

תכנון וניתוח אלגוריתמים

הרצאה 11

הגדרות ומושגי יסוד

בגרפים

ד"ר ראובן חוטובלי





הגדרות ומושגי יסוד בגרפים

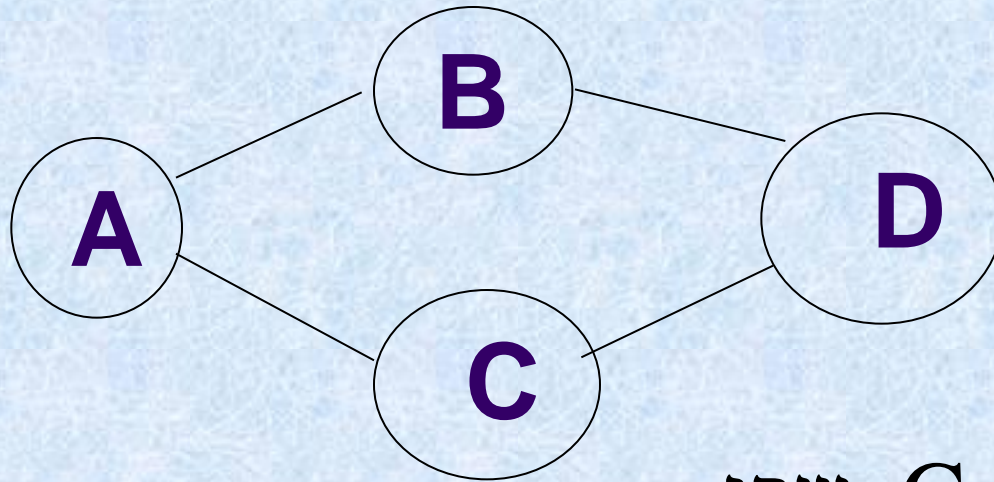
❖ גרף (graph) מורכב מקבוצה סופית לא ריקה של קדקודים (vertices) ומקבוצת צלעות (edges).

❖ נהוג לסמן גרף כדלהלן: $G=(V,E)$

❖ כאשר G מציין גרף,

❖ V מציין את קבוצת הקדקודים

❖ E מציין את קבוצת הצלעות.

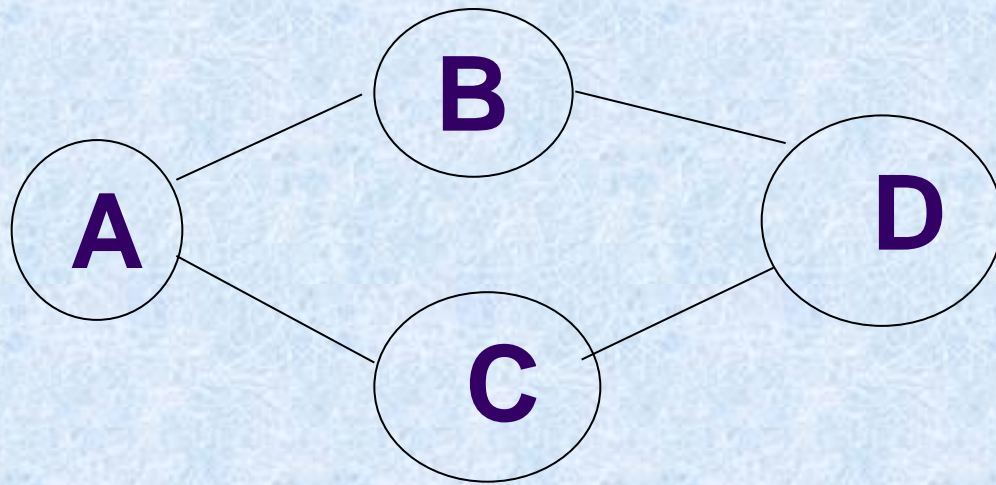


♦ התרשים הבא :

♦ מתאר גרף $G=(V,E)$ שבו

♦ $V=\{A,B,C,D\}$

♦ $E=\{(A,B),(A,C),(B,D),(C,D)\}$



איור

◆ * שים לב שכל קשת, הקו המקשר בין זוג הקדקודים בגרף, מצוינת על ידי זוג קדקודים.

◆ הזוג (A,B) מציין קשת המחברת את הקדקודים A ו-B.

◆ הזוג (A,C) מציין קשת המחברת את הקדקודים A ו-C.

◆ הזוג (B,D) מציין קשת המחברת את הקדקודים B ו-D.

◆ הזוג (C,D) מציין קשת המחברת את הקדקודים C ו-D.

ראינו קו דם כי:

$$V=\{A,B,C,D\}$$

$$E=\{(A,B),(A,C),(B,D),(C,D)\}$$

שימו לב שהזוגות אינם זוגות סדורים, כלומר במקום הזוג (A,B) יכולים לציין (B,A) .

עבור הגרף שבתרשים ניתן להגדיר את E כדלקמן:

$$E=\{(B,A),(A,C),(B,D),(D,C)\}$$

אך ברור כי לא ניתן לשייך ל- E את הזוגות (A,B) וגם (B,A) כי זו אותה קשת ולפי הגדרת הקבוצה כל איבר מופיע בה פעם אחת בלבד.



❖ בנוסף נהוג לסמן גרף גם בצורה אחרת: $G=(N,A)$
כאשר

❖ N מציין את קבוצת הקדקודים (Nodes)

❖ A מציין את קבוצת הקשתות (Arcs).

❖ אין הבדלים בין הסימונים.

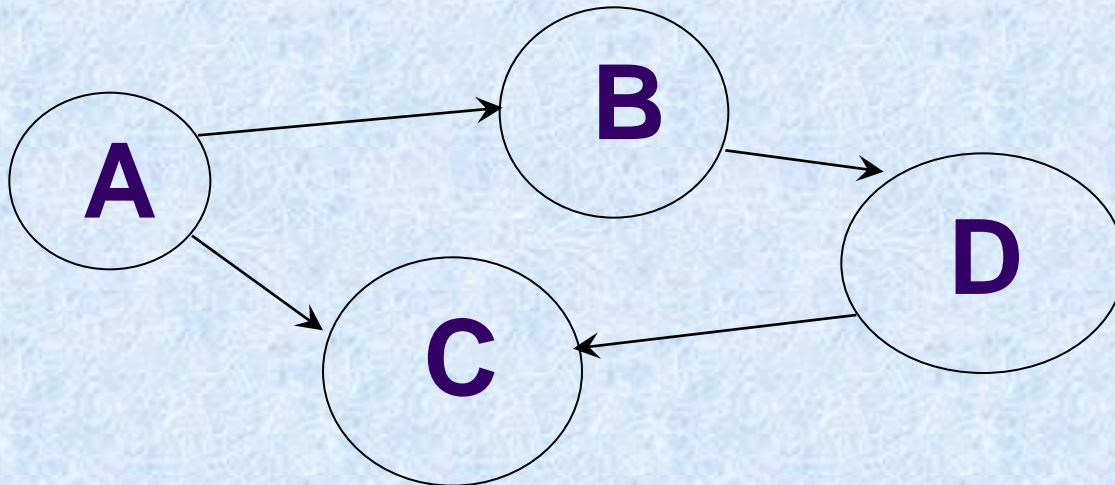
גרף מכוון



גרף מכוון - directed graph – הינו גרף שבו הקשתות מכוונות, המכונה גם קבוצה של זוגות סדורים.

התרשימים הבאים מתארים שני גרפים מכוונים.

גרף 1:



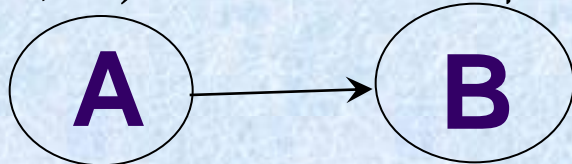


◆ $G=(V,E)$

◆ $V=\{A,B,C,D\}$

◆ $E=\{(A,B),(A,C),(B,D),(D,C)\}$

◆ * שימו לב לזוג סדור אשר מייצג קשת מכוונת (A,B)



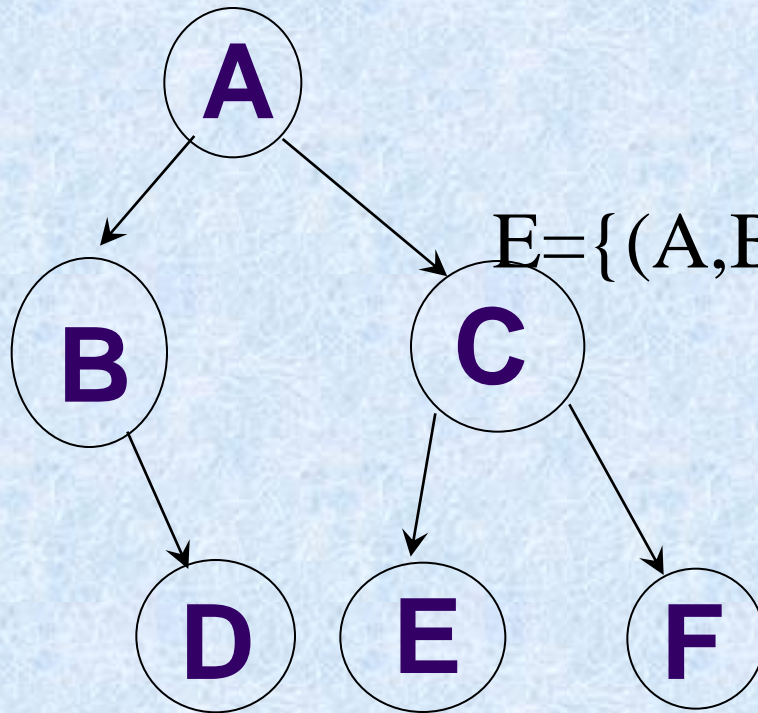
◆ שלהלן:

◆ קשת זו יוצאת מקדקוד A ונכנסת לקדקוד B, על ידי זוג סדור (A,B) .



באופן כללי

- הקדקוד הראשון בזוג הקדקודים הסדור מציין את מקור הקשת (מאיזה קדקוד יוצאת הקשת)
- והקדקוד השני בזוג הקדקודים הסדור מציין את היעד של הקשת (לאיזה קדקוד נכנסת הקשת).



גרף 2: $G=(V,E)$ ♦

$V=\{A,B,C,D,E,F\}$ ♦

$E=\{(A,B),(A,C),(B,D),(C,E),(C,F)\}$ ♦

* שיים לב לכך שכל עץ הינו גרף, אך לא כל גרף הינו עץ. ♦



❖ סימון: נתון גרף $G=(V,E)$.

❖ מספר הקדקודים בגרף מסומן כ- $|V|$

❖ ומספר הקשתות בגרף מסומן כ- $|E|$.

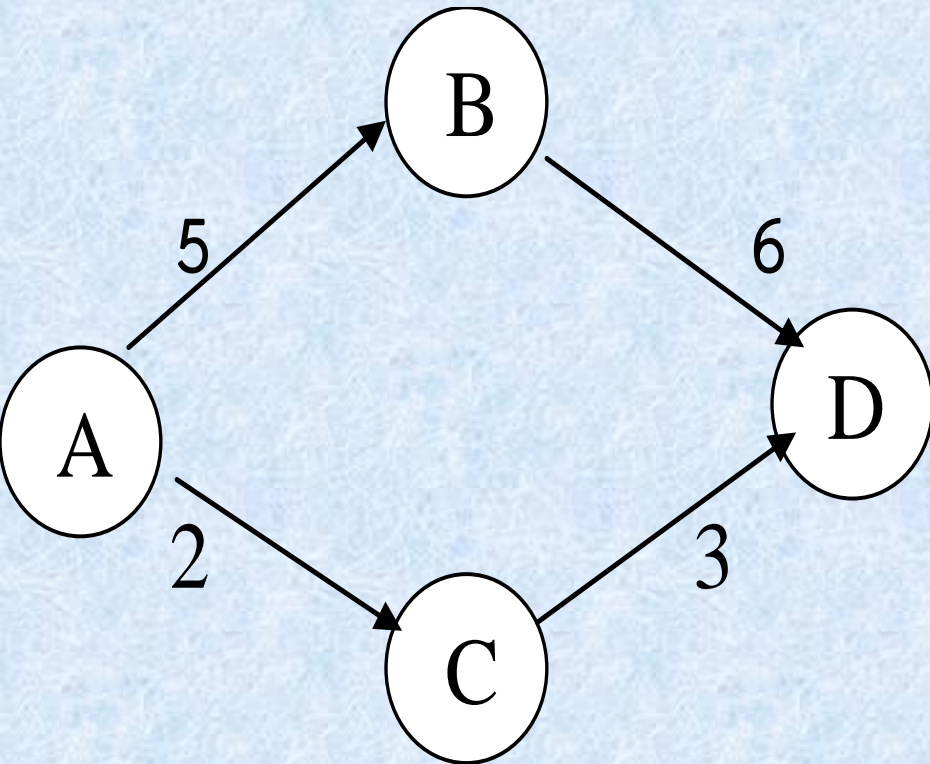
❖ רשת (network) הינה גרף (מכוון/לא מכוון) שבו לכל קשת מיוחס מספר/מספרים.

