Úloha 1. V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ řešte rovnici

$$2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x.$$

Řešení. Rovnici upravíme do tvaru „něco $\cdot\, x =$ něco“:

$$\begin{aligned} 2xp + p - px &= 3p - 4 + 2x \\ px - 2x &= 2p - 4 \\ (p-2)x &= 2p - 4. \end{aligned}$$

Koeficient u x je $p-2$, což je nulové pro $p = 2$. V tomto případě dostáváme rovnici $0 = 0$, tedy řešením jsou všechna reálná čísla. Je-li $p \neq 2$, můžeme celou rovnici podělit $p-2$ a dostáváme

$$x = \frac{2p-4}{p-2} = \frac{2(p-2)}{p-2} = 2.$$

Výsledky můžeme shrnout v tabulce takto:

$p = 2$	$K = \mathbb{R}$
$p \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	$K = \{2\}$

□

Úloha 2. V závislosti na parametru $k \in \mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{k^2(x-1)}{kx-2} = 2.$$

Řešení. Aby měl zlomek na levé straně smysl, musí být $kx \neq 2$. S touto podmínkou se vyrovnáme na konci řešení, nyní se zbavíme zlomku a budeme pokračovat jako při řešení „obyčejné“ lineární rovnice s parametrem.

$$\begin{aligned} k^2(x-1) &= 2(kx-2) \\ k^2x - 2kx &= k^2 - 4 \\ k(k-2)x &= (k+2)(k-2). \end{aligned}$$

Koeficient u x je $k(k-2)$, což je nulové pro $k = 0$ a $k = 2$. V případě $k = 0$ dostáváme (nepravdivou) rovnici $0 = -4$, rovnice tedy nemá řešení. V případě $k = 2$ máme rovnici $0 = 0$, řešením rovnice $k(k-2)x = (k+2)(k-2)$ jsou tedy všechna reálná čísla; pro určení množiny řešení původní rovnice ještě musíme vyloučit ta x, která porušují podmínku $kx \neq 2$. Jelikož se zabýváme případem $k = 2$, tato podmínka zní $2x \neq 2$, neboli $x \neq 1$. Množinou řešení tedy je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Konečně se podíváme na situaci, kdy k není ani 0, ani 2. V tom případě můžeme celou rovnici dělit $k(k-2)$ a dostáváme

$$x = \frac{(k+2)(k-2)}{k(k-2)} = \frac{k+2}{k}.$$

Musíme ještě ověřit, zda je poté vždy splněna podmínka $kx \neq 2$. Už víme, kolik je v této situaci x, stačí tedy dosadit:

$$\begin{aligned} k \cdot \frac{k+2}{k} &\neq 2 \\ k + 2 &\neq 2 \\ k &\neq 0. \end{aligned}$$

Zde si ovšem všimneme, že do této „větve“ řešení jsme se už dostali s tím, že $k \neq 0$, tedy podmínka pro smysluplnost zlomku je splněna pro všechna $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Zjištěné poznatky shrneme do tabulky:

$k=0$	$K=\emptyset$
$k=2$	$K=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
$k\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$	$K=\left\{\frac{k+2}{k}\right\}$

$\square$

Úloha 3. V závislosti na parametru $p\in\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic

$$3x+2y=6$$
$$px+4y=2p.$$

Řešení. Odečteme dvojnásobek první rovnice od druhé a dostáváme

$$px-6x=2p-12$$

neboli

$$x(p-6)=2(p-6).$$

Koeficient u x je $p-6$, což je nulové pro $p=6$; v tom případě má rovnice tvar $0=0$, řešením této jedné rovnice tedy jsou všechna reálná čísla a řešením původní soustavy jsou tedy ty dvojice reálných čísel $[x;y]$, které splňují první rovnici $3x+2y=6$. Po vyjádření (např.) y máme $y=(6-3x)/2$, jde tedy o dvojice ve tvaru

$$\left[x;\tfrac{6-3x}{2}\right].$$

Pokud je $p\neq 6$, můžeme rovnici dělit $p-6$ a dostáváme

$$x=2.$$

Dopočteme y pomocí vyjádření výše:

$$y=\frac{6-3\cdot 2}{2}=0.$$

Poznatky shrneme v tabulce:

$p=6$	$K=\left\{\left[x;\frac{6-3x}{2}\right];x\in\mathbb{R}\right\}$
$p\in\mathbb{R}\setminus\{6\}$	$K=\{[2;0]\}$

$\square$

Úloha 4. Nalezněte všechny hodnoty parametru $m\in\mathbb{R}$ takové že rovnice

$$mx^2+2mx+m=x+2$$

má právě jedno reálné řešení, a toto řešení nalezněte.

