# Funkce

## Úvod

Alexander Slávik

Gymnázium Voděradská

4. 10. 2022

# Definice

# Definice

Matematika pro gymnázia – Funkce (Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.):

# Definice

Matematika pro gymnázia – Funkce (Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.):

**Funkce** na množině A ⊂ R je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá **definiční obor** funkce.

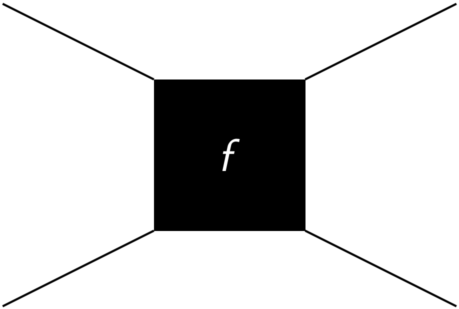
# Definice

Matematika pro gymnázia – Funkce (Doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.):

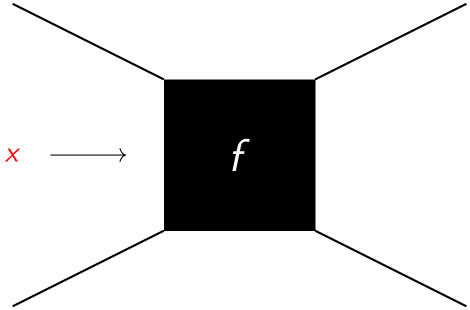
**Funkce** na množině A ⊂ R je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina A se nazývá **definiční obor** funkce.

„Lepší" definice bude v semináři z diferenciálního a integrálního počtu.

