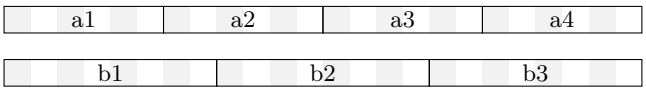
RS 05 (HA) zum 19.11.2012

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

22. November 2012

1. Die einzelnen Werte sollen nach folgendem Schema übersetzt werden:



Um dies zu erreichen, werden die Eingabebits verschoben und mit ODER kombiniert. Um nur die ersten 8 bits zu verwenden, wird der Modulo 256 gebildet.

```
int b1 = (a1 << 2 | a2 >>> 4) % 256;
int b2 = (a2 << 4 | a3 >>> 2) % 256;
int b3 = (a3 << 6 | a4)       % 256;
```

2. a) Der Code hat $\frac{360°}{15°} = 24$ Codewörter.

b) **Schritt 1** (2 Codewörter):

```
0 1
```

Schritt 2 (4 Codewörter):

```
00 01
11 10
```

Schritt 3 (8 Codewörter):

```
 000  001 011 [010]
[110] 111 101  100
```

Schritt 4 (6 Codewörter): Die Wörter in [Klammern] werden weggelassen, um aus 6 Codewörtern innerhalb von 2 Schritten $6 \cdot 2^2 = 24$ Codewörter zu erhalten.

```
000 001 011
111 101 100
```

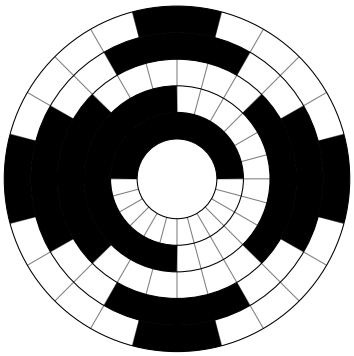
Schritt 5 (12 Codewörter):

```
0000 0001 0011 0111 0101 0100
1100 1101 1111 1011 1001 1100
```

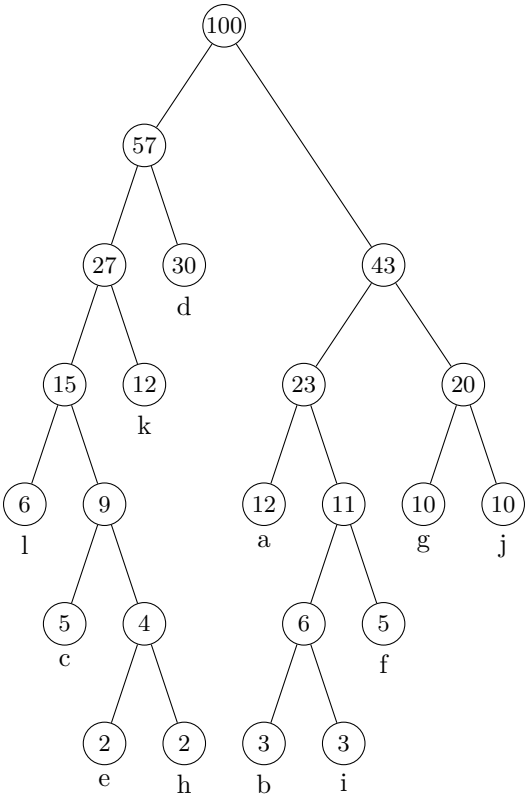
Schritt 6 (24 Codewörter):

```
00000 00001 00011 00111 00101 00100 01100 01101 01111 01011 01001 01100
11100 11001 11011 11111 11101 11100 10100 10101 10111 10011 10001 10000
```

Die folgende Winkelcodierscheibe stellt diesen Code dar:



3. a) Der entstehende Huffman-Baum kann so dargestellt werden (Wahrscheinlichkeits-Angaben werden zur Übersicht in Prozent notiert):



Legt man den reweils linken Zweig als 0 und den jeweils rechten Zweig als 1 fest, ergibt sich folgende Codierung:

a	100	b	10100	c	00010
d	01	e	000110	f	1011
g	110	h	000111	i	10101
j	111	k	001	l	0000

b)

$$\begin{aligned} H &= -2 \cdot 0.02 \cdot \log_2(0.02) - 2 \cdot 0.3 \cdot \log_2(0.3) - 2 \cdot 0.05 \cdot \log_2(0.05) - 0.06 \cdot \log_2(0.06) \\ &\quad - 2 \cdot 0.10 \cdot \log_2(0.10) - 2 \cdot 0.12 \cdot \log_2(0.12) - 0.30 \cdot \log_2(0.30) \\ &\approx 3.12 \end{aligned}$$

4. a) Eine unsystematischer Beispiel-Code:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0110	0010	0000	0100	0001	1000	1100	1001	0011	1111

$H_0 = 10 \cdot 0.1 \cdot \log_2(2^4) = \log_2(16) = 4$ Bit

$H = -10 \cdot 0.1 \cdot \log_2(0.1) = -\log_2(0.1) \approx 3.322$ Bit

$R = 4$ Bit $- 3.322$ Bit $= 0.678$ Bit

b) Es werden mindestens 7 bits (128 mögliche Codewörter) benötigt. Ein möglicher Code wäre die binäre Repräsentation, in der das $(7-n)$-te bit den Wert 2^n erhält.

$$0000000, 0000001, 0000010, 0000011, 0000100, ..., 1100011$$

$H_0 = 100 \cdot \frac{1}{100} \cdot \log_2(2^7) = 7$ Bit

$H = -100 \cdot \frac{1}{100} \cdot \log_2(1 : \frac{1}{100}) \approx 6,6438526$ Bit

$R = H_0 - H \approx 0,35615$ Bit

Redundanz pro Dezimalziffer:

$\frac{R}{2} = 0,178075$

c) **Zahlen 000...999:**
$H_0 = 1000 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \log_2(2^{10}) = 10$
Also: $\frac{10}{3} \approx 3,33$

Zahlen 0000...9999:
$H_0 = 10000 \cdot \frac{1}{10000} \cdot \log_2(2^{14}) = 14$
Also: $\frac{14}{4} = 3,5$
Da es sich um einen Blockcode (im Binärsystem) handelt lassen sich immer nur ganze Zweierpotenzen darstellen. Die Zweierpotenzen im höheren Zahelenbereich liegen weiter auseinander in diesem Beispiel sind die dichtesten Zweierpotenzen: $2^{10} = 1024$ und $2^{14} = 16384$. Wir decken im zweiten Fall also einen wesentlich größeren Zahlenbereich ab als nötig wäre. Wir könnten über 1,5 mal mehr Zahlen darstellen, somit ist der Informationsgehalt geringer.

d) Codierung:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
111	110	101	100	0111	0110	0101	0100	001	000

$$H_0 = 6 \cdot \frac{1}{10} \cdot \log_2(2^3) + 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \log_2(2^4) = 3,4 \text{ Bit}$$

$$H = -\left(\left(6 \cdot \frac{1}{10} \cdot \log_2(\frac{1}{10})\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \log_2(1 : \frac{1}{10})\right) \right) \approx 1,9931569 \text{ Bit}$$

$$R = H_0 - H = 1.4068431$$