טורים

תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים.

טור הוא הסכום האינסופי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+\ldots$.

סדרת סכומים חלקיים היא הסכום הסופי $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0+a_1+\ldots+a_n$.

טור מתכנס אם קיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ לסדרת הסכומים החלקיים, ואז סכום הטור הוא $S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. אם הגבול של S_n לא קיים או אינסופי זהו **טור מתבדר**.

תנאי הכרחי להתכנסות טור: אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

תכונות נוספות של טורים:

א. הורדת/הוספת מספר סופי של אברים אינה משפיעה על התכנסות/התבדרות הטור.

ב. אם $c\neq 0$ קבוע, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

ג. אם 2 טורים מתכנסים אז גם סכומם מתכנס: $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

טורים חיוביים

* המבחנים להלן מניחים שהטורים הם אי שליליים $a_n,b_n\ge 0$.
* עבור סדרה חיובית, סדרת הסכומים החלקיים S_n היא מונוטונית עולה.

מבחן השוואה ראשון: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים, המקיימים $a_n\le b_n$ החל ממקום מסוים.

* אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.
* אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה שני: נסמן $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$.

* אם $0<k<\infty$, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד.
* אם $k=0$, אז $a_n\le b_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.
* אם $k=\infty$, אז $b_n\le a_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.

מבחן דלמבר: נסמן $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$.

* אם $L<1$, אז הטור מתכנס.
* אם $L>1$, אז הטור מתבדר.
* אם $L=1$, לא ניתן לדעת.

מבחן קושי: נסמן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$,

* אם $L<1$, אז הטור מתכנס.
* אם $L>1$, אז הטור מתבדר.
* אם $L=1$, לא ניתן לדעת.

מבחן אינטגרלי: תהי $f(x)$ פונקציה חיובית יורדת בקטע $[k,\infty)$, כך ש - $a_n=f(n)$. אז הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_k^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

טורים כלליים

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט**, אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בתנאי**, אם הוא מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

משפט: טור מתכנס בהחלט הינו טור מתכנס.

טור מחליף סימן הוא טור שאיבריו מחליפים סימן לסירוגין: $a_n>0$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$

משפט לייבניץ: תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה חיובית יורדת לאפס, אז:

1. הטור מחליף הסימן $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.
2. השארית $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k$ מקיימת: $|S-S_n|=|r_n|<a_{n+1}$.

סדרי גודל: $c\ll(\ln n)^b\ll n^p\ll a^n\ll n!\ll n^n$

כאשר הקבועים מקיימים $b,c,p>0$, $a>1$.

נוסחת סטירלינג: $n!\approx\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

טורי חזקות

טור חזקות הינו טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. זהו טור חזקות סביב x_0.

תחום ההתכנסות: לכל טור קיים מספר $R\ge 0$ שנקרא רדיוס התכנסות הטור, עבורו:

* כאשר $|x-x_0|<R$ טור החזקות מתכנס (בהחלט).
* כאשר $|x-x_0|>R$ טור החזקות מתבדר.
* בקצוות $x_0\pm R$ בודקים ישירות על ידי הצבה בטור.

משפט Cauchy – Hadamard: את רדיוס ההתכנסות של טור חזקות ניתן למצוא לפי כל אחת מהנוסחאות הבאות:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} \qquad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ הוא הגבול העליון של הסדרה.

משפט: בתחום ההתכנסות של טור חזקות ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר, גזירה איבר-איבר ולעבור לגבול בנקודה מסוימת איבר-איבר, כלומר:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^b (x-x_0)^n dx$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{d(x-x_0)^n}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$\lim_{x\to c} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lim_{x\to c}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-x_0)^n$$

משפט: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ מתכנס בקטע מסוים לפונקציה $f(x)$, אז זהו טור טיילור של f בסביבת x_0, כלומר מתקיים: $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

טורי טיילור יסודיים

$\frac{1}{1-x}$	$=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots$	$x\in(-1,1)$
e^x	$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$	$x\in\mathbb{R}$
$\sin x$	$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$	$x\in\mathbb{R}$
$\cos x$	$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots$	$x\in\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$	$x\in(-1,1]$
$\arctan x$	$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$	$x\in[-1,1]$

תחום התכנסות

פונקציות במספר משתנים

גבול: אומרים כי מספר L הינו גבול של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) ורושמים $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$, מתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

רציפות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

נגזרות חלקיות מוגדרות ע"י הגבולות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

גרדיאנט של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) הוא וקטור הנגזרות החלקיות של $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0): $\overline{grad}(f)=\vec{\nabla}f=(f_x,f_y)$

דיפרנציאביליות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אם

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=$$
$$=f(x_0,y_0)+A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+r(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

כאשר $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} r(\Delta x,\Delta y)=0$.

