Optimierung Blatt 05 zum 18.11.2013

Paul Bienkowski, Arne Struck

18. November 2013

1. a) maximiere $x_{47} + x_{37} + x_{57} + x_{67}$
unter den Nebenbedingungen[1]

$$\begin{aligned}
x_{47} + x_{37} + x_{57} + x_{67} - x_{04} - x_{03} - x_{02} - x_{01} &= 0\\
x_{01} + x_{21} - x_{16} &= 0\\
x_{02} - x_{21} - x_{25} &= 0\\
x_{01} - x_{34} - x_{35} - x_{37} &= 0\\
x_{04} + x_{34} - x_{47} &= 0\\
x_{25} + x_{35} - x_{56} - x_{57} &= 0\\
x_{16} + x_{56} - x_{67} &= 0\\
x_{03} &\leq 1\\
x_{01}, x_{56}, x_{37} &\leq 2\\
x_{02}, x_{35}, x_{47}, x_{67} &\leq 3\\
x_{21}, x_{25}, x_{34} &\leq 4\\
x_{16} &\leq 5\\
x_{04} &\leq 7\\
x_{57} &\leq 8\\
x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{16}, x_{21}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{37}, x_{47}, x_{56}, x_{57}, x_{67} &\geq 0
\end{aligned}$$

b) **Hinweis:** Da dies nicht genau angegeben ist, interpretieren wir die Kostenangabe als „Geldeinheiten pro benutzter Energieeinheit”, also als Faktor für die benutzte Kapazität. Eine Kante mit Notation „4 | 3”, durch die jedoch nur 2 Energieeinheiten geschickt werden, kostet somit 6 Geldeinheiten.

minimiere $5x_{01} + 4x_{02} + 3x_{03} + 3x_{16} + 6x_{21} + 1x_{23} + 5x_{24} + 5x_{35} + 3x_{45} + 4x_{46} + 2x_{56}$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
x_{01} + x_{02} + x_{03} &= 6\\
x_{16} + x_{46} + x_{56} &= 6\\
x_{01} + x_{21} - x_{16} &= 0\\
x_{02} - x_{21} - x_{24} - x_{23} &= 0\\
x_{03} + x_{23} - x_{35} &= 0\\
x_{24} - x_{45} - x_{46} &= 0\\
x_{35} + x_{45} - x_{56} &= 0\\
x_{16}, x_{45} &\leq 1\\
x_{35} &\leq 2\\
x_{01} &\leq 3\\
x_{02}, x_{24}, x_{56} &\leq 4\\
x_{03} &\leq 5\\
x_{21} &\leq 6\\
x_{23}, x_{46} &\leq 7\\
x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{16}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{35}, x_{45}, x_{46}, x_{56} &\geq 0
\end{aligned}$$

[1] hier ist kein LP-Problem in Standardform gefordert, daher kommen hier Gleichungen als Nebenbedingungen vor

c) Die Variable x_{ij} gibt an, ob der Bewerber i die Stelle j bekommt. Es handelt sich dabei um einen binären Wert (0 oder 1), da Bewerber und Stellen nicht geteilt werden können. Somit handelt es sich um ein binäres Problem.

minimiere $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij} \cdot x_{ij}$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{3} x_{ij} & \leq & 1 & \text{für jedes} \quad 1 \leq j \leq 5 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} & = & 1 & \text{für jedes} \quad 1 \leq i \leq 3 \\ x_{ij} & \in & \{0,1\} & \text{für jedes} \quad 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5 \end{array}$$

2. Hilfsproblem (als unzulässiges Tableau):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_3 & = & -3 & + & 2x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\ x_4 & = & -5 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_0 \\ x_5 & = & -4 & + & x_1 & + & 4x_2 & + & x_0 \\ \hline w & = & & & & & & - & x_0 \end{array}$$

Eingangsvariable: x_0, Ausgangsvariable: x_4

Zulässiges Starttableau:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_0 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 \\ x_3 & = & 2 & & & - & x_2 & + & x_4 \\ x_5 & = & 1 & - & x_1 & + & 2x_2 & + & x_4 \\ \hline w & = & -5 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_4 \end{array}$$

Eingangsvariable: x_1, Ausgangsvariable: x_5

Tableau nach 1. Iteration:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & 1 & + & 2x_2 & + & x_4 & - & x_5 \\ x_0 & = & 3 & - & 6x_2 & - & x_4 & + & 2x_5 \\ x_3 & = & 2 & - & x_2 & + & x_4 & & \\ \hline w & = & -3 & + & 6x_2 & + & x_4 & - & 2x_5 \end{array}$$

Eingangsvariable: x_2, Ausgangsvariable: x_0

$w = -3 + 6\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{6}x_4 + \frac{2}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_0\right) + x_4 - 2x_5 = -3 + 3 - x_4 + 2x_5 - x_0 + x_4 - 2x_5 = -x_0$

Tableau nach 2. Iteration:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{6}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & - & \frac{1}{6}x_0 \\ x_1 & = & 2 & + & \frac{2}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & - & \frac{1}{3}x_0 \\ x_3 & = & \frac{3}{2} & + & \frac{7}{6}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{1}{6}x_0 \\ \hline w & = & & & & & & - & x_0 \end{array}$$

Dies ist die optimale Lösung des Hilfsproblems:

$x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 0, x_5 = 0, w = 0$

Einsetzen in die Original-Zielfunktion:

$z = -3x_1 - 5x_2 = -3\left(2 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right) - 5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{3}x_5\right) = -\frac{17}{2} - \frac{7}{6}x_4 - \frac{2}{3}x_5 =$

Damit ergibt sich folgendes **Starttableau für das Originalproblem**:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{6}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 \\
x_1 & = & 2 & + & \frac{2}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 \\
x_3 & = & \frac{3}{2} & + & \frac{7}{6}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 \\
\hline
z & = & -\frac{17}{2} & - & \frac{7}{6}x_4 & - & \frac{2}{3}x_5
\end{array}$$

Diese Lösung ist optimal, es ergibt sich:

$x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 0, x_5 = 0, z = -\frac{17}{2}.$