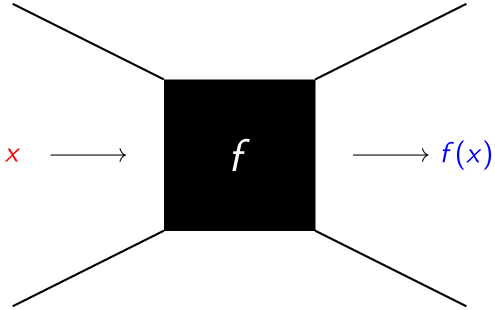
# Jiná představa



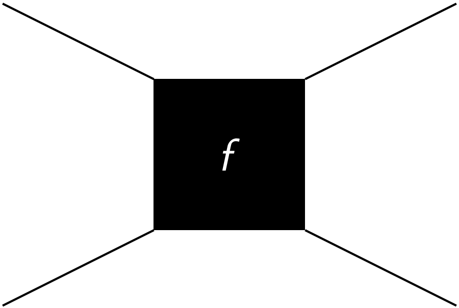
# Jiná představa



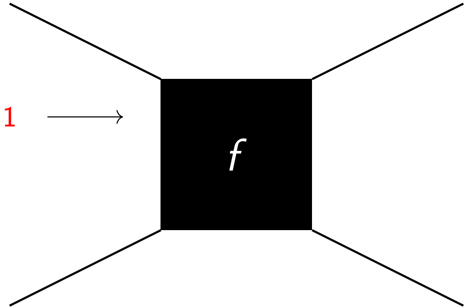
# Jiná představa



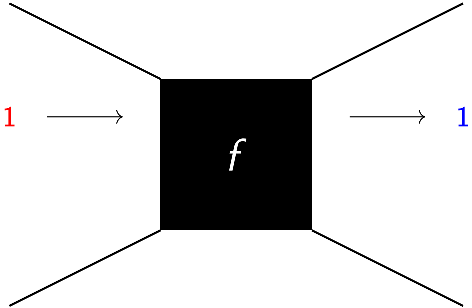
# Identická funkce



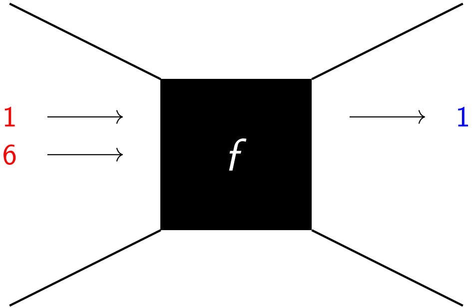
# Identická funkce



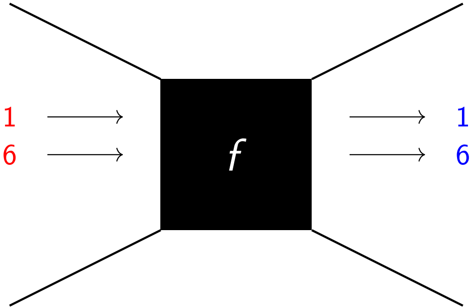
# Identická funkce



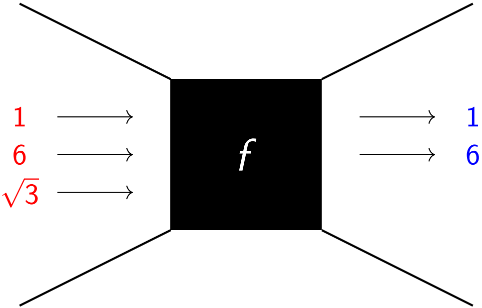
# Identická funkce



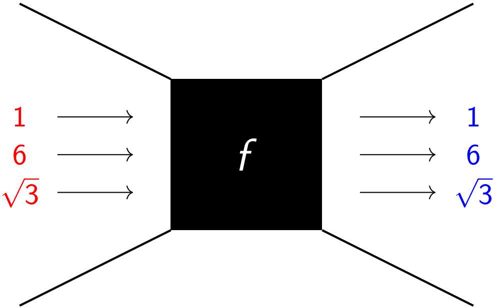
# Identická funkce



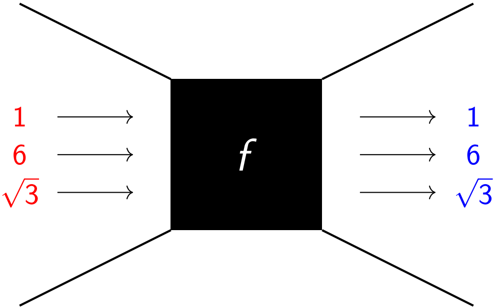
# Identická funkce



# Identická funkce

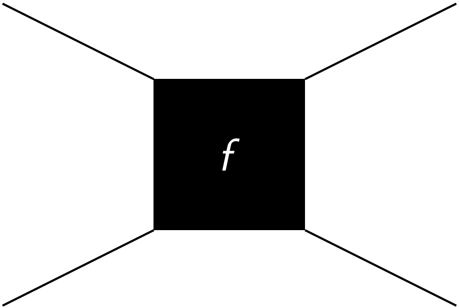


# Identická funkce

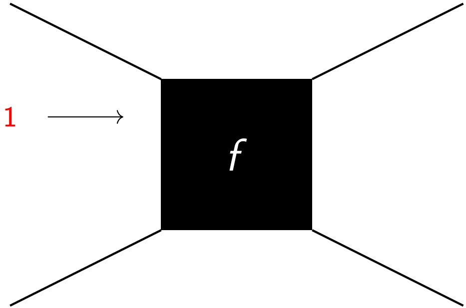



„Dostaň $x$, vrať $x$."

