

ALA 06 (HA) zum 30.05.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

30. Mai 2013

1. (a) Wir berechnen $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$:

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{3i}{n}\right) = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i}{n}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3^3}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \\ &= \frac{81}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \frac{81n^4 + 192n^3 + 81n^2}{4n^4} \end{aligned}$$

$$\text{Also gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{81n^4 + 192n^3 + 81n^2}{4n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{81 + \frac{192}{n} + \frac{81}{n^2}}{4} \right) = \frac{81}{4}$$

(b)

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{4} x^4 dx = \frac{1}{4} 3^4 - \frac{1}{4} 0^4 = \frac{81}{4}$$

2. (i) $\int_1^3 f(x) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 6x \right]_1^3 = \left(\frac{1}{3} 3^3 - \frac{1}{2} 3^2 - 18 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6 \right) = -\frac{27}{2}$

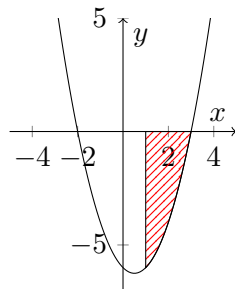
(ii) $\int_1^3 f(x) dx = \left[\sqrt[3]{x} \right]_1^3 = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1} \approx 0.442$

(iii) $\int_1^3 f(x) dx = [\arctan(x)]_1^3 = \arctan(3) - \arctan(1) \approx 26.565$

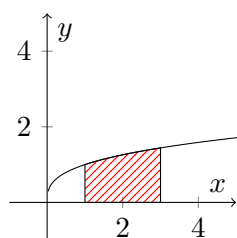
(iv) $\int_1^3 f(x) dx = [x \cdot \ln(x) - x]_1^3 = (3 \cdot \ln(3) - 3) - (1 \cdot \ln(1) - 1) \approx 1.296$

(v) $\int_1^3 f(x) dx = [-e^{-x}]_1^3 = -e^{-3} - (-e^{-1}) \approx 0.318$

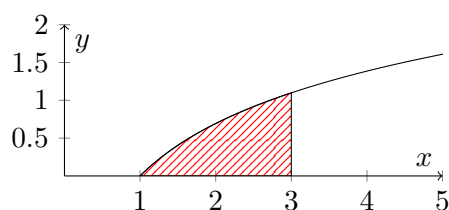
(i)



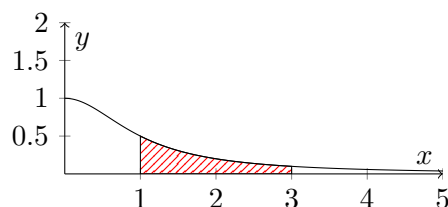
(ii)



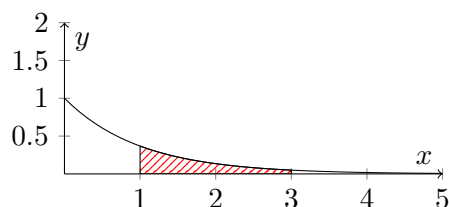
(iv)



(iii)



(v)



3. (i) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 5x$

(ii) $\int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}}$

(iii) $f'(x) = \sin(3x), g(x) = x$. Dann ist $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$ und $g'(x) = 1$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} \sin 3x \cdot x - \int -\frac{1}{3} \sin 3x \cdot 1 dx \\ &= -\frac{1}{3} \sin 3x \cdot x - \frac{1}{3} \int -\sin 3x dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cdot \sin 3x - \frac{1}{9} \cdot \cos 3x \end{aligned}$$

Probe: $\left(-\frac{1}{3}x \cdot \sin 3x - \frac{1}{9} \cdot \cos 3x\right)' = x \cdot \sin(3x)$

(iv)

$$\begin{aligned} f'(x) = x^3, g(x) &= \ln x. \text{ Dann ist } f(x) = \frac{1}{4}x^4 \text{ und } g'(x) = \frac{1}{x} \\ \int x^3 \cdot \ln x dx &= \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4 \end{aligned}$$