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה, אז בנקודה זו היא רציפה והנגזרות החלקיות שלה קיימות. נגזרות אלו הן הקבועים מההגדרה, ז"א:

$$A=f_x(x_0,y_0) \qquad B=f_y(x_0,y_0)$$

משפט: אם עבור פונקציה $f(x,y)$ הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת נקודה, אז $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה.

דיפרנציאל: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אז החלק הליניארי של שינוי הפונקציה נקרא דיפרנציאל, כלומר

$$df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

נגזרת כיוונית של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\vec{s}=(a,b)$, $\|\vec{s}\|=1$ (כלומר $\vec{s}$ וקטור יחידה) מוגדרת על ידי הגבול:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), ו- $\|\vec{s}\|=1$ אז

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{s}$$

משפט: הנגזרת הכיוונית של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) היא מקסימלית בכיוון הגרדיאנט, ז"א בכיוון $\vec{s}=\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$.

משפט: הגרדיאנט של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) מאונך לקו גובה של f בנקודה זו.

כלל השרשרת: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בסביבה של (x_0,y_0) ותהינה $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ פונקציות דיפרנציאביליות בסביבה של (u_0,v_0), כאשר $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. אז הפונקציה המורכבת $f(x(u,v),y(u,v))$ דיפרנציאבילית בסביבה של (u_0,v_0) ומתקיים:

$$f_u=f_x\cdot x_u+f_y\cdot y_u \qquad f_v=f_x\cdot x_v+f_y\cdot y_v$$

נגזרות מסדר גבוה הן נגזרות חלקיות של נגזרות חלקיות, למשל

$$f_{xx}=(f_x)_x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

משפט: אם לפחות אחת מהנגזרות המעורבות מסדר גבוה f_{xy} או f_{yx} קיימת ורציפה בנקודה, אז גם הנגזרת המעורבת השנייה קיימת ורציפה ומתקיים $f_{xy}=f_{yx}$.

* תוצאה דומה נכונה עבור נגזרות מעורבות מסדר גבוה יותר.

קירוב טיילור: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית n פעמים בסביבה של (x_0,y_0), ויהיו $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, אז מתקיים

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!}+R_n(x_0,y_0)$$

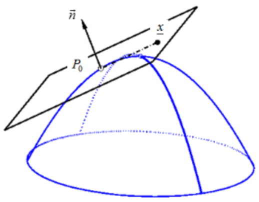
כאשר

$$d^n f=d\left(d^{n-1}f\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x,y)$$

$$R_n(x_0,y_0)=d^{n+1}f(c,d)$$

עבור c בין x_0 לבין x – ו d בין y_0 לבין y.

נורמל ומישור משיק למשטח



* משמעות דיפרנציאביליות – קיום מישור משיק בנקודה.

עבור נקודה P_0 על משטח כלשהו עם נורמל $\vec{n}$, נקודה $\underline{x}$ על המישור המשיק תקיים $\vec{n}\perp(\underline{x}-P_0)$.

ובפרט:

1. משטח נתון בצורה מפורשת $z=f(x,y)$, כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$-f_x(P_0)\cdot(x-x_0)-f_y(P_0)\cdot(y-y_0)+z-f(x_0,y_0)=0$$

2. משטח נתון בצורה סתומה $F(x,y,z)=0$, כאשר F דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0,z_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n}=\vec{\nabla}F=(F_x,F_y,F_z)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$F_x(P_0)\cdot(x-x_0)+F_y(P_0)\cdot(y-y_0)+F_z(P_0)\cdot(z-z_0)=0$$

קיצון של פונקציות במספר משתנים

נקודת מינימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

נקודה קריטית (x_0,y_0) אם $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$ לא קיים או $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=(0,0)$.

משפט Fermat: אם (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי של פונקציה $f(x,y)$, אז היא נקודה קריטית.

סיווג נקודות קיצון מקומי:

תהי (x_0,y_0) נקודה חשודה לקיצון. נגדיר

$$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$

* אם $\Delta(x_0,y_0)>0$, אז (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי:
    * אם $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ זוהי נקודת מינימום מקומי.
    * אם $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ זוהי נקודת מקסימום מקומי.
* אם $\Delta(x_0,y_0)<0$, אז (x_0,y_0) נקודת אוכף (אין קיצון).

