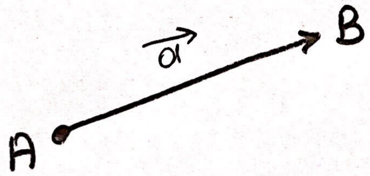
Tel Kafes (Wireframe) Grafikleri

__Vektör:__ Doğrultusu (yönü) ve uzunluğu (büyüklüğü) belirli olan bir doğru parçası.

Başlangıç noktası A, bitim noktası B olan [AB] doğru parçasına yönlü doğru parçası denir. Bu vektör $\overrightarrow{AB}$ ile gösterilir. Ok vektörün yönünü gösterir.



Bir vektör çok çeşitli şekillerde gösterilebilir. En çok kullanılan gösterimler ($\vec{a}$) veya koyu harf (**a**) şeklindeki gösterimlerdir.

Vektörün bileşenleriyle gösteriminde ise genellikle sıralı n-li kullanılır.

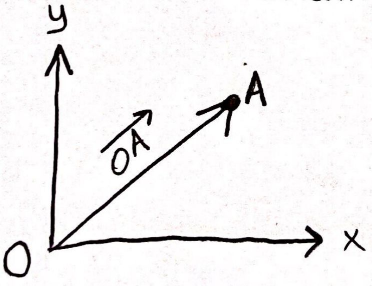
$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Vektörün bileşenleri satır veya sütun dizilimleri şeklinde de yazılabilir.

$$\vec{a} = [\,a_1 \;\; a_2 \;\dots\; a_n\,] \quad \text{ya da} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$\vec{i_1} = (1,0,0,..0)$, $\vec{i_2} = (0,1,0,\dots,0)$, ---, $\vec{i_n} = (0,0,\dots,0,1)$ vektörleri olmak üzere. $\vec{a} = a_1 \vec{i_1} + a_2 \vec{i_2} + \dots + a_n \vec{i_n}$ vektör gösterimi birim vektör gösterimidir.

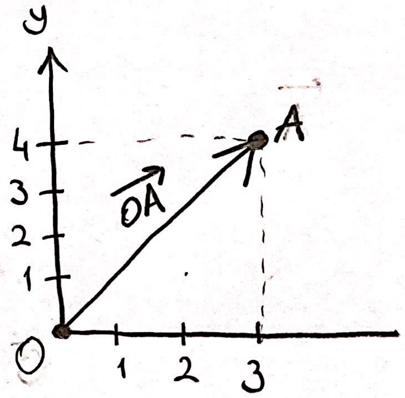
Konum (yer) vektörü



Başlangıç noktası orijin olan vektörlere konum (yer) vektörü denir. Eğer vektör orijinde değilse vektörün uzunluğunu ve yönünü değiştirmeden orijine taşıyabiliriz.

Başlangıç noktası $O=(0,0)$, bitiş noktası $A=(3,4)$ olan iki boyutlu bir vektörü aş. şekilde gösterebiliriz.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A} - \vec{O} = (3,4) - (0,0) = (3,4)$$



Bir vektörün normu: $\vec{A}$ vektörünün normu (uzunluğu) $\|A\|$ veya $|A|$ ile gösterilir.

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad \text{için}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2B için Dönüşümler

- Öteleme (yer değiştirme, taşıma) (translation)
- Döndürme (rotation)
- Ölçeklendirme (scaling)
- Meyillendirme (shearing)
- Yansıtma (reflection)

} Standart dönüşümler

Örneğin $\vec{v} = [x \; y]$ olsun. T bir dönüşüm matrisi olsun.

$$\underbrace{[x \; y]_{1\times2}}_{\text{Konum vektörü}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times2}}_{T \text{ dönüşüm matrisi}} = \underbrace{[\qquad]_{1\times2}}_{\text{Dönüştürülmüş konum vektörü } \vec{v}^*}$$

1) Ölçeklendirme (Scaling)

$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisi olmak üzere a ve d pozitif ve birbirine eşit ve $b=c=0$ olmak üzere ölçeklendirme (dengeli ölçeklendirme) (balanced scaling) için kullanılacağımız matris