❖ המספרים המיוחסים לקשת נקרא משקל/ות הקשת (weight).

❖ רשת מכוונה גם כגרף משוקלל (weight graph).



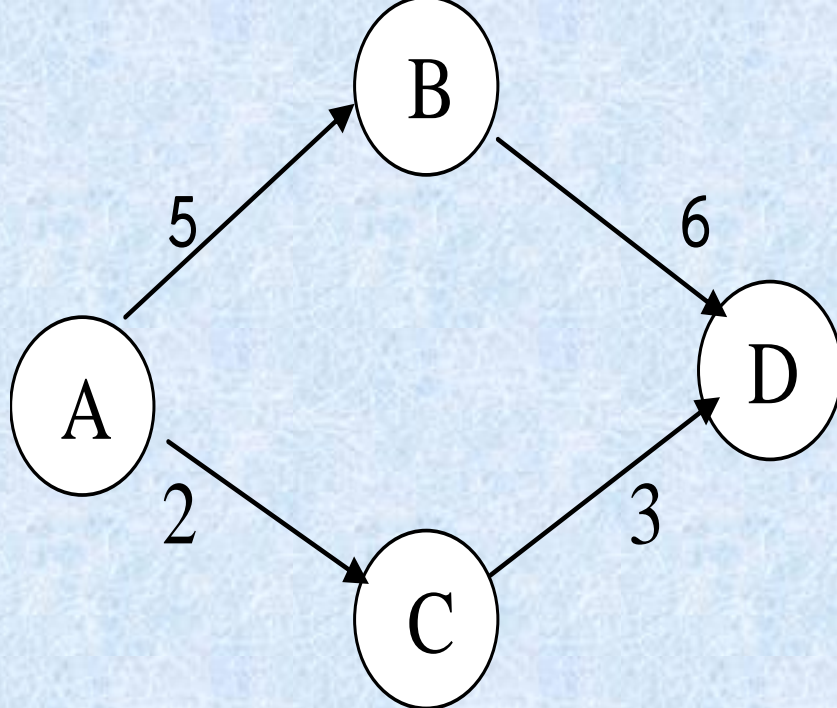
התרשים הבא מתאר רשת:





❖ לכל קשת מיוחסת מספר, אשר יכול לייצג מחיר, מרחק, מקסימום כמות הזרם שניתן להזרים מקדקוד אחד לקדקוד אחר וכ"ו.

❖ צומת a סמוך (או עוקב) (*adjacent*) לקדקוד b
אם יש קשת לא מכוונת בין קדקוד a לקדקוד b או
אם יש קשת מכוונת מקדקוד b לקדקוד a .



בתרשים זה:

❖ קדקוד B סמוך ל קדקוד A מאחר שיש קשת מכוונת מקדקוד A לקדקוד B.

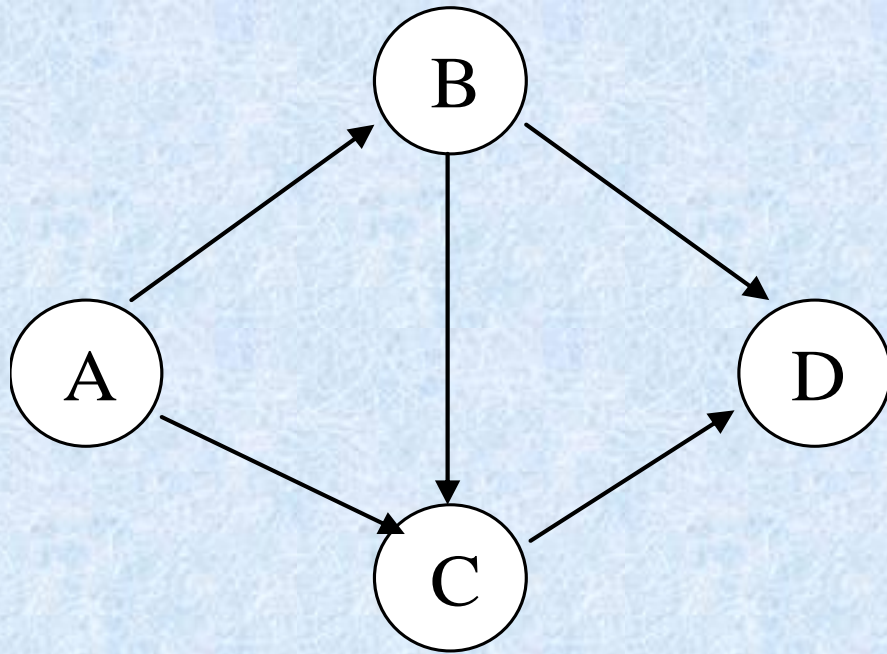
❖ קדקוד C סמוך לקדקוד A מאחר שיש קשת מכוונת מקדקוד A לקדקוד C, וכ"ו.



❖ דרגת הכניסה (indegree) של קדקוד - מספר הקשתות הנכנסות לקדקוד.

❖ דרגת היציאה (outdegree) של קדקוד - מספר הקשתות היוצאות מקדקוד.

❖ דרגה (degree) של קדקוד - מספר הקשתות הנוגעות בו.



❖ בעבור הקדקוד D הדרגה שלו 2,

❖ דרגת הכניסה שלו 2

❖ ודרגת היציאה הינה אפס.

❖ בעבור הקדקוד C הדרגה שלו 3,

❖ דרגת הכניסה שלו 2 ודרגת היציאה שלו היא 1.



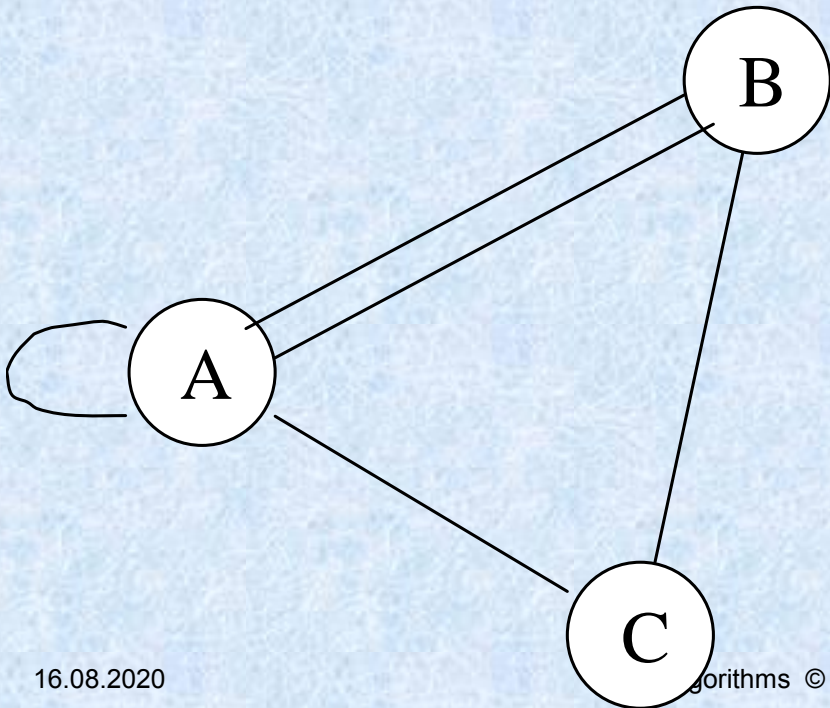
❖ מולטי גרף (multigraph) הינו גרף (מכוון/לא מכוון) בו אנו מרשים יותר מקשת אחת בין שני הקדקודים.

❖ לולאה (loop) הינה קשת מצומת כלשהו V לאותו צומת, כלומר קשת מהצורה (V, V) נקראת לולאה.

❖ גרף פשוט- (simple graph) הינו גרף ללא לולאות ושאינו מולטי גרף.



❖ בתרשים הבא בין הקדקודים A ו- B יש יותר מקשת אחת, לכן הגרף נקרא מולטיגרף. כמו כן בגרף זה ישנה לולאה (A,A) :



הגדרת מסלול



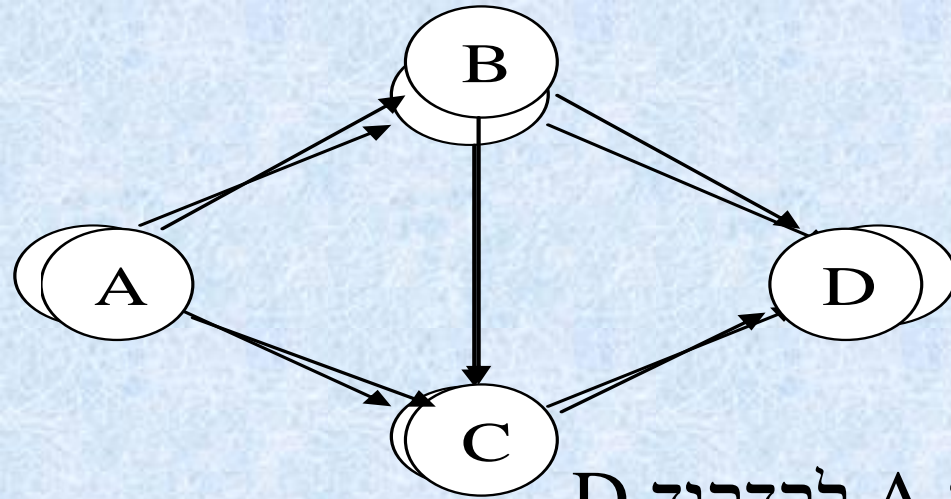
❖ הערה: מעתה נדבר על גרפים פשוטים, אלא אם יצויין במפורש אחרת!!

❖ מסלול (path) באורך k מקדקוד a לקדקוד b הינה סידרה של $(k+1)$ קדקודים בגרף:

$$n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 \dots n_i n_{i+1} \dots n_k n_{k+1}$$

❖ כך שלכל $1 \leq i \leq k$ קדקוד n_{i+1} סמוך לקדקוד n_i בגרף ו- $n_1 = a$, $n_{k+1} = b$.

באיור שלהלן:



◆ קיים מסלול באורך 3 מקדקוד A לקדקוד D.

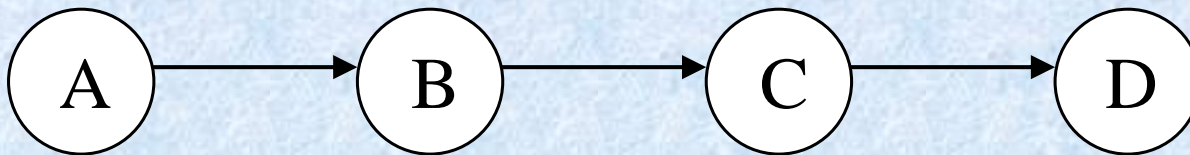
◆ מאחר שישנה סידרה של 4 קדקודים A,B,C,D

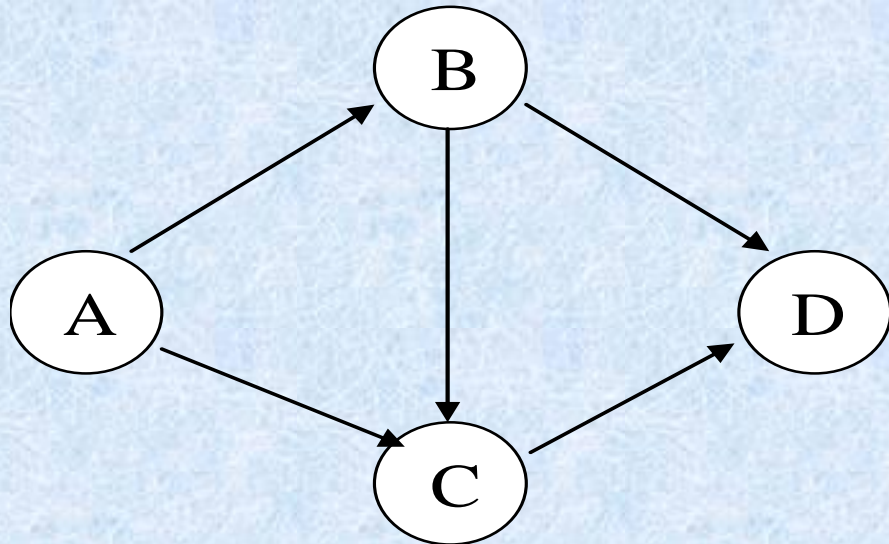
◆ וישנה קשת מקדקוד A לקדקוד B

◆ וישנה קשת מקדקוד B לקדקוד C

◆ וישנה קשת מקדקוד C לקדקוד D.

