16. Základní goniometrické rovnice a jejich aplikace

Úloha 1. Nejzákladnější goniometrické rovnice s „hezkými“ výsledky:

(a) $\cos x = \frac{1}{2}$
(b) $\sin x = \frac{1}{2}$
(c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
(d) $\cos x = 0$
(e) $\sin x = -1$
(f) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
(g) $\operatorname{tg} x = 1$
(h) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$
(i) $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Úloha 2. Nejzákladnější goniometrické rovnice s ne tak hezkými výsledky:

(a) $\cos x = \frac{3}{5}$
(b) $\sin x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$
(c) $\operatorname{tg} x = \pi$

Úloha 3. Rozličné (ale stále celkem „základní“) goniometrické rovnice:

(a) $\cos 2x = 0$
(b) $\sin\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
(c) $\sin \frac{1}{3}x = \frac{4}{5}$
(d) $\cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$
(e) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)(\sin x - 2) = 0$
(f) $\cos x - \cos^3 x = 0$
(g) $\left|\sin x + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
(h) $3\cos^2 x + 4\cos x = 4$

Úloha 4. Vymyslete goniometrickou rovnici tvaru sin(něco) = něco nebo cos(něco) = něco, jejíž množinou řešení bude ta uvedená; u úloh s $\star$ vezměte v potaz, že x v argumentu může něčím násobit, něco k němu přičítat…

(a) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$
(b) $\left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\}$
(c) $\{3\pi + 2k\pi\}$
$\star$ (d) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$
$\star$ (e) $\left\{\frac{\pi}{2} + 4k\pi; \frac{3\pi}{2} + 4k\pi\right\}$
$\star$ (f) $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi\right\}$

Úloha 5. Nalezněte všechna řešení rovnice na zadaném intervalu:

(a) $\cos x = 0$ na $\langle 0; 2\pi\rangle$
(b) $\cos x = 0$ na $\langle -\pi; \pi\rangle$
(c) $\sin x = \frac{1}{2}$ na $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$
(d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ na $\langle -\pi; 0\rangle$
(e) $\sin x = 1$ na $\langle 0; 4\pi\rangle$
(f) $\cos x = \frac{1}{4}$ na $\langle 0; 2\pi\rangle$
(g) $\sin x = \frac{3}{4}$ na $\langle 0; 2\pi\rangle$
(h) $\sin x = \frac{3}{4}$ na $\langle -\pi; \pi\rangle$
(i) $\sin x = \frac{3}{4}$ na $\langle -2\pi; 0\rangle$
(j) $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ na $\langle 0; 2\pi\rangle$
(k) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ na $\langle 0; 2\pi\rangle$
(l) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ na $\langle 0; 2\pi\rangle$
(m) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$ na $\langle \pi; 2\pi\rangle$
(n) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ na $\langle -\pi; \pi\rangle$

Úloha 6. Na pružině je zavěšeno závaží, které kmitá nahoru a dolů tak, že vzdálenost nejvyššího a nejnižšího bodu je 10 cm. Jeden celý kmit (z nejnižší pozice úplně nahoru + zpátky úplně dolů, tj. jedna perioda) trvá 1 s. V čase $t = 0$ se závaží nacházelo přesně uprostřed a pohybovalo se směrem nahoru.

(a) Uveďte předpis funkce, která udává závislost vertikální polohy závaží y na čase t; nechť výchozí (prostřední) poloze odpovídá hodnota $y = 0$, nejvyšší $y = 5$ a nejnižší $y = -5$.
(b) Určete, kde (tj. y) se bude závaží nacházet v $t = 0{,}75$.
(c) Určete, kde se bude závaží nacházet v $t = \frac{1}{3}$.
(d) Do výšky $y = 1$ umístíme senzor, který zaznamenává, že se tam závaží objeví. V jaký čas se tam závaží objeví poprvé, podruhé a potřetí?

Úloha 7. Vzdálenost Země od Slunce v průběhu roku je dána přibližným vztahem $d = 1 - 0{,}01672\cos\big(0{,}0172(t-4)\big)$, kde t je čas od začátku roku v dnech a d je ona vzdálenost v astronomických jednotkách. Určete, kdy během roku je Země vzdálená 1,01 AU od Slunce.

$\star$ **Úloha 8.** Rozmyslete si, jak budou vypadat grafy následujících funkcí; výsledky si můžete ověřit např. v GeoGebře.

(a) $y = \cos(\arccos x)$
(b) $y = \arccos(\cos x)$
(c) $y = \sin(\arcsin x)$
(d) $y = \arcsin(\sin x)$
(e) $y = \arccos(\sin x)$
(f) $y = \arcsin(\cos x)$
(g) $y = \cos(\arcsin x)$
(h) $y = \sin(\arccos x)$

1. (a) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$ (b) $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$ (c) $\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi; \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right\}$ (d) $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ (e) $\left\{\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$ (f) $\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$ (g) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$ (h) $\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$ (i) $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\right\}$

2. (a) $\left\{\pm\arccos\frac{3}{5}+2k\pi\right\}$ (b) $\left\{\arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+2k\pi; \pi-\arcsin\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+2k\pi\right\}$ (c) $\{\operatorname{arctg}\pi+k\pi\}$

3. (a) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi; \frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\}$ (c) $\left\{3(\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi); 3(\pi-\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi)\right\}$ (d) $\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}$ (e) $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{5\pi}{6}+2k\pi; \arcsin\frac{1}{3}+2k\pi; \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2k\pi\right\}$ (f) $\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ (g) $\left\{k\pi; \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$ (h) $\left\{\pm\arccos\frac{2}{3}+2k\pi\right\}$

4. (a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos x=-\frac{1}{2}$ (c) $\cos x=-1$ (d) $\cos(x+\frac{\pi}{4})=1$ (e) $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (f) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

5. (a) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$ (b) $\left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$ (c) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ (d) $\left\{-\frac{3\pi}{4}\right\}$ (e) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}$ (f) $\left\{\arccos\frac{1}{4}; -\arccos\frac{1}{4}+2\pi\right\}$ (g) $\left\{\arcsin\frac{3}{4}; \pi-\arcsin\frac{3}{4}\right\}$ (h) $\left\{\arcsin\frac{3}{4}; \pi-\arcsin\frac{3}{4}\right\}$ (i) $\left\{\arcsin\frac{3}{4}-2\pi; -\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right\}$ (j) $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$ (k) $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right\}$ (l) $\{2\pi\}$ (m) $\left\{\frac{5\pi}{3}\right\}$ (n) $\left\{-\pi; -\frac{3\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}; \pi\right\}$

6. (a) $y=5\sin(2\pi t)$ (b) $5\sin\frac{3\pi}{2}=-5$, tj. úplně dole (c) $5\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (d) poprvé $\frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{1}{5}\doteq 0{,}032\,\mathrm{s}$, podruhé $\frac{1}{2\pi}(\pi-\arcsin\frac{1}{5})\doteq 0{,}468\,\mathrm{s}$, potřetí o 1 s později než poprvé, tj. cca 1,032 s

7. cca 132. den a 240. den