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a > 0$$

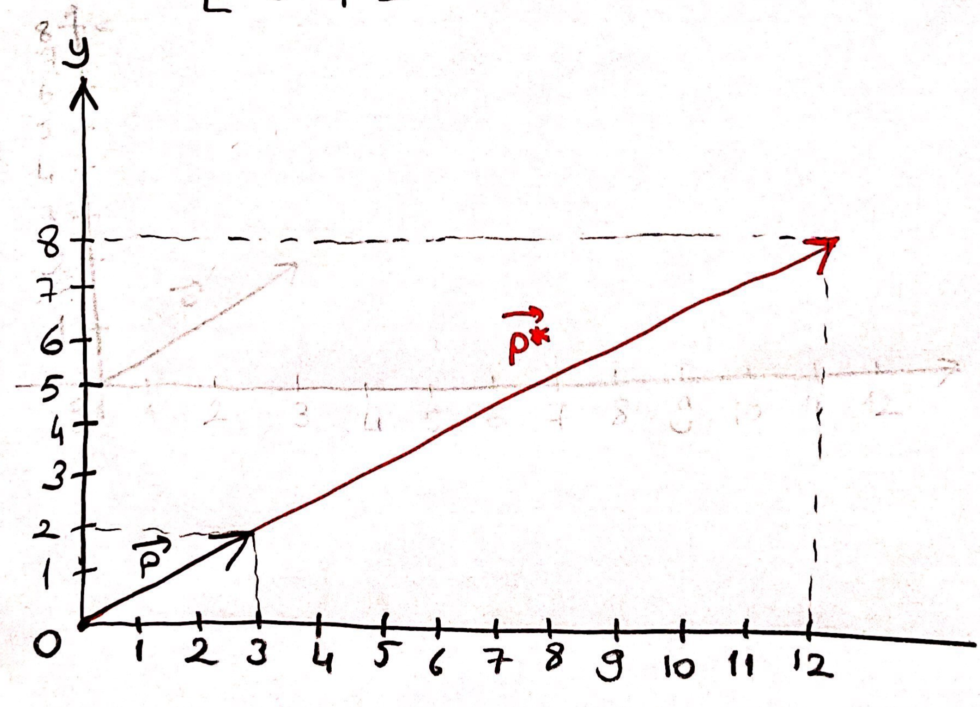
Örneğin; $\vec{p} = (3, 2)$ konum vektörü için

$$(3 \;\; 2) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = (3a \;\; 2a) = \vec{p^*}$$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise konum vektörü değişmez.

$\vec{p} = (3 \;\; 2)$ konum vektörüne $T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisi uygulanırsa;

$$(3 \;\; 2) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = (12 \;\; 8)$$



Örn: $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisinde $b = c = 0$ fakat a ve d farklı pozitif sayılar ise bu dönüşüm etkisi dengelenmemiş ölçeklendirme (unbalanced scaling) oluşturur.

Örn: 1) $[x \; y]$ noktasını x yönünde 2 birim uzatın (ölçekleyin).

$$[x \; y] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [2x \; y]$$

2) $[x \; y]$ noktasını y yönünde $\frac{1}{3}$ birim kısaltın (ölçekleyin).

$$[x \; y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = [x \; \tfrac{1}{3}y]$$

$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ için

$a > 0$ ise x eksenine göre uzatma

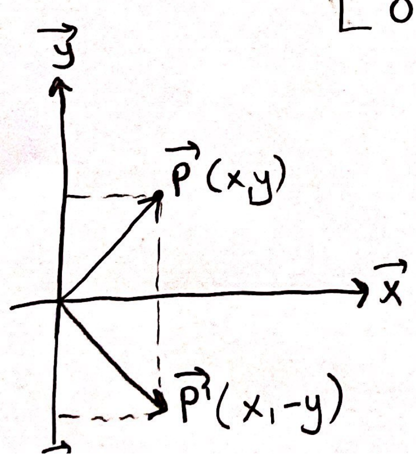
$a < 1$ ise x eksenine göre kısaltma

$d > 0$ ise y eksenine göre uzatma

$d < 1$ ise y eksenine göre kısaltma

2) Yansıtma (Reflection)

2 boyutta bir konum vektörünün x-eksenine göre yansıması $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi ile temsil edilir.



