DM 02-B (HA) zum 02.11.2012

Paul Bienkowski, Jascha Andersen

27. Oktober 2012

1. a)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b)

$$\begin{aligned}
A(1):&\quad \frac{1}{1\cdot 2} && = \frac{1}{2} && = 1 - \frac{1}{1+1} && = 1 - \frac{1}{2} \\
A(2):&\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} && = \frac{2}{3} && = 1 - \frac{1}{2+1} && = 1 - \frac{1}{3} \\
A(3):&\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} && = \frac{3}{4} && = 1 - \frac{1}{3+1} && = 1 - \frac{1}{4} \\
A(4):&\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} && = \frac{4}{5} && = 1 - \frac{1}{4+1} && = 1 - \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

c) **Induktionsanfang:** $A(1)$ ist wahr, siehe b).

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Gleichung $A(n)$ gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \tag{IA}$$

Es ist zu zeigen, dass die Gleichung $A(n+1)$ ebenfalls gilt, also:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2} \tag{1}$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{\text{(IA)}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned} \tag{2}$$

Damit ist (1) bewiesen. □

2. a)

$$\begin{aligned}
&B(1): && \sum_{i=1}^{1}(2i-1) && = 2\cdot 1-1 && && = 1 && = 1^2\\
&B(2): && \sum_{i=1}^{2}(2i-1) && = (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1) && = 1+3 && = 4 && = 2^2\\
&B(3): && \sum_{i=1}^{3}(2i-1) && = (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1) && = 1+3+5 && = 9 && = 3^2\\
&B(4): && \sum_{i=1}^{4}(2i-1) && = (2\cdot 1-1)+\cdots+(2\cdot 4-1) && = 1+3+5+7 && = 16 && = 4^2
\end{aligned}$$

b)

$$B(n): \quad (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\cdots+(2\cdot n-1) = n^2$$

Das Quadrat einer beliebigen natürlichen Zahl n ist gleich der Summe aller Zweifachen der natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind (also 1 bis n), jeweils minus 1.

c) **Induktionsanfang:** $B(1)$ ist wahr, siehe a).

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Gleichung $B(n)$ gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1) = n^2 \tag{IA}$$

Es ist zu zeigen, dass die Gleichung $B(n+1)$ ebenfalls gilt, also:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2\cdot i-1) = (n+1)^2 \tag{3}$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\,=1}^{n+1}(2\cdot i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(2\cdot i-1) + (2\cdot(n+1)-1)\\
&\overset{(\mathrm{IA})}{=} n^2 + (2\cdot n+2)-1\\
&= n^2+2n+1\\
&= (n+1)^2
\end{aligned} \tag{4}$$

Damit ist (3) bewiesen. □

3. a) $A(n): \quad 13n < 2^n$

Induktionsanfang: Es ist zu zeigen, dass $A(7)$ gilt:

$$13 \cdot 7 = 91 < 2^7 = 128$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Ungleichung $A(n)$ gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$. Dann gilt:

$$13n \leq 2^n \tag{IA}$$

Es ist zu zeigen, dass die Ungleichung $A(n+1)$ ebenfalls gilt, also:

$$13(n+1) \leq 2^{n+1} \tag{5}$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$13(n+1) = 13n + 13 \overset{\text{(IA)}}{<} 2^n + 13 \overset{(\star)}{<} 2^n + 2^n = 2^{n+1} \tag{6}$$

Der mit $(\star)$ markierte Schritt ist zulässig, da für $n \geq 7$ die Ungleichung $13 < 2^n$ gilt. Damit ist (5) bewiesen. $\square$

b) $B(n): \quad n^2 < 2^n$ ist gültig für:

$$\begin{array}{lcccccccl}
B(1): & 1^2 & < & 2^1 & \Leftrightarrow & 1 & < & 2 & \textit{wahr} \\
B(2): & 2^2 & < & 2^2 & \Leftrightarrow & 4 & < & 4 & \textit{falsch} \\
B(3): & 3^2 & < & 2^3 & \Leftrightarrow & 9 & < & 8 & \textit{falsch} \\
B(4): & 4^2 & < & 2^4 & \Leftrightarrow & 16 & < & 16 & \textit{falsch} \\
B(5): & 5^2 & < & 2^5 & \Leftrightarrow & 25 & < & 32 & \textit{wahr} \\
B(6): & 6^2 & < & 2^6 & \Leftrightarrow & 36 & < & 64 & \textit{wahr}
\end{array}$$

Behauptung: $B(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$.

Induktionsanfang: $B(5)$ ist wahr, siehe oben.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Ungleichung $B(n)$ gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Dann gilt:

$$n^2 < 2^n \tag{IA}$$

Es ist zu zeigen, dass die Ungleichung $B(n+1)$ ebenfalls gilt, also:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1} \tag{7}$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{(IA)}}{<} 2^n + 2n + 1 \overset{(\star)}{\leq} 2^n + 2^n = 2^{n+1} \tag{8}$$

Für den mit $(\star)$ markierten Schritt ist zu zeigen, dass $2n+1 \leq 2^n$ für $n \geq 5$ gilt. Diese Aussage wird als $B'(n)$ bezeichnet. Sie kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden. Es gilt $B'(5)$, da $2 \cdot 5 + 1 \leq 2^5 \Leftrightarrow 9 \leq 32$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $B'(n+1)$ ebenfalls gilt, wenn $B'(n)$ wahr ist:

$$B'(n+1): \quad 2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n+1) + 2 \overset{B'(n) gilt}{\leq} 2^n + 2 \overset{(\star\star)}{\leq} 2^n + 2^n = 2^{n+1} \tag{9}$$

Der mit ($\star\star$) bezeichnete Schritt ist zulässig, da für alle $n \geq 5$ die Ungleichung $2 \leq 2^n$ gilt.

Somit ist die Aussage $B'(n)$ für $n \geq 5$ bewiesen, also ist der Schritt ($\star$) in (8) zulässig, und somit ist die Aussage $B(n)$ ebenfalls bewiesen. $\square$

4. $A(n): \quad 2^n < n!$ ist gültig für:

$$\begin{array}{lcccccccl} A(1): & 2^1 & < & 1! & \Leftrightarrow & 2 & < & 1 & \mathit{falsch} \\ A(2): & 2^2 & < & 2! & \Leftrightarrow & 4 & < & 2 & \mathit{falsch} \\ A(3): & 2^3 & < & 3! & \Leftrightarrow & 8 & < & 6 & \mathit{falsch} \\ A(4): & 2^4 & < & 4! & \Leftrightarrow & 16 & < & 24 & \mathit{wahr} \\ A(5): & 2^5 & < & 5! & \Leftrightarrow & 32 & < & 60 & \mathit{wahr} \end{array}$$

Behauptung: $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Induktionsanfang: $A(4)$ ist wahr, siehe oben.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Ungleichung $A(n)$ gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$. Dann gilt:

$$2^n < n! \tag{IA}$$

Es ist zu zeigen, dass die Ungleichung $A(n+1)$ ebenfalls gilt, also:

$$2^{n+1} < (n+1)! \tag{10}$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{(IA)}}{<} n! \cdot 2 \overset{(\star)}{<} n! \cdot n = (n+1)! \tag{11}$$

Der mit ($\star$) markierte Schritt ist gültig, da $2 < n$ für alle $n \geq 4$ gilt. Damit ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq 4$ bewiesen. $\square$