boční stěny je dlouhá $\sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$ a boční hrana má délku $\sqrt{(2\sqrt{2})^2+6^2} = 2\sqrt{11}$.

*Řešení (a).* Označíme $X$ kolmý průmět bodu $S_{CV}$ na přímku $AV$.




Zaměříme se na trojúhelník $ACV$:




Díky podobnosti trojúhelníků $VXS_{CV}$ a $VYC$ bude $|XS_{CV}| = \frac{1}{2}|YC|$, takže chceme určit $|YC|$, přičemž délku výšky $YC$ určíme standardně pomocí obsahu: víme $|AC| = \sqrt{2}\,|AB| = 4\sqrt{2}$, výška na $AC$ má délku 6, takže $S_{\triangle ACV} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6 = 12\sqrt{2}$. Odtud

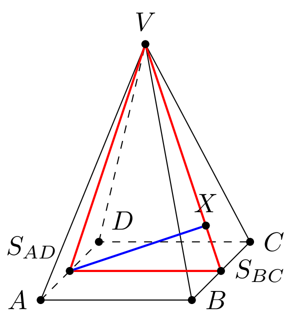
$$|YC| = \frac{2S_{\triangle ACV}}{|CV|} = \frac{24\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{12\sqrt{22}}{11}.$$

Dle úvahy výše tedy je

$$|XS_{CV}| = \frac{1}{2}|YC| = \frac{6\sqrt{22}}{11}.$$

Alternativně jsme mohli postupovat tak, že se zaměříme na trojúhelník $S_{AV}S_{CV}V$, ve kterém je $XS_{CV}$ výškou. Tento trojúhelník je podobný trojúhelníku $ACV$, přičemž rozměry jsou poloviční, takže opět vidíme, že výsledek je polovina délky výšky v trojúhelníku $AVC$. □

*Řešení (b).* Tady je hlavně potřeba dát pozor na to, že kolmý průmět $A$ do roviny $BCV$ nebude ležet na přímce $BV$, jak by se někomu mohlo zdát, ale „kousek vedle vně jehlanu“ (to můžete vidět např. na řešení jedné jiné starší úlohy). Můj postup je takový, že místo vzdálenosti bodu $A$ budu počítat vzdálenost $S_{AD}$ (obecně při počítání vzdáleností *nemohu* hýbat s objekty libovolně, jako když počítám odchylky, ale přímka $AS_{AD}$ je s rovinou $BCV$ rovnoběžná, neboli „pohyb z $A$ do $S_{AD}$ je rovnoběžný s $BCV$“, takže ta vzdálenost bude stejná). V tu chvíli mi kolmý průmět $S_{AD}$ do roviny $BCV$ (označím ho $X$) leží na přímce $S_{BC}V$ a klíčovým se stává trojúhelník $S_{AD}S_{BC}V$:

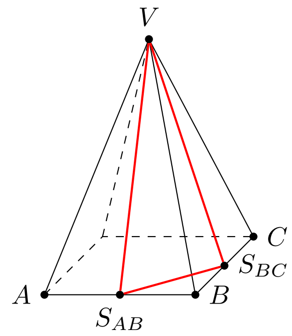


Stačí tedy dopočítat výšku na $S_{BC}V$ v trojúhelníku $S_{AD}S_{BC}V$; již jen zrychleně:

$$|XS_{AD}| = \frac{4 \cdot 6}{2\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

□

*Řešení (c).* Aby se nám přímky protínaly, posuneme si $AC$ na $S_{AB}S_{BC}$; klíčový je nyní (rovnoramenný) trojúhelník $S_{AB}S_{BC}V$, pomocí něhož chceme zjistit velikost úhlu $\sphericalangle VS_{BC}S_{AB}$:

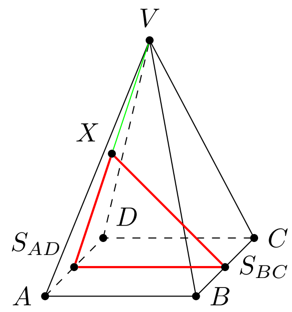



Buď můžeme onen trojúhelník rozdělit na dva pravoúhlé, nebo jít na jistotu a rovnou použít kosinovou větu; $|VS_{AB}| = |VS_{BC}| = 2\sqrt{10}$, $|S_{AB}S_{BC}| = \frac{1}{2}|AC| = 2\sqrt{2}$, takže

$$|\sphericalangle VS_{BC}S_{AB}| = \arccos\left(\frac{(2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{10})^2}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right) \doteq 77°5'.$$

□

*Řešení (d).* Průsečnicí oněch zadaných rovin je přímka $S_{AV}S_{DV}$. Označím jako $X$ střed úsečky $S_{AV}S_{DV}$ (neboli $X = S_{S_{AV}S_{DV}}$ a taky $X = S_{VS_{AD}}$), hledaná odchylka rovin bude odchylka přímek $XS_{BC}$ a $XS_{AD}$ (které jsou obě zřejmě kolmé na průsečnici $S_{AV}S_{DV}$).




Chceme zjistit velikost úhlu $S_{AD}XS_{BC}$, přičemž víme $|S_{AD}S_{BC}| = 4$, $|S_{AD}X| = \frac{1}{2}|S_{AD}V| = \sqrt{10}$. Dále platí (s využitím známých rozměrů v jehlanu)

$$\cos|\sphericalangle XS_{AD}S_{BC}| = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

takže pomocí kosinové věty

$$|XS_{BC}|^2 = |S_{AD}S_{BC}|^2 + |S_{AD}X|^2 - 2 \cdot |S_{AD}S_{BC}| \cdot |S_{AD}X| \cdot \cos|\sphericalangle XS_{AD}S_{BC}| = 16 + 10 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 18$$

odkud

$$|XS_{BC}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

(Na tuto hodnotu jsme mohli – možná v tomto případě jednodušeji – přijít i tak, že jsme si vzali kolmý průmět $X$ do podstavy a pak využili vzniklý pravoúhlý trojúhelník.) Nyní již kosinovou větou snadno dopočteme hledaný úhel:

$$|\sphericalangle S_{AD}XS_{BC}| = \arccos\left(\frac{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \doteq 63°26'.$$

□