

ALA 05 (HA) zum 16.05.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

16. Mai 2013

1. (i) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}} + x^{\frac{7}{6}}$
 $f'(x) = -\frac{1}{12}x^{-\frac{13}{12}}$
(ii) $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$
(iii) $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
(iv) $f'(x) = \cos(x)^2 + \sin(x) \cdot -\sin(x)$
(v) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
(vi) $f'(x) = (x^3 - 1)^{\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x^3 - 1) + \arctan(x) \cdot \left(\frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2\right)$
2. 1. f ist definiert in \mathbb{R} , denn im Nenner kann keine 0 stehen da x^2 nie negativ wird.
2. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
 $f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$
 $f''(x) = \frac{4x \cdot (-1+x^2)}{(1+x^2)^3}$
Nullstellen von f : 0
Nullstellen von f' : 0
Nullstellen von f'' : 0, 1 und -1
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \cdot 2}{x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)$
Folglich gilt für die gesuchten Grenzwerte:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
4. Aus 3. folgt:
 - $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$
 - $f(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$
 - $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 1)$
 - $f'(x) < 0$ für alle $x \in (1, \infty)$
 - $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$

- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (0, 1)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 0)$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (\infty, 1)$

Diese Ergebnisse lassen sich nun folgendermaßen darstellen:

f ist negativ		0	f ist positiv	
-1			1	
f ist streng monoton fallend	f ist streng monoton wachsend		f ist streng monoton fallend	
-1	0		1	
f ist streng konvex	f ist streng konkav	f ist streng konvex	f ist streng konkav	

5. Aus 4. ergibt sich:

f hat bei $x = 1$ ein Maximum

f hat bei $x = -1$ ein Minimum

f hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt

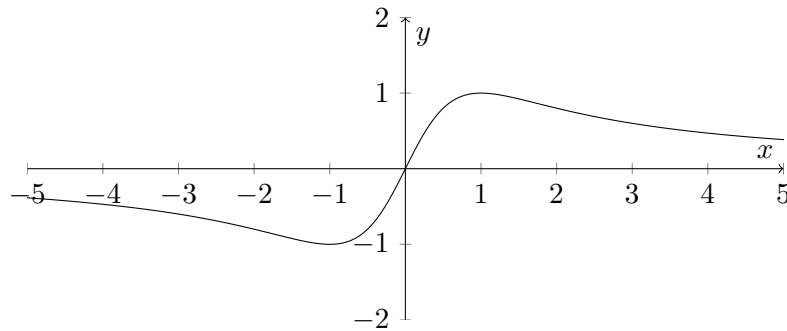
6. Asymptote: $g(x) = ax + b$ für $x \rightarrow \infty$:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x + x^3} \right) = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1 + x^2} - 0 \right) = 0$$

Für $x \rightarrow \infty$ ist die Asymptote also $g(x) = 0$. Entsprechend kann man einfach zeigen, dass f für $x \rightarrow -\infty$ ebenso eine Asymptote $g(x) = 0$ hat.

Da $g(x)$ immer gleich 0 ist befindet sich der Schnittpunkt mit $f(x)$ bei der bereits gefundenen Nullstelle der Funktion, also $x = 0$.



7.

x	0	0.5	1	4	-0.5	-1	-4
$f(x)$	0	0.8	1	8/17	-0.6	-1	-8/17

3. $f(1) = -1$
 $f(2) = 17$

Die Werte von $f(x)$ haben im Intervall $[1, 2]$ einen Vorzeichenwechsel. Da die Funktion (wie alle Polynome) stetig ist, muss es dementsprechend eine Nullstelle im Intervall geben.

$$x_1 = \frac{2 - 4 \cdot 2^3 - (10 \cdot 2) + 5}{24 - 10} = 1.5526316$$

Entsprechend berechnen sich weitere x_n Werte.

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.5526316 \\ x_2 &= 1.3177844 \\ x_3 &= 1.2277567 \\ x_4 &= 1.2122722 \\ x_5 &= 1.2118115 \\ x_6 &= 1.2118111 \\ x_7 &= 1.2118111 \end{aligned}$$

Das Newtonsche Näherungsverfahren gibt uns also einen ungefähren Wert von 1.2118111 für die Nullstelle zurück.

4. Die Seitenlängen des Rechtecks seien a und b Seitenlängen des Rechtecks, und F seine Fläche. Dabei haben die sich gegenüberliegenden Seiten die beide Teil des Seils sind beide die Länge a . Sowie L wie in der Aufgabe vorgegeben eine Konstante für die Länge der Leine.

$$F = a \cdot b$$

$$L = 2a + b$$

$$b = L - 2a$$

$$F = a \cdot (L - 2a) = aL - 2a^2$$

Diese Funktion zeigt nun die Fläche in Abhängigkeit der Seitenlänge a . Nun ist das Maximum zu suchen.

$$f(a) = aL - 2a^2$$

$$f'(a) = L - 4a$$

Nullstelle der 1. Ableitung suchen:

$$L - 4a = 0$$

$$a = \frac{L}{4}$$

Da es sich um eine quadratische Funktion handelt haben wir damit bereits das Maximum gefunden. Das Rechteck ist also maximal groß wenn wir $a = \frac{L}{4}$ und folglich $b = \frac{L}{2}$ wählen.

5. a)
b)