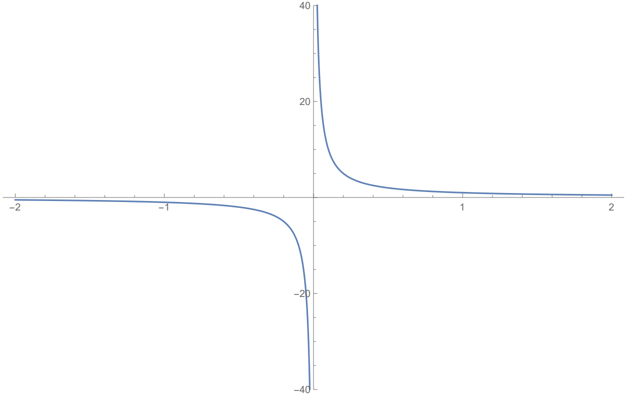
Asymptoty

Asymptoty

„Přímky, k nimž se graf funkce blíží.“

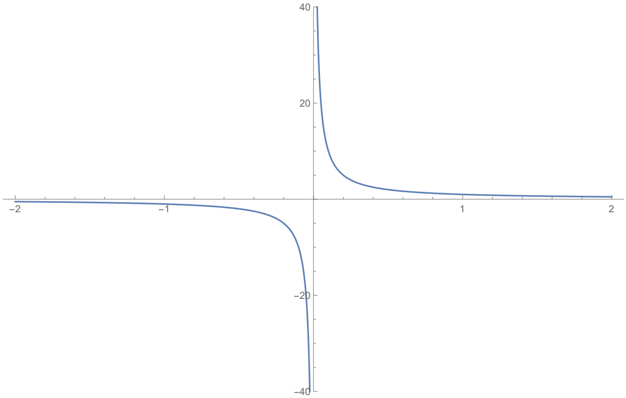
Asymptoty

„Přímky, k nimž se graf funkce blíží.“



Asymptoty

„Přímky, k nimž se graf funkce blíží.“



Funkce $y = \frac{1}{x}$ má asymptoty $x = 0$ (svislá) a $y = 0$ (vodorovná).

Dva druhy asymptot

Dva druhy asymptot

$$\text{asymptoty} \begin{cases} \\ \end{cases}$$

Dva druhy asymptot

$$\text{asymptoty}\begin{cases}\text{bez směrnice}\\ \\ \end{cases}$$

Dva druhy asymptot

$$\text{asymptoty} \begin{cases} \text{bez směrnice} \\ \text{se směrnicí} \end{cases}$$

Asympmtota bez směrnice

Definice

Přímka $x = a$ se nazývá *asymptotou bez směrnice grafu funkce* f, existuje-li aspoň jedna z limit

$$\lim_{x \to a_+} f(x), \qquad \lim_{x \to a_-} f(x)$$

a je nevlastní (tj. rovna $\pm\infty$).

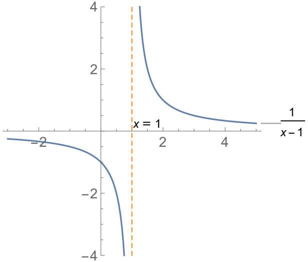
Asypmtota bez směrnice

Definice

Přímka $x = a$ se nazývá *asymptotou bez směrnice grafu funkce* f, existuje-li aspoň jedna z limit

$$\lim_{x \to a_+} f(x), \qquad \lim_{x \to a_-} f(x)$$

a je nevlastní (tj. rovna $\pm\infty$).



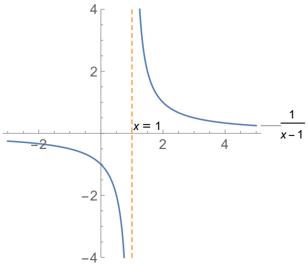
Asymptmtota bez směrnice

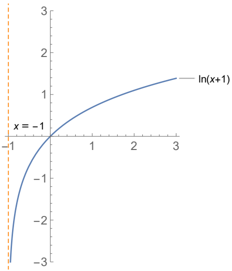
Definice

Přímka $x = a$ se nazývá *asymptotou bez směrnice grafu funkce* f, existuje-li aspoň jedna z limit

$$\lim_{x\to a_+} f(x), \qquad \lim_{x\to a_-} f(x)$$

a je nevlastní (tj. rovna $\pm\infty$).





