ALA 05 (HA) zum 16.05.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

16. Mai 2013

1. (i) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}} \cdot x^{\frac{7}{6}}$
$f'(x) = -\frac{1}{12} x^{-\frac{13}{12}}$

(ii) $f'(x) = cos(x^2) \cdot 2x$

(iii) $f'(x) = 2 \cdot sin(x) \cdot cos(x)$

(iv) $f'(x) = cos(x)^2 + sin(x) \cdot -sin(x)$

(v) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

(vi) $f'(x) = (x^3-1)^{arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot ln(x^3-1) + arctan(x) \cdot \left(\frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2\right)$

2. 1. f ist definiert in $\mathbb{R}$, denn dadurch kann im Nenner nie 0 stehen, da x^2 nie negativ wird.

2. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
$f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$
$f''(x) = \frac{4x \cdot (-1+x^2)}{(1+x^2)^3}$
Nullstellen von f: 0
Nullstellen von f': 1, -1
Nullstellen von f'': 0, 1 und -1

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x \cdot 2}{x^2 \cdot (\frac{1}{x^2})}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x \cdot (\frac{1}{x^2})}\right)$
Folglich gilt für die gesuchten Grenzwerte:
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

4. Aus 3. folgt:

- $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$
- $f(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 1)$
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (1, \infty)$
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (0, 1)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 0)$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (\infty, 1)$

Diese Ergebnisse lassen sich nun folgendermaßen darstellen:

f ist negativ	0	f ist positiv

f ist streng monoton fallend	-1	f ist streng monoton wachsend	1	f ist streng monoton fallend

f ist streng konvex	-1	f ist streng konkav	0	f ist streng konvex	1	f ist streng konkav

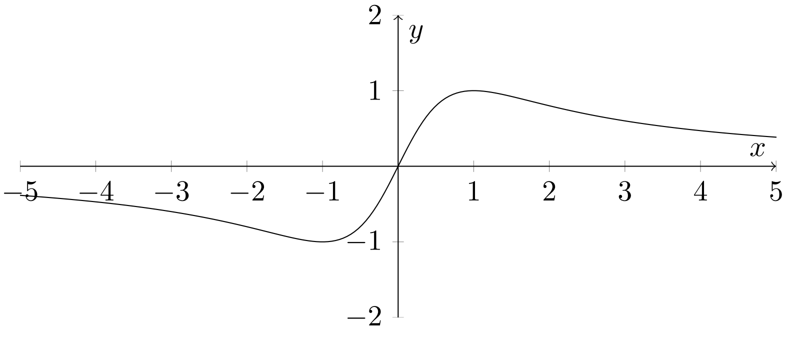
5. Aus 4. ergibt sich:
   - f hat bei x = 1 ein Maximum
   - f hat bei x = -1 ein Minimum
   - f hat bei x = 0 einen Wendepunkt
6. Asymptote: $g(x) = ax + b$ für $x \to \infty$:

$$a = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x+x^3}\right) = 0$$
$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+x^2} - 0\right) = 0$$

Für $x \to \infty$ ist die Asymptote also $g(x) = 0$. Enstsprechend kann man einfach zeigen, dass f für $x \to -\infty$ ebenso eine Asymptote $g(x) = 0$ hat.

Da $g(x)$ immer gleich 0 ist befindet sich der Snittpunkt mit $f(x)$ bei der bereits gefundenen Nullstelle der Funktion, also $x = 0$.

7.



x	0	0.5	1	4	-0.5	-1	-4
$f(x)$	0	0.8	1	$\frac{8}{17}$	-0.6	-1	$-\frac{8}{17}$

3. $f(1) = -1$

$f(2) = 17$

Die Werte von $f(x)$ haben im Intervall $[1, 2]$ einen Vorzeichenwechsel. Da die Funktion (wie alle Polynome) stetig ist, muss es dementsprechend eine Nullstelle im Intervall geben.

$$x_1 = \frac{2 - 4 \cdot 2^3 - (10 \cdot 2) + 5}{24 - 10} = 1.5526316$$

Entsprechend berechnen sich weitere x_n Werte.

x_0	$= 2$	x_4	$= 1.2122722$
x_1	$= 1.5526316$	x_5	$= 1.2118115$
x_2	$= 1.3177844$	x_6	$= 1.2118111$
x_3	$= 1.2277567$	x_7	$= 1.2118111$

Das Newtensche Näherungsverfahren gibt uns also einen ungefähren Wert von 1.2118111 für die Nullstelle zurück.

4. Die Seitenlängen des Rechtecks seien a und b Seitenlängen des Rechtecks, und F seine Fläche. Dabei haben die sich gegenüberliegenden Seiten die beide Teil des Seils sind beide die Länge a. Sowie L wie in der Aufgabe vorgegeben eine Konstante für die Länge der Leine.

$F = a \cdot b$
$L = 2a + b$
$b = L - 2a$
$F = a \cdot (L - 2a) = aL - 2a^2$

Diese Funktion zeigt nun die Fläche in Abhängikeit der Seitenlänge a. Nun ist das Maximum zu suchen.

$f(a) = aL - 2a^2$
$f'(a) = L - 4a$

Nullstelle der 1. Ableitung suchen:

$L - 4a = 0$
$a = \frac{L}{4}$

Da es sich um eine quadratische Funktion handelt haben wir damit bereits das Maximum gefunden. Das Rechteck ist also maximal groß wenn wir $a = \frac{L}{4}$ und folglich $b = \frac{L}{2}$ wählen.

5. Die Einheit *cm* wurde weggelassen.

$V = 1000 = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

a) $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$

$A'(r) = 4\pi r - \frac{500}{r^2}$

$A''(r) = 4\pi + \frac{1000}{r^3}$

Am Minimum für die Fläche A gilt $A'(r) = 0$ und $A''(r) > 0$:

$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{500}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{125}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} \approx 3.4139$

$A''(r) = 4\pi + \frac{1000}{\sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}} > 0$

Die Höhe muss dann so gewählt werden:

$h = \frac{1000}{2\pi \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}} \approx 27.3114$

b) $A(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{500}{r}$

$A'(r) = 2\pi r - \frac{500}{r^2}$

$A''(r) = 2\pi + \frac{1000}{r^3}$

Am Minimum für die Fläche A gilt $A'(r) = 0$ und $A''(r) > 0$:

$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\pi r = \frac{500}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{250}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.3013$

$A''(r) = 2\pi + \frac{1000}{\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}} > 0$

Die Höhe muss dann so gewählt werden:

$h = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}}} \approx 17.2051$