Standardní limity

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Rozšířená reálná čísla

Rozšíříme reálná čísla o prvky ∞ a $-\infty$, tzv. *nevlastní body*;

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty; -\infty\}.$$

Počítání v $\mathbb{R}^*$

- s „běžnými“ reálnými čísly se počítá stále stejně
- $\infty +$ reálné číslo $= \infty$, $-\infty +$ reálné číslo $= -\infty$
- $\infty \cdot$ kladné reálné číslo $= \infty$, $\infty \cdot$ záporné reálné číslo $= -\infty$, $-\infty \cdot$ kladné reálné číslo $= -\infty$, $-\infty \cdot$ záporné reálné číslo $= \infty$
- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$, $-\infty \cdot \infty = -\infty$
- $\frac{\text{reálné číslo}}{\infty} = 0$, $\frac{\text{reálné číslo}}{-\infty} = 0$

Počítání a výjimky

Počítání v $\mathbb{R}^*$

- s „běžnými“ reálnými čísly se počítá stále stejně
- $\infty +$ reálné číslo $= \infty$, $-\infty +$ reálné číslo $= -\infty$
- $\infty \cdot$ kladné reálné číslo $= \infty$, $\infty \cdot$ záporné reálné číslo $= -\infty$, $-\infty \cdot$ kladné reálné číslo $= -\infty$, $-\infty \cdot$ záporné reálné číslo $= \infty$
- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$, $-\infty \cdot \infty = -\infty$
- $\frac{\text{reálné číslo}}{\infty} = 0$, $\frac{\text{reálné číslo}}{-\infty} = 0$

Není definováno!

- $\frac{\text{reálné číslo}}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{-\infty}{0}$
- $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$
- $-\infty + \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$

Okolí nevlastních bodů

Definice

Definujeme *ε-okolí bodu* ∞ jako

$$B(\infty;\varepsilon) = \left(\tfrac{1}{\varepsilon};\infty\right)$$

a *ε-okolí bodu* $-\infty$ jako

$$B(-\infty;\varepsilon) = \left(-\infty;-\tfrac{1}{\varepsilon}\right).$$

Prstencová ε-okolí definujeme stejně jako ta normální, tedy

$$P(\infty;\varepsilon) = B(\infty;\varepsilon)$$
$$P(-\infty;\varepsilon) = B(-\infty;\varepsilon).$$

Definice limity podruhé

Stěžejní Definice

Řekneme, že *funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$*, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P(c; \delta) \colon f(x) \in B(A; \varepsilon).$$

Jinak řečeno:

- Pro jakkoliv malé okolí bodu A je možné nalézt dostatečně malé prstencové okolí bodu c takové, že funkční hodnoty bodů z tohoto prstencového okolí budou všechny v onom okolí A.
- ~~Pro každé kladné ε existuje kladné δ takové, že pokud se x liší od c o méně jak δ (ovšem $x \neq c$), tak se $f(x)$ liší od A o méně jak ε.~~

To, že f má v c limitu A, zapisujeme jako

$$\lim_{x \to c} f(x) = A.$$

Příklady

- $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (neplést s $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$!)
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
- ale není pravda $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ tato limita *neexistuje*
- podobně $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje

Terminologie

Jestliže $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$:

$$\text{limitu počítáme} \begin{cases} \text{ve vlastním bodě, tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je vlastní)} \\ A = \infty \text{ (limita je nevlastní,} \\ \qquad \text{rovna (plus) nekonečnu)} \\ A = -\infty \text{ (limita je nevlastní,} \\ \qquad \text{rovna mínus nekonečnu)} \end{cases} \\ \text{v nevlastním bodě, tj. } c = \pm\infty \text{ a} \begin{cases} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je vlastní)} \\ A = \infty \text{ (limita je nevlastní,} \\ \qquad \text{rovna (plus) nekonečnu)} \\ A = -\infty \text{ (limita je nevlastní,} \\ \qquad \text{rovna mínus nekonečnu)} \end{cases} \end{cases}$$

Kromě toho limita *vůbec nemusí existovat*.

Počítání s limitami podruhé

Mějme dvě funkce f, g, které mají v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limity:

$$\lim_{x \to c} f(x) = A \in \mathbb{R}^*, \qquad \lim_{x \to c} g(x) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Potom:

- Limita funkce $f + g$ v bodě c existuje a je rovna $A + B$, *je-li* $A + B$ *definováno*.
- Limita funkce $f \cdot g$ v bodě c existuje a je rovna $A \cdot B$, *je-li* $A \cdot B$ *definováno*.
- Limita funkce $\frac{f}{g}$ v bodě c existuje a je rovna $\frac{A}{B}$, *je-li* $\frac{A}{B}$ *definováno*.

Symbolicky – *kdykoliv má pravá strana smysl*, tak platí:

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x),$$

$$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to c} g(x)\right),$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

Oblíbené limity v nevlastním bodě

Polynomy (= mnohočleny)

Je-li P nekonstantní polynom, tak $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)$ bude vždy ∞ či $-\infty$.

Podíly polynomů („racionální funkce“)

O výsledku rozhoduje *stupeň* čitatele a jmenovatele.