◆ תיאור המסלול:





◆ הערה: קיים גם מסלול באורך 2 מקדקוד A לקדקוד D. מהו?

◆ כלומר מקדקוד לקדקוד יכולים להיות כמה מסלולים באורכים שונים.

◆ קדקוד נשיג: קדקוד b יקרא נשיג (להשיג) מקדקוד a בגרף

אם קיים מסלול באורך כלשהו בגרף מקדקוד a לקדקוד b.

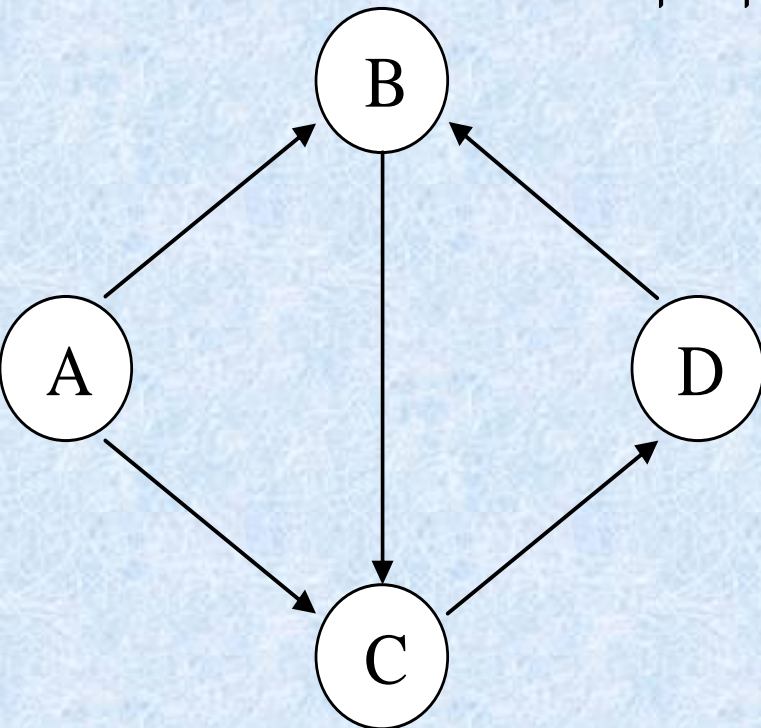
◆ בתרשים שמעלה, לדוגמה, קדקוד D נשיג מקדקוד A, מאחר

שיש מסלול באורך 3 למשל מקדקוד A לקדקוד D.



❖ מעגל (cycle) - מסלול בגרף מקדקוד כלשהו לעצמו.

❖ בתרשים הבא:



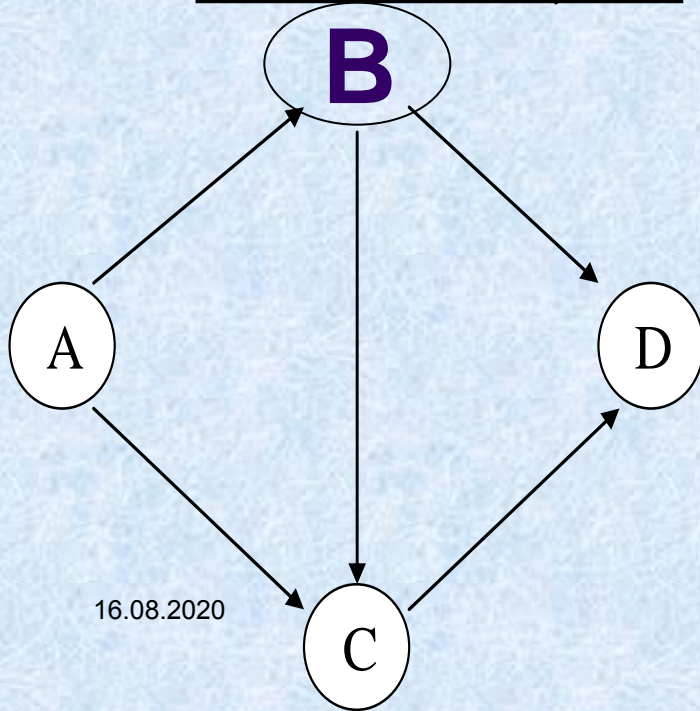
❖ יש מעגל מקדקוד B ל-B, והמסלול הינו: $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$.



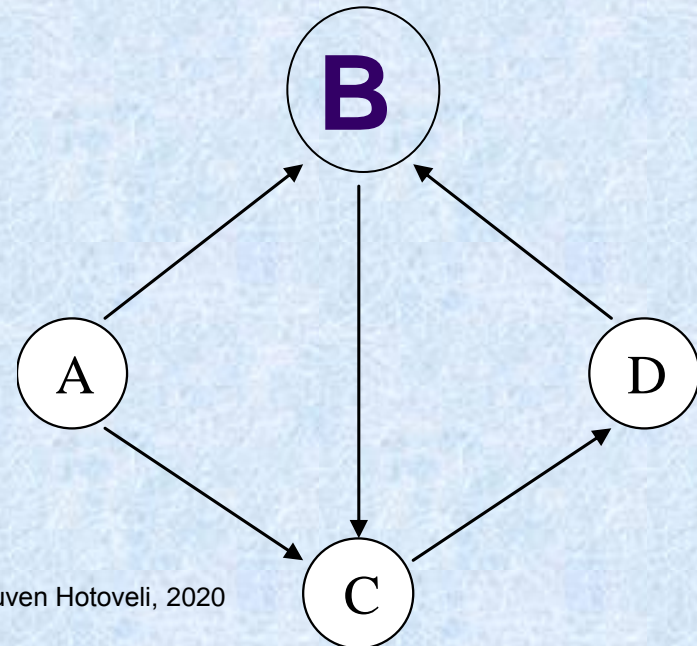
גרף מעגלי

❖ גרף מעגלי (cycle graph) - הינו גרף שבו לפחות מעגל אחד, אחרת הגרף נקרא לא מעגלי (acycle).

דוגמא לגרף לא מעגלי:



❖ דוגמא לגרף מעגלי:





❖ מסלול פשוט (simple path) – הינו מסלול בו אף קשת של הגרף לא מופיעה יותר מפעם אחת.

❖ באופן אנלוגי כך ניתן להגדיר גם מעגל פשוט.

❖ הערה:

❖ מעתה נדבר על מסלולים (מעגלים) פשוטים, אלא אם יצויין במפורש אחרת!!!

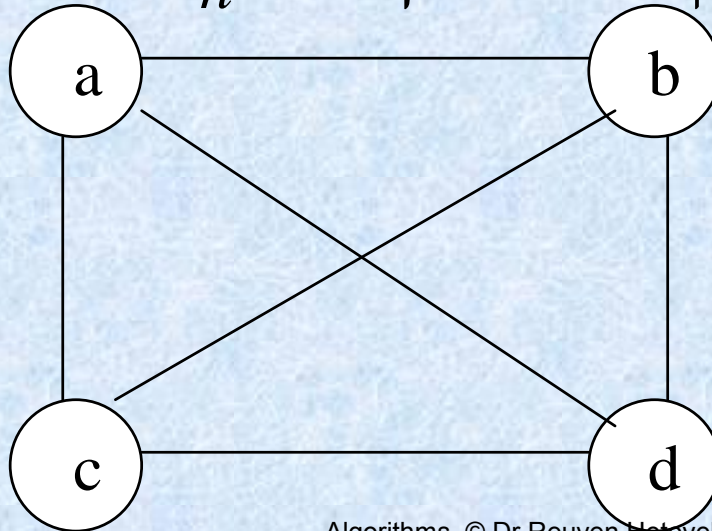
הגדרת גרף שלם



❖ גרף שלם (או מלא) (Complete graph) – הינו גרף שבו כל קדקוד מחובר לשאר קדקודי הגרף.

❖ סימון:

גרף מלא שבו n קדקודים יסומן ב- k_n .
דוגמא ל- K_4





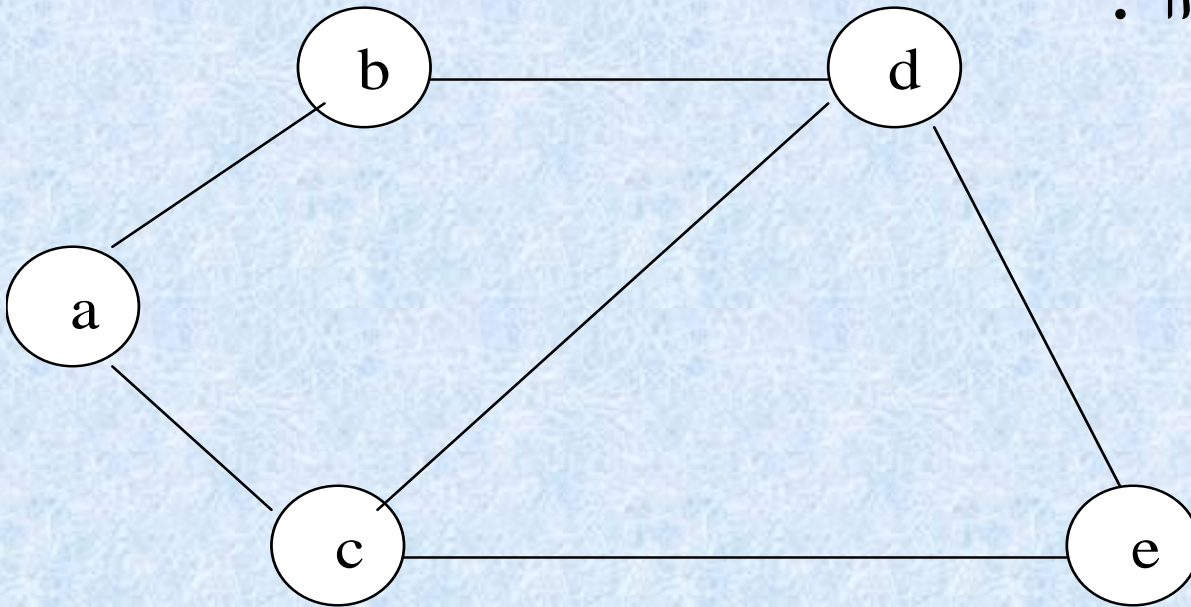
הגדרת רכיב קשיר

- ❖ רכיב קשיר (Connected Complete) – זוהי קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף לא מכוון שבה יש מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף. קדקוד בודד ללא שכנים יקרא גם כן רכיב קשיר.
- ❖ גרף קשיר (Connected graph) – מכונה גם כ"גרף מחובר" הינו גרף לא מכוון בעל רכיב קשיר אחד בלבד, כלומר קיים מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף.



דוגמת גרף קשיר

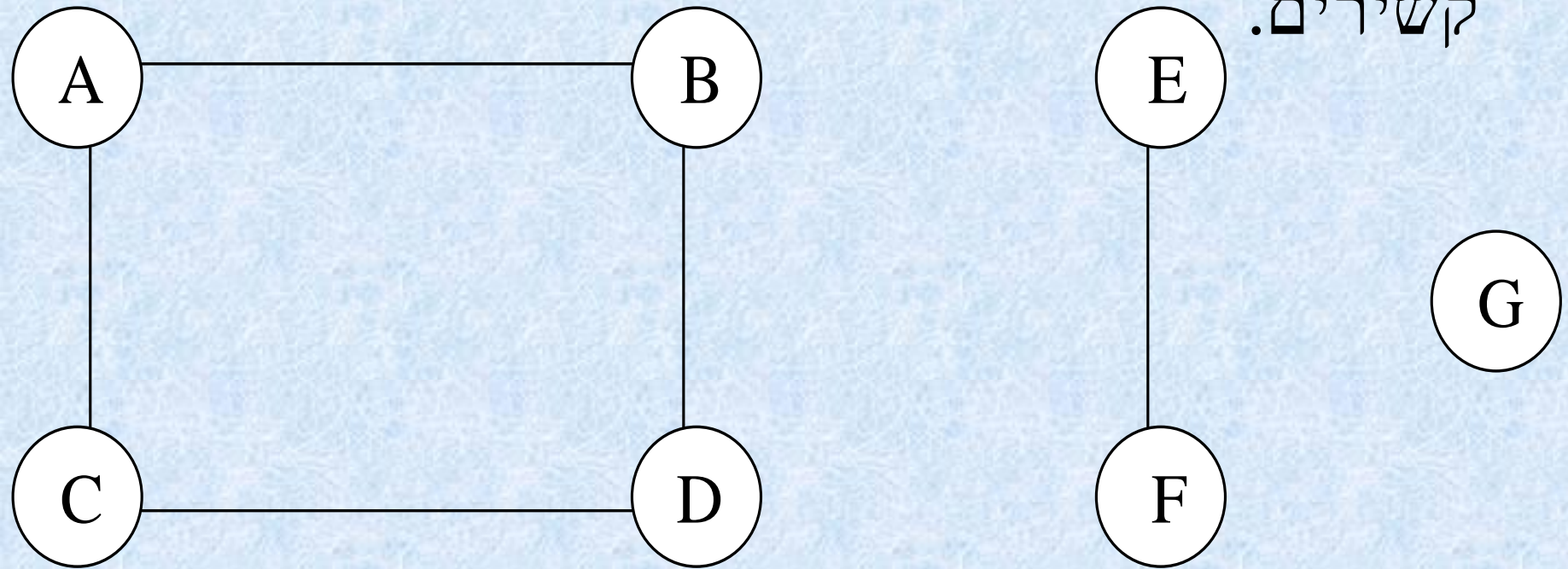
❖ דוגמה 1: דוגמא זאת מתארת גרף שבו רכיב קשיר אחד $\{a,b,c,d,e\}$ מאחר ומכל קדקוד קיים מסלול לכל קדקוד אחר.