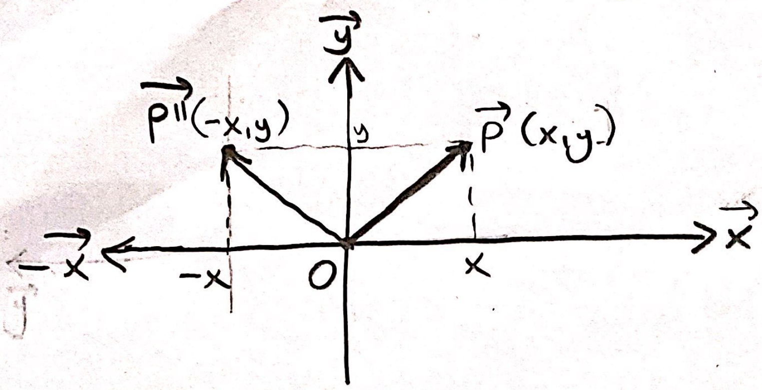
$$[x \; y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [x \; -y]$$

$d = -1$ ise x eksenine göre yansıtma

$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

2D de bir konum vektörünün y- eksenine göre yansıması

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisi ile temsil edilir.

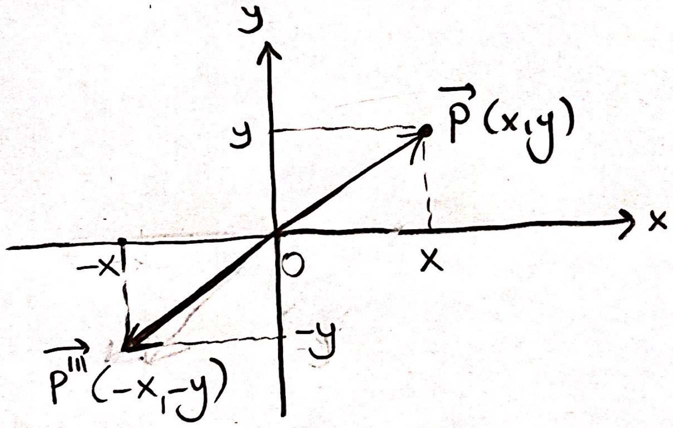


$$[x \; y] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \; y]$$

$a=-1$ ise y eksenine göre yansıtma

2D de orijine göre yansıtma, $a=-1, d=-1$ ise orijine göre yansıtma yapılır.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$[x \; y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [-x \; -y]$$

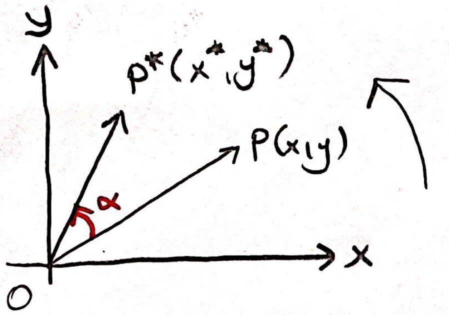
3) Meyillendirme (Shearing)

$[x \; y]$ konum vektörünü x yönünde 3 birim meyillendirmek demek y yi sabit tutup x i taşımak demek

$$[x \; y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = [x+cy \;\; y]$$

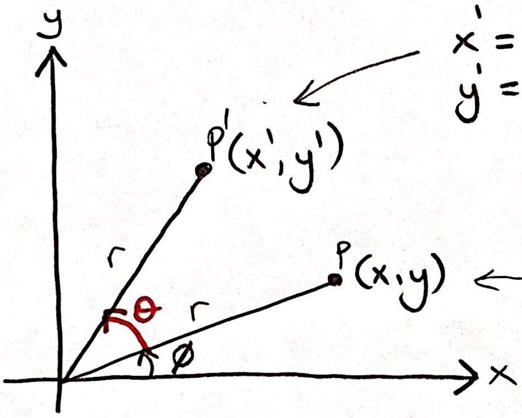
$$[x \; y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [x+3y \;\; y]$$

4) 2D de Döndürme (Rotation)



Pozitif yönde yani saat yönünün tersine döndürme yapıyoruz.

