Jednostranné limity

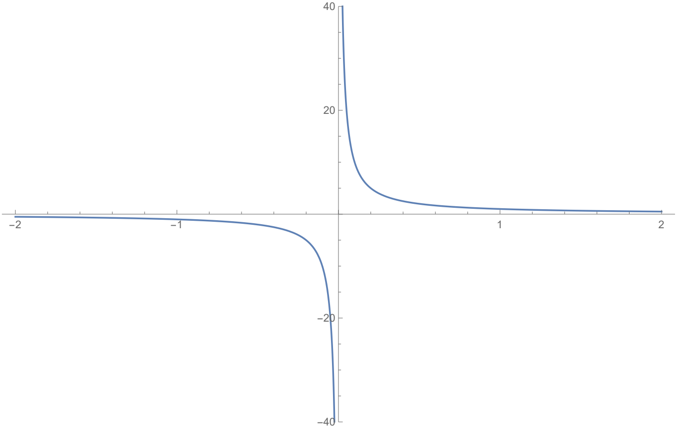
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$$

Jednostranné limity

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje!

Jednostranné limity

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje!



Jednostranné limity

Budeme se dívat na funkci jen z „jedné strany“.

Jednostranné limity

Budeme se dívat na funkci jen z „jedné strany“.

Jednostranná okolí

Pro $c \in \mathbb{R}$ definujeme *pravé prstencové ε-okolí* $P_+(c;\varepsilon) = (c; c+\varepsilon)$ a *levé prstencové ε-okolí* $P_-(c;\varepsilon) = (c-\varepsilon; c)$.

Jednostranné limity

Budeme se dívat na funkci jen z „jedné strany“.

Jednostranná okolí

Pro $c \in \mathbb{R}$ definujeme *pravé prstencové* ε*-okolí* $P_+(c; \varepsilon) = (c; c + \varepsilon)$ a *levé prstencové* ε*-okolí* $P_-(c; \varepsilon) = (c - \varepsilon; c)$.

Definice

Řekneme, že *funkce* f *má v bodě* $c \in \mathbb{R}$ *limitu zprava rovnu* $A \in \mathbb{R}^*$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P_+(c; \delta) \colon f(x) \in B(A; \varepsilon).$$

Jednostranné limity

Budeme se dívat na funkci jen z „jedné strany“.

Jednostranná okolí

Pro $c \in \mathbb{R}$ definujeme *pravé prstencové ε-okolí* $P_+(c;\varepsilon) = (c; c+\varepsilon)$ a *levé prstencové ε-okolí* $P_-(c;\varepsilon) = (c-\varepsilon; c)$.

Definice

Řekneme, že *funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu zprava rovnu $A \in \mathbb{R}^*$*, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P_+(c;\delta)\colon f(x) \in B(A;\varepsilon).$$

Zapisujeme to $\lim\limits_{x \to c_+} f(x) = A$.

A ještě jednou...

A ještě jednou...

Definice

Řekneme, že *funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ limitu zleva rovnu $A \in \mathbb{R}^*$*, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P_-(c;\delta)\colon f(x) \in B(A;\varepsilon).$$

A ještě jednou...

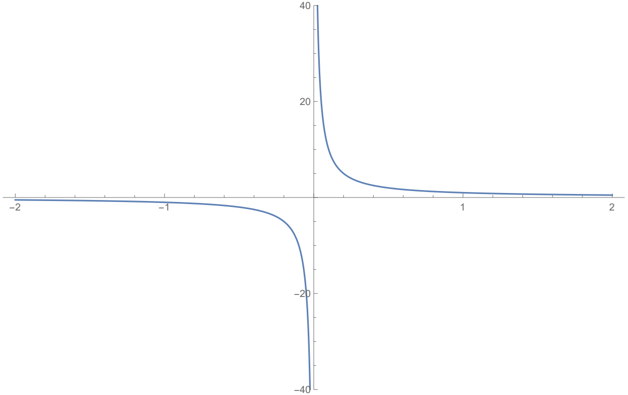
Definice

Řekneme, že *funkce* f *má v bodě* $c \in \mathbb{R}$ *limitu zleva rovnu* $A \in \mathbb{R}^*$, pokud platí