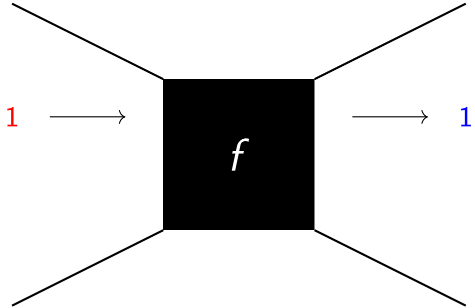
# Kvadratická funkce „$x^2$“



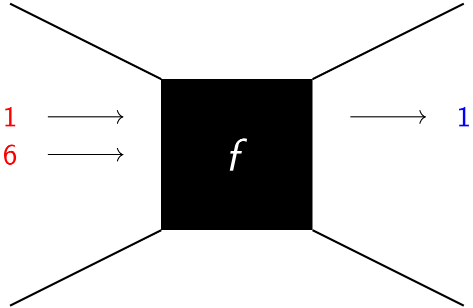
# Kvadratická funkce „$x^2$“



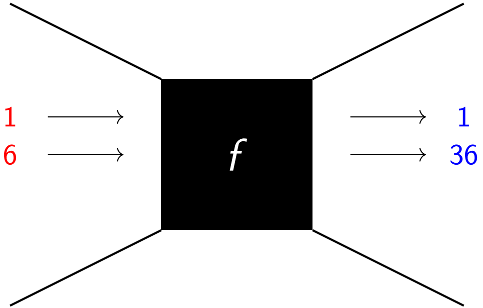
# Kvadratická funkce „$x^2$“



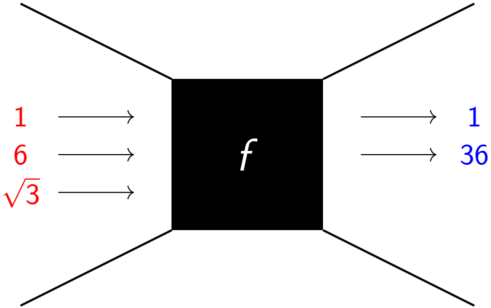
# Kvadratická funkce „$x^2$“



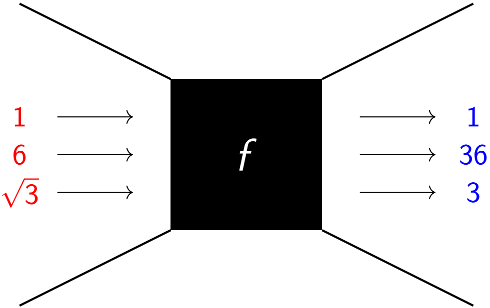
# Kvadratická funkce „$x^2$“



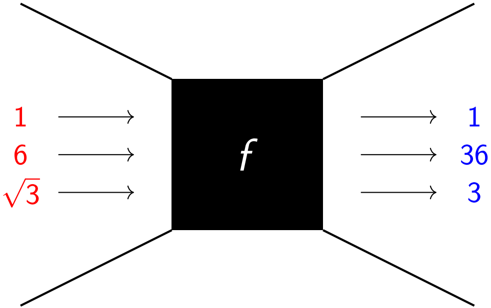
# Kvadratická funkce „$x^2$“



# Kvadratická funkce „$x^2$“

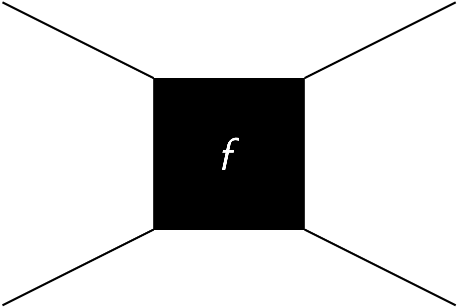


# Kvadratická funkce „$x^2$“

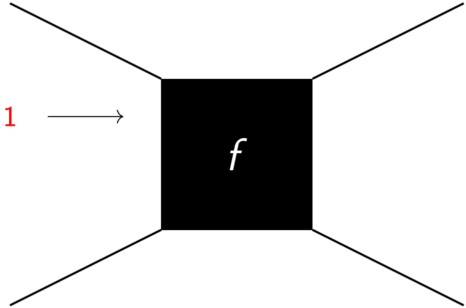



„Dostaň $x$, vrať druhou mocninu $x$.“

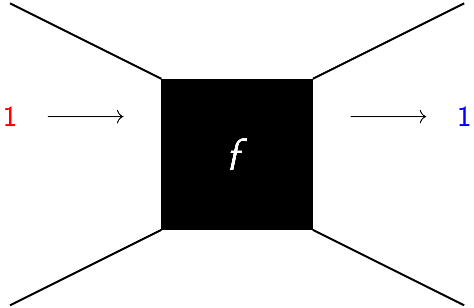
# Ještě jiný příklad



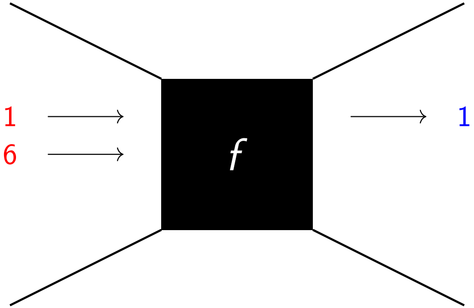
# Ještě jiný příklad



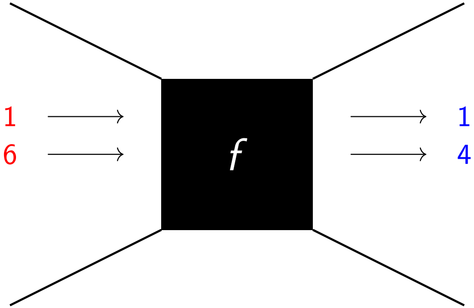
# Ještě jiný příklad



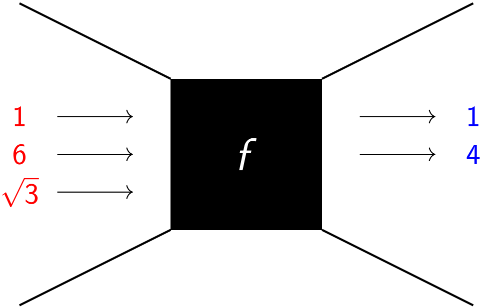
# Ještě jiný příklad



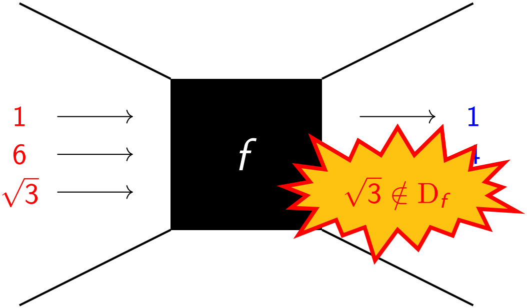
# Ještě jiný příklad



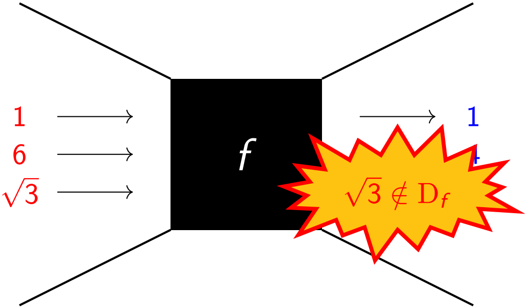
# Ještě jiný příklad



# Ještě jiný příklad

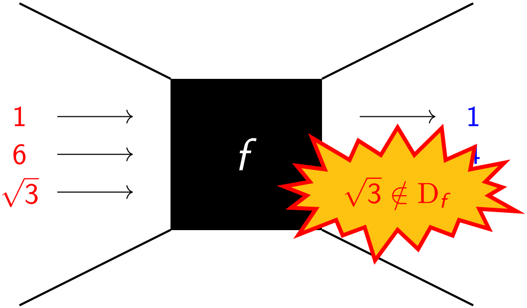


# Ještě jiný příklad




„Dostaň $x$, vrať počet (kladných) dělitelů čísla $x$.“

# Ještě jiný příklad




„Dostaň $x$, vrať počet (kladných) dělitelů čísla $x$.“

funkce $\approx$ předpis $\approx$ přiřazení $\approx$ proces

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

... funkce $f$ značíme $\mathrm{D}_f$ (příp. $\mathrm{D}(f)$);

