Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)
Thomas Andreae

Wintersemester 2012/13
Blatt 5

A: Präsenzaufgaben am 15./16. November 2012

1. Es sei $A = \{a, b, c, d, e\}$. Wir betrachten die folgende Relation R auf A:

$$R = \Big\{(a, b),\ (a, c),\ (a, d),\ (c, d),\ (c, e),\ (c, a),\ (c, c),\ (d, d),\ (e, e)\Big\}.$$

a) Veranschaulichen Sie R als (gerichteten) Graphen und erläutern Sie anhand dieses Graphen, dass R nicht reflexiv, nicht symmetrisch und auch nicht transitiv ist.

b) Ist R irreflexiv? Antisymmetrisch?

c) Welche weiteren Paare muss man zu R hinzufügen, damit eine transitive Relation entsteht?

d) Nun soll aus R eine Ordnungsrelation auf A entstehen. Machen Sie Vorschläge, wie das geschehen könnte, ohne R allzu sehr zu verändern.

2. Für A wie in Aufgabe 1 betrachten wir nun eine andere Relation auf A:

$$S = \Big\{(a, b),\ (b, c),\ (d, e),\ (a, a),\ (b, b),\ (e, e)\Big\}.$$

a) Stellen Sie S als Graphen dar! Erreichen Sie durch Hinzunahme möglichst weniger Paare („Pfeile"), dass S zu einer Äquivalenzrelation $\widetilde{S}$ auf A wird.

b) Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\widetilde{S}$ an!

3. a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ sei eine Relation R erklärt durch $(x, y) \in R \Leftrightarrow xy \geq 0$. Ist R eine Äquivalenzrelation?

b) Auf der Menge $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei eine Relation S erklärt durch $(x, y) \in S \Leftrightarrow xy > 0$. Ist S eine Äquivalenzrelation?

c) Falls bei a) oder b) eine Äquivalenzrelation vorliegt, so gebe man die zugehörigen Äquivalenzklassen an.

B: Hausaufgaben zum 22./23. November 2012

1. Es sei $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ und R sei die folgende Relation auf A:

$$R = \Big\{(a, b),\ (b, c),\ (c, d),\ (b, e),\ (e, f)\Big\}.$$

a) Veranschaulichen Sie R als (gerichteten) Graphen und stellen Sie R als $0, 1$-Matrix dar.

b) Durch Hinzufügen von möglichst wenigen Paaren soll erreicht werden, dass aus R eine Ordnungsrelation R^+ auf A entsteht. Welche Paare muss man hinzufügen?

c) Stellen Sie R^+ durch ein Hasse-Diagramm dar.

d) Es sei $A = \{a, b, c, d, e\}$. Betrachtet werde die Relation $R = \{(a, b),\ (b, c),\ (c, d),\ (b, e)\}$. Durch Hinzufügen von möglichst wenigen Paaren soll erreicht werden, dass aus R eine Äquivalenzrelation S entsteht („kleinste Äquivalenzrelation, die R umfasst"). Welche Paare muss man hinzufügen? Wie kann man S kurz und knapp angeben, ohne alle Paare von S aufzuzählen?

2. Wie Aufgabe 1, jedoch diesmal für folgende Relation auf $A = \{a, b, c, d, e, f\}$:

$$R = \Big\{(a, b),\ (b, d),\ (e, f)\Big\}.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass das Element c nach wie vor zu A gehört!

3. Es sei $A = \{a, b, c, d\}$. Man gebe – wenn möglich – eine Relation R mit $(a, b) \in R$ an, für die gilt:

a) R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

b) R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

c) R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

Geben Sie R sowohl als Menge von Paaren als auch in der Form eines Graphen an. Geben Sie jeweils auch kurze Begründungen, die zeigen, dass R tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt.

4. a) Auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachten wir die folgende Relation R („Teilbarkeitsrelation"):

$$R = \Big\{(n, m) : n, m \in A \text{ und } n \mid m\Big\}.$$

Geben Sie die Elemente von R an und stellen Sie R sowohl durch einen Graphen als auch durch ein Hasse-Diagramm dar!

b) Nun sei A die Potenzmenge der Menge $M = \{1, 2\}$, d.h., $A = \mathcal{P}(M) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1, 2\}\}$. Auf der Menge A betrachten wir die folgende Relation R („Inklusion"):

$$R = \Big\{(X, Y) : X, Y \in A \text{ und } X \subseteq Y\Big\}.$$

Stellen Sie R sowohl durch einen Graphen als auch durch ein Hasse-Diagramm dar!

c) Wie b) für $M = \{1, 2, 3\}$: Geben Sie zunächst die Menge $A = \mathcal{P}(M)$ an; stellen Sie diesmal R nur als Hasse-Diagramm (und nicht als Graphen) dar!