Orijin etrafında pozitif yönde θ açısı kadar döndürüldüğünde,



$$x' = r\cos(\phi+\theta)$$
$$y' = r\sin(\phi+\theta)$$

$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$

$$x' = r\cos(\phi+\theta) = r(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = r\sin(\phi+\theta) = r(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ dönme matrisi

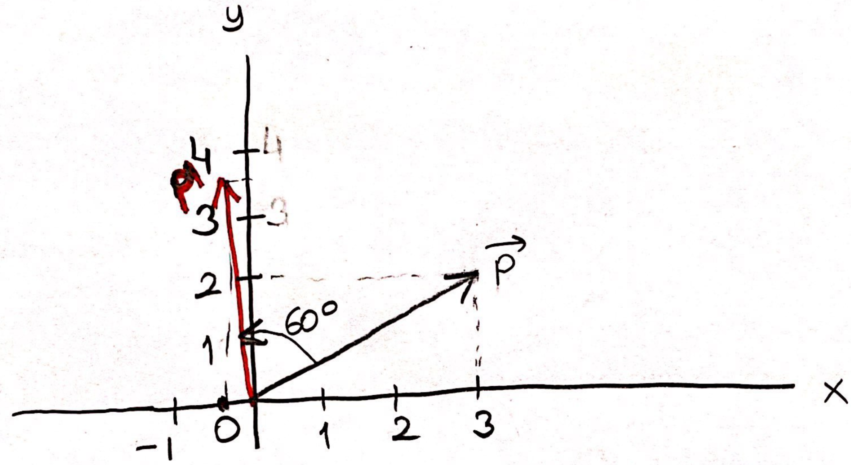
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}_{2\times1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}_{2\times2}}_{\text{Dönme matrisi}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times1}$$

Örn: P [3 2] konum vektörünü pozitif yönde 60° döndürüldüğünde oluşacak olan yeni konum vektörünü bulunuz.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

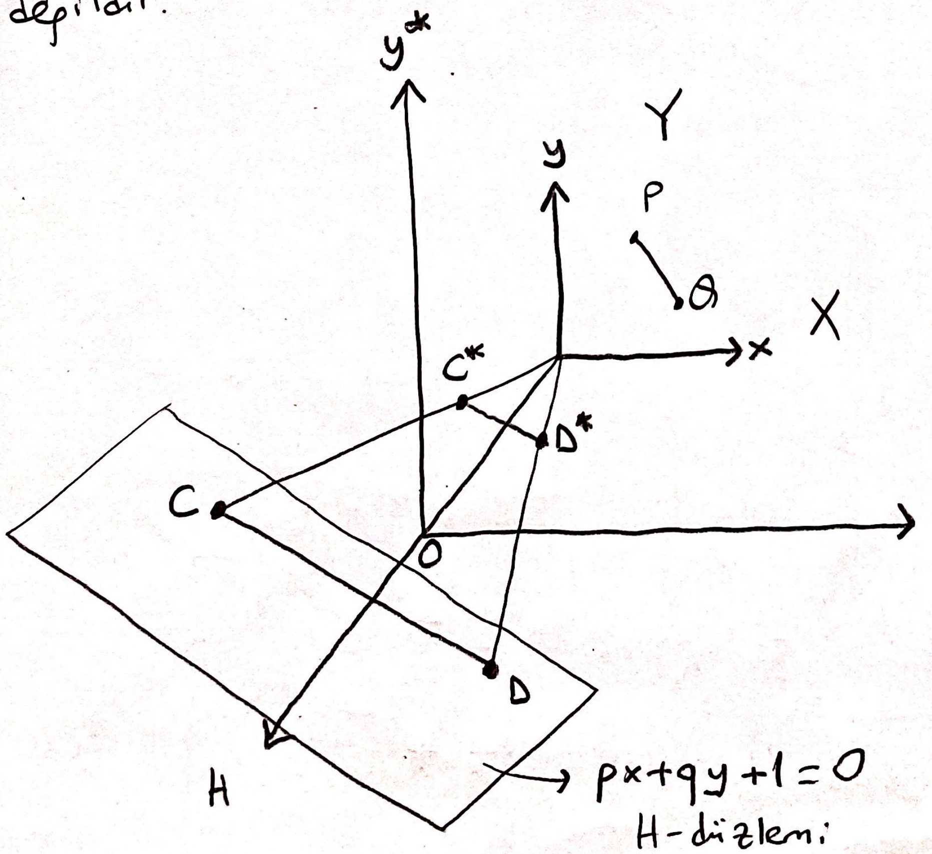
$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 - 2 \cdot 0{,}866 \\ 3 \cdot 0{,}866 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}5 - 1{,}732 \\ 2{,}598 + 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -0{,}23 \\ 3{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



2D de Homojen Koordinatlar

Homojen koordinatlarda bir p noktasının simgelenişi tek değildir.



