

אריתמטיקה של טורים ומשפט נוסף

אם $\sum a_n$ מתכנס וגם $\sum b_n$ מתכנס אזי:

טור הסכום: $\sum(a_n + b_n)$, טור ההפרש: $\sum(a_n - b_n)$, טור כפל בקבוע: $\sum(C \cdot a_n)$

הם טורים מתכנסים (!)

הערה מרעידה: (כמו בשאר הנושאים)

מוותר להשתמש במשפט האריתמטיקה רק במידה ובמצב ההתחלתי יש לפנינו שני טורים מתכנסים. אחרת – אסור להשתמש במשפט. נחפש פתרון אחר.

תרגיל לדוגמא:

הוכיחו כי הטור $\sum \frac{3^n + 5^n}{7^n}$ מתכנס.

פתרון:

$$\sum \frac{3^n + 5^n}{7^n} = \sum \frac{3^n}{7^n} + \sum \frac{5^n}{7^n} = \sum \left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

הטור $\sum \left(\frac{3}{7}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס כי $q = \frac{3}{7}$

הטור $\sum \left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא טור גיאומטרי מתכנס כי $q = \frac{5}{7}$

הטור $\sum \left(\frac{3}{7}\right)^n + \sum \left(\frac{5}{7}\right)^n$ הוא טור הסכום של שני הטורים מעלה ולכן, לפי משפט אריתמטיקה הוא טור מתכנס.

משפט נוסף:

אם $\sum a_n$ מתכנס וגם $\sum b_n$ מתבדר אזי:

טור הסכום וההפרש: $\sum a_n \pm b_n$ הוא טורים מתבדרים.

הערות:

טור הסכום של שני טורים מתבדרים הוא טור מתבדר.

לא ניתן להגיד כלום על הפרש בין טורים מתבדרים. פשוט אין משפט כזה.