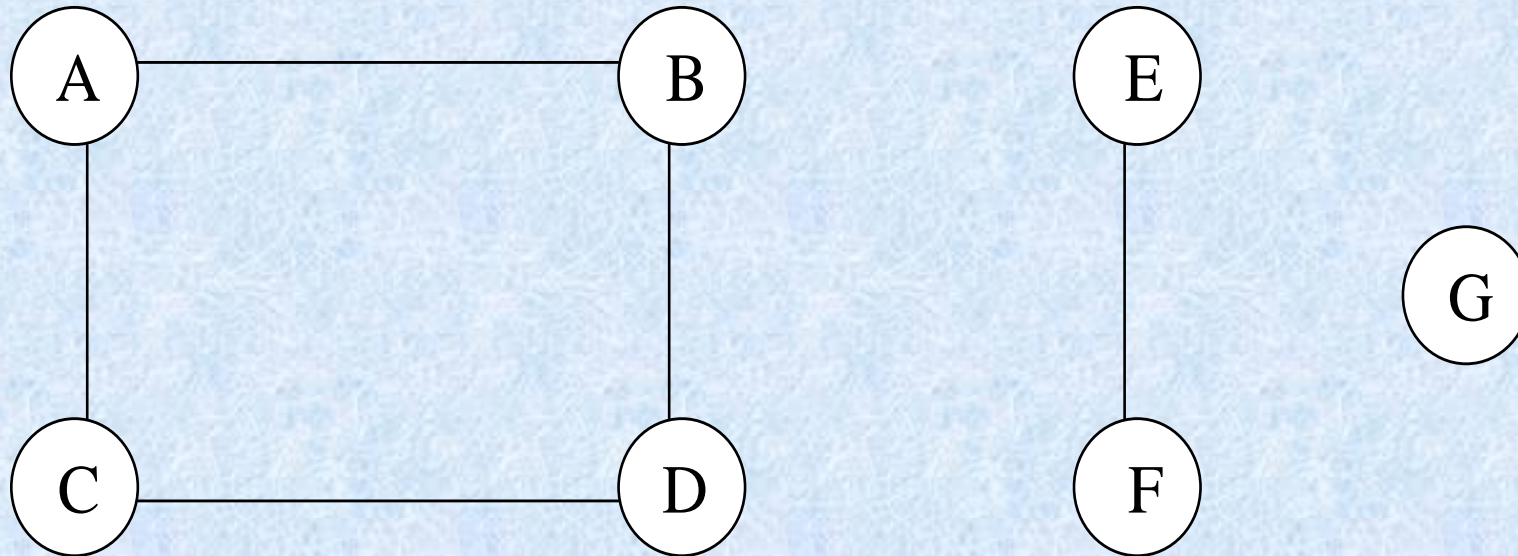




דוגמת גרף לא קשיר

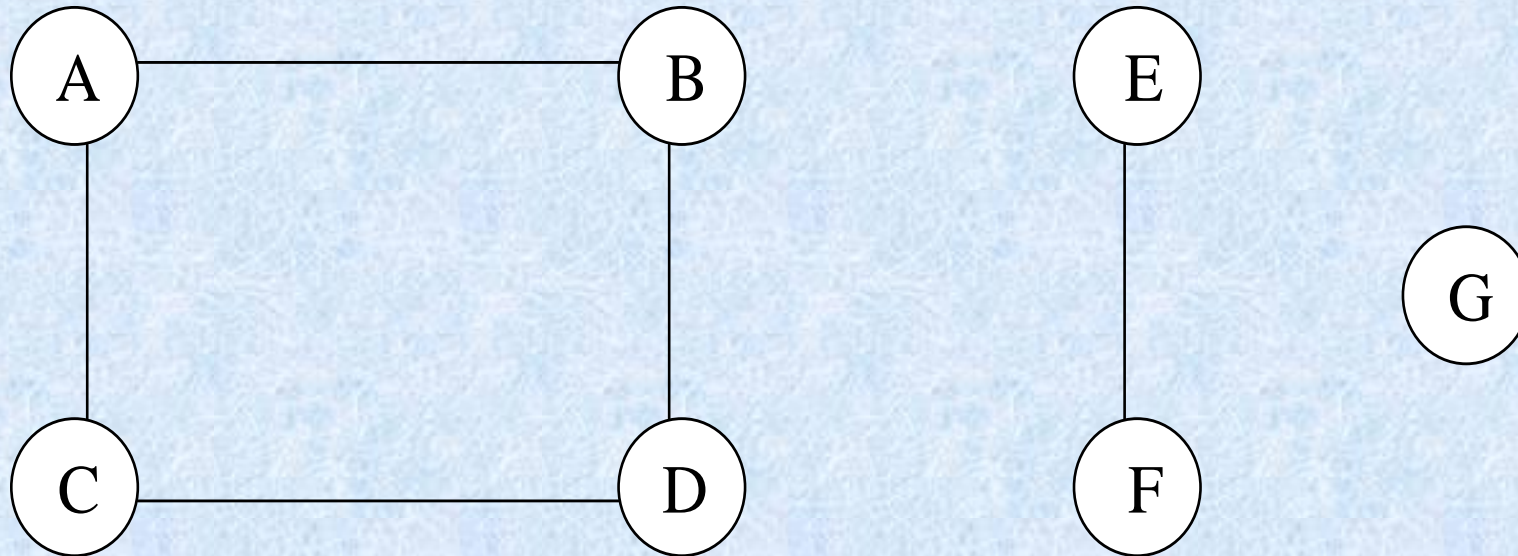
דוגמה 2: תרשים זה מתאר גרף שבו 3 רכיבים קשירים.



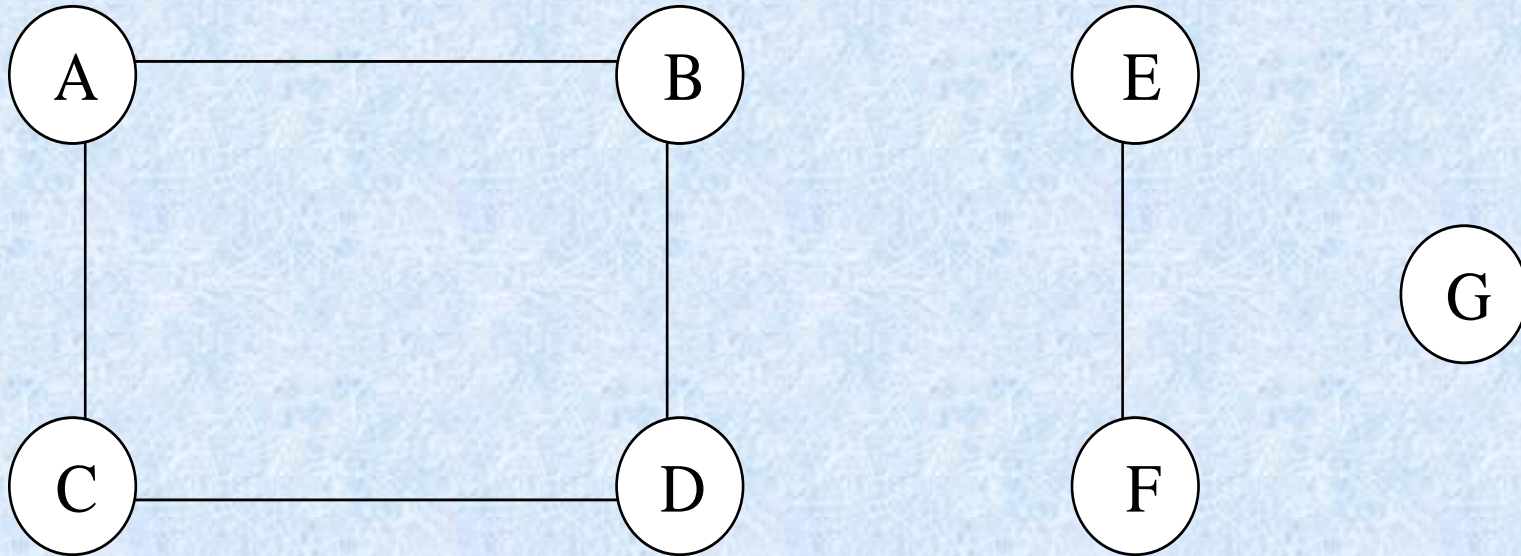


❖ רכיב קשיר אחד הינו קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף והיא: $\{A, B, C, D\}$, מאחר שבקבוצה זו יש מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף.

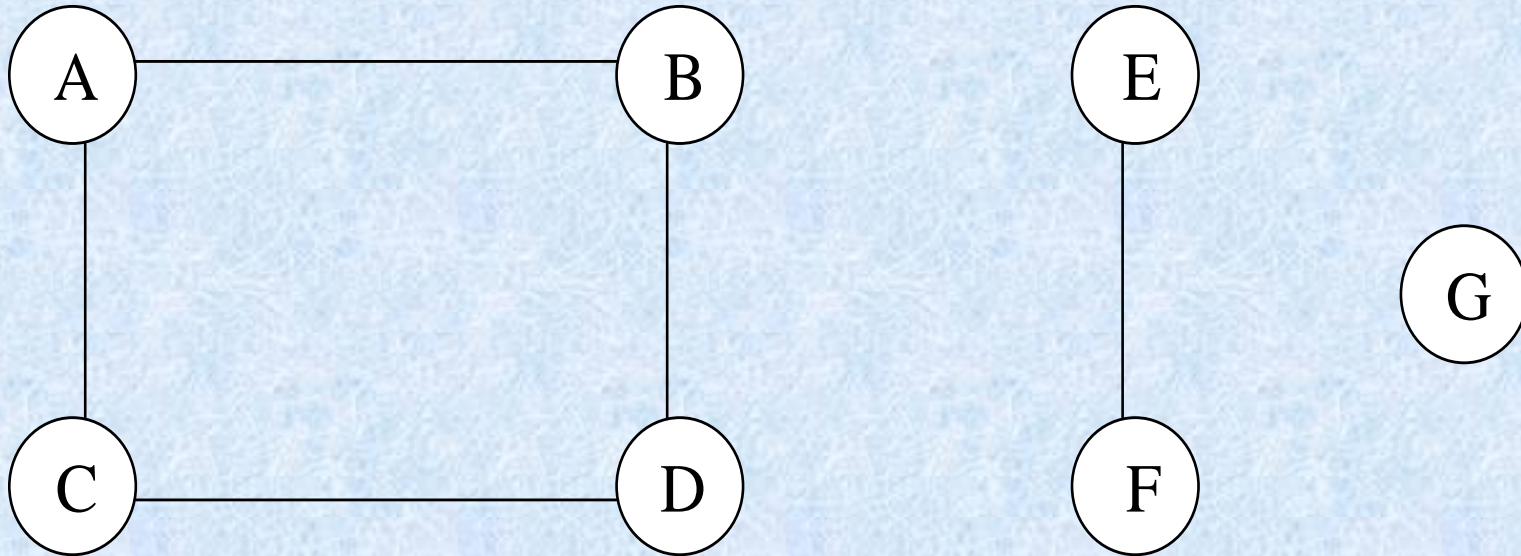
❖ לקבוצה זו לא ניתן לצרף אף אחד מהקדקודים E, F, G מאחר שלדוגמה אין מסלול מקדקוד A ל- E או ל- F או ל- G .