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

… funkce $f$ značíme $\mathrm{D}_f$ (příp. $\mathrm{D}(f)$);

= množina těch reálných čísel $x$, pro která je hodnota $f(x)$ definována.

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

... funkce $f$ značíme $\mathrm{D}_f$ (příp. $\mathrm{D}(f)$);

= množina těch reálných čísel $x$, pro která je hodnota $f(x)$ definována.

= „co můžeme do $f$ dosadit“.

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

… funkce $f$ značíme $\mathrm{D}_f$ (příp. $\mathrm{D}(f)$);

$=$ množina těch reálných čísel $x$, pro která je hodnota $f(x)$ definována.

$=$ „co můžeme do $f$ dosadit“.

## Obor hodnot

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

... funkce $f$ značíme $\mathrm{D}_f$ (příp. $\mathrm{D}(f)$);

= množina těch reálných čísel $x$, pro která je hodnota $f(x)$ definována.

= „co můžeme do $f$ dosadit“.

## Obor hodnot

... funkce $f$ značíme $\mathrm{H}_f$ (příp. $\mathrm{H}(f)$);

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

. . . funkce $f$ značíme $\mathrm{D}_f$ (příp. $\mathrm{D}(f)$);

= množina těch reálných čísel $x$, pro která je hodnota $f(x)$ definována.

= „co můžeme do $f$ dosadit".

## Obor hodnot

. . . funkce $f$ značíme $\mathrm{H}_f$ (příp. $\mathrm{H}(f)$);

= množina těch reálných čísel $y$, pro která existuje aspoň jedno $x \in \mathrm{D}_f$ splňující $y = f(x)$.