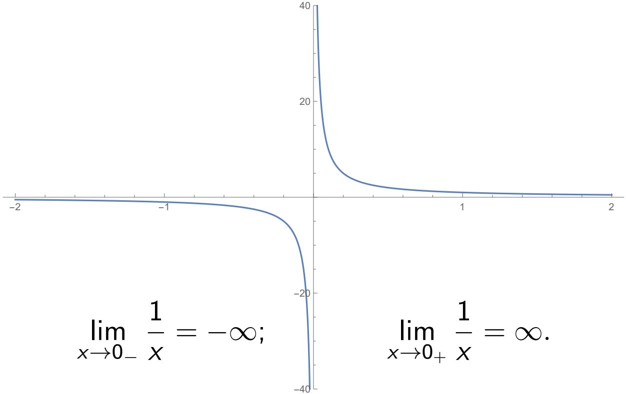
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in P_-(c;\delta) \colon f(x) \in B(A;\varepsilon).$$

Zapisujeme to $\lim\limits_{x \to c_-} f(x) = A$.

$\frac{1}{x}$ podruhé

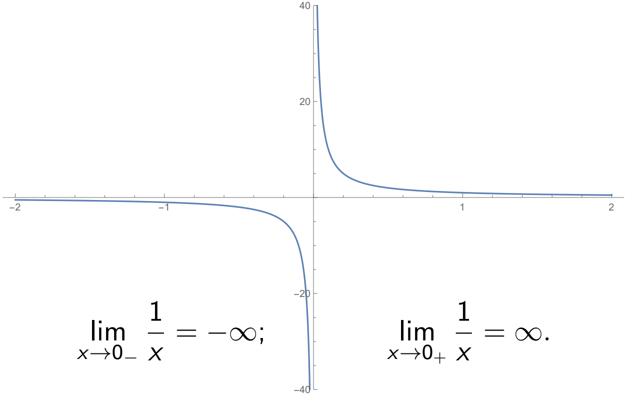


$\frac{1}{x}$ podruhé



$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty.$$

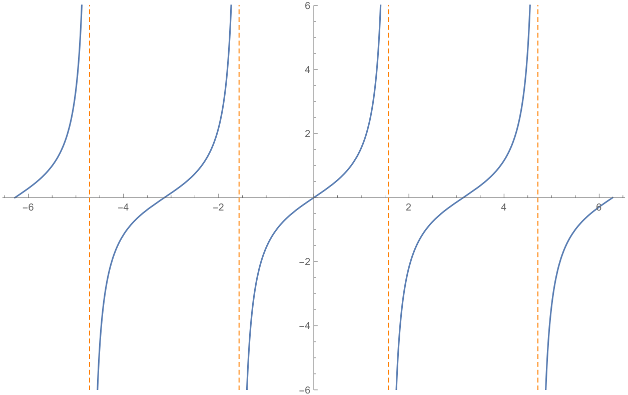
$\frac{1}{x}$ podruhé



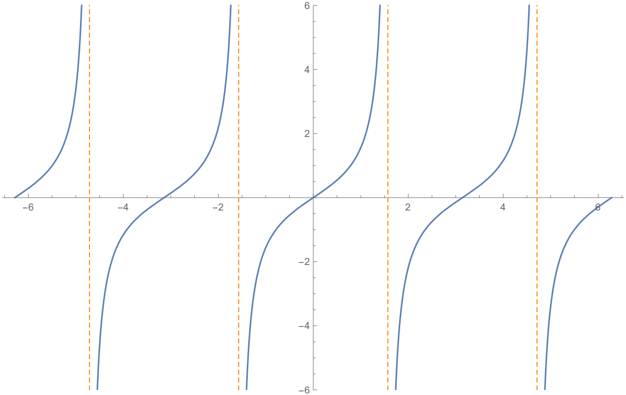
$$\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty.$$

(Ale $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje.)

