Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

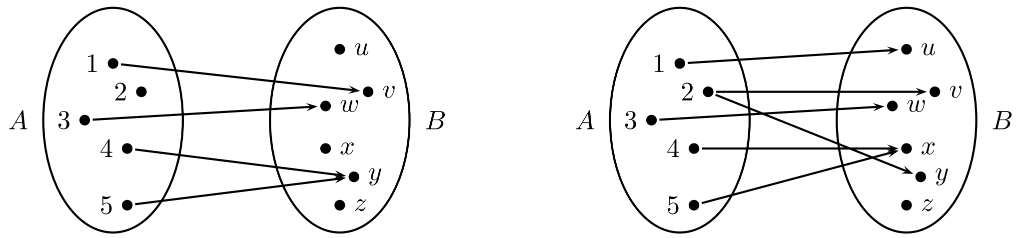
Thomas Andreae

Wintersemester 2012/13

Blatt 1

A: Präsenzaufgaben am 18./19. Oktober 2012

1. Für die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{u, v, w, x, y, z\}$ betrachten wir die folgenden Pfeildiagramme:



a) Stellen diese Pfeildiagramme Funktionen $f : A \to B$ dar? Was muss ggf. geändert werden, damit Funktionen $f : A \to B$ dargestellt werden?

b) Was ist zu ändern, damit injektive Funktionen dargestellt werden?

c) Ist es möglich, die Pfeile so zu ändern, dass surjektive Funktionen $f : A \to B$ dargestellt werden?

2. Für A und B wie in Aufgabe 1 sei eine Funktion $f : A \to B$ in Form einer Tabelle gegeben, die allerdings noch nicht ganz vollständig ist.

a	$f(a)$
1	v
2	w
3	y
4	
5	z

a) Ergänzen Sie die Tabelle so, dass f injektiv wird.

b) Ergänzen Sie die Tabelle so, dass f nicht injektiv wird.

3. Durch die folgenden Formeln werden Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 5$ und $h = x + 2$.

a) Beweisen Sie:

(i) f ist nicht injektiv.

(ii) g ist injektiv.

(iii) g ist nicht surjektiv.

(iv) h ist surjektiv.

Hinweis: Bei (ii) und (iii) gehe man wie auf Seite 7 im Skript vor, d.h., man gebe indirekte Beweise (Beweis durch Widerspruch).

b) Ist eine der drei Funktionen bijektiv? Ist eine der Funktionen weder injektiv noch surjektiv?

4. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei definiert durch $f(n) = \left((n-2)^2, n^2\right)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man beweise oder widerlege:

a) f ist injektiv.

b) f ist surjektiv.

5. Lesen Sie im Skript auf Seite 8 nach, was man unter einer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M versteht und geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ an.

B: Hausaufgaben zum 25./26. Oktober 2012

1. a) Es seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4\}$. Falls möglich, finde man Funktionen $f : A \to B$, $g : A \to B$ und $h : A \to B$, für die gilt:

(i) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(ii) g ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(iii) h ist bijektiv.

Falls Funktionen f, g und h mit den genannten Eigenschaften existieren, so gebe man diese Funktionen sowohl in Tabellenform als auch als Pfeildiagramme an. Andernfalls gebe man eine (kurze!) Begründung für deren Nichtexistenz.

b) Wie a) für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$.

c) Wie a) für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

2. Durch die folgenden Formeln werden Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert: $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = 5x - 3$ und $h(x) = x + 5$.

Welche dieser Funktionen sind injektiv, welche sind nicht injektiv. Ebenso für surjektiv und bijektiv. (Man gebe nicht nur die Antworten an, sondern auch die dazugehörigen Beweise!)

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv oder surjektiv sind. (Beweise!)

a) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, m) = n - m$

b) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(n, m) = (n + m, n - m)$

c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $h(n) = \big((n + 1)^2, n^2 + 1\big)$.

4. a) Man beweise die De Morgansche Regel $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ mit Hilfe einer Wahrheitstafel und veranschauliche diese Regel mit Hilfe von Venn-Diagrammen.

b) Es sei $M = \{a, b, c, d\}$. Man gebe die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ dieser Menge M an.

c) Es sei $M = \{a\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(i) $a \in \mathcal{P}(M)$

(ii) $a \subseteq \mathcal{P}(M)$

(iii) $\{a\} \in \mathcal{P}(M)$

(iv) $\{a\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(v) $\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(M)$

(vi) $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(M)$