Úvod do teorie kategorií

Přednáška 1

Základní pojmy teorie kategorií

Pojem kategorie se poprvé objevil v článku "On Natural Equivalences" (1945), MacLine, Eilenberg

Definice 1. Řekneme, že K je *kategorie*, je-li dána třída objektů kategorie K, značíme $ob\,K$, přičemž pro každé $a, b \in ob\,K$ je dána množina $K(a, b)$ a vlastností $\forall a, b \in ob\,K$ $: (a, b) \neq (a', b') \implies K(a, b) \cap K(a', b') = \emptyset$.

Prvkům z $K(a, b)$ říkáme morfismy kategorie K z a do b, popř s domainem a a codomainem b. Je-li K jasná z kontextu, píšeme $\alpha : a \to b$ místo $\alpha \in K(a, b)$.

Dále budeme $mor\ K = \bigcup K(a, b)$ značit třídu všech morfismů. Navíc musí platit axiomy:

1) $\forall a, b, c \in ob\,K, \alpha \in K(a, b), \beta \in K(b, c)$ je definováno složení $\beta\alpha \in K(a, c)$.
2) $\forall a, b, c, d \in ob\,K, \alpha \in K(a, b), \beta \in K(b, c), \gamma \in K(c, d)$ platí $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$. (Asociativita)
3) $\forall a \in ob\,K \exists 1_a \in K(a, a) \forall \beta, \gamma \in mor\ K : \beta 1_a = \beta \wedge 1_a \gamma = \gamma$, je-li složení definováno.

Místo $K(a, b)$ lze také zapsat jako $Hom_K(a, b)$

Někdy se nevyžaduje, aby $K(a, b)$ byla množina. Naše definice odpovídá *lokálně malé kategorii.*

V teorii kategorií nedává smysl studovat, či vůbec uvažovat, prvky objektů dané kategorie. (Lze to ve speciálních případech, např. kategorie Set množin).

Definice 2. Kategorie K se nazývá *malá*, pokud $mor\ K$ tvoří množinu. Ekvivalentně v naší definici $ob\,K$ tvoří množinu. Jinak nazýváme K velkou.

Příklad. Set je kategorie, jejíž objekty jsou množiny a morfismy jsou zobrazení se specifikovaným domainem a codomianem.

Je-li $\alpha : a \to b$ morfismus v Set, $b \subset c \in ob\,Set$, pak morfismus $\beta : a \to c$ definovaný vztahem $\forall x \in a : \beta(x) = \alpha(x)$ je rozdílný od α.

Příklad. "Obstrukturované množiny"

- $Poset$ je kategorie, jejíž objekty jsou posety, morfismy monotónní zobrazení $\alpha : (a, \leq) \to (b, \leq) : x \leq y \implies \alpha(x) \leq \alpha(y)$

- $Graph$, *ob* $Graph$ jsou orientované grafy, morfismy jsou grafové homomorfismy.
- Smg, *ob* Smg pologrupy, morfismy jsou homomorfismy pologrup.
- Grp, *ob* Grp grupy, morfismy jsou homomorfismy.
- Ab, *ob* Ab jsou abelovské grupy.
- Top, *ob* Top topologické prostory, morfismy jsou spojitá zobrazení.
- $Haus$, *ob* $Haus$ Hausdorffovy top. prostory.
- $Ring$, *ob* $Ring$ okruhy, morfismy okruhové homomorfismy.
- T je těleso, pak $Mod - T$ je kategorie, *ob* $Mod - T$ vektorové prostory, morfismy jsou T-lineární zobrazení.

Příklad. Malé kategorie

- Prázdná kategorie K, kde *ob* $K = \emptyset$.
- Jednoobjektová kategorie *ob* $K = \{*\}$, $K(*, *)$ je libovolný monoid s operací $\circ$ a jednotkovým prvkem 1_*.
- Ať $(a, \leq)$ je uspořádaná množina, pak *ob* $K = a$, pro $x, y \in a$ definuji $K(x, y) = \emptyset \iff x \nleq y$, jinak $K(x, y)$ bude jednoprvková. Pak K je malá kategorie. Řekli bychom, že K je "uspořádaná množina".

Příklad. Obskurní příklady

- *ob* K jsou body v rovině $\mathbb{R}^2$, morfismy jsou lomené čáry spojující domain a codomain.

Definice 3. Ať $a, b \in K$, $\alpha \in K(a, b)$. Řekneme, že α je

- *monomorfismus*, pokud $\forall c \in$ *ob* $K, \beta, \gamma \in K(c, a), \beta \neq \gamma \implies \alpha\beta \neq \alpha\gamma$.
- *epimorfismus*, pokud $\forall c \in$ *ob* $K, \beta, \gamma \in K(b, c), \beta \neq \gamma \implies \beta\alpha \neq \gamma\alpha$.
- *sekce (štěpitelný monomorfismus)*, pokud $\exists \beta \in K(b, a)$ tak, že $\beta\alpha = 1_a$.
- *retrakce (štěpitelný epimorfismus)*, pokud $\exists \beta \in K(b, a)$, že $\alpha\beta = 1_b$.
- *izomorfismus*, pokud $\exists \beta \in K(b, a)$, že $\beta\alpha = 1_a \land \alpha\beta = 1_b$.

Pozorování.

1) α je isomorfismus $\iff$ α je sekce a retrakce, β je dáno jednoznačně, značeno α^{-1}.

Přednáška 2