Řešení. Kvadratická rovnice může mít právě jedno reálné řešení ze dvou důvodů: buď je koeficient u kvadratického členu nulový (a jedná se ve skutečnosti o lineární rovnici), nebo je diskriminant roven nule. Koeficient u kvadratického členu je jednoduše m; v případě $m=0$ tedy dostáváme lineární rovnici $x+2=0$ s řešením $x=-2$. Je-li m nenulové, spočteme si diskriminant; pro přehlednost nejprve rovnici přepíšeme tak, aby bylo vidět, co je který koeficient.

$$mx^2+(2m-1)x+(m-2)=0.$$

Máme tedy

$$D=(2m-1)^2-4m(m-2)=4m^2-4m+1-4m^2+8m=4m+1.$$

Diskriminant je tedy nulový pro $m=-1/4$. Pro tuto hodnotu dostáváme rovnici

$$-\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{9}{4}=0$$

neboli (po vynásobení -4 pro přehlednost)

$$x^2+6x+9=0,$$

což má dvojnásobný kořen $x=-3$. $\square$

Úloha 5. Je dána rovnice

$$x + mx + 3mx^2 + 1 = 5x^2$$

s parametrem $m \in \mathbb{R}$.

(a) V závislosti na parametru m určete, kolik má rovnice reálných řešení.

(b) Nalezněte všechny hodnoty m, pro které je $x = 1$ řešením rovnice.

(c) Nalezněte všechny hodnoty m, pro které je součet kořenů rovnice roven 3.

Řešení. Začneme tím, že si rovnici přepíšeme do přehlednějšího tvaru:

$$(3m - 5)x^2 + (m + 1)x + 1 = 0.$$

(a) Stejně jako v předchozí úloze, i zde se nejprve podíváme, kdy je rovnice lineární: to nastane pro $3m - 5 = 0$, neboli $m = 5/3$. V té situaci má rovnice tvar $8x/3 + 1 = 0$, což je nepochybně lineární rovnice s právě jedním řešením. Jinak o počtu řešení rozhodne diskriminant:

$$D = (m + 1)^2 - 4(3m - 5) = m^2 + 2m + 1 - 12m + 20 = m^2 - 10m + 21 = (m - 3)(m - 7).$$

Tento výraz je kladný pro $m \in (-\infty; 3) \cup (7; \infty)$, nulový pro $m \in \{3; 7\}$ a záporný pro $m \in (3; 7)$. V kombinaci s předchozím zjištěním tedy učiníme závěr, že daná rovnice má dvě různá reálná řešení pro $m \in (-\infty; 5/3) \cup (5/3; 3) \cup (7; \infty)$, právě jedno reálné řešení pro $m \in \{5/3; 3; 7\}$ a žádné reálné řešení pro $m \in (3; 7)$.

(b) Aby bylo $x = 1$ řešením rovnice, musí nám po dosazení rovnice platit. Dosadíme tedy a dostáváme

$$\begin{aligned} (3m - 5) \cdot 1^2 + (m + 1) \cdot 1 + 1 &= 0 \\ 4m - 3 &= 0 \\ m &= \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

(c) Součet kořenů kvadratické rovnice je roven mínus koeficientu u lineárního členu, vyděleného koeficientem u kvadratického členu (Vietovy vztahy), dostáváme tedy rovnici

$$\begin{aligned} 3 &= -\tfrac{m+1}{3m-5} \\ 3(3m - 5) &= -(m + 1) \\ 9m - 15 &= -m - 1 \\ 10m &= 14 \\ m &= \tfrac{7}{5}. \end{aligned}$$

□