❖ רכיב קשיר שני הינו קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף והיא: $\{E, F\}$.



❖ רכיב קשיר שלישי הינו: $\{G\}$, כיוון שעל פי ההגדרה קדקוד בודד יכול להיקרא גם כן רכיב קשיר, בתנאי שקבוצה זו הינה מקסימלית, כלומר בלתי אפשרי להוסיף לקבוצה זו עוד קדקודים בגרף כך שבקבוצה החדשה שתקבל יהיה קיים מסלול בין כל שני קדקודים בקבוצה.



❖ סופית, בתרשים ישנם 3 רכיבים קשירים והם:

$\{A, B, C, D\}$ ❖

$\{E, F\}$ ❖

$\{G\}$ ❖



רכיב קשיר מכוון בחוזקה (רק"ח)

(Strongly Connected directed graph)

◆ הינה קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף מכוון שבו יש מסלול פשוט ומכוון בין כל שני קדקודים בגרף.

◆ קדקוד בודד ללא שכנים יקרא גם רכיב קשיר מכוון בחוזקה

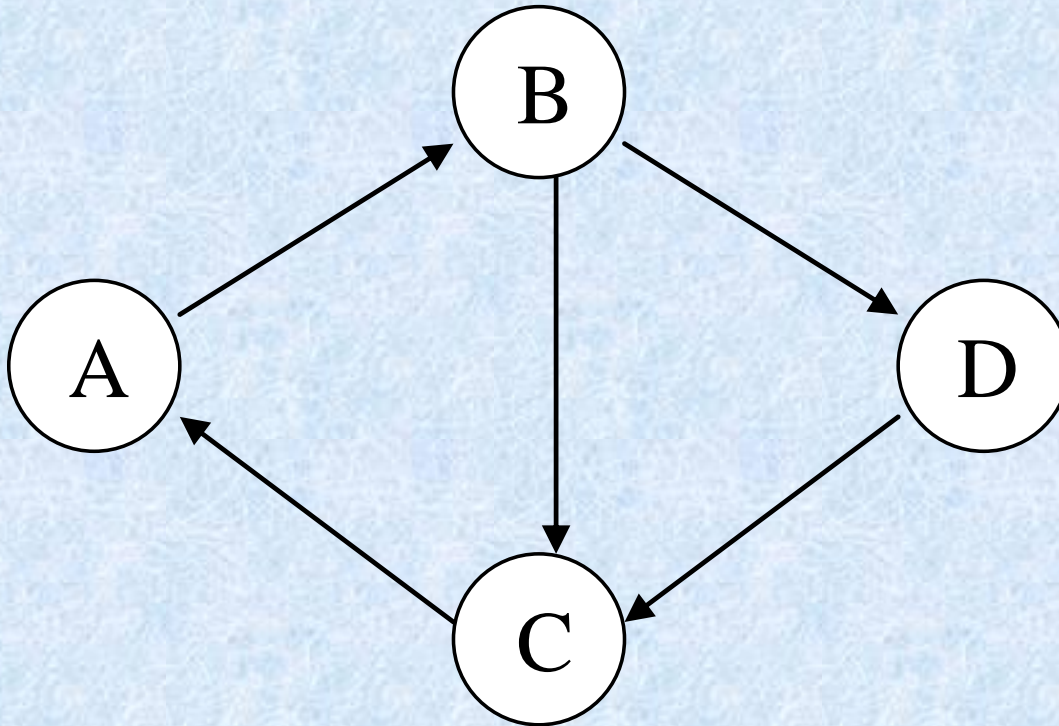
גרף קשיר היטב:

◆ גרף מכוון ייקרא קשיר היטב אם יש בו רק"ח אחד בלבד.



דוגמת גרף קשיר היטב

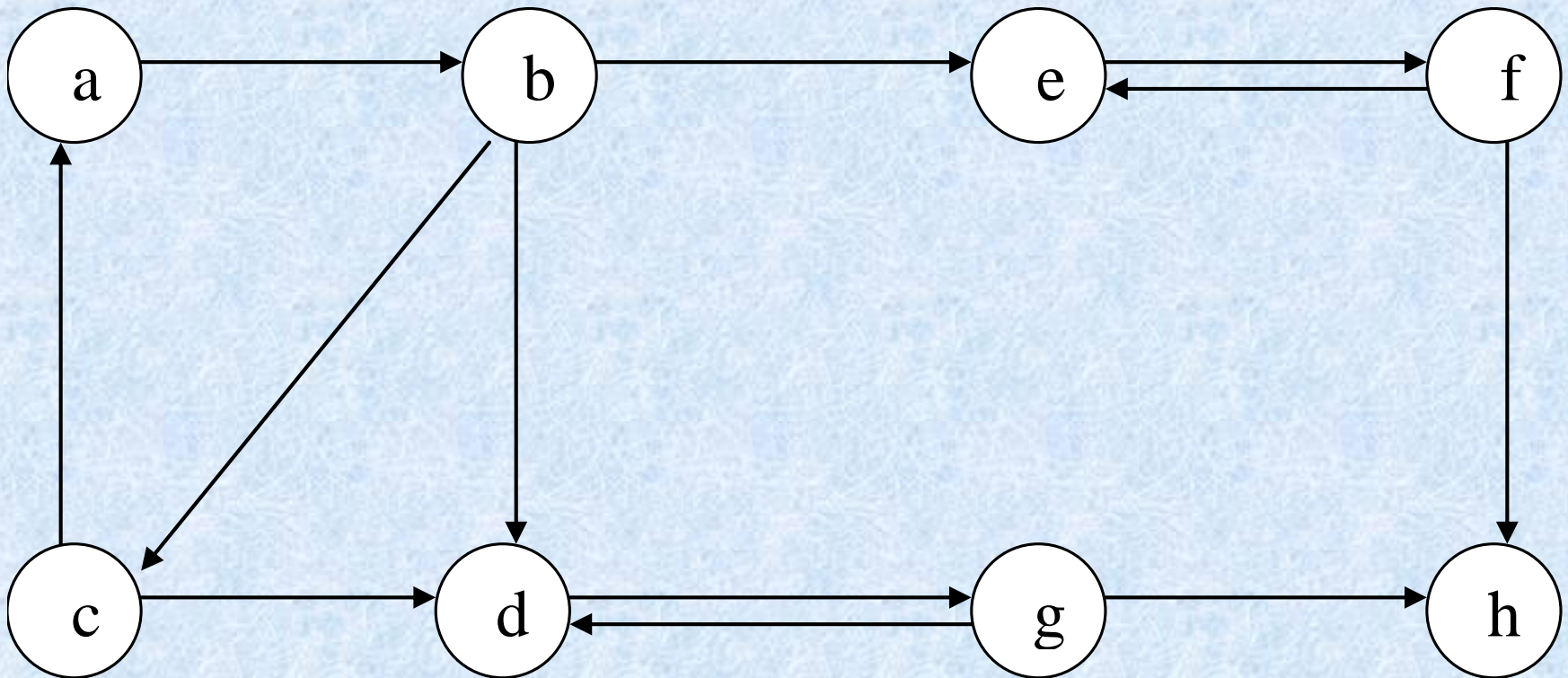
❖ בגרף הבא יש מסלול מכוון מכל קדקוד לכל קדקוד אחר בגרף.

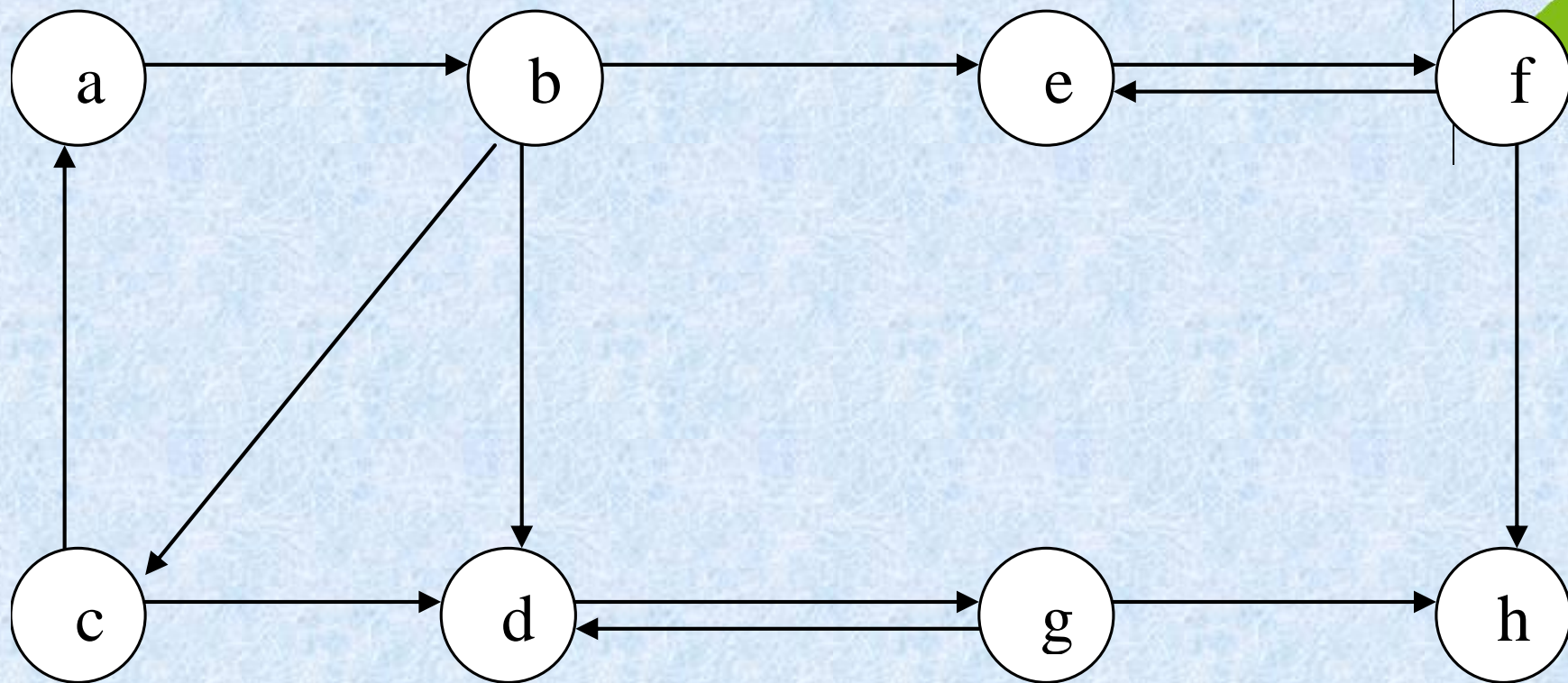




דוגמת גרף קשיר היטב

♦ התרשים הבא מתאר גרף מכוון שבו 4 רכיבי קשירות חזקה.





