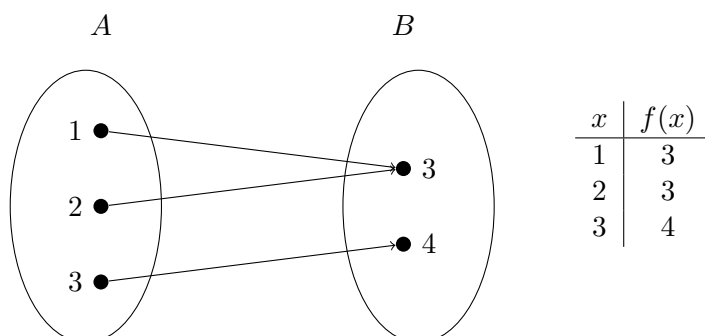


# DM 01-B (HA) zum 26.10.2012

Paul Bienkowski, Jascha Andersen

22. November 2012

1. a) (i) Eine mögliche Funktion:



- (ii) Bilden einer injektiven Funktion ist nicht möglich, denn es gilt:

$$|A| > |B|.$$

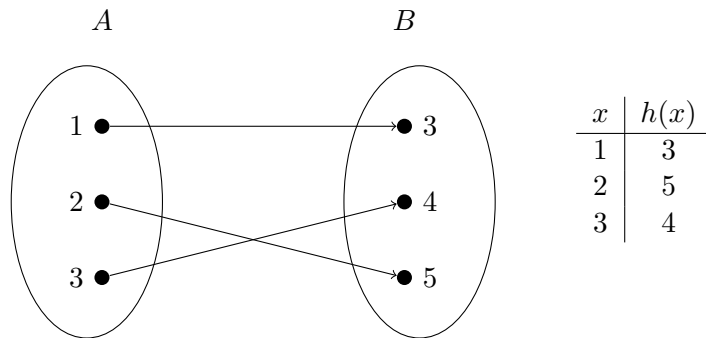
- (iii) Eine bijektive Funktion ist nicht möglich, da keine injektive Funktion gebildet werden kann, siehe (ii).

- b) (i) Nicht möglich, da in einer surjektiven Funktion jeder Wert aus B genau einmal zugeordnet wäre:

$$|A| = |B|.$$

Damit wäre die Funktion automatisch ebenfalls injektiv.

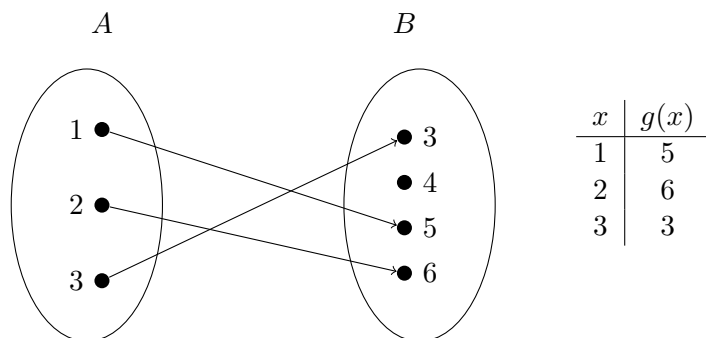
- (ii) Nicht möglich aus demselben Grund.  
(iii) Eine mögliche Funktion:



- c) (i) Nicht möglich, da für eine surjektiven Funktion jeder Wert in  $B$  zugeordnet werden muss, es stehen jedoch nicht genügend Werte in  $A$  zur Verfügung:

$$|A| < |B|.$$

- (ii) Eine mögliche Funktion:



- (iii) Eine bijektive Funktion ist nicht möglich, da keine surjektive Funktion gebildet werden kann, siehe (i).

2.		injektiv	surjektiv	bijektiv
f		nein (i)	nein (ii)	nein
g		ja (iii)	nein (iv)	nein
h		ja (v)	ja (vi)	ja

(i) **Behauptung:**  $f$  ist nicht injektiv.

**Beweis:** Es sind  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  anzugeben, für die  $f(x_1) = f(x_2)$  gilt.

**Annahme:** Für  $x_1 = 3$  und  $x_2 = -3$  ist dies der Fall.

**Nachweis:**

$$\begin{aligned} f(3) &= f(-3) \\ 3^2 - 5 &= (-3)^2 - 5 \\ 9 - 5 &= 9 - 5 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Es ist gezeigt dass es Werte für  $f(x)$  gibt, welche durch verschiedene  $x$  zugeordnet werden, daher ist  $f$  nicht injektiv.  $\square$

(ii) **Behauptung:**  $f$  ist nicht surjektiv.

**Beweis:** Es sei ein  $y \in \mathbb{Z}$  anzugeben, für das gilt: es gibt kein  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $f(x) = y$ .

