

16. Základní goniometrické rovnice a jejich aplikace

Úloha 1. Nejzákladnější goniometrické rovnice s „hezkými“ výsledky:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $\cos x = \frac{1}{2}$ | (d) $\cos x = 0$ | (g) $\operatorname{tg} x = 1$ |
| (b) $\sin x = \frac{1}{2}$ | (e) $\sin x = -1$ | (h) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ |
| (c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | (f) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | (i) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |

Úloha 2. Nejzákladnější goniometrické rovnice s ne tak hezkými výsledky:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| (a) $\cos x = \frac{3}{5}$ | (b) $\sin x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ | (c) $\operatorname{tg} x = \pi$ |
|----------------------------|------------------------------------|---------------------------------|

Úloha 3. Rozličné (ale stále celkem „základní“) goniometrické rovnice:

- | | |
|--|--|
| (a) $\cos 2x = 0$ | (e) $(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x - \frac{1}{3})(\sin x - 2) = 0$ |
| (b) $\sin(x + \frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | (f) $\cos x - \cos^3 x = 0$ |
| (c) $\sin \frac{1}{3}x = \frac{4}{5}$ | (g) $ \sin x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ |
| (d) $\cos(-2x + \frac{\pi}{3}) = 1$ | (h) $3\cos^2 x + 4\cos x = 4$ |

Úloha 4. Vymyslete goniometrickou rovnici tvaru $\sin(\text{něco}) = \text{něco}$ nebo $\cos(\text{něco}) = \text{něco}$, jejíž množinou řešení bude ta uvedená; u úloh s \star vezměte v potaz, že x v argumentu může něčím násobit, něco k němu přičítat. . .

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$ | (c) $\{3\pi + 2k\pi\}$ | \star (e) $\{\frac{\pi}{2} + 4k\pi; \frac{3\pi}{2} + 4k\pi\}$ |
| (b) $\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\}$ | \star (d) $\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$ | \star (f) $\{-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi\}$ |

Úloha 5. Nalezněte všechna řešení rovnice na zadaném intervalu:

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\cos x = 0$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$ | (f) $\cos x = \frac{1}{4}$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$ | (k) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$ |
| (b) $\cos x = 0$ na $\langle -\pi; \pi \rangle$ | (g) $\sin x = \frac{3}{4}$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$ | (l) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$ |
| (c) $\sin x = \frac{1}{2}$ na $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ | (h) $\sin x = \frac{3}{4}$ na $\langle -\pi; \pi \rangle$ | (m) $\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$ na $\langle \pi; 2\pi \rangle$ |
| (d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ na $\langle -\pi; 0 \rangle$ | (i) $\sin x = \frac{3}{4}$ na $\langle -2\pi; 0 \rangle$ | (n) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| (e) $\sin x = 1$ na $\langle 0; 4\pi \rangle$ | (j) $ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\langle 0; 2\pi \rangle$ | na $\langle -\pi; \pi \rangle$ |

Úloha 6. Na pružině je zavěšeno závaží, které kmitá nahoru a dolů tak, že vzdálenost nejvyššího a nejnižšího bodu je 10 cm. Jeden celý kmit (úplně nahoru + úplně dolů) trvá 1 s. V čase $t = 0$ se závaží nacházelo přesně uprostřed a pohybovalo se směrem nahoru.

- (a) Uveďte předpis funkce, která udává závislost vertikální polohy závaží y na čase t ; nechť výchozí (prostřední) poloze odpovídá hodnota $y = 0$, nejvyšší $y = 5$ a nejnižší $y = -5$.
- (b) Určete, kde (tj. y) se bude závaží nacházet v $t = 0,75$.
- (c) Určete, kde se bude závaží nacházet v $t = \frac{1}{3}$.
- (d) Do výšky $y = 1$ umístíme senzor, který zaznamenává, že se tam závaží objeví. V jaký čas se tam závaží objeví poprvé, podruhé a potřetí?

Úloha 7. Vzdálenost Země od Slunce v průběhu roku je dána přibližným vztahem $d = 1 - 0,01672 \cos(0,0172(t - 4))$, kde t je čas od začátku roku v dnech a d je ona vzdálenost v astronomických jednotkách. Určete, kdy během roku je Země vzdálená 1,01 AU od Slunce.

\star **Úloha 8.** Rozmyslete si, jak budou vypadat grafy následujících funkcí; výsledky si můžete ověřit např. v GeoGebře.

- | | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| (a) $y = \cos(\arccos x)$ | (c) $y = \sin(\arcsin x)$ | (e) $y = \arccos(\sin x)$ | (g) $y = \cos(\arcsin x)$ |
| (b) $y = \arccos(\cos x)$ | (d) $y = \arcsin(\sin x)$ | (f) $y = \arcsin(\cos x)$ | (h) $y = \sin(\arccos x)$ |

1. (a) $\{\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$ (b) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$ (c) $\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\}$ (d) $\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ (e) $\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$
(f) $\{\pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$ (g) $\{\frac{\pi}{4} + k\pi\}$ (h) $\{\frac{2\pi}{3} + k\pi\}$ (i) $\{\frac{\pi}{3} + k\pi\}$

2. (a) $\{\pm \arccos \frac{3}{5} + 2k\pi\}$ (b) $\left\{\arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + 2k\pi; \pi - \arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + 2k\pi\right\}$ (c) $\{\arctg \pi + k\pi\}$

3. (a) $\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\}$ (b) $\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi; \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\}$ (c) $\{3(\arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi); 3(\pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi)\}$ (d) $\{\frac{\pi}{6} + k\pi\}$
(e) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi; \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi\}$ (f) $\{\frac{k\pi}{2}\}$ (g) $\{k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$ (h) $\{\pm \arccos \frac{2}{3} + 2k\pi\}$

4. (a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ (c) $\cos x = -1$ (d) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ (e) $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (f) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

5. (a) $\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$ (b) $\{\pm \frac{\pi}{2}\}$ (c) $\{\frac{\pi}{6}\}$ (d) $\{-\frac{3\pi}{4}\}$ (e) $\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\}$ (f) $\{\arccos \frac{1}{4}; -\arccos \frac{1}{4} + 2\pi\}$ (g) $\{\arcsin \frac{3}{4}; \pi - \arcsin \frac{3}{4}\}$
(h) $\{\arcsin \frac{3}{4}; \pi - \arcsin \frac{3}{4}\}$ (i) $\{\arcsin \frac{3}{4} - 2\pi; -\pi - \arcsin \frac{3}{4}\}$ (j) $\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\}$ (k) $\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\}$ (l) $\{2\pi\}$
(m) $\{\frac{5\pi}{3}\}$ (n) $\{-\pi; -\frac{3\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}; \pi\}$

6. (a) $y = 5 \sin(2\pi t)$ (b) $5 \sin \frac{3\pi}{2} = -5$, tj. úplně dole (c) $5 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (d) poprvé $\frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{1}{5} \doteq 0,032$ s, podruhé $\frac{1}{2\pi}(\pi - \arcsin \frac{1}{5}) \doteq 0,468$ s, potřetí o 1 s později než poprvé, tj. cca 1,032 s

7. cca 132. den a 240. den