

ALA 07 (HA) zum 06.06.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

6. Juni 2013

1. (i)

$$\frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x + (2B-3A)}{(x+2)(x-3)}$$

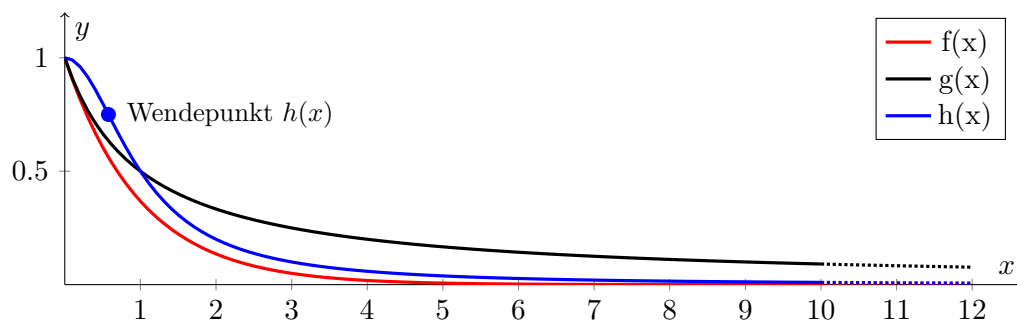
$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad A+B &= 1 & \Rightarrow \quad A &= 1-B & \Rightarrow \quad A &= 1/5 \\ 2B-3A &= 1 & 4 &= 5B & B &= 4/5 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{1}{5(x+2)} + \frac{4}{5(x-3)} dx = \frac{1}{5} \ln|x+2| + \frac{4}{5} \ln|x-3|$$

Probe:

$$\frac{1}{5} \ln|x+2| + \frac{4}{5} \ln|x-3| = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{(x-3)+4(x+2)}{5(x+2)(x-3)} = \frac{x+1}{(x+2)(x-3)} \quad \square$$

2. (a) Skizze:



Nur $h(x)$ hat einen Wendepunkt:

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$h'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$h''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^4}$$

Wendestelle bei $6x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

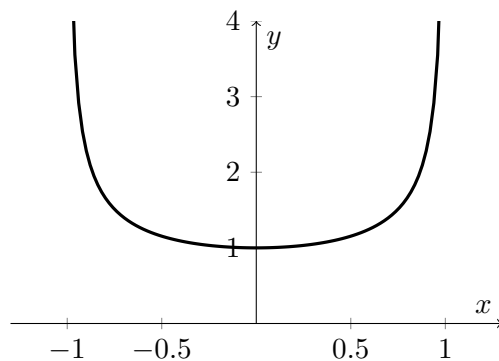
(b)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\int_0^z e^{-x} dx \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left([-e^{-x}]_0^z \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} (e^0 - e^{-z}) = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\int_0^z \frac{1}{1+x} dx \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} ([\ln(x+1)]_0^z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (\ln(z+1)) - \ln(1) = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\int_0^z \frac{1}{1+x^2} dx \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} ([\arctan x]_0^z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (\arctan(z)) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

(c) Skizze:



Da die Funktion an der y-Achse spiegelsymmetrisch ist, gilt für die Fläche:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 [\arcsin(x)]_0^1 = 2 (\arcsin(1) - \arcsin(0)) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi$$

3. (i) $\frac{1}{8} (\sin(0) + 2 \sin(0.25) + 2 \sin(0.5) + 2 \sin(0.75) + \sin(1)) \approx 0.45720099376$

(ii) $\frac{1}{10} (\sin(0) + 2 \sin(0.2) + \dots + 2 \sin(0.8) + \sin(1)) \approx 0.458164346$

(iii) $\frac{1}{20} (\sin(0) + 2 \sin(0.1) + \dots + 2 \sin(0.9) + \sin(1)) \approx 0.4593145489$

4. (a) $f(1) = 10 \cdot e^{-\frac{2}{5}} \approx 6.7032$

$$f(2) = 20 \cdot e^{-\frac{4}{5}} \approx 8.9866$$

$$f(6) = 60 \cdot e^{-\frac{12}{5}} \approx 5.4431$$

$$f(12) = 120 \cdot e^{-\frac{24}{5}} \approx 0.9876$$

(b) $f'(x) = 10x \cdot e^{-\frac{2}{5}x} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 10e^{-\frac{2}{5}x} = 10e^{-\frac{2}{5}x} \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 25e \approx 9.1970$$

Die maximale Konzentration von etwa $9.1970 \frac{mg}{l}$ wird nach zweieinhalb Stunden erreicht.

