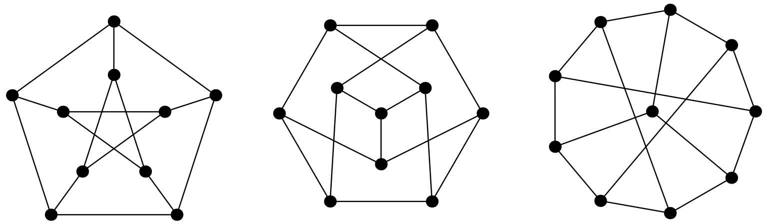
Teorie grafů

Úloha 1. Nalezněte isomorfismy mezi těmito grafy (jde o tzv. *Petersenův graf*):



Úloha 2. Mějme tři vrcholy, a, b, c.

(a) Kolik existuje různých grafů na těchto třech vrcholech?

(b) Kolik jich je, pokud bereme isomorfní grafy za stejné?

Úloha 3. Nalezněte nějaké dva neisomorfní grafy na šesti vrcholech, které budou mít stejné skóre.

Úloha 4. Nalezněte všechny možné neisomorfní grafy se skóre $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 6)$.

Úloha 5. Sestrojte co nejmenší příklad grafu s 6 vrcholy stupně 3, ostatními vrcholy stupně 2 a právě 12 hranami.

Úloha 6. Rozhodněte, zda existuje graf na alespoň dvou vrcholech, jehož skóre by bylo tvořeno různými čísly. (Odpověď zdůvodněte.)

Úloha 7. Graf nazveme *souvislý*, pokud se z každého vrcholu do každého umíme dostat po cestě z hran. Kolik hran může nanejvýš obsahovat nesouvislý graf s n vrcholy?

⋆ **Úloha 8.** Dokažte, že má-li v grafu na n vrcholech každý vrchol stupeň větší než $\frac{n}{2}$, tak už graf nutně obsahuje trojúhelník (tj. tři vrcholy, každý spojený s každým).

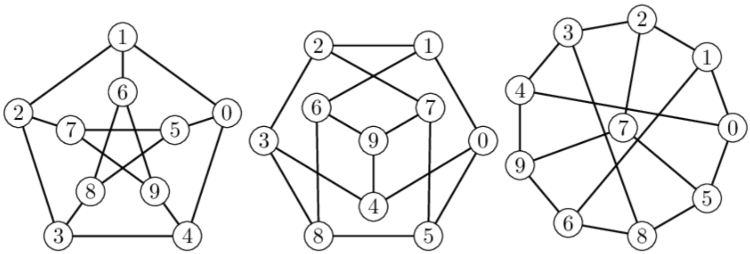
V následujícím se budeme zabývat *stromy*, což jsou souvislé grafy bez cyklů.

Úloha 9. Rozmyslete si, že každý strom na alespoň 2 vrcholech má alespoň 2 vrcholy stupně 1 (tzv. *listy*).

Úloha 10. Rozmyslete si, že každý strom má nutně o jedna méně hran, než má vrcholů. (Nápověda: Podle předchozí úlohy musí na stromě existovat listy; postupně ten graf „otrháme".)

Úloha 11. Rozmyslete si, že každý souvislý graf, který má o jedna méně hran než vrcholů, je už nutně strom. (Nápověda: Analogicky k předchozí úloze postupně otrháme graf.)

1. Např.



2. (a) 8 (b) 4

3. Jedna možnost je vzít cestu na pěti vrcholech, ke které připojíme nový vrchol buď doprostřed, nebo do vrcholu sousedícího s prostředním.

4. Jsou dva: vrchol stupně šest musíme spojit se všemi ostatními, které budou tvořit buď cyklus délky šest, nebo dva „trojúhelníky“.

5. Jedna možnost je vzít cyklus délky šest a každou druhou hranu rozšířit na „trojúhelník“.

6. Ne: stupeň může být max. počet vrcholů mínus jedna, takže „aby se to vešlo“, musel by existovat jak vrchol tohoto max. stupně (který by byl spojen se všemi dalšími), tak vrchol stupně nula, což nemůže nastat současně.

7. $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$