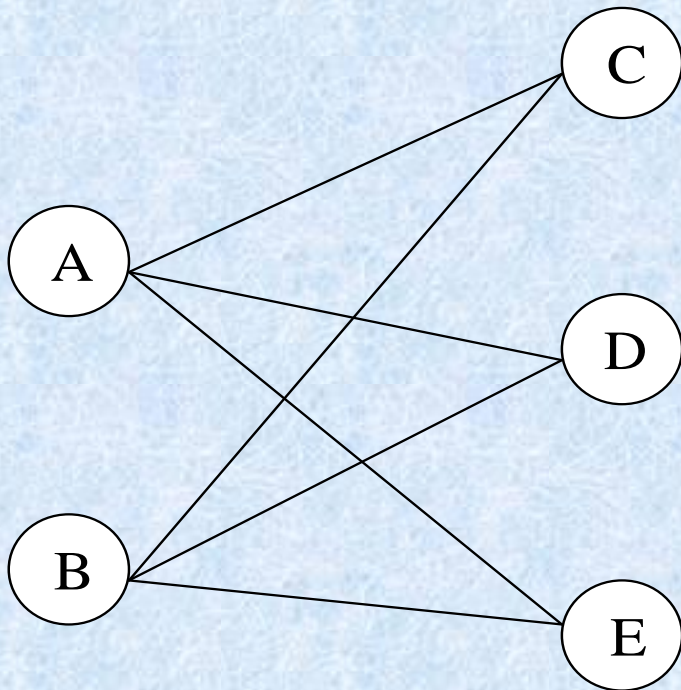
הרק"ח ים הם:

$\{d,g\}$ $\{e,f\}$ $\{h\}$ $\{a,b,c\}$

הגדרת גרף דו צדדי



דוגמה לגרף דו צדדי



גרף דו-צדדי – bipartite

(graph) הינו גרף שבו קבוצת הקדקודים מתחלקת לשתי

קבוצות זרות $V = V_1 \cup V_2$

כך ש: V_1 ו- V_2 קבוצות

זרות באופן שאם $x, y \in V_1$

או $x, y \in V_2$ אז לא קיימת

קשת בין x ו- y . נהוג לסמן גרף

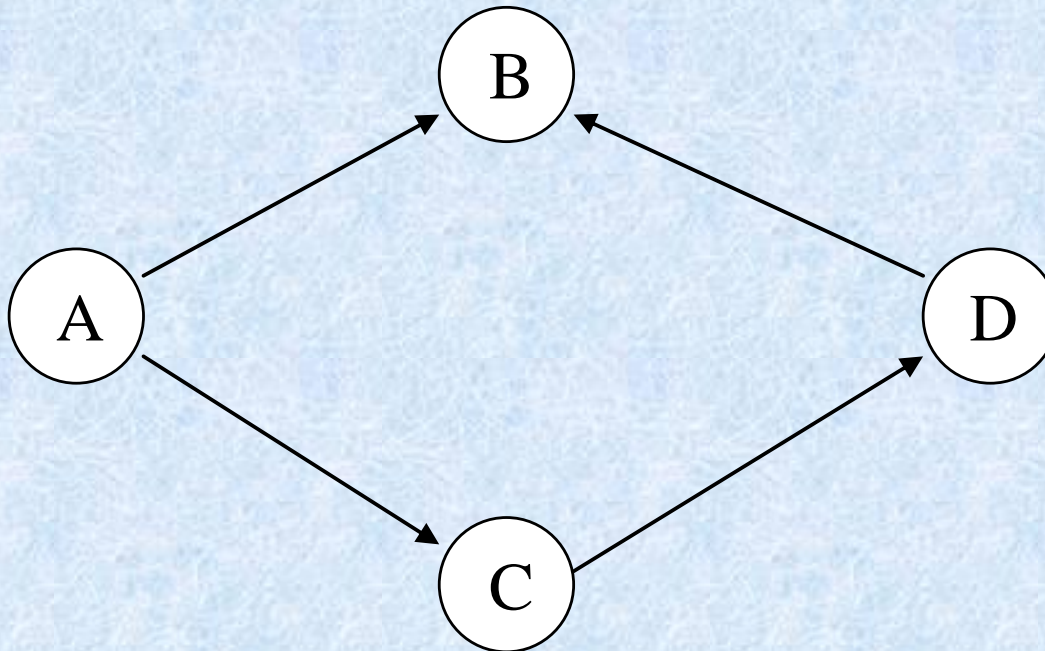
דו-צדדי על ידי $G = (V_1, V_2, E)$



דוגמת גרף דו-צדדי

♦ התרשים הבא מתאר גרף דו-צדדי:

♦ בגרף זה $V_1 = \{A, D\}$ ו- $V_2 = \{B, C\}$





- ❖ קשתות בגרף זה יוצאות מקדקוד כלשהו השייך ל V_1 אל קדקוד אחר השייך ל V_2 או להיפך.
- ❖ אין קשתות מקדקוד אחד השייך ל V_1 לקדקוד אחר השייך ל V_1 . כנ"ל לגבי V_2 .
- ❖ הערה: גרף דו צדדי יכול להיות גרף מכוון או גרף לא מכוון.



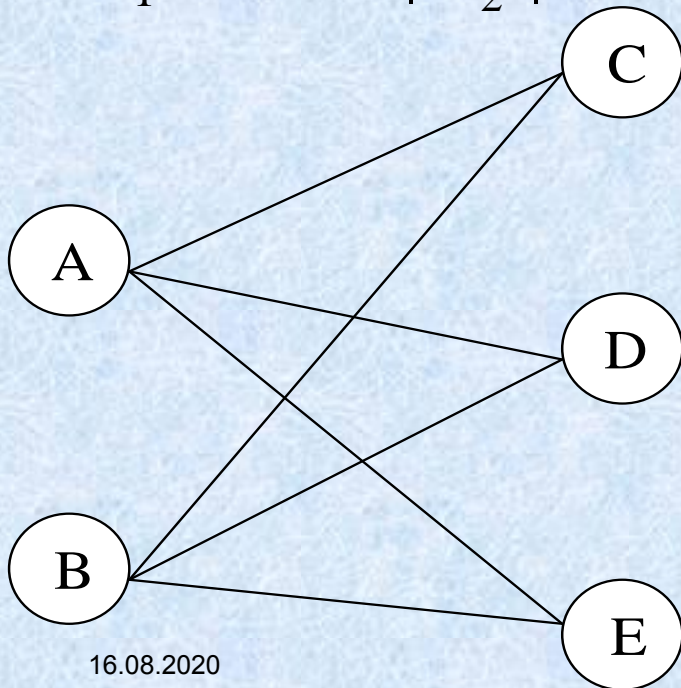
◆ גרף דו-צדדי מלא – הינו גרף דו-צדדי $G = (V_1, V_2, E)$ בו

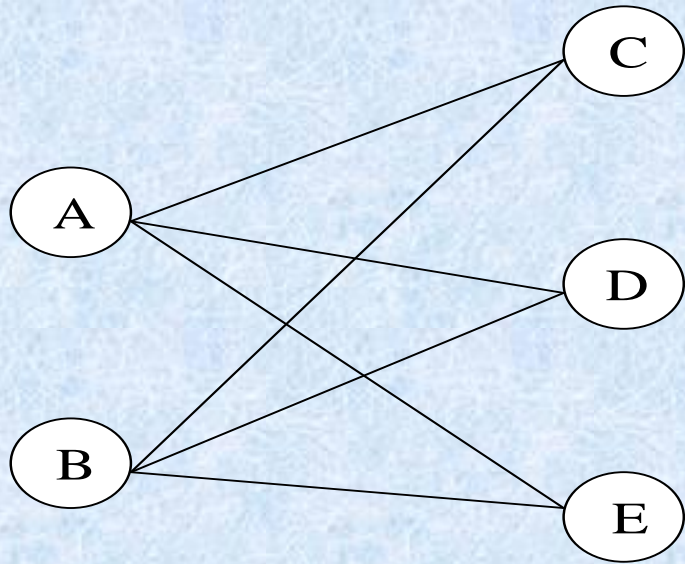
לכל $x \in V_1$ ולכל $y \in V_2$ קיימת קשת $(x, y) \in E$.

◆ גרף זה יסומן על ידי K_{nm} כאשר $|V_2| = m$ ו $|V_1| = n$

◆ התרשים הבא

מתאר את K_{23} :





$$V_1 = \{A, B\} \quad \text{ו} \quad V_2 = \{C, D, E\}$$

❖ מקדקוד A ישנה קשת לכל קדקוד אחר השייך ל- V_2
 ומכל קדקוד השייך ל- V_2 ישנה קשת לקדקוד A.

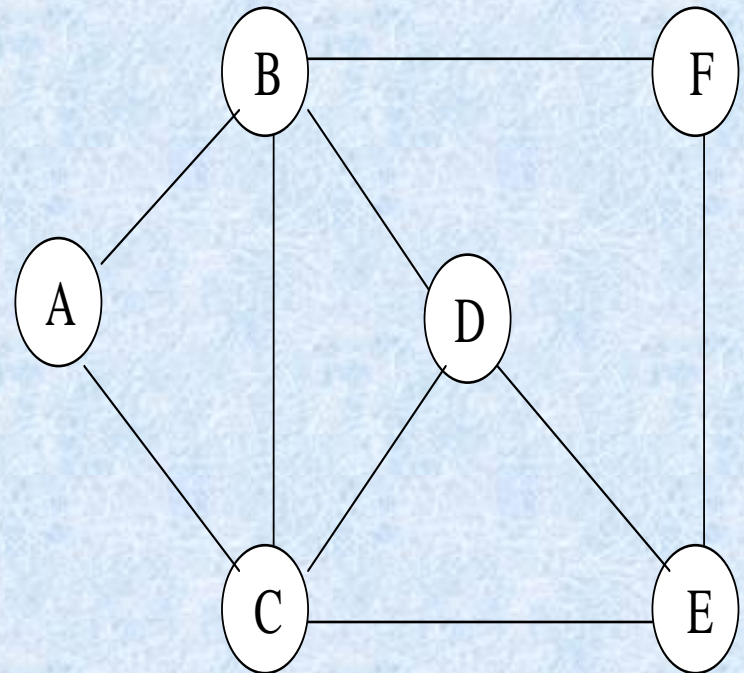
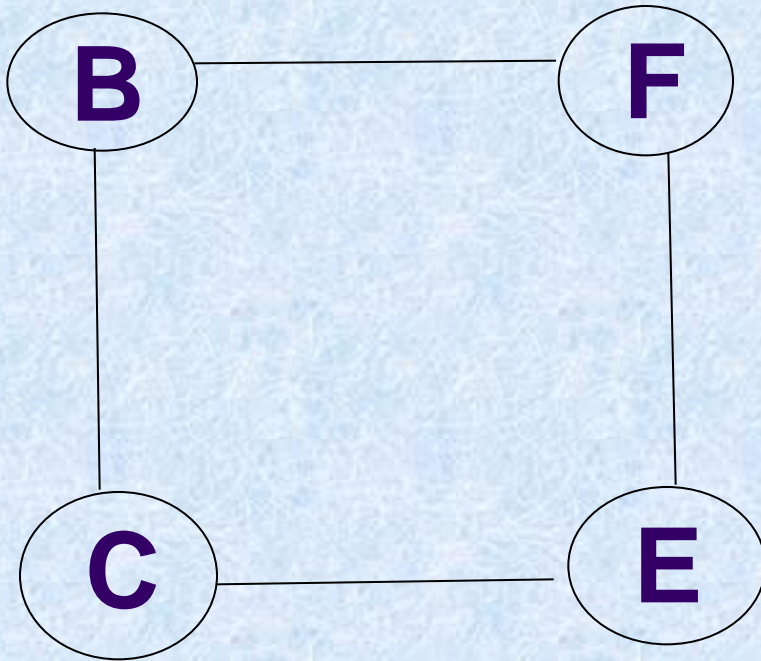
❖ מקדקוד B ישנה קשת בינו לבין כל קדקוד אחר
 השייך ל- V_2 .



❖ תת גרף (Sub-graph) של $G=(V,E)$ הינו גרף
 $G=(V',E')$ כך ש $V' \subseteq V$ ו $E' \subseteq E$.



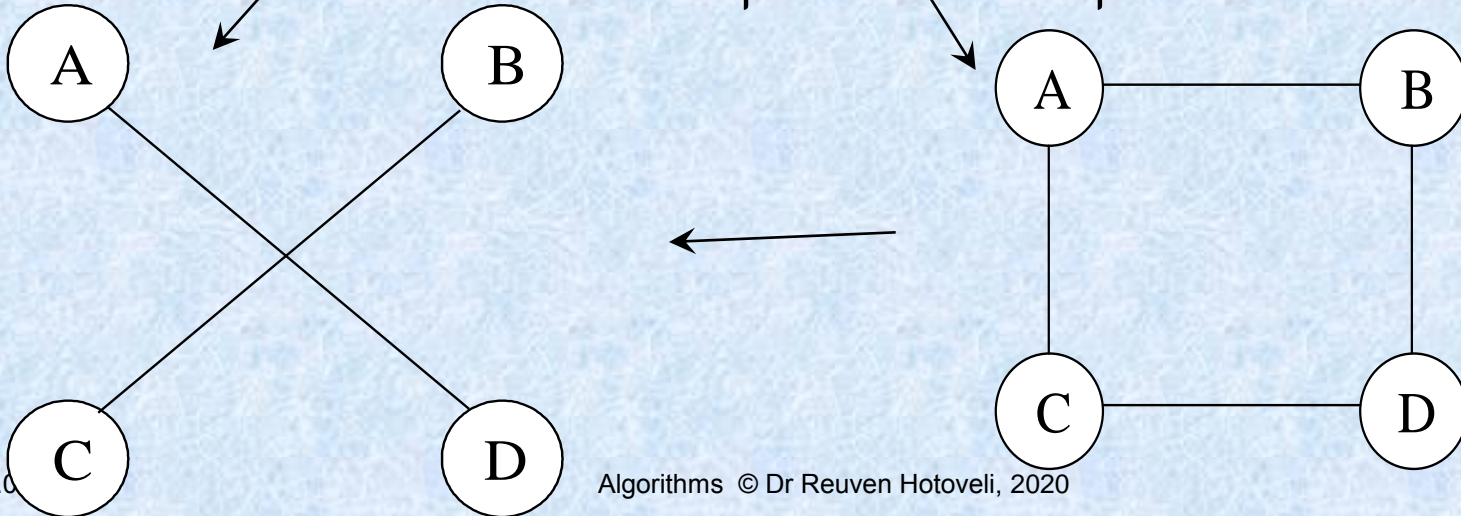
❖ בהינתן הגרף הבא תת-גרף שלו יכול להיות:





◆ גרף משלים: נתון גרף פשוט $G=(V,E)$, חסר לולאות וצלעות מרובות. גרף משלים של G מסומן כ- \bar{G} ומוגדר כדלהלן: $\bar{G} = (V, \bar{E})$, כאשר \bar{E} הינה אוסף הצלעות החסרות ב- G בין כל שני קדקודים כלשהם בגרף.