# Definiční obor & obor hodnot

## Definiční obor

… funkce $f$ značíme $\mathrm{D}_f$ (příp. $\mathrm{D}(f)$);

= množina těch reálných čísel $x$, pro která je hodnota $f(x)$ definována.

= „co můžeme do $f$ dosadit".

## Obor hodnot

… funkce $f$ značíme $\mathrm{H}_f$ (příp. $\mathrm{H}(f)$);

= množina těch reálných čísel $y$, pro která existuje aspoň jedno $x \in \mathrm{D}_f$ splňující $y = f(x)$.

= „jakých hodnot může $f$ nabývat".

# Jak funkci „zadat“?

SŠ učebnice typicky uvádí tyto způsoby:

# Jak funkci „zadat“?

SŠ učebnice typicky uvádí tyto způsoby:

- tabulkou,

# Jak funkci „zadat“?

SŠ učebnice typicky uvádí tyto způsoby:

- tabulkou,
- grafem,

# Jak funkci „zadat“?

SŠ učebnice typicky uvádí tyto způsoby:

- tabulkou,
- grafem,
- funkčním předpisem.

# Funkce daná tabulkou

Např. počet pozitivních testů na COVID-19 v ČR v $x$-tý den počínaje 1. 3. 2020:

# Funkce daná tabulkou

Např. počet pozitivních testů na COVID-19 v ČR v $x$-tý den počínaje 1. 3. 2020:

| den | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| počet | 3 | 0 | 2 | 1 | 3 | 11 | 7 | 6 | 6 | 25 | 31 | 22 | 25 | 48 | 109 | 85 | 67 | 110 | 206 | 124 | 159 | 115 | 126 | 185 | 292 | 259 | 377 | 263 | 159 | 184 | 304 | 283 | ... |

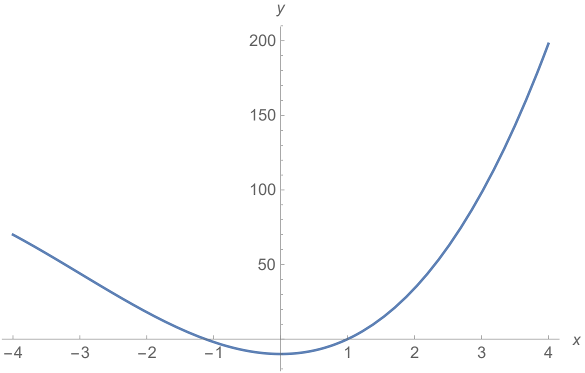
# Funkce daná tabulkou

Např. počet pozitivních testů na COVID-19 v ČR v $x$-tý den počínaje 1. 3. 2020:

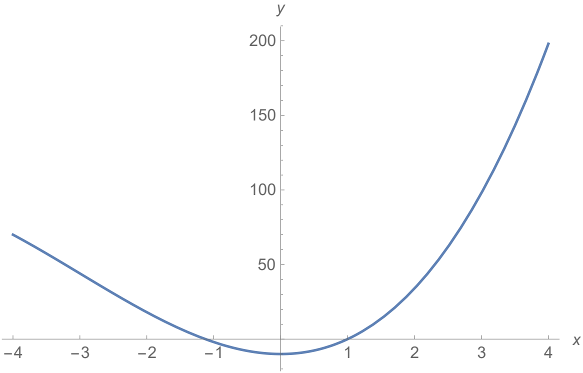
| den | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| počet | 3 | 0 | 2 | 1 | 3 | 11 | 7 | 6 | 6 | 25 | 31 | 22 | 25 | 48 | 109 | 85 | 67 | 110 | 206 | 124 | 159 | 115 | 126 | 185 | 292 | 259 | 377 | 263 | 159 | 184 | 304 | 283 | ... |

Zřejmě může mít pouze konečný definiční obor a obor hodnot.