נקודת מינימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

תחום קומפקטי D הוא תחום חסום וסגור.

משפט Weierstrass: פונקציה רציפה $f(x,y)$ בתחום קומפקטי D מקבלת ערך מינימלי וערך מקסימלי בתוך D, או על השפה של D.

קיצון תחת אילוץ: (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$, אם היא נקודת קיצון של f בקבוצת כל הנקודות המקיימות את תנאי האילוץ.

שיטת כופלי לגרנג': למציאת קיצון של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$
מגדירים פונקציית לגרנג': $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)$.
הנקודות החשודות לקיצון תחת אילוץ הינן נקודות קריטיות של F, ז"א נקודות בהן אחת הנגזרות החלקיות לא קיימת, או שמתקיים:

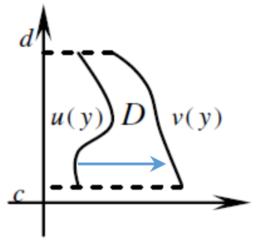
$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{\nabla}F=0$$

* ניתן להרחיב את שיטת לגרנג' לפונקציות עם יותר משתנים ולבעיות קיצון עם יותר אילוצים, למשל $F(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y)-\lambda_1\cdot g_1(x,y)-\lambda_2\cdot g_2(x,y)$

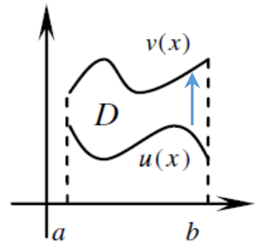
אינטגרל כפול ואינטגרל משולש

אינטגרל כפול של $f(x,y)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מישורי D הוא $\iint_D f(x,y)dA$.

משפט פוביני: ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים:



$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy$$



$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dydx$$

אינטגרל משולש של $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מרחבי G הוא $\iiint_G f(x,y,z)dV$.

ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים, למשל:

$$G:\begin{cases} a\le x\le b \\ g(x)\le y\le h(x) \\ m(x,y)\le z\le k(x,y) \end{cases}$$

אז

$$\iiint_G f(x,y,z)dV=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{m(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

יישומים של אינטגרל כפול ומשולש

שטח של תחום מישורי D: $Area(D)=\iint_D dA$

נפח של גוף מרחבי G: $Volume(G)=\iiint_G dV$

- בפרט עבור תחום $G=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D, g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$:

$$Volume(G)=\iint_D (f(x,y)-g(x,y))dA$$

מסה של לוחית מישורית D בעלת צפיפות $\rho(x,y)$: $m(D)=\iint_D \rho(x,y)dA$

מסה של גוף מרחבי G בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(G)=\iiint_G \rho(x,y,z)dV$

מרכז מסה של גוף מרחבי G:

$$x_{cm}=\frac{\iiint_G x\cdot\rho dV}{m(G)} \qquad y_{cm}=\frac{\iiint_G y\cdot\rho dV}{m(G)} \qquad z_{cm}=\frac{\iiint_G z\cdot\rho dV}{m(G)}$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

החלפת משתנים היא העתקה $(x,y)\to(u,v)$ המעתיקה את התחום $D_{xy}\mapsto D_{uv}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$

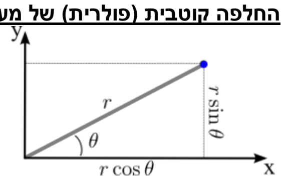
משפט: אם בהחלפת משתנים $J\neq 0$, אז קימת העתקה הופכית $(u,v)\to(x,y)$ שהיעקוביאן שלה $J^{-1}=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$ מקיים $J^{-1}=\frac{1}{J}$.

משפט החלפת משתנים באינטגרל כפול:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\left[\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases},\quad u,v\in D_{uv},\quad J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]=\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

החלפה קוטבית (פולרית) של מעגל:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},\quad J=r,\quad \begin{matrix} 0\le r\le R \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{matrix}$$



החלפה קוטבית מוכללת של אליפסה:

$$\begin{cases} x=ra\cos\theta \\ y=rb\sin\theta \end{cases},\quad J=abr,\quad \begin{matrix} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{matrix}$$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