**Annahme:** Für  $y = -6$  ist dies der Fall.

**Nachweis:**

$$\begin{aligned} f(x) &= -6 \\ x^2 - 5 &= -6 \\ x^2 &= -1 \end{aligned}$$

Es gibt kein  $x \in \mathbb{Z}$ , für das gilt  $x^2 = -1$ , daher ist  $f$  nicht surjektiv.  $\square$

(iii) **Behauptung:**  $g$  ist injektiv.

**Beweis:** Wäre  $g$  nicht injektiv, würde für mindestens ein  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $x_1 \neq x_2$  gelten:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \\ 5 \cdot x_1 - 3 &= 5 \cdot x_2 - 3 \\ 5 \cdot x_1 &= 5 \cdot x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Die steht im Widerspruch zur Annahme  $x_1 \neq x_2$ , daher ist  $g$  injektiv.  $\square$

(iv) **Behauptung:**  $g$  ist nicht surjektiv.

**Beweis:** Es sei ein  $y \in \mathbb{Z}$  anzugeben, für das gilt: es gibt kein  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $g(x) = y$ .

**Annahme:** Für  $y = 0$  ist dies der Fall.

**Nachweis:**

$$\begin{aligned}g(x) &= 0 \\5 \cdot x - 3 &= 0 \\5 \cdot x &= 3 \\x &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Der errechnete Wert für  $x$  liegt nicht im Definitionsbereich  $\mathbb{Z}$ , daher ist  $g$  nicht surjektiv.  $\square$

(v) **Behauptung:**  $h$  ist injektiv.

**Beweis:** Wäre  $h$  nicht injektiv, würde für mindestens ein  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $x_1 \neq x_2$  gelten:

$$\begin{aligned}h(x_1) &= h(x_2) \\x_1 + 5 &= x_2 + 5 \\x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Die steht im Widerspruch zur Annahme  $x_1 \neq x_2$ , daher ist  $h$  injektiv.  $\square$

(vi) **Behauptung:**  $h$  ist surjektiv.

**Beweis:** Es gibt für jedes  $y \in \mathbb{Z}$  ein  $x \in \mathbb{Z}$ , sodass gilt:  $f(x) = y$ . Dieses  $x$  lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}y &= x + 5 \\x &= y - 5\end{aligned}$$

Da die Subtraktion im  $\mathbb{Z}$  unbegrenzt ausführbar ist, lässt sich diese Berechnung auf jedes  $y \in \mathbb{Z}$  anwenden. Daher ist  $h$  surjektiv.  $\square$

3. a) **Behauptung:**  $f$  ist nicht injektiv.

**Beweis:** Es sind  $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  anzugeben, für die  $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$  gilt.

**Annahme:** Für  $(n_1, m_1) = (5, 2)$  und  $(n_2, m_2) = (4, 1)$  ist dies der Fall.

**Nachweis:**

$$\begin{aligned} f(5, 2) &= f(4, 1) \\ 5 - 2 &= 4 - 1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Es ist gezeigt dass es Werte für  $f(n, m)$  gibt, welche durch verschiedene  $(n, m)$  zugeordnet werden, daher ist  $f$  nicht injektiv.  $\square$

**Behauptung:**  $f$  ist surjektiv.

**Beweis:** Jede ganze Zahl lässt sich als Differenz zweier anderer ganzen Zahlen ausdrücken. Für jede  $x, k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$f(x + k, k) = x + k - k = x$$

Somit lässt sich jedes  $x \in \mathbb{Z}$  durch  $f$  abbilden, also ist  $f$  surjektiv.  $\square$

b) **Behauptung:**  $g$  ist injektiv.

**Beweis:** Es gilt  $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und  $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$ . Wäre  $g$  injektiv, wäre:

$$\begin{aligned} g(n_1, m_1) &= g(n_2, m_2) \\ (n_1 + m_1, n_1 - m_1) &= (n_2 + m_2, n_2 - m_2) \\ n_1 + m_1 &= n_2 + m_2 \quad \wedge \quad n_1 - m_1 = n_2 - m_2 \\ n_1 - n_2 &= m_2 - m_1 \quad \wedge \quad n_1 - n_2 = m_1 - m_2 \\ m_2 - m_1 &= m_1 - m_2 \\ 2 \cdot m_2 &= 2 \cdot m_1 \\ m_2 &= m_1 \\ n_1 - n_2 &= m_2 - m_1 \\ n_1 - n_2 &= 0 \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu  $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$ , also ist  $g$  nicht injektiv.  $\square$

**Behauptung:**  $g$  ist nicht surjektiv.

**Beweis:** Es ist ein  $y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  anzugeben, für die gilt: es gibt kein  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit  $g(n, m) = y$ .