Probe: $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4\right)' = x^3 \cdot \ln(x)$

(v)

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\
&= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \\
&= e^x (x^2 - 2x + 2)
\end{aligned}$$

Probe: $(e^x(x^2 - 2x + 2))' = x^2 e^x$ 4. (i) Es sei $u(x) = 5 + 2x$ und $s(u) = \sqrt{u}$.

$$\begin{aligned}
\int \cos(\sqrt{2x+5}) dx &= \int \frac{1}{2} \cos(\sqrt{u}) du \\
&= \int \frac{1}{2} \cos(s) \cdot \frac{1}{s'(u)} ds \\
&= \int \sqrt{u} \cos(s) ds \\
&= \int s \cos(s) ds \\
&= s \sin(s) - \int \sin(s) ds \\
&= s \sin(s) + \cos(s) \\
&= \sqrt{5+2x} \sin(\sqrt{5+2x}) + \cos(\sqrt{5+2x})
\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{5+2x} \sin(\sqrt{5+2x}) + \cos(\sqrt{5+2x}) \right)' \\
&= \frac{2}{2\sqrt{5+2x}} \sin(\sqrt{5+2x}) + \sqrt{5+2x} \cos(\sqrt{5+2x}) \frac{2}{2\sqrt{5+2x}} \\
&\quad - \sin(\sqrt{5+2x}) \frac{2}{2\sqrt{5+2x}} \\
&= \cos(\sqrt{5+2x}) \square
\end{aligned}$$

(ii) Es sei $u(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned}
 \int \sin(\sqrt[3]{x}) dx &= 3 \int u^2 \sin(u) du \\
 &= 3 \left(-u^2 \cos(u) - 2 \int -u \cos(u) du \right) \\
 &= -3u^2 \cos(u) - 6 \left(-u \sin(u) - \int -\sin(u) du \right) \\
 &= -3u^2 \cos(u) + 6u \sin(u) + 6 \cos(u) \\
 &= (6 - 3u^2) \cos(u) + 6u \sin(u) \\
 &= (6 - 3\sqrt[3]{x}^2) \cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x} \sin(\sqrt[3]{x})
 \end{aligned}$$

(iii) Es sei $u(x) = \sqrt{\frac{2}{7}x + 3}$.

$$\begin{aligned}
 \int e^{\sqrt{\frac{2}{7}x+3}} dx &= \int e^u \cdot \frac{1}{u'} du \\
 &= \int 7ue^u du \\
 &= 7u \cdot e^u - 7 \int e^u du \\
 &= 7u \cdot e^u - 7 \cdot e^u \\
 &= 7e^u(u - 1) \\
 &= 7e^{\sqrt{\frac{2}{7}x+3}} \left(\sqrt{\frac{2}{7}x + 3} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

(iv)

5. (i) Nullstellen der ersten Ableitung: 2, 6 Extremwerte berechnen:

$$f''(2) = -12$$

$$f(2) = 26$$

$$f''(6) = 12$$

$$f(6) = 1$$

Grenzen überprüfen:

$$f(6) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Bei $x = 6$ befindet sich somit ein lokales minimum und bei $x = 2$ ein lokales maximum. Die Tageshöchsttemperatur lässt sich am Maximum der Funktion im Intervall $[0, 6]$ erkennen sie liegt also bei $x = 2$. Also beträgt die Tageshöchsttemperatur 26°C .

(ii) Die Tagestiefsttemperatur lässt sich am Minimum der Funktion im Intervall $[0, 6]$ erkennen, aus (i) folg somit das sie zweimal gemessen wurde (bei $x = 6$ und $x = 0$). Die Tagestiefsttemperatur beträgt also: 1°C

(iii)

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{12}{3}x^3 + 18x^2 + 1x$$

$$\int_0^6 x^3 - 12x^2 + 36x + 1 \, dx = F(6) - F(0) = 114$$

$$\frac{114}{6} = 19$$

Die Durchschnittstemperatur beträgt also 19°C.