החלפת משתנים היא העתקה $(x,y,z)\to(u,v,w)$ המעתיקה את התחום $G_{xyz}\mapsto G_{uvw}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$. אם $J\neq 0$ אז ההעתקה הפיכה, קיימת העתקה הופכית, ומתקיים:

$$J=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix},\quad J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix},\quad J^{-1}=\frac{1}{J}$$

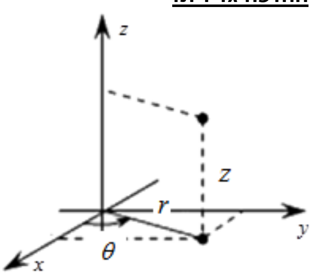
משפט החלפת משתנים באינטגרל משולש:

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x,y,z)dV_{xyz}=\left[\begin{cases} x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w), \\ z=z(u,v,w) \end{cases} \begin{matrix} u,v,w\in G_{uvw} \\ J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \end{matrix}\right]=\iiint_{G_{uvw}} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)|J|dV_{uvw}$$

החלפה גלילית:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases},\quad J=r$$

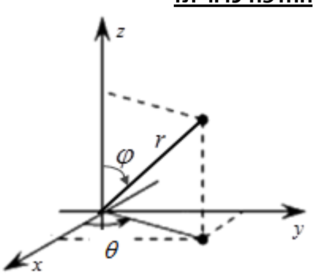
r - המרחק מציר z.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר x.
z - מרחק ממישור xy.
מתקיים $x^2+y^2=r^2$.



החלפה כדורית:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\varphi \end{cases},\quad J=r^2\sin\varphi$$

r - המרחק מהראשית.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר x.
φ - זווית עם הכיוון החיובי של ציר z.
מתקיים $x^2+y^2+z^2=r^2$.



אינטגרל קווי

פרמטריזציה של עקומה חלקה C במרחב היא העתקה $\vec{r}:[a,b]\to C$ הנתונה ע"י:

$$C:\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)\quad,\quad t\in[a,b]$$

בפרמטריזציה נקודת ההתחלה היא $A=\vec{r}(a)$, ונקודת הסיום היא $B=\vec{r}(b)$.

אינטגרל קווי מסוג I

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה מוגדרת לאורך C , אז

$$\int_C f(x,y,z)\,dl=\int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.

יישומים של אינטגרל קווי מסוג I

אורך של עקומה C: $length(C)=\int_C dl$

מסה של עקומה C בעלת צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(C)=\int_C \rho(x,y,z)\,dl$

אינטגרל קווי מסוג II

יהי $\vec{F}(x,y,z)=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$ **שדה במרחב** המוגדר לאורך C , ונסמן $d\vec{r}=\left(dx,dy,dz\right)$. אז

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)dt=$$

$$=\int_a^b \left(P\cdot x'+Q\cdot y'+R\cdot z'\right)dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.
* החישוב תלוי כיוון: $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{B\to A}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

יישומים של אינטגרל קווי מסוג II

עבודה של שדה כוחות $\vec{F}$ במעבר חלקיק לאורך מסלול C , או **שטף** שדה $\vec{F}$ דרך עקומה C מחושבת ע"י $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

מסלול בכיוון חיובי הוא מסלול סגור שבמעבר לאורכו התחום החסום נמצא משמאלו.

משפט Green: יהי $\vec{F}=(P,Q)$ שדה מישורי בעל רכיבים גזירים ברציפות בתחום D בעל שפה חלקה למקוטעין C מכוונת בכיוון החיובי, אז

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)dxdy$$

* שפה C יכולה להיות מורכבת ממספר מסילות זרות.
* עבור תחום כנ"ל מתקיים: $Area(D)=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy$

שדה משמר $\vec{F}=(P,Q)$ בתחום D מישורי (או $\vec{F}=(P,Q,R)$ בתחום מרחבי), הוא שדה שקיימת לו **פונקציית פוטנציאל** φ דיפרנציאבילית ב- D, כך שמתקיים $\vec{\nabla}\varphi=\vec{F}$.

משפט שקילויות: עבור $\vec{F}$ שדה בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום D הטענות הבאות שקולות:

(1) $\vec{F}$ שדה משמר.

(2) קיימת פונקציית **פוטנציאל** φ רציפה ב – D, כך ש – $\vec{\nabla}\varphi=\vec{F}$ (כלומר $\varphi_x=P,\quad \varphi_y=Q$ במישור, או $\varphi_x=P,\quad \varphi_y=Q,\quad \varphi_z=R$ במרחב).