◆ דוגמא : עבור הגרף הבא : הגרף המשלים הינו:





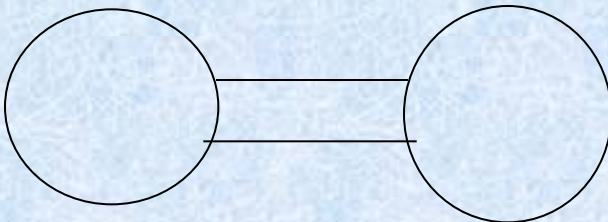
❖ משפט נתון גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$.

אם $|V|=n$ ו- $|E| \geq n$ אזי בגרף יש מעגל.

❖ הוכחה באינדוקציה על n

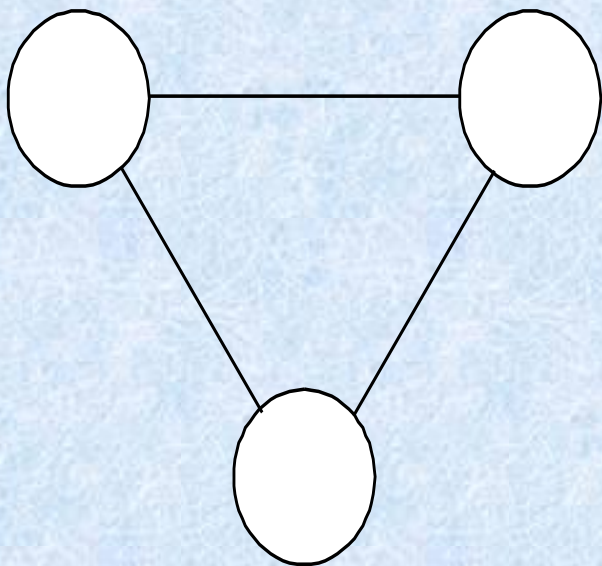
❖ בסיס: עבור $n=2$

אכן בגרף יש מעגל





עבור $n=3$ 



אכן בגרף יש מעגל 



❖ צעד משלים: נניח נכונות הטענה עבור $k < n$.

❖ ונוכיח עבור $k = n$.

❖ כעת יהי גרף G עם n קדקודים ובו n קשתות לפחות.

❖ כעת נניח בשלילה שבגרף G אין מעגל. לכן, ב –
 G חייב שיהיה קדקוד שהינו עלה (ממנו אין יציאה).



- ◆ אם נסיר מגרף G את העלה (קדקוד) x אזי נקבל גרף חדש G' שבו $n-1$ קדקודים ולפחות $n-1$ קשתות.
- ◆ לכן, בהמשך להנחת האינדוקציה בגרף G' יש מעגל
- ◆ אך G' הינו תת גרף של G
- ◆ כלומר אם בגרף G' יש מעגל אזי גם בגרף G יש מעגל בסתירה להנחה שבגרף G אין מעגל.
- ◆ לכן, הנחתנו (בגרף G אין מעגל) אינה נכונה והמסקנה היא שבגרף G יש מעגל. **משל**



משפט ♦ התנאים הבאים שקולים:

♦ א. הגרף G הינו עץ

♦ ב. G קשיר ובעל $n-1$ קשתות

♦ ג. G חסר מעגלים ובעל $n-1$ קשתות



משפט ♦

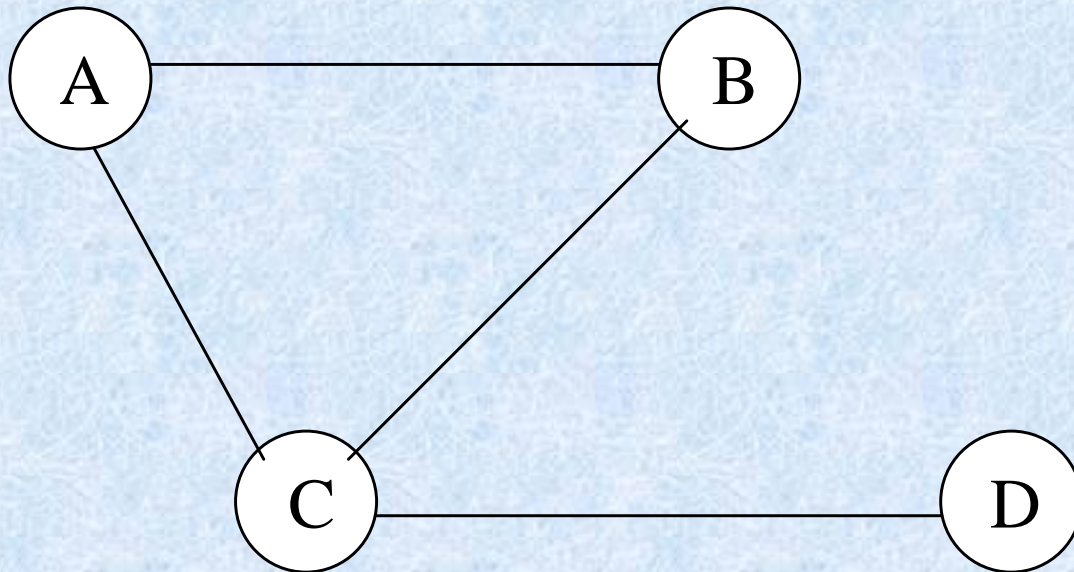
♦ בכל גרף פשוט $G=(V,E)$ מתקיים $\sum_{v \in V} d(v) = 2 |E|$
כאשר $d(v)$ מציין דרגתו של צומת v בגרף.

♦ נימוק: כל צלע בגרף G מחברת בדיוק שני קדקודים,
כלומר כל צלע יוצאת בדיוק משני קדקודים.

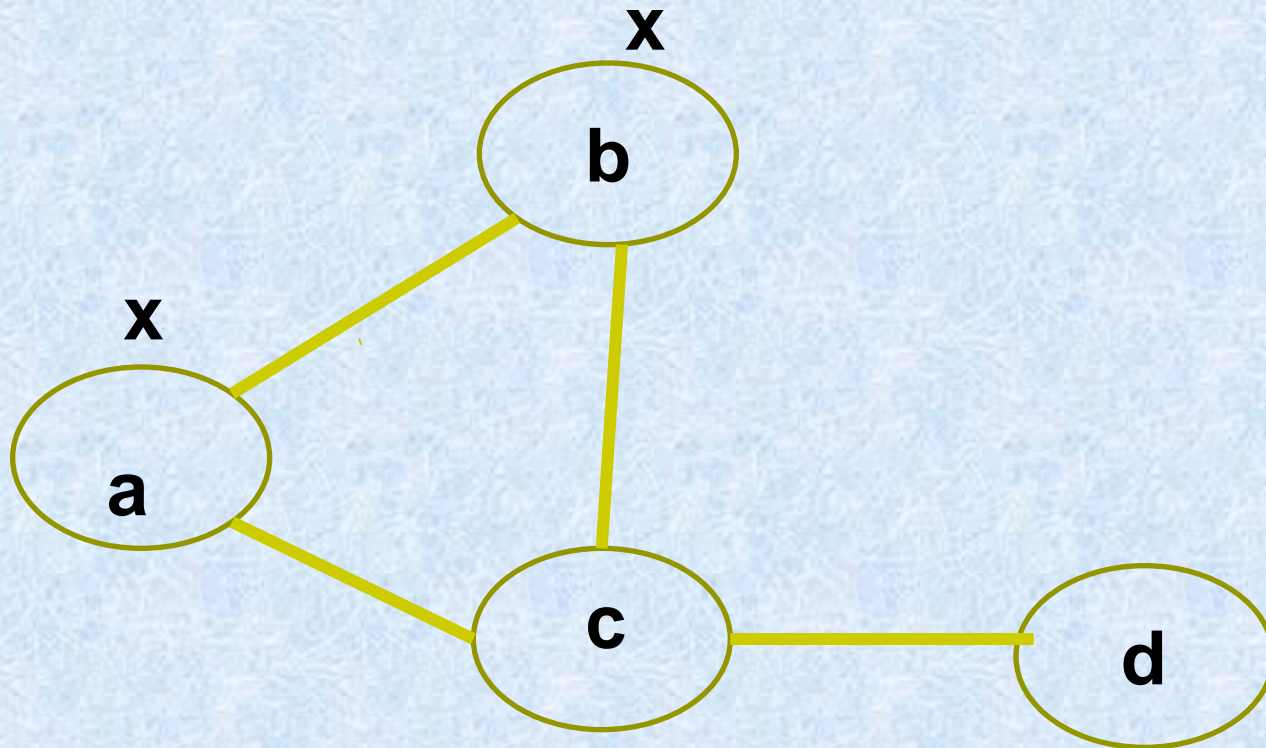
לכן, כל צלע ב G – נמנית בדיוק פעמיים בחישוב
הדרגה של הקדקודים.



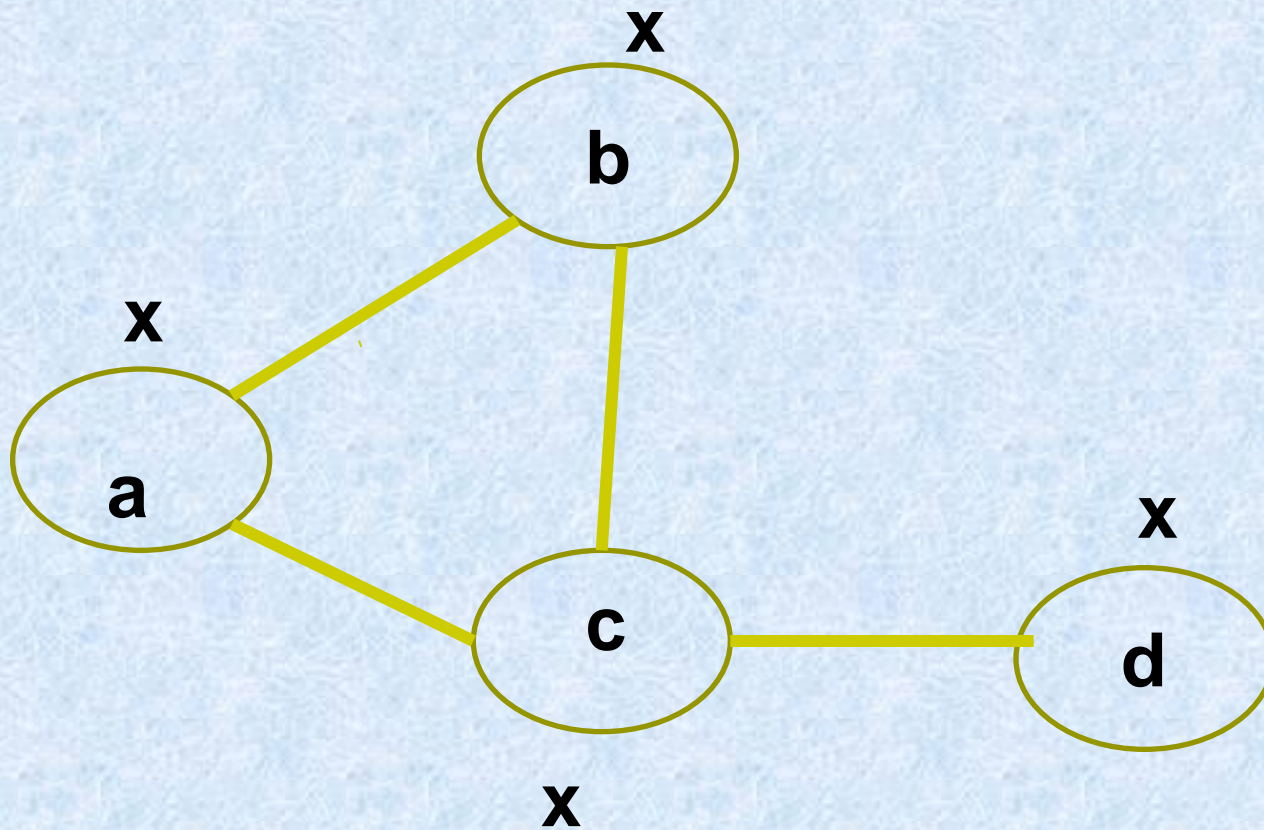
נבהיר את המשפט בעזרת הגרף הבא:



