17. Goniometrické vzorce

Úloha 1. Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí z množiny $\{\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}\}$, víte-li, že

(a) $\cos x = \frac{4}{5}$ a $x \in \langle 0; \pi\rangle$
(b) $\cos x = \frac{4}{5}$ a $x \in \langle -\pi; 0\rangle$
(c) $\sin x = -\frac{2}{7}$ a $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$
(d) $\sin x = \frac{12}{13}$ a $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$
(e) $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}$ a $x \in \langle 0; \pi\rangle$
(f) $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}$ a $x \in \langle \pi; 2\pi\rangle$
(g) $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{7}$ a $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$
(h) $\mathrm{cotg}\, x = 10$ a $x \in \langle 0; \pi\rangle$
(i) $\mathrm{cotg}\, x = \frac{2}{3}$ a $x \in \langle \pi; 2\pi\rangle$

Úloha 2. Určete přesně následující hodnoty: (a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ (b) $\sin\frac{5\pi}{12}$ (c) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}$ (d) $\cos\frac{\pi}{12}$ (e) $\sin\frac{\pi}{12}$ (f) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$ (Nápověda: $\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$.)

Úloha 3. Ověřte pomocí součtových vzorců platnost následujících vzorců (jejichž platnost je ale „zřejmá“ z pouhé úvahy o jednotkové kružnici): (a) $\sin(x+\pi) = -\sin x$ (b) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ (c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ (d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Úloha 4. Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

(a) $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$
(b) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$

⋆ Najdete *geometrický* důvod pro tyto rovnosti? (Nápověda: Uvažte tři body na jednotkové kružnici.)

Úloha 5. Dokažte následující „tabulkové“ vzorce:

(a) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ (Nápověda: Do součtových vzorců dosaďte x za y.)
(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
(c) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ (Nápověda: vyjádřete z (b))
(d) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
(e) $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ (Nápověda: dosaďte v (c) $\frac{x}{2}$ za x a odmocněte)
(f) $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
(g) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$; první rovnost platí pro $x \neq 2k\pi$, druhá pro $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (Nápověda: Místo pro $\frac{x}{2}$ a x to raději dokazujte pro x a $2x$.)

Úloha 6. Pomocí vzorců (e) a (f) z Úlohy 5 spočtěte hodnotu $\cos\frac{\pi}{12}$ a $\sin\frac{\pi}{12}$. Je to ten samý výsledek jako v Úloze 2?

Úloha 7. Aniž určíte hodnotu x, určete hodnoty $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin\frac{x}{2}$ a $\cos\frac{x}{2}$, jestliže platí níže uvedené. Jak se bude určovat znaménko u $\sin\frac{x}{2}$ a $\cos\frac{x}{2}$? (a) $\cos x = \frac{4}{5}$ a $x \in \langle 0; \pi\rangle$ (b) $\cos x = \frac{4}{5}$ a $x \in \langle -\pi; 0\rangle$ (c) $\sin x = -\frac{2}{7}$ a $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ (d) $\sin x = -\frac{12}{13}$ a $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Úloha 8. Aniž určíte hodnoty x a y, vypočítejte $\sin(x+y)$ a $\cos(x-y)$, jestliže (a) $\cos x = \frac{5}{7}$, $\sin y = \frac{1}{5}$, $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ a $y \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$, (b) $\mathrm{tg}\, x = 3$, $\mathrm{cotg}\, y = -2$, $x \in \left\langle \pi; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ a $y \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$.

Úloha 9. Vyjádřete uvedený výraz ve tvaru $a\sin(x+b)$, kde a a b jsou nějaká vhodná reálná čísla.

(a) $\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
(b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x$
(c) $\sin x + \cos x$
(d) $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
(e) $\sin x + 2\cos x$
(f) $3\sin x - 4\cos x$

1. **(a)** $\sin x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{4}{3}$ **(b)** $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg} x = -\frac{4}{3}$ **(c)** $\cos x = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{5}}{15}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ **(d)** $\cos x = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{5}{12}$ **(e)** $\operatorname{cotg} x = 2$, $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **(f)** $\operatorname{cotg} x = 2$, $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **(g)** $\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\sin x = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(h)** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{10}$, $\sin x = \frac{\sqrt{101}}{101}$, $\cos x = \frac{10\sqrt{101}}{101}$ **(i)** $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, $\sin x = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$

2. **(a)** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ **(b)** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+2$ **(d)** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ **(e)** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ **(f)** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$

4. **(a)** $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \sin x \cos\frac{2\pi}{3} + \cos x \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$, dále
$\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \sin x \cos\frac{4\pi}{3} + \cos x \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$, všechno se to sečte na 0.
(b) $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos x \cos\frac{2\pi}{3} - \sin x \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$, dále
$\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos x \cos\frac{4\pi}{3} - \sin x \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$, všechno se to sečte na 0.

5. **(a)** $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x \sin x = 2\sin x\cos x$
(b) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$, další dva vztahy pomocí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

6. Vyjde $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ a $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; že to je stejný výsledek se ověří umocněním na druhou.

7. **(a)** $\sin 2x = \frac{24}{25}$, $\cos 2x = \frac{7}{25}$, $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ **(b)** $\sin 2x = -\frac{24}{25}$, $\cos 2x = \frac{7}{25}$, $\sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ **(c)** $\sin 2x = \frac{12\sqrt{5}}{49}$, $\cos 2x = \frac{41}{49}$, $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{14}}$, $\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{14}}$ **(d)** $\sin 2x = -120\frac{169}{}$, $\cos 2x = -\frac{119}{169}$, $\sin\frac{x}{2} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

8. **(a)** $\sin(x+y) = -\frac{19}{35}$, $\cos(x-y) = -\frac{8\sqrt{6}}{35}$ **(b)** $\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$

9. **(a)** $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $2\sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$ **(c)** $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ **(d)** $\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ **(e)** $\sqrt{5}\sin\left(x+\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ **(f)** $5\sin\left(x-\arcsin\frac{4}{5}\right)$