Mathematatik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae

Wintersemester 2012/13
Blatt 4

A: Präsenzaufgaben am 8./9. November 2012

1. Es seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{a, b, c, d, e\}$.

a) Wie viele Abbildungen $f : A \to B$ gibt es, für die $f(3) \neq f(2)$ gilt?

b) Wie viele Abbildungen $f : A \to B$ gibt es, für die neben $f(3) \neq f(2)$ auch noch $f(4) \neq f(3)$ und $f(4) \neq f(2)$ gilt?

c) Wie viele Abbildungen $f : A \to B$ gibt es und wie viele davon sind injektiv?

d) Wie viele Abbildungen $f : A \to B$ sind surjektiv?

2. Die ersten Zeilen des Pascalschen Dreiecks lauten:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

a) Berechnen Sie die nächste Zeile mit Hilfe der bekannten Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

b) A sei eine Menge mit $|A| = 10$. Wie viele 4-elementige Teilmengen besitzt A?

c) Nun gelte $|A| = 30$. Wie viele 4-elementige Teilmengen besitzt A in diesem Fall? Und wie viele 24-elementige Teilmengen besitzt A?

3. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}. \qquad (\star)$$

Hinweis: Nutzen Sie für den Induktionsschluss, dass die bekannte Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten gilt.

b) Deuten Sie die Gleichung $(\star)$ am Pascalschen Dreieck.

B: Hausaufgaben zum 15./16. November 2012

1. a) Es seien $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Wie viele Abbildungen $g : X \to Y$ gibt es und wie viele davon sind injektiv? Wie viele Abbildungen $g : X \to Y$ gibt es, für die $g(2)$, $g(3)$ und $g(4)$ drei verschiedene Elemente sind?

b) Wie viele verschiedene Tipps gibt es beim Lotto „6 aus 49"?

c) Für die Menge M gelte $|M| = 1000$. Wie viele Teilmengen mit mindestens 997 Elementen besitzt M?

2. a) Wie lautet der Koeffizient von x^5y^{11} in $(x+y)^{16}$ und wie lautet der Koeffizient von $x^3y^5z^2$ in $(x+y+z)^{10}$?

b) Wie viele (sinnvolle oder sinnlose) Wörter mit zehn Buchstaben kann man durch Veränderung der Reihenfolge aus den Buchstaben des Wortes CAPPUCCINO bilden? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn stattdessen MANGOLASSI genommen wird? Oder wenn es um die zwölf Buchstaben des Wortes SELTERWASSER geht?

c) In einem Laden gibt es genau 10 verschiedene Getränkesorten zu kaufen, von jeder Sorte stehen mindestens 6 Flaschen zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Kiste mit 6 Flaschen zusammenzustellen?

3. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 3$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{i=3}^{n} \binom{i}{i-3} = \binom{n+1}{4}.$$

4. a) Mit der Siebformel bestimme man die Anzahl derjenigen $k \in \mathbb{N}$ $(1 \leq k \leq 2000)$, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar sind.

b) Ebenfalls mit der Siebformel: Bestimmen Sie die Anzahl derjenigen $k \in \mathbb{N}$ $(1 \leq k \leq 1000)$, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 noch durch 11 teilbar sind.