Tangens

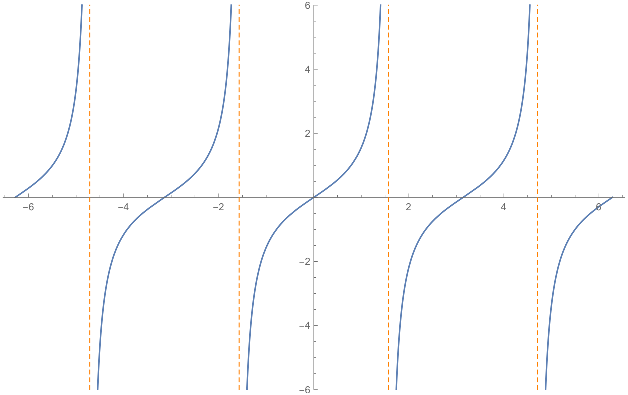


Tangens



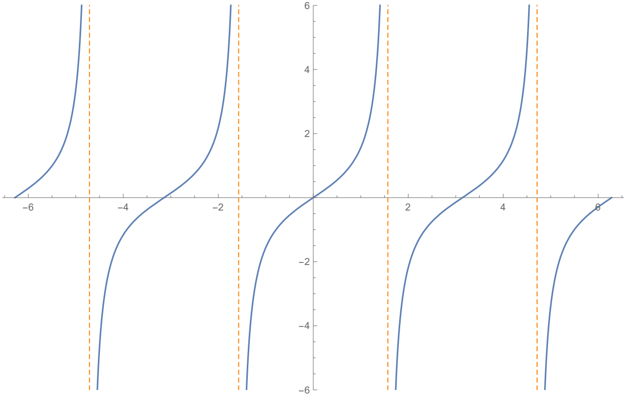
$$\lim_{x\to\pi/2_-} \operatorname{tg} x = \infty;$$

Tangens



$$\lim_{x\to\pi/2_-} \operatorname{tg} x = \infty; \qquad \lim_{x\to\pi/2_+} \operatorname{tg} x = -\infty;$$

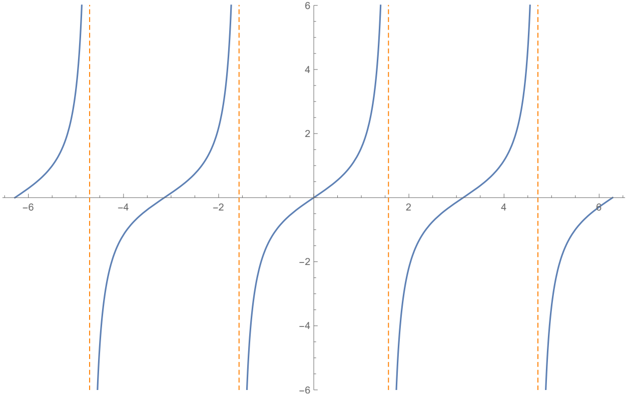
Tangens



$$\lim_{x\to\pi/2_-} \operatorname{tg} x = \infty; \qquad \lim_{x\to\pi/2_+} \operatorname{tg} x = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 3\pi/2_-} \operatorname{tg} x = \infty;$$

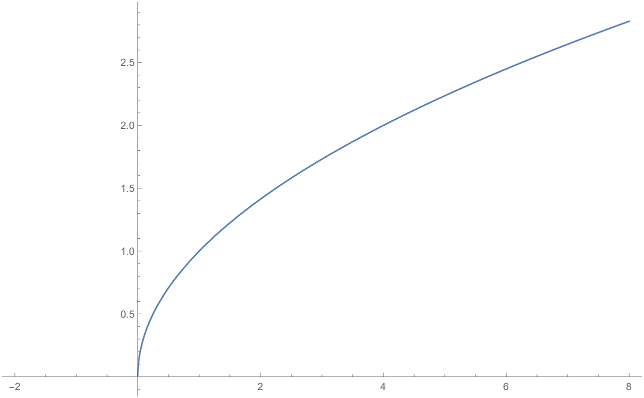
Tangens



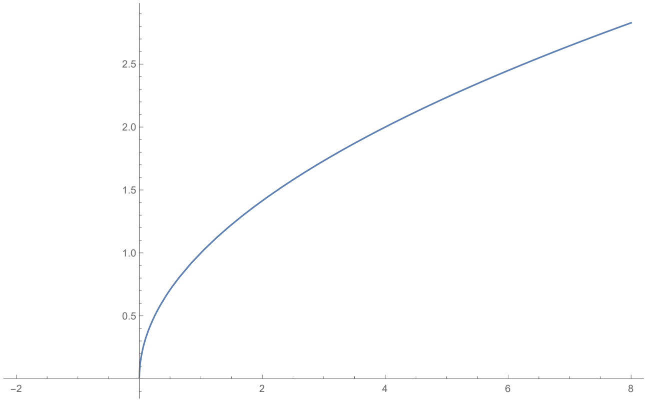
$$\lim_{x \to \pi/2_-} \operatorname{tg} x = \infty; \qquad \lim_{x \to \pi/2_+} \operatorname{tg} x = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 3\pi/2_-} \operatorname{tg} x = \infty; \qquad \lim_{x \to 3\pi/2_+} \operatorname{tg} x = -\infty;$$