# Funkce daná grafem

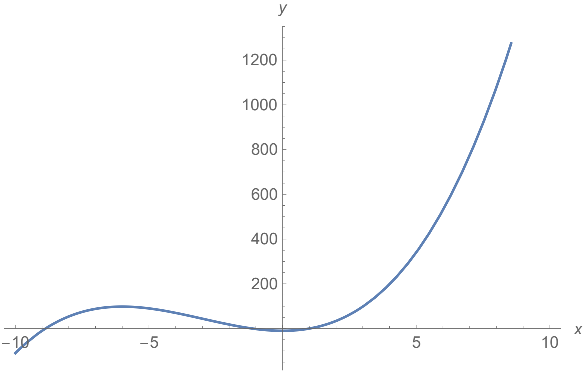


# Funkce daná grafem

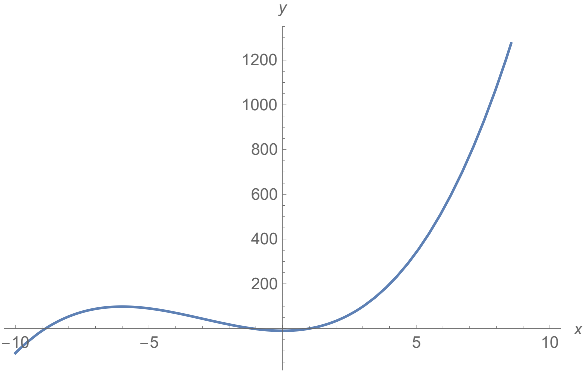



Takto „zadaná“ funkce musí mít *omezený* definiční obor.

# Funkce daná grafem II

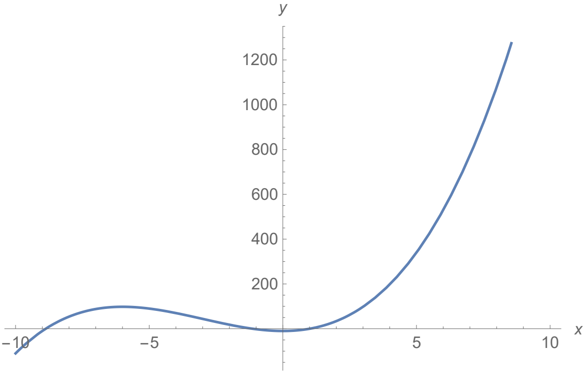


# Funkce daná grafem II



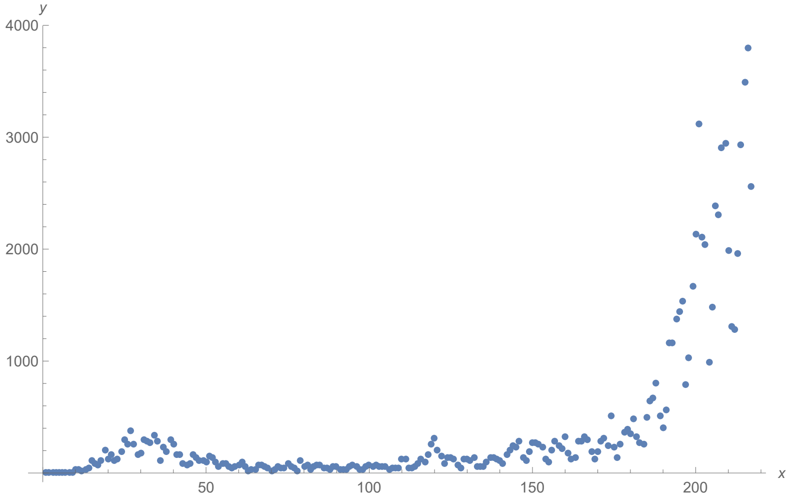

Nezbytně záleží na tom, „kam se díváme“.

# Funkce daná grafem II



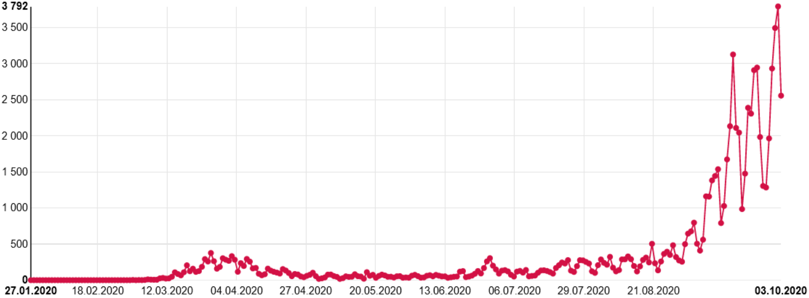

Nezbytně záleží na tom, „kam se díváme“. ($y = x^3 + 9x^2 - 10$)