**Annahme:** Für  $y = (1, 0)$  ist dies der Fall.

**Nachweis:**

$$\begin{aligned}g(n, m) &= (1, 0) \\(n + m, n - m) &= (1, 0) \\n + m = 1 \quad \wedge \quad n - m = 0 \\n &= m \\n + n &= 1 \\2 \cdot n &= 1 \\n = m &= \frac{1}{2} \\\Rightarrow (n, m) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Der errechnete Wert für  $(n, m)$  liegt nicht im Definitionsbereich  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , daher ist  $g$  nicht surjektiv.  $\square$

c) **Behauptung:**  $h$  ist injektiv.

**Beweis:** Wäre  $h$  nicht injektiv, gäbe es  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $n_1 \neq n_2$ , für die gilt:

$$\begin{aligned}h(n_1) &= h(n_2) \\((n_1 + 1)^2, n_1^2 + 1) &= ((n_2 + 1)^2, n_2^2 + 1) \\(n_1 + 1)^2 &= (n_2 + 1)^2 \quad \wedge \quad n_1^2 + 1 = n_2^2 + 1 \\n_1^2 + 2 \cdot n_1 + 1 &= n_2^2 + 2 \cdot n_2 + 1 \quad \wedge \quad n_1^2 = n_2^2 \\2 \cdot n_1 + 1 &= 2 \cdot n_2 + 1 \\n_1 &= n_2\end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu Annahme  $n_1 \neq n_2$ , also ist  $h$  injektiv.  $\square$

**Behauptung:**  $h$  ist nicht surjektiv.

**Beweis:** Es sei ein  $y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  anzugeben, für das gilt: es gibt kein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $h(n) = y$ .

**Annahme:** Für  $y = (k, 4)$  mit beliebigem  $k \in \mathbb{Z}$  ist dies der Fall.

**Nachweis:**

$$\begin{aligned}h(n) &= (k, 4) \\((n + 1)^2, n^2 + 1) &= (k, 4) \Rightarrow \\n^2 + 1 &= 4 \\n^2 &= 3 \\n &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

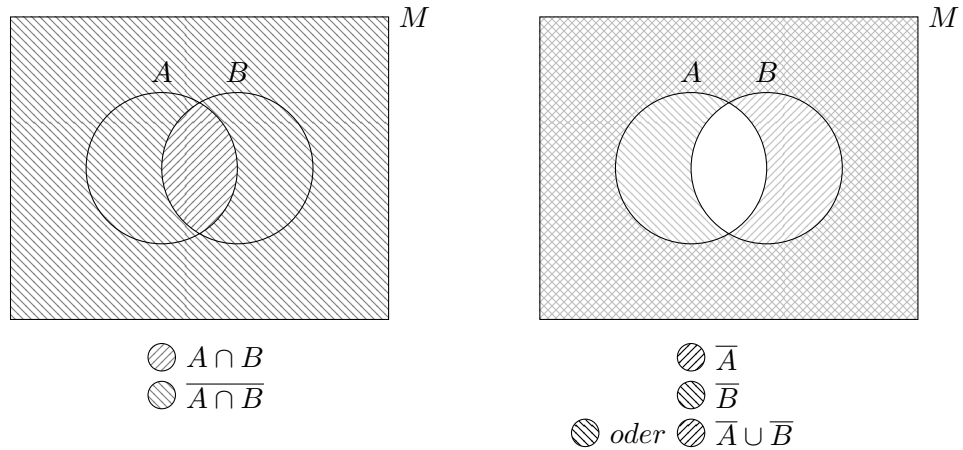
Der errechnete Wert für  $n$  ist kein Element der Definitionsmenge ( $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ ), also ist  $h$  nicht surjektiv.  $\square$

4. a)

$A$	$B$	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \cup B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Die Spalten für  $\overline{A \cap B}$  und  $\overline{A \cup B}$  sind identisch, daher gilt für alle  $x \in M$ :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$$



b)

$$\mathcal{P}(M) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\} \end{array} \right\}$$

- c)
- (i) falsch,  $a$  ist keine Menge, es gilt:  $a \not\subseteq M$ , daher  $a \notin \mathcal{P}(M)$ .
  - (ii) falsch,  $a$  ist keine Menge, daher kann es auch keine Teilmenge sein
  - (iii) wahr, da  $\{a\} \subseteq M$
  - (iv) falsch,  $a \notin \mathcal{P}(M)$ , daher ist  $\{a\}$  keine Teilmenge
  - (v) falsch,  $\{\{a\}\}$  ist keine Element der Potenzmenge
  - (vi) wahr, da  $\{a\} \in \mathcal{P}(M)$ , siehe (iii).