(c)

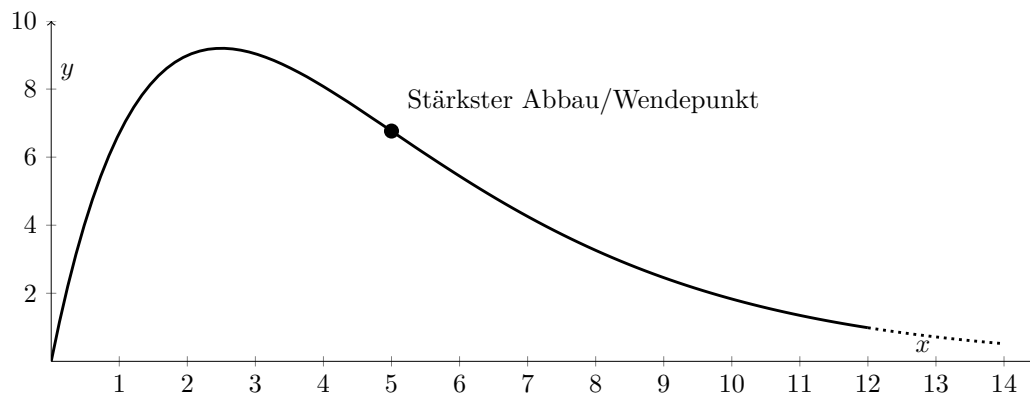
$$\begin{aligned}
 \int e^{-\frac{2}{5}x} \cdot 10x \, dx &= -\frac{5}{2}e^{-\frac{2}{5}x} \cdot 10x - \int -\frac{5}{2}e^{-\frac{2}{5}x} \cdot 10 \, dx \\
 &= -25x \cdot e^{-\frac{2}{5}x} + 25 \int e^{-\frac{2}{5}x} \, dx \\
 &= -25x \cdot e^{-\frac{2}{5}x} + 25 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot e^{-\frac{2}{5}x} \\
 &= -25x \cdot e^{-\frac{2}{5}x} \left(x + \frac{5}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \left[-25x \cdot e^{-\frac{2}{5}x} \left(x + \frac{5}{2}\right) \right]_0^6 \approx 7.2037$$

(d)

$$\frac{1}{6} \left[-25x \cdot e^{-\frac{2}{5}x} \left(x + \frac{5}{2}\right) \right]_6^{12} \approx 2.7157$$

(e) Skizze:



$$f'(x) = 10e^{-\frac{2}{5}x} \left(1 - \frac{2}{5}x\right)$$

$$f''(x) = e^{-\frac{2}{5}x} \left(-8 + \frac{8}{5}x\right) = 0 \Rightarrow -8 + \frac{8}{5}x = 0 \Rightarrow x = 5$$

5. (a)

$$h(x) = (x^2 + 1)^{\cos x} = e^{\ln(x^2+1) \cos x} = e^{\cos x \cdot \ln(x^2+1)}$$

$$h'(x) = (x^2 + 1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x^2 + 1) + \cos x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right)$$

(b) Es sei

$$t = \sqrt{\frac{x}{4} + 3} \Leftrightarrow x = 4t^2 - 12 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 8t$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \sin \left(\sqrt{\frac{x}{4} + 3} \right) dx &= \int \sin t \cdot 8t dt \\ &= -\cos t \cdot 8t - \int -8t \cos t dt \\ &= -8t \cdot \cos t + 8 \sin t \\ &= -8\sqrt{\frac{x}{4} + 3} \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{x}{4} + 3} \right) + 8 \sin \left(\sqrt{\frac{x}{4} + 3} \right) \end{aligned}$$

(c) Der Nenner lässt sich in Faktoren zerlegen: $x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$

$$\begin{aligned} \frac{3x + 2}{x^2 - x - 6} &= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x + 2)}{x^2 - x - 6} = \\ &= \frac{(A + B)x - 3A + 2B}{x^2 - x - 6} \end{aligned}$$

Für A und B ergeben sich somit: $A = \frac{11}{5}$, $B = \frac{4}{5}$

Man erhält eine Partialbruchzerlegung: $\frac{3x+2}{x^2-x-6} = \frac{11}{5(x+2)} + \frac{4}{5(x-3)}$ Nun kann man ganz einfach gemäß der Regeln für integrieren.

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - x - 6} dx = \int \frac{11}{5x + 10} + \int \frac{4}{5x - 15} dx = \frac{11}{5} \cdot \ln|x + 2| + \frac{4}{5} \cdot \ln|x - 3|$$

(d) Der Nenner lässt sich in Faktoren zerlegen: $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

$$\frac{x+1}{x^2+8x+16} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x+4)}{x^2+8x+16}$$

Für A und B ergeben sich somit: $A + B = 1$ und $4A + 4B = 1$ also zB:
 $A = B = \frac{1}{2}$

Man erhält eine Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{2x+8} + \frac{1}{2x+8}$ Nun kann man ganz einfach gemäß der Regeln für Integrieren.

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 8x + 16} dx = \int \frac{1}{2x + 8} + \int \frac{1}{2x + 8} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x + 4| + \frac{1}{2} \cdot \ln|x + 4| = \ln|x + 4|$$