Odmocnina

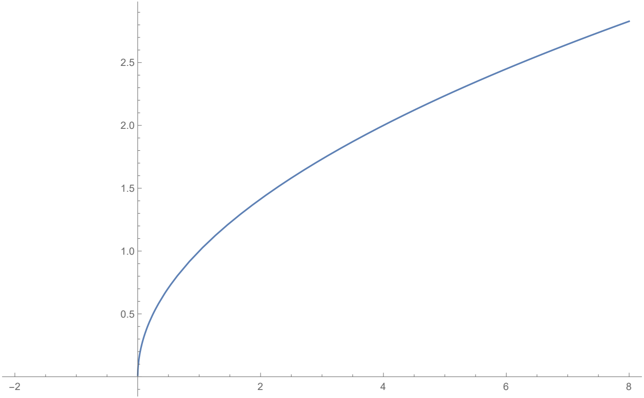


Odmocnina



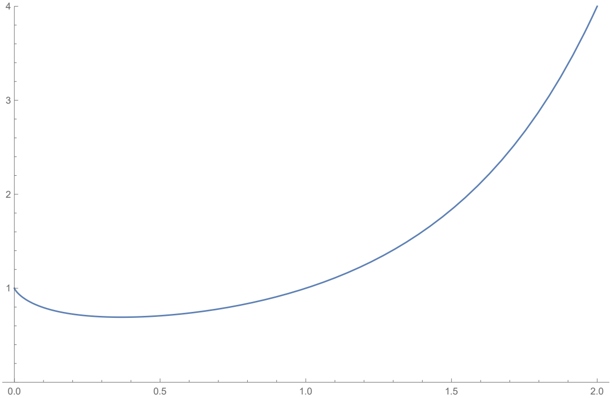
$$\lim_{x \to 0_-} \sqrt{x} \text{ neexistuje;}$$

Odmocnina

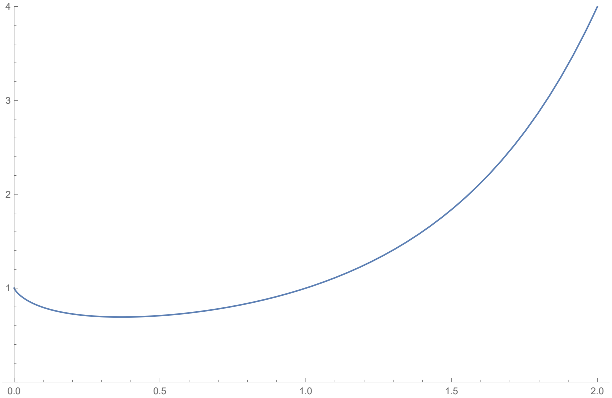


$$\lim_{x \to 0_-} \sqrt{x} \text{ neexistuje;} \qquad \lim_{x \to 0_+} \sqrt{x} = 0.$$