Asymptmtota se směrnicí

Definice

Přímka $y = ax + b$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$) se nazývá *asymptotou se směrnicí grafu funkce* f, platí-li

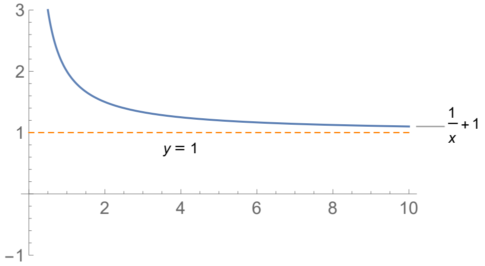
$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0.$$

Asypmtota se směrnicí

Definice

Přímka $y = ax + b$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$) se nazývá *asymptotou se směrnicí grafu funkce* f, platí-li

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0.$$

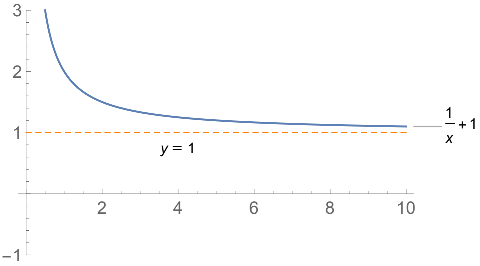


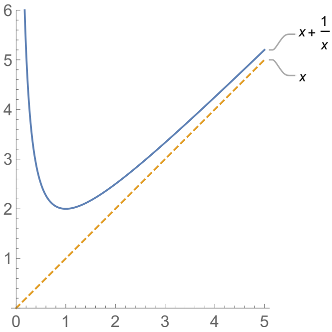
Asypmtota se směrnicí

Definice

Přímka $y = ax + b$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$) se nazývá *asymptotou se směrnicí grafu funkce* f, platí-li

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$





Výpočet asypmtoty se směrnicí

Výpočet asypmtoty se směrnicí

1. Spočteme $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Výpočet asypmtoty se směrnicí

1. Spočteme $a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, pokračujeme.

Výpočet asypmtoty se směrnicí

1. Spočteme $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, pokračujeme.
2. Spočteme $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax$.

Výpočet asypmtoty se směrnicí

1. Spočteme $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, pokračujeme.
2. Spočteme $b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, je $y = ax + b$ asymptotou (se směrnicí).

Výpočet asypmtoty se směrnicí

1. Spočteme $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, pokračujeme.
2. Spočteme $b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, je $y = ax + b$ asymptotou (se směrnicí).

Pokud nám v jednom z kroků nevyšla vlastní limita, asymptota se směrnicí (v ∞) neexistuje.

Výpočet asypmtoty se směrnicí

1. Spočteme $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, pokračujeme.
2. Spočteme $b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax$. Pokud tato limita existuje a je vlastní, je $y = ax + b$ asymptotou (se směrnicí).

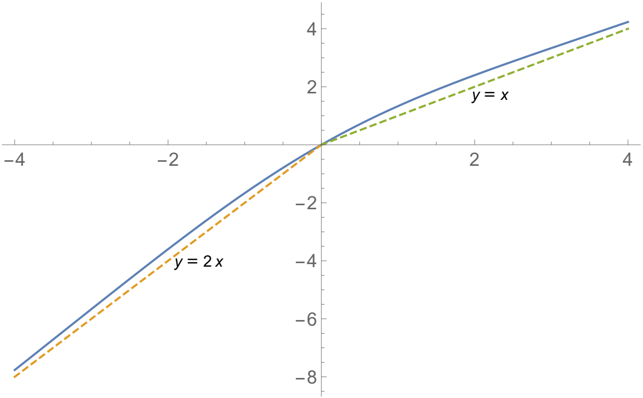
Pokud nám v jednom z kroků nevyšla vlastní limita, asymptota se směrnicí (v ∞) neexistuje. Stejně se to provede pro $-\infty$.

Asymptoty se směrnicí mohou být různé!

$$f\colon y = \frac{x}{2^x + 1} + x$$

Asymptoty se směrnicí mohou být různé!

$$f\colon y = \frac{x}{2^x + 1} + x$$



Spojitost podruhé

Připomeňme, že funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D_f$, pokud platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Spojitost podruhé

Připomeňme, že funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D_f$, pokud platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Přidáme ještě:

- zprava spojitá v a: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$,
- zleva spojitá v a: $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = f(a)$.

Spojitost podruhé

Připomeňme, že funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D_f$, pokud platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Přidáme ještě:

- zprava spojitá v a: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$,
- zleva spojitá v a: $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = f(a)$.

Definice

Je-li I interval, pak řekneme, že f *je spojitá na* I, pokud je spojitá v každém vnitřním bodě I, případně jednostranně spojitá v krajních bodech, pokud patří do I.

Spojitost podruhé

Připomeňme, že funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D_f$, pokud platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Přidáme ještě:

- zprava spojitá v a: $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = f(a)$,
- zleva spojitá v a: $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = f(a)$.

Definice

Je-li I interval, pak řekneme, že f *je spojitá na* I, pokud je spojitá v každém vnitřním bodě I, případně jednostranně spojitá v krajních bodech, pokud patří do I.

