ALA 02 (HA) zum 18.04.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

18. April 2013

1. (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^4+2n^2+n+1}{-7n^4+25}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{-7+\frac{25}{n^4}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{-7}\right) = \frac{3}{7}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^4+2n^2+n+1}{-7n^5+25}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{-7n+\frac{25}{n^4}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n\cdot 7}\right) = 0$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^5+2n^2+n+1}{-7n^4+25}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3n+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{-7+\frac{25}{n^4}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot 3}{7}\right) = \infty$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n^3+2n-3}{9n^2+2} - \frac{2n^3+5n^2+7}{3n^2+3}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{18n^5+6n^3-9n^2+18n^3+6n-9-18n^5-45n^4-63n^2-4n^3-10n^2-14}{(9n^2+2)\cdot(3n^2+3)}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-45n^4+20n^3-82n^2+6n-23}{27n^4+33n^2+6}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-45+\frac{20}{n}-\frac{82}{n^2}+\frac{6}{n^3}-\frac{23}{n^4}}{27+\frac{33}{n^2}+\frac{6}{n^4}}\right) = -\frac{45}{27} = -\frac{5}{3}$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9n^4+n^2+1}-2n^2+3}{\sqrt{2n^2+1}\cdot\sqrt{2n^2+n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9n^4+n^2+1}-2n^2+3}{\sqrt{4n^4+2n^3+4n^2+n+1}}\right)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-2+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}}\right) = \frac{1}{2}$

2. a)

	(i) a_n	s_n	(ii) a_n	s_n	(iii) a_n	s_n
0	1	1	1	1	1	1
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{4}{25}$	$\frac{39}{25}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{39}{4}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{19}{25}$
3	$\frac{8}{125}$	$\frac{203}{125}$	$\frac{125}{8}$	$\frac{203}{8}$	$-\frac{8}{125}$	$\frac{87}{125}$
4	$\frac{16}{625}$	$\frac{1031}{625}$	$\frac{625}{16}$	$\frac{1031}{16}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{451}{625}$

(i) Geometrische Reihe mit $q = \frac{2}{5} \Rightarrow |q| < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

(ii) Geometrische Reihe mit $q = \frac{5}{2} \Rightarrow |q| > 1$, gemäß der Regel zur geometrischen Reihe divergiert diese also.

(iii) Geometrische Reihe mit $q = -\frac{2}{5} \Rightarrow |q| < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^i = \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7}$$

b) (i) Es handelt sich auch hier um die geometrische Reihe mit $q = x$, und $|q| = |-\frac{3}{10}| < 1$, daher konvergiert sie gegen

$$\frac{1}{1+\frac{3}{10}} = \frac{10}{13}$$

(ii) Die Formel ist nach q aufzulösen:

$$\frac{1}{1-q} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow q = -\frac{3}{5}$$

Man wähle $x = -\frac{3}{5}$, dann konvergiert die Reihe gegen $\frac{5}{8}$

3. (i) Es handelt sich um eine geometrische Reihe die gegen $\frac{9}{2}$ konvergiert (da $|q| < 1$). $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{9}{2}$

(ii) Es handelt sich um eine geometrische Reihe die gegen $-\frac{7}{16}$ konvergiert (da $|q| < 1$).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{7}{9}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{9}\right)^i - 1 = \frac{1}{1+\frac{7}{9}} - 1 = -\frac{7}{16}$$

(iii) $$\sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{i+1} = \frac{7}{9} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \left(-\frac{7}{16}\right)^i = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{7}{16}} - 1 + \frac{7}{16}\right) = -\frac{343}{1296}$$

(iv) $$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i+1)i} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i-1} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i-1} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i} \cdot \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty \cdot \infty = \infty$$

4. (i) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = e \cdot 1 = e$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = e^3$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

(iv) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = 1 \cdot e = e$$