x^x

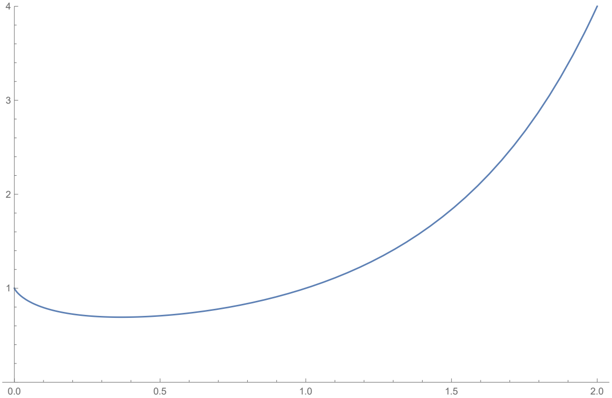


x^x



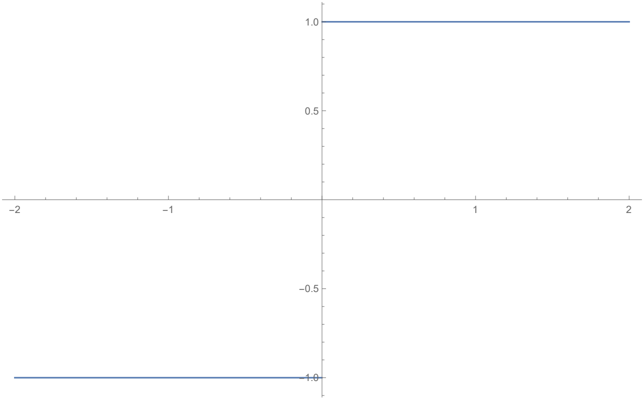
$$\lim_{x \to 0_-} x^x \text{ neexistuje;}$$

x^x

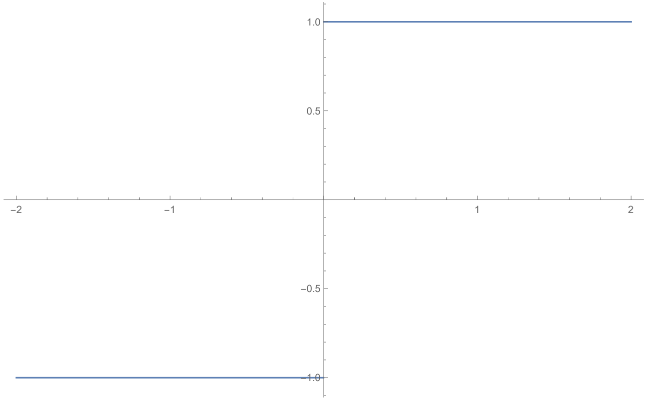


$$\lim_{x\to 0_-} x^x \text{ neexistuje;} \qquad \lim_{x\to 0_+} x^x = 1.$$

„Signum“

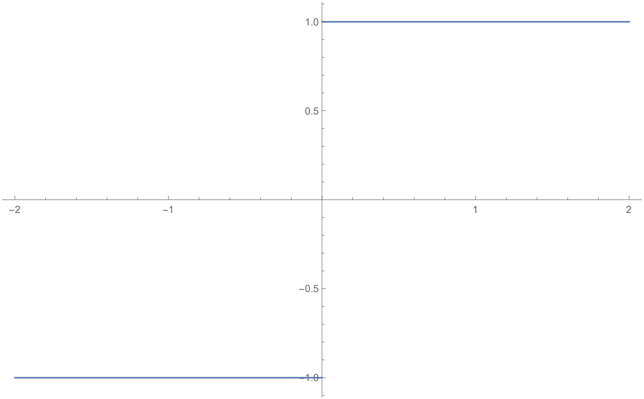


„Signum“



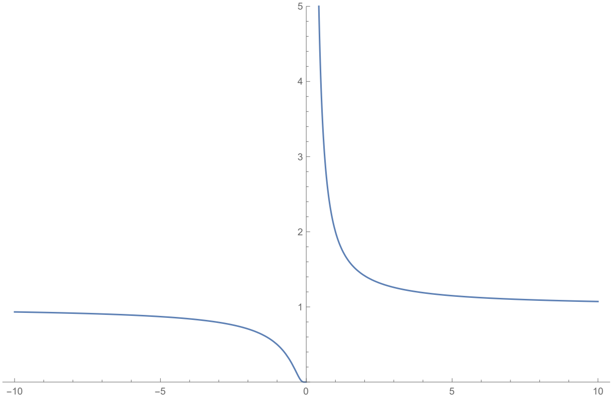
$$\lim_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = -1;$$

„Signum“

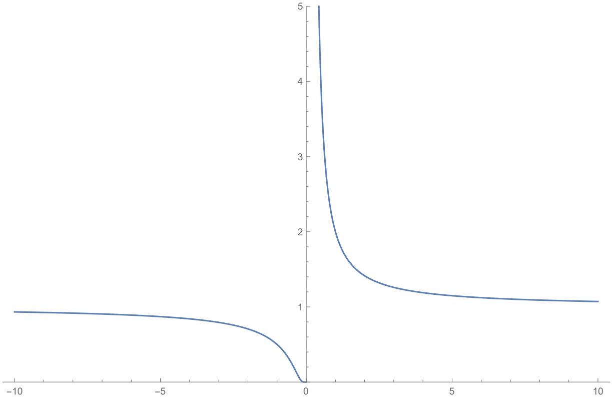


$$\lim_{x\to 0_-} \frac{|x|}{x} = -1; \qquad \lim_{x\to 0_+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