# Funkce daná grafem III



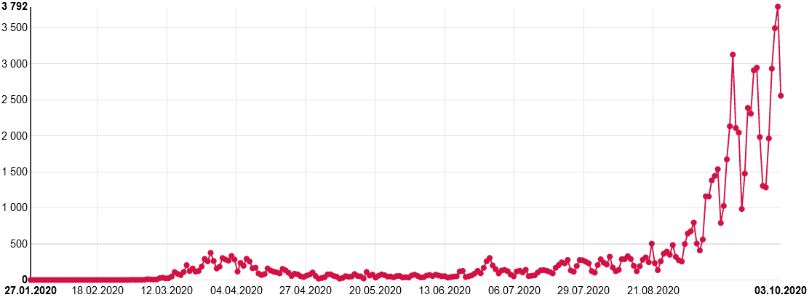
# Funkce daná grafem III

Ze stránek Ministerstva zdravotnictví:



# Funkce daná grafem III

Ze stránek Ministerstva zdravotnictví:




„Spojování bodů" je přehledné, ale nemá matematický význam.

# Funkce daná grafem IV

# Funkce daná grafem V

Noty jakožto graf funkce:

# Funkce daná grafem V

Noty jakožto graf funkce:

# Funkce daná předpisem

Například

$$f\colon y = x^3 + 9x^2 - 10, \quad x \in \mathbb{R}$$

# Funkce daná předpisem

Například

$$f\colon\, y = \underbrace{x^3 + 9x^2 - 10}_{\text{funkční předpis}}, \quad \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{def. obor}}$$

# Funkce daná předpisem

Například

$$f\colon\ y = \underbrace{x^3 + 9x^2 - 10}_{\text{funkční předpis}}, \quad \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{def. obor}}$$

Nebo stejně dobře tak

$$f(x) = x^3 + 9x^2 - 10, \quad \mathrm{D}_f = \mathbb{R}$$

# Funkce daná předpisem

Například

$$f:\, y = \underbrace{x^3 + 9x^2 - 10}_{\text{funkční předpis}}, \quad \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{def. obor}}$$

Nebo stejně dobře tak

$$f(x) = x^3 + 9x^2 - 10, \quad \mathrm{D}_f = \mathbb{R}$$

Příklad s menším definičním oborem:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \langle 0, \infty)$$

# Funkce daná předpisem

Například

$$f : y = \underbrace{x^3 + 9x^2 - 10}_{\text{funkční předpis}}, \quad \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{def. obor}}$$

Nebo stejně dobře tak

$$f(x) = x^3 + 9x^2 - 10, \quad \mathrm{D}_f = \mathbb{R}$$

Příklad s menším definičním oborem:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \langle 0, \infty)$$

**Pozor:**

Definiční obor by *měl být* součástí zadání funkce, ovšem typicky se bere jako definiční obor co největší množina reálných čísel, pro kterou má funkční předpis smysl.

# Funkce daná předpisem

Například

$$f:\, y = \underbrace{x^3 + 9x^2 - 10}_{\text{funkční předpis}}, \quad \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{def. obor}}$$

Nebo stejně dobře tak

$$f(x) = x^3 + 9x^2 - 10, \quad \mathrm{D}_f = \mathbb{R}$$

Příklad s menším definičním oborem:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \langle 0, \infty)$$

**Pozor:**

Definiční obor by *měl být* součástí zadání funkce, ovšem typicky se bere jako definiční obor co největší množina reálných čísel, pro kterou má funkční předpis smysl. Odtud úlohy typu „určete definiční obor funkce“.

# ⋆ Děsivé funkce

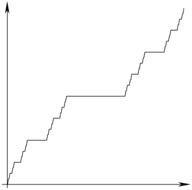
# ⋆ Děsivé funkce

Ve skutečnosti se „drtivá většina“ reálných funkcí nedá zadat ani jedním z těchto způsobů.

# ⋆ Děsivé funkce

Ve skutečnosti se „drtivá většina“ reálných funkcí nedá zadat ani jedním z těchto způsobů.
Např.

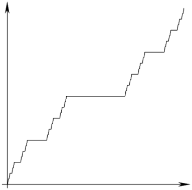
- Cantorova funkce („Ďáblovo schodiště“)



# ⋆ Děsivé funkce

Ve skutečnosti se „drtivá většina“ reálných funkcí nedá zadat ani jedním z těchto způsobů.
Např.

- Cantorova funkce („Ďáblovo schodiště“)



- Funkce, která mezi každými dvěma reálnými čísly nabývá všech reálných čísel