Funkce spojitá na intervalu $I \approx$ *„jde na I nakreslit jedním tahem"*.

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá extrémů

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá extrémů

Věta

Nechť a, b jsou reálná čísla splňující $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$.

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá extrémů

Věta

Nechť a, b jsou reálná čísla splňující $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak existují $m, M \in \langle a; b\rangle$ taková, že pro všechna $x \in \langle a; b\rangle$ platí

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M).$$

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá extrémů

Věta

Nechť a, b jsou reálná čísla splňující $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak existují $m, M \in \langle a; b\rangle$ taková, že pro všechna $x \in \langle a; b\rangle$ platí

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M).$$

Speciálně je spojitá funkce na uzavřeném intervalu omezená.

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá extrémů

Věta

Nechť a, b jsou reálná čísla splňující $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak existují $m, M \in \langle a; b\rangle$ taková, že pro všechna $x \in \langle a; b\rangle$ platí

$$f(m) \leq f(x) \leq f(M).$$

Speciálně je spojitá funkce na uzavřeném intervalu omezená.

Je nutné, aby byl interval uzavřený!

Spojitá funkce nabývá mezihodnot

Spojitá funkce nabývá mezihodnot

Věta

Nechť a, b jsou reálná čísla splňující $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak pro každé y mezi $f(a)$ a $f(b)$ existuje $c \in \langle a; b\rangle$ splňující $f(c) = y$.

Spojitá funkce nabývá mezihodnot

Věta

Nechť a, b jsou reálná čísla splňující $a < b$ a funkce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$. Pak pro každé y mezi $f(a)$ a $f(b)$ existuje $c \in \langle a; b\rangle$ splňující $f(c) = y$.

Důsledek

Je-li f spojitá na $\langle a; b\rangle$ a platí buď $f(a) \leq 0$ a $f(b) \geq 0$, nebo $f(a) \geq 0$ a $f(b) \leq 0$, tak existuje $c \in \langle a; b\rangle$ splňující $f(c) = 0$.

Půlení intervalů

. . . aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici.“

Půlení intervalů

…aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici.“

1. Rovnici převedeme do tvaru $f(x) = 0$.

Půlení intervalů

…aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici.“

1. Rovnici převedeme do tvaru $f(x) = 0$. (Předpokládáme, že f je spojitá na dostatečně velkém intervalu.)

Půlení intervalů

…aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici.“

1. Rovnici převedeme do tvaru $f(x) = 0$. (Předpokládáme, že f je spojitá na dostatečně velkém intervalu.)
2. Odhadneme body $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačné znaménko.

Půlení intervalů

…aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici."

1. Rovnici převedeme do tvaru $f(x) = 0$. (Předpokládáme, že f je spojitá na dostatečně velkém intervalu.)
2. Odhadneme body $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačné znaménko.
3. Podíváme se do bodu $c = \frac{a+b}{2}$.

Půlení intervalů

... aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici.“

1. Rovnici převedeme do tvaru $f(x) = 0$. (Předpokládáme, že f je spojitá na dostatečně velkém intervalu.)
2. Odhadneme body $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačné znaménko.
3. Podíváme se do bodu $c = \frac{a+b}{2}$. Mají-li $f(c)$ a $f(a)$ stejné znaménko, pak nahradíme a za c a pokračujeme předchozím bodem.

Půlení intervalů

...aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici.“

1. Rovnici převedeme do tvaru $f(x) = 0$. (Předpokládáme, že f je spojitá na dostatečně velkém intervalu.)
2. Odhadneme body $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačné znaménko.
3. Podíváme se do bodu $c = \frac{a+b}{2}$. Mají-li $f(c)$ a $f(a)$ stejné znaménko, pak nahradíme a za c a pokračujeme předchozím bodem. Mají-li $f(c)$ a $f(a)$ různé znaménko, pak nahradíme b za c a pokračujeme předchozím bodem.

Půlení intervalů

... aneb „Jak vyřešit libovolnou rovnici."

1. Rovnici převedeme do tvaru $f(x) = 0$. (Předpokládáme, že f je spojitá na dostatečně velkém intervalu.)
2. Odhadneme body $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačné znaménko.
3. Podíváme se do bodu $c = \frac{a+b}{2}$. Mají-li $f(c)$ a $f(a)$ stejné znaménko, pak nahradíme a za c a pokračujeme předchozím bodem. Mají-li $f(c)$ a $f(a)$ různé znaménko, pak nahradíme b za c a pokračujeme předchozím bodem.
4. Opakujeme body 2 a 3, dokud nemáme tak přesný výsledek, jak bychom chtěli.