$2^{1/x}$

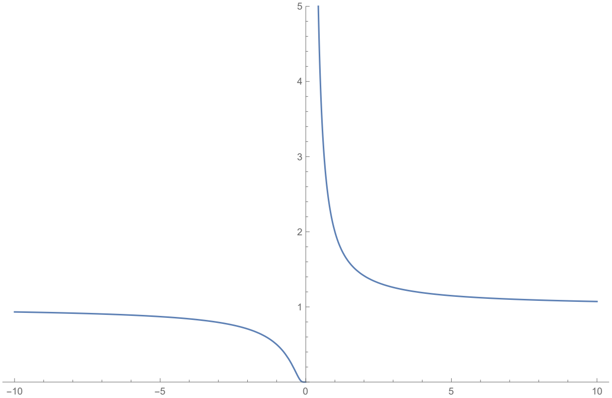


$2^{1/x}$



$$\lim_{x \to 0_-} 2^{1/x} = 0;$$

$2^{1/x}$



$$\lim_{x\to 0_-} 2^{1/x} = 0; \qquad \lim_{x\to 0_+} 2^{1/x} = \infty.$$

Vztah k běžné limitě

Vztah k běžné limitě

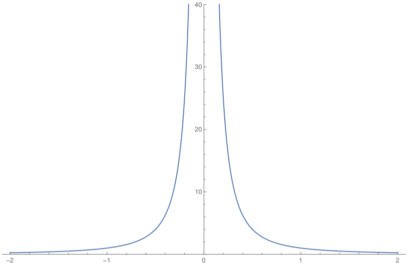
Věta

Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ („oboustrannou“) limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v c obě jednostranné limity a ty se obě rovnají A.

Vztah k běžné limitě

Věta

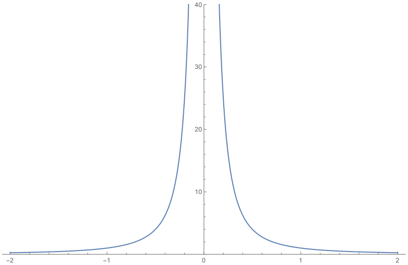
Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ („oboustrannou“) limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v c obě jednostranné limity a ty se obě rovnají A.



Vztah k běžné limitě

Věta

Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ („oboustrannou“) limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v c obě jednostranné limity a ty se obě rovnají A.

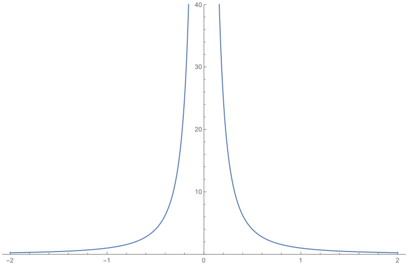


$$\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x^2} = \infty \ \wedge \ \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Vztah k běžné limitě

Věta

Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ („oboustrannou“) limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v c obě jednostranné limity a ty se obě rovnají A.

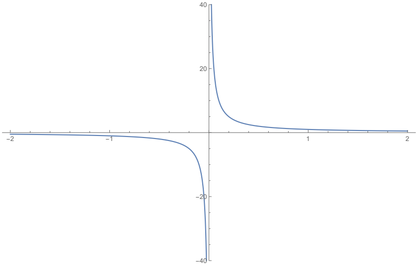


$$\lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x^2} = \infty \ \wedge \ \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Vztah k běžné limitě

Věta

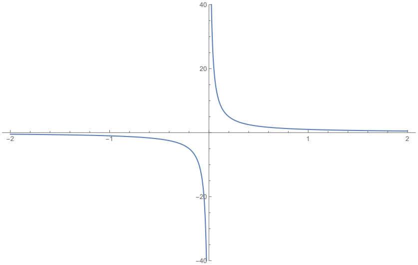
Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ („oboustrannou“) limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v c obě jednostranné limity a ty se obě rovnají A.



Vztah k běžné limitě

Věta

Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ („oboustrannou“) limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v c obě jednostranné limity a ty se obě rovnají A.

