DM 06-B (HA) zum 30.11.2012

Paul Bienkowski, Jascha Andersen, Benedikt Bushart

29. November 2012

1. a) $AB = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 30 & 17 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad AD = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 26 \\ -4 \end{pmatrix} \quad BB = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$CD = \begin{pmatrix} 12 \end{pmatrix} \quad DC = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & -6 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

b) Das gesuchte Element $(AB)_{3;2}$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$(AB)_{3;2} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 15$$

Die gesuchte Spalte $(AB)_{i;4}$ lautet folgendermaßen:

$$(AB)_{i;4} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix}$$

2. a) $B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$A(B_1 + B_2) = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 56 \\ 12 & -8 \\ 28 & 16 \end{pmatrix}$$

$$AB_1 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 52 \\ 6 & 12 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$$

$$AB_2 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 6 & -20 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

$$AB_1 + AB_2 = \begin{pmatrix} 26 & 52 \\ 6 & 12 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 6 & -20 \\ 14 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & 56 \\ 12 & -8 \\ 28 & 16 \end{pmatrix} = A(B_1 + B_2) \quad \Box$$

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 266 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 17 \\ 22 & 10 & 34 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 5 & 10 \\ 17 & 34 \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 5 & 10 \\ 17 & 34 \end{pmatrix} = (AB)^T \quad \Box$$

c) $A^T B^T$ ist unsinnig, da B^T 3 Zeilen hat, A^T jedoch nur 2 Spalten.

3. Im Folgenden gilt $N = 1 \ldots n$, $M = 1 \ldots m$, $P = 1 \ldots p$.
Es ist zu zeigen, dass

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

Es sei $B = B_1 + B_2$. Daraus folgt:

$$\big(b_{NP}\big) = \big(b1_{NP}\big) + \big(b2_{NP}\big)$$

Die linke Seite der Gleichung lässt sich also so formulieren:

$$A(B_1 + B_2) = AB = \sum_{N=1\cdots n} \big(a_{MN}\big) \cdot \big(b_{NP}\big) = \sum_{N=1\cdots n} \big(a_{MN}\big) \cdot \big(\big(b1_{NP}\big) + \big(b2_{NP}\big)\big)$$

Die rechte Seite der Gleichung lautet folgendermaßen:

$$AB_1 + AB_2 = \sum_{N=1\cdots n} \big(a_{MN}\big) \cdot \big(b1_{NP}\big) + \sum_{N=1\cdots n} \big(a_{MN}\big) \cdot \big(b2_{NP}\big)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln des Summenzeichens lässt sich dies umformen zu:

$$AB_1 + AB_2 = \sum_{N=1\cdots n} \big(a_{MN}\big) \cdot \big(\big(b1_{NP}\big) + \big(b2_{NP}\big)\big) = A(B_1 + B_2)$$

4. a) **Behauptung:** $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$

Beweis: Es sei $b \in f(f^-1(B'))$, dann gibt es ein $a \in f^{-1}(B')$ mit $f(a) = b$. Somit gilt $b \in B'$. Aus $b \in f(f^-1(B'))$ folgt also $b \in B'$. $\square$

b) Es sei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $B' = \{b, c\}$. Die Funktion $f : A \to B$ sei definiert durch $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$.

$$f^{-1}(B') = \{3\}$$
$$f(f^{-1}(B')) = f(\{3\}) = \{b\} \neq B'$$