$p(x,y)$ olsun. $[x\ y\ 1]$

p noktası homojen koordinat sisteminde $[X\ Y\ 1]$ olarak gösterilir. ya da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

P noktası (2,3) olsun. $[x \ y \ 1] = [2 \ 3 \ 1]$

$$[X \ Y \ \overset{\to H}{1}] = [2 \ 3 \ 1]$$

$$[X \ Y \ 1/2] = [1 \ \ 3/2 \ \ 1/2]$$

$$[X \ Y \ 1/4] = [1/2 \ \ 3/4 \ \ 1/4]$$

$$[X \ Y \ 1/8] = [1/4 \ \ 3/8 \ \ 1/8]$$

$$[X \ Y \ 2] = [4 \ \ 6 \ \ 2]$$

$$\vdots$$

H=0 ise p noktası sonsuzda bir nokta temsil eder.

$$[X \ Y \ 0] = [\infty \ \ \infty \ \ \underset{H}{1}]$$

$$\underbrace{[X \ Y \ H]}_{C \text{ noktası}} = \underbrace{[x \ y \ 1]}_{P \text{ noktası}} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to x \\ \to y \\ \to H \end{array} = \underbrace{[x^* \ y^* \ 1]}_{C^* \text{ noktası}}$$

$$X = x$$

$$Y = y$$

$$H = px + qy + 1$$

$$[X \ Y \ H] = [x \ \ y \ \ px+qy+1] = \left[\frac{x}{px+qy+1} \ \ \frac{y}{px+qy+1} \ \ 1\right]$$

5) 2D 'de Öteleme (Yer değiştirme) (Translation)

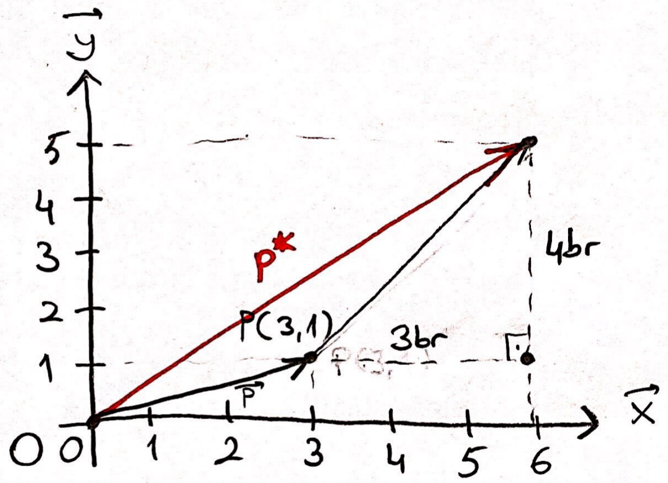
$\vec{P} = \vec{OP} = (x\ y)$ olsun. x yönünde 3 birim , y yönünde 4 birim ötelenmesi denek;

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x+3 \\ y^* &= y+4 \end{aligned}\right\}$$

$\vec{P^*} = [\,x^*\ \ y^*\,]$ satır vektör

$P^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ sütun vektör

Örneğin $\vec{P} = [3\ \ 1]$ olsun. x yönünde 3 birim, y yönünde 4 birim ötelendiğinde $\vec{P}$ vektörü



$$[\,x^*\ \ y^*\,] = [3\ \ 1] + [3\ \ 4]$$
$$= [6\ \ 5]$$

$P = [x,y]$ konum vektörünün;

x yönünde 2 birim

y yönünde 3 birim ötelenmesini istiyoruz.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x+2 \\ y' &= y+3 \end{aligned}\right\}$$ Bunu elde etmek istiyoruz.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sütun vektör ise $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[x \ \ y]$ satır vektör ise $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve

$$[x' \ \ y' \ \ 1] = [x \ \ y \ \ 1] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{T}$$