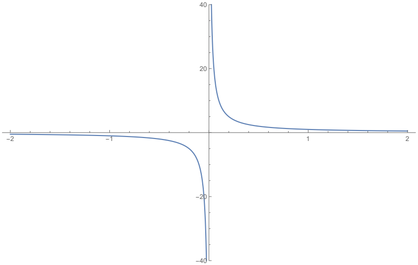


$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty \;\wedge\; \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$$

Vztah k běžné limitě

Věta

Funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ („oboustrannou“) limitu $A \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v c obě jednostranné limity a ty se obě rovnají A.



$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty \ \wedge \ \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ neexistuje}$$

Počítání s limitami potřetí

Počítání s limitami potřetí

Mějme dvě funkce f, g, které mají v bodě $c \in \mathbb{R}$ limity zprava:

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to c_+} g(x) = B.$$

Potom:

Počítání s limitami potřetí

Mějme dvě funkce f, g, které mají v bodě $c \in \mathbb{R}$ limity zprava:

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to c_+} g(x) = B.$$

Potom:

- Limita zprava funkce $f + g$ v bodě c existuje a je rovna $A + B$, *je-li* $A + B$ *definováno.*

Počítání s limitami potřetí

Mějme dvě funkce f, g, které mají v bodě $c \in \mathbb{R}$ limity zprava:

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to c_+} g(x) = B.$$

Potom:

- Limita zprava funkce $f + g$ v bodě c existuje a je rovna $A + B$, *je-li* $A + B$ *definováno.*
- Limita zprava funkce $f \cdot g$ v bodě c existuje a je rovna $A \cdot B$, *je-li* $A \cdot B$ *definováno.*

Počítání s limitami potřetí

Mějme dvě funkce f, g, které mají v bodě $c \in \mathbb{R}$ limity zprava:

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to c_+} g(x) = B.$$

Potom:

- Limita zprava funkce $f + g$ v bodě c existuje a je rovna $A + B$, *je-li* $A + B$ *definováno.*
- Limita zprava funkce $f \cdot g$ v bodě c existuje a je rovna $A \cdot B$, *je-li* $A \cdot B$ *definováno.*
- Limita zprava funkce $\frac{f}{g}$ v bodě c existuje a je rovna $\frac{A}{B}$, *je-li* $\frac{A}{B}$ *definováno.*

Počítání s limitami potřetí

Mějme dvě funkce f, g, které mají v bodě $c \in \mathbb{R}$ limity zprava:

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to c_+} g(x) = B.$$

Potom:

- Limita zprava funkce $f + g$ v bodě c existuje a je rovna $A + B$, *je-li $A + B$ definováno.*
- Limita zprava funkce $f \cdot g$ v bodě c existuje a je rovna $A \cdot B$, *je-li $A \cdot B$ definováno.*
- Limita zprava funkce $\frac{f}{g}$ v bodě c existuje a je rovna $\frac{A}{B}$, *je-li $\frac{A}{B}$ definováno.*

Symbolicky:

$$\lim_{x \to c_+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c_+} f(x) + \lim_{x \to c_+} g(x),$$

$$\lim_{x \to c_+} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to c_+} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to c_+} g(x)\right),$$

$$\lim_{x \to c_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c_+} f(x)}{\lim\limits_{x \to c_+} g(x)}$$

Počítání s limitami počtvrté

Mějme dvě funkce f, g, které mají v bodě $c \in \mathbb{R}$ limity zleva:

$$\lim_{x \to c_-} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to c_-} g(x) = B.$$

Potom:

- Limita zleva funkce $f + g$ v bodě c existuje a je rovna $A + B$, *je-li* $A + B$ *definováno*.
- Limita zleva funkce $f \cdot g$ v bodě c existuje a je rovna $A \cdot B$, *je-li* $A \cdot B$ *definováno*.
- Limita zleva funkce $\frac{f}{g}$ v bodě c existuje a je rovna $\frac{A}{B}$, *je-li* $\frac{A}{B}$ *definováno*.

Symbolicky:

$$\lim_{x \to c_-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c_-} f(x) + \lim_{x \to c_-} g(x),$$

$$\lim_{x \to c_-} (f(x) \cdot g(x)) = \big(\lim_{x \to c_-} f(x)\big) \cdot \big(\lim_{x \to c_-} g(x)\big),$$

$$\lim_{x \to c_-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c_-} f(x)}{\lim_{x \to c_-} g(x)}$$