נעבור על כל הקשתות של הגרף בסדר כלשהו, באופן אקראי
לחלוטין. עבור כל קשת נשים סימן x ליד כל אחד משני
הקדקודים המהווים את הקשת הנסרקה.
בהתחלה נטפל בקשת (A,B) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:

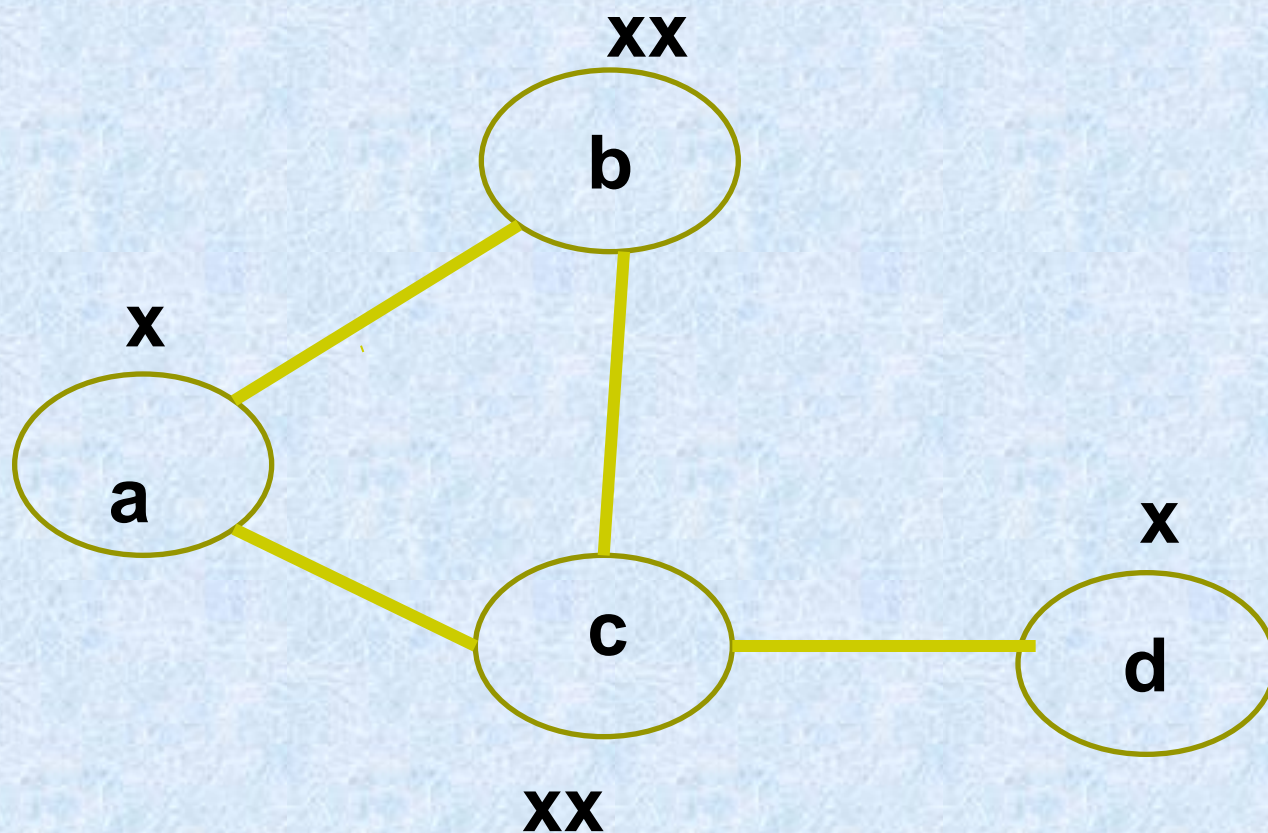


כעת נטפל בקשת (C,D) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:



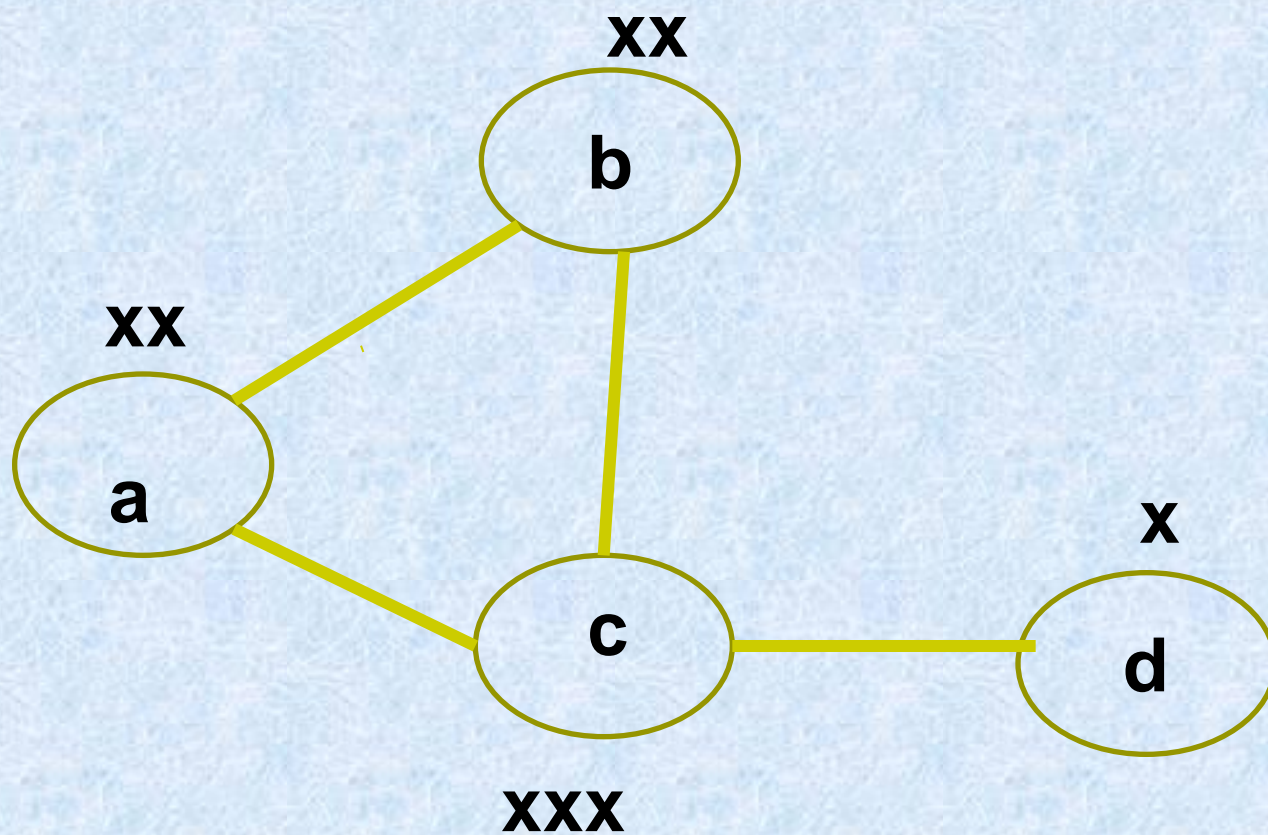


כעת נטפל בקשת (B,C) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:





כעת נטפל בקשת (A,C) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:





◆ כשמטפלים בקשת אחת (קשת כלשהי בגרף) אזי דרושים 2 x -ים.

◆ מאחר שבגרף $|E|$ קשתות, ידרשו $2|E|$ x -ים בכדי לסרוק ולטפל בכל קשתות הגרף.

◆ כעת בכל קדקוד יהיו x -ים כמספר הקשתות הנוגעות בו, כלומר אם דרגתו של צומת הינו $d(v)$ אזי מספר ה- x -ים שחלים על קדקוד זה הינו $d(v)$.

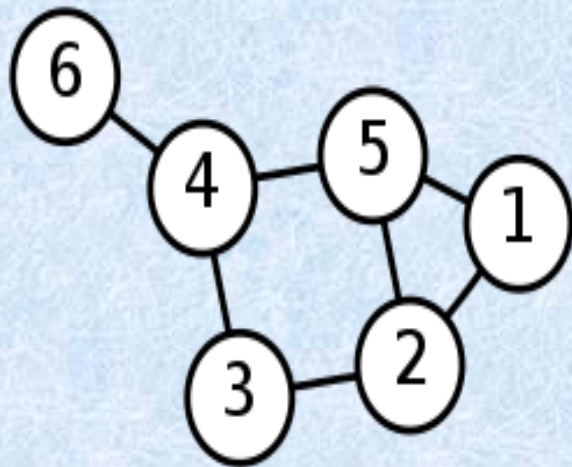
◆ לכן, מספר ה- x -ים החלים בכל קודקודי הגרף הינו

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$



למת לחיצות הידיים

6 אנשים נפגשים במסיבה ולהלן תיאור של לחיצות ידיים:



6 ו-4 לוחצים ידיים.

5 ו-4 לוחצים ידיים.

3 ו-4 לוחצים ידיים.

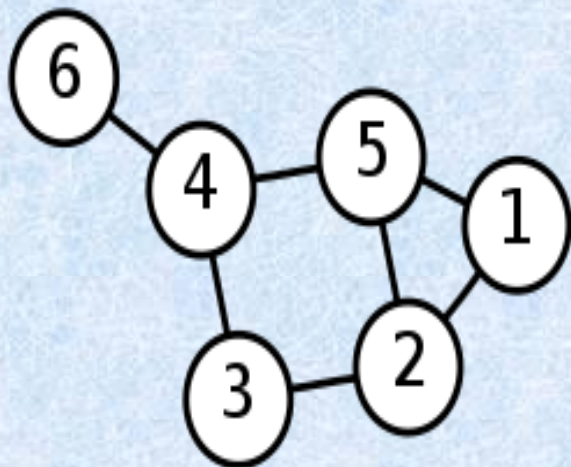
3 ו-2 לוחצים ידיים.

5 ו-2 לוחצים ידיים.

1 ו-5 לוחצים ידיים.

1 ו-2 לוחצים ידיים.

למת לחיצות הידיים

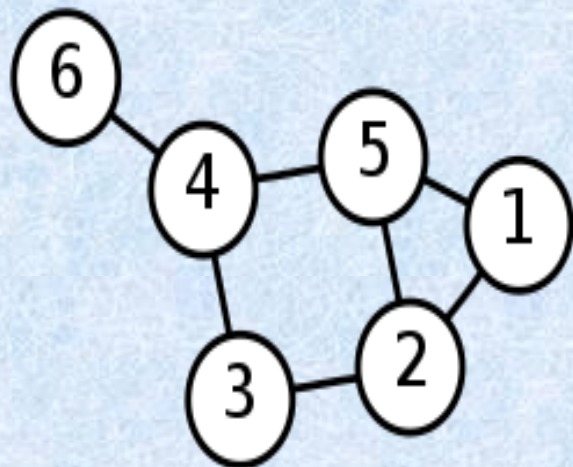


❖ בגרף יש מספר זוגי של קדקודים (ארבעה קדקודים שהם: 2, 4, 5, 6) בעלי דרגה אי זוגית.

❖ כלומר, כמות האנשים שלחצו ידיים מספר אי זוגי של פעמים היא זוגית

❖ האם הדבר נכון לכל גרף?

למת לחיצות הידיים



❖ לפי המשפט שראינו קודם $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

❖ כלומר סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית

+ סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה זוגית שווה ל- $2|E|$

❖ לכן, סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית =

סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה זוגית - $2|E|$

❖ לכן, סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית =

למספר זוגי כלשהו

למת לחיצות הידיים



שאלה? כמה מספרים אי-זוגיים צריך לחבר ע"מ שסכומם יהיה זוגי?

❖ לכן, מספר הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית הוא זוגי.

❖ בתורת הגרפים, **למת לחיצות הידיים** היא משפט הקובע שבכל **גרף לא מכוון** קיימים מספר זוגי של צמתים **שדרגתם** אי זוגית.

❖ בניסוח שונה, במסיבה שבה חלק מהאנשים לוחצים ידיים, כמות האנשים שלחצו ידיים מספר אי זוגי של פעמים היא זוגית.

❖ תוצאה זו הוכח על ידי לאונרד אוילר.