ALA 06 (HA) zum 30.05.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

30. Mai 2013

1. (a) Wir berechnen $\lim\limits_{n\to\infty} O_n$:

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^3 = \frac{3\cdot 3^3}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 \quad (1)\\ &= \frac{81}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \frac{81n^4+192n^3+81n^2}{4n^4}\end{aligned}$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{81n^4+192n^3+81n^2}{4n^4}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^4}\cdot\frac{81+\frac{192}{n}+\frac{81}{n^2}}{4}\right) = \frac{81}{4}$

(b)

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{1}{4}x^4\,dx = \frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{4}0^4 = \frac{81}{4}$$

2. (i) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x]_1^3 = \left(\frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{2}3^2 - 18\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6\right) = -\frac{27}{2}$

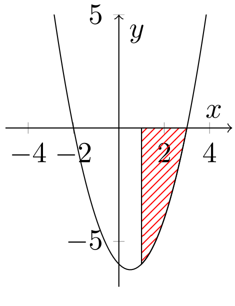
(ii) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [\sqrt[3]{x}]_1^3 = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1} \approx 0.442$

(iii) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_1^3 = \arctan(3) - \arctan(1) \approx 26.565$

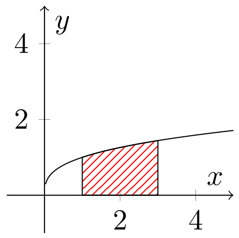
(iv) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [x\cdot\ln(x) - x]_1^3 = (3\cdot\ln(3) - 3) - (1\cdot\ln(1) - 1) \approx 1.296$

(v) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_1^3 = -e^{-3} - (-e^{-1}) \approx 0.318$

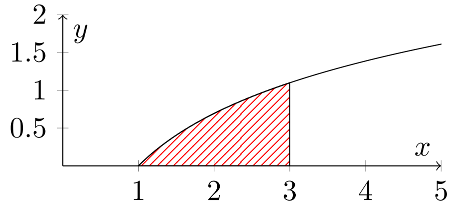
(i)



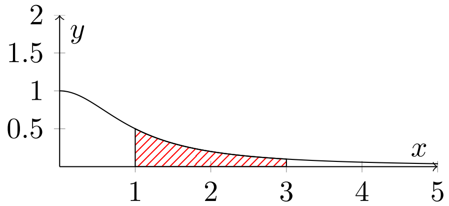
(ii)



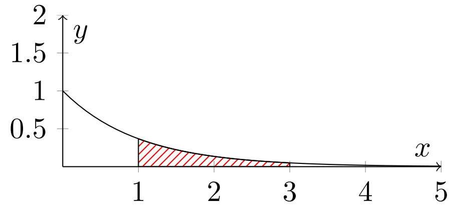
(iv)



(iii)



(v)



3. (i) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 5x$

(ii) $\int x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}}$

(iii) $f'(x) = \sin(3x), g(x) = x$. Dann ist $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$ und $g'(x) = 1$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \sin 3x\, dx &= -\frac{1}{3}\sin 3x \cdot x - \int -\frac{1}{3}\sin 3x \cdot 1\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\sin 3x \cdot x - \frac{1}{3}\int -\sin 3x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}x \cdot \sin 3x - \frac{1}{9} \cdot \cos 3x
\end{aligned}$$

Probe: $\left(-\frac{1}{3}x \cdot \sin 3x - \frac{1}{9} \cdot \cos 3x\right)' = x \cdot \sin(3x)$

(iv)

$$\begin{aligned}
f'(x) = x^3, g(x) &= lnx. \text{ Dann ist} f(x) = \frac{1}{4}x^4 \text{ und } g'(x) = \frac{1}{x} \\
\int x^3 \cdot lnx\, dx &= \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4
\end{aligned}$$

Probe: $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4\right)' = x^3 \cdot ln(x)$

(v)

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x &= x^2 e^x - \int 2x e^x \,\mathrm{d}x && (2)\\
&= x^2 e^x - 2\int x e^x \,\mathrm{d}x && (3)\\
&= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x\right) && (4)\\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x && (5)\\
&= e^x(x^2 - 2x + 2) && (6)
\end{aligned}$$

Probe: $(e^x(x^2 - 2x + 2))' = x^2 e^x$

5. (i) Nullstellen der ersten Ableitung: $2, 6$
$f''(2) = -12$
$f''(6) = 12$

Extremwerte berechnen:
$f(2) = 26$
$f(6) = 1$

Grenzen überprüfen:
$f(6) = 1$
$f(0) = 1$

Bei $x = 6$ befindet sich somit ein lokales minimum und bei $x = 2$ ein lokales maximum. Die Tageshöchsttemperatur lässt sich am Maximum der Funktion im Intervall $[0, 6]$ erkennen sie liegt also bei x = 2. Also beträgt die Tageshöchsttemperatur 26 °C.

(ii) Die Tagestiefsttemperatur lässt sich am Minimum der Funktion im Intervall $[0, 6]$ erkennen, aus (i) folg somit das sie zweimal gemessen wurde (bei $x = 6$ und $x = 0$). Die Tagestiefsttemperatur beträgt also: 1 °C

(iii)

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{12}{3}x^3 + 18x^2 + 1x$$

$$\int_0^6 x^3 - 12x^2 + 36x + 1 \,\mathrm{d}x = F(6) - F(0) = 114$$

$$\frac{114}{6} = 19$$

Die Durchschnittstemperatur beträgt also 19 °C.