(3) לכל מסלול סגור γ בתוך D מתקיים $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

(4) לכל שתי נקודות A,B בתוך D, האינטגרל $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ לא תלוי במסלול המחבר בין A ל – B בתוך D, ומתקיים $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(B)-\varphi(A)$.

(5) אם בנוסף D הינו תחום פשוט קשר, אז $Q_x=P_y$ במישור, או $rot\vec{F}=\vec{0}$ במרחב, כאשר **הרוטור** מוגדר ע"י

$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

אינטגרל משטחי

פרמטריזציה של משטח חלק σ במרחב היא העתקה $\vec{r}:D\to\sigma$ הנתונה על ידי:

$$\sigma:\vec{r}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\quad,\quad u,v\in D_{uv}$$

עם נורמל

$$\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}$$

אינטגרל משטחי מסוג I

האינטגרל המשטחי מסוג I של $f(x,y,z)$ על פני משטח פשוט σ, הוא

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,dS$$

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\|\vec{n}\|=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|$ ולכן:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{uv}} f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\|\vec{n}\|=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$ ולכן

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{xy}} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy$$

ישומים של אינטגרל משטחי מסוג I

שטח פנים של משטח σ: $Area(\sigma)=\iint_\sigma dS$

מסה של משטח σ בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(\sigma)=\iint_\sigma \rho(x,y,z)\,dS$

אינטגרל משטחי מסוג II

האינטגרל המשטחי מסוג II של שדה $\vec{F}=(P,Q,R)$ על פני משטח דו צדדי σ בעל נורמל יחידה בכיוון נתון $\hat{n}=\vec{n}/\|\vec{n}\|$, הוא $\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS$.

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ ולכן:

$$\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iint_{D_{uv}}\left(P(u,v),Q(u,v),R(u,v)\right)\cdot\left(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right)dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\vec{n}=\left(-z_x,-z_y,1\right)$ ולכן:

$$\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iint_{D_{xy}}\left(-P\cdot z_x-Q\cdot z_y+R\right)dxdy$$

* אם $\vec{F}$ ו - $\hat{n}$ ניצבים על פני σ , אז $\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=0$.
* אם נחליף את הכיוון של $\hat{n}$, אז האינטגרל יחליף את סימנו.

יישומים של אינטגרל משטחי מסוג II

שטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ דרך משטח σ: $\Phi_\sigma\left(\vec{F}\right)=\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS$

משפט הדיוורגנץ של Gauss: יהי $\vec{F}=(P,Q,R)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום קומפקטי פשוט קשר G בעל שפה חלקה למקוטעין σ , ויהי $\hat{n}$ נורמל יחידה חיצוני לשפה σ . אז

$$\oiint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iiint_G div\vec{F}\,dV$$

כאשר $div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=P_x+Q_y+R_z$ הוא **הדיוורגנץ** של השדה.

משפט Stokes: יהי $\vec{F}=(P,Q,R)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים על פני משטח דו צדדי σ בעל שפה γ , כך שכיוון הנורמל $\hat{n}$ למשטח נבחר לפי כלל יד ימין ביחס לכיוון γ . אז

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_\sigma\left(rot\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS$$

נוסחאות כלליות

זהויות טריגונומטריות

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$

$1 + \cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

גבולות מוכרים

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

כלל הסנדוויץ': $\left\{\begin{array}{l} f(x) \le g(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

כלל L'Hopital: במצב $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, אם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ אז $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$

נגזרות יסודיות

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ | $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$ | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\cos x)' = -\sin x$ | $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

אינטגרלים יסודיים

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \ne -1)$ | $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$ | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ | $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ | $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + C$$

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים: $\int u\cdot v'dx = uv - \int u'\cdot vdx$

החלפת משתנים: אם $x = x(t)$ אז $\int f(x(t))x'(t)dt = \int f(x)dx$

הצבות טריגונומטריות: בחישוב $\int \sin^n x\cos^m xdx$

- אם n אי זוגי נציב $t = \cos x$
- אם m אי זוגי נציב $t = \sin x$
- אם שניהם זוגיים ניתן להוריד חזקה ע"י זווית כפולה.

שטחים ונפחים

מעגל ברדיוס r - שטח πr^2, היקף $2\pi r$.

כדור ברדיוס r - נפח $\frac{4\pi r^3}{3}$, שטח פנים $4\pi r^2$.

חרוט ברדיוס r וגובה h - נפח $\frac{\pi r^2 h}{3}$, שטח פנים $\pi r\left(\sqrt{r^2+h^2}+r\right)$.