ALA 10 (HA) zum 27.06.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

27. Juni 2013

1. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy^2 - 3y + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^2y - 3x$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-sin(x^2y) \cdot 2xy) \cdot e^{xy} + cos(x^2y) \cdot (e^{xy} \cdot y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-sin(x^2y) \cdot x^2) \cdot e^{xy} + cos(x^2y) \cdot (e^{xy} \cdot x)$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{cos(x) \cdot (x^2+y^2) - (2x+y^2) \cdot (sin(x)+cos(x))}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-sin(y) \cdot (x^2+y^2) - (x^2+2y) \cdot (sin(x)+cos(x))}{(x^2+y^2)^2}$$

(d)

$$f(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot (1-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot (1-2y)$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy^3 + ye^{x^2y} \cdot 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^2y^2 + e^{x^2y} \cdot x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = 6xy^2 + ((e^{x^2y} * x^2) + (2xy * 2x))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) 6xy^2 +$$

3. (i) Ableitungen bestimmen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - 2y - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = -2$$

Hessesche Matrix: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$4 > 0,\ \Delta = 4 > 0$

Es handelt sich somit um ein strenges lokales Minimum, denn H_f ist positiv definiert.

(ii)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3y - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 3x - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = -3$$

Hessesche Matrix: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$2 > 0,\ \Delta = -1 < 0$

Es ist keien Aussage über das maximum möglich, denn H_f ist indefinit.

(iii)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 27$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = 0$$

kritische Stellen bestimmen:

$$\begin{aligned} 3y^2 - 27 &= 0 \\ 6x^2 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{27}{3}} = 3 \\ x &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Hessesche Matrix: $\begin{pmatrix} 12 \cdot \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$

$\approx 16,97 > 0$, $\Delta \approx 305,470 > 0$

Es handelt sich somit um ein strenges lokales Minimum, denn H_f ist positiv definiert.

4. (a) Sei $G(x,y)$ eine Funktion die den Gewinn darstellt. Der Gewinn erechnet sich aus dem Abziehen der Kosten vom Erlös. $G(x,y) = 12x + 28y - C(x,y)$ Von dieser Funktion ist nun ein Maximum zu suchen.

(b)

$$x = 320 - 2y$$

Wir setzen die Zusatzbedingung in die Funktion aus a ein.
$7(320 - 2y) + 22y - 0,01(320 - 2y)^2 - 0,02(320 - 2y)y - 0,16y^2 - 120 = -0,16y^2 + 14,4y + 1096$

Extrempunkt suchen:
Es handelt sich um ein Polynom zweiten Grades, also besitzt es genau einen Extrempunkt. Durch ausprobieren kommt man leicht auf 45.
Der Gewinn bei mit dieser Zusatzbedingung ist also bei 45 verkauften Einheiten des Gutes B maximal (also 230 Einheiten des Gutes A).

(c) b: $-0,16(45)^2 + 14,4 \cdot 45 + 1096 = 1420$