Optimierung Blatt 06 zum 25.11.2013

Paul Bienkowski, Arne Struck

25. November 2013

1. a) minimiere $5y_1 + 11y_2 + 8y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2y_1 & + & 4y_2 & + & 3y_3 & \geq & 5 \\ 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \geq & 4 \\ y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 3 \\ & & & & y_{1..3} & \geq & 0 \end{array}$$

b) $y^* = (1, 0, 1)$ [1]

c) Einsetzen in die Nebenbedingungen:
$2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 5 \geq 5$
$3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 7 \geq 4$
$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3 \geq 3$

d) Nach dem Dualitätssatz müssen die Zielfunktionswerte übereinstimmen:
$z = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 13$
$z' = 5 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 8 \cdot 1 = 13$

e)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x^* = (2, 0, 1) \\ c = (5, 4, 3) \\ n = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} y^* = (1, 0, 1) \\ b = (5, 11, 8) \\ m = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{llclcl} j = 1: & x_1 = 2 & \rightarrow & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 5 & = & c_1 \\ j = 2: & x_2 = 0 & & & & \\ j = 3: & x_3 = 1 & \rightarrow & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3 & = & c_3 \\ i = 1: & y_1 = 1 & \rightarrow & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5 & = & b_1 \\ i = 2: & y_2 = 0 & & & & \\ i = 3: & y_3 = 1 & \rightarrow & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 8 & = & b_3 \end{array} \qquad \square$$

[1] diese Notation wird ab sofort an Stelle von $(y_1^*, y_2^*, ...)$ verwendet

2. a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x^* &= (\tfrac{32}{29}, \tfrac{8}{29}, \tfrac{30}{29}) \\ c &= (5,5,3) \\ n &= 3 \\ \\ y^* &= (0,1,1,2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b &= (3,2,4,2) \\ m &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcrcl}
j=1: & x_1 = \frac{32}{29} & \rightarrow & 1\cdot 0 - 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5 & = & c_1 \\
j=2: & x_2 = \frac{8}{29} & \rightarrow & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 - 1\cdot 1 + 3\cdot 2 = 5 & = & c_2 \\
j=3: & x_3 = \frac{30}{29} & \rightarrow & 1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 - 1\cdot 2 = 3 & = & c_3 \\
i=1: & y_1 = 0 & & & & \\
i=2: & y_2 = 1 & \rightarrow & -1\cdot\frac{32}{29} + 0\cdot\frac{8}{29} + 3\cdot\frac{30}{29} = 2 & = & b_2 \\
i=3: & y_3 = 1 & \rightarrow & 2\cdot\frac{32}{29} - 1\cdot\frac{8}{29} + 2\cdot\frac{30}{29} = 4 & = & b_3 \\
i=4: & y_4 = 2 & \rightarrow & 2\cdot\frac{32}{29} + 3\cdot\frac{8}{29} - 1\cdot\frac{30}{29} = 2 & = & b_4 \quad \square
\end{array}$$

b) minimiere $3y_1 + y_2$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr}
y_1 & - & 1y_2 & \geq & 1 \\
y_1 & - & 3y_2 & \geq & -9 \\
3y_1 & - & 7y_2 & \geq & -11 \\
y_1 & + & 1y_2 & \geq & 3 \\
 & & y_{1..2} & \geq & 0
\end{array}$$

Es lässt sich folgende Lösung aus dem Tableau ablesen:
$y^* = (2,1)$

(i) Dualitätssatz:
$z = 1\cdot 1 - 9\cdot 0 - 11\cdot 0 + 3\cdot 2 = 7$
$z' = 3\cdot 2 + 1\cdot 1 = 7$

(ii) Komplementäre Schlupfbedingungen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x^* &= (1,0,0,2) \\ c &= (1,-9,11,3) \\ n &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y^* &= (2,1) \\ b &= (3,1) \\ m &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llcrcl}
j=1: & x_1 = 1 & \rightarrow & 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = 1 & = & c_1 \\
j=2: & x_2 = 0 & & & & \\
j=3: & x_3 = 0 & & & & \\
j=4: & x_4 = 1 & \rightarrow & 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = 3 & = & c_4 \\
i=1: & y_1 = 2 & \rightarrow & 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 2 = 3 & = & b_1 \\
i=2: & y_2 = 1 & \rightarrow & -1\cdot 1 - 3\cdot 0 - 7\cdot 0 + 1\cdot 2 = 1 & = & b_2 \quad \square
\end{array}$$

c) **Duales Problem (D):**
minimiere $5y_1 - 6y_2 - 10y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & - & 3y_2 & - & 11y_3 & \geq & -1 \\ -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \geq & -1 \\ & & & & y_{1..3} & \geq & 0 \end{array}$$

Duales Problem in Standardform:
maximiere $-5y_1 + 6y_2 + 10y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcl} -y_1 & + & 3y_2 & + & 11y_3 & \leq & 1 \\ y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \leq & 1 \\ & & & & y_{1..3} & \geq & 0 \end{array}$$

Starttableau:

$$\begin{array}{rclcrcrcr} y_4 & = & 1 & + & y_1 & - & 3y_2 & - & 11y_3 \\ y_5 & = & 1 & - & y_1 & - & y_2 & - & y_3 \\ \hline z & = & & - & 5y_1 & + & 6y_2 & + & 10y_3 \end{array}$$

Eingangsvariable: y_3, Ausgangsvariable: y_4
$y_3 = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}y_1 - \frac{3}{11}y_2 - \frac{1}{11}y_4$
$y_5 = 1 - y_1 - y_2 - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11}y_1 - \frac{3}{11}y_2 - \frac{1}{11}y_4\right) = \frac{10}{11} - \frac{12}{11}y_1 - \frac{8}{11}y_2 + \frac{1}{11}y_4$
$z = -5y_1 + 6y_2 + 10\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11}y_1 - \frac{3}{11}y_2 - \frac{1}{11}y_4\right) = \frac{10}{11} - \frac{45}{11}y_1 + \frac{36}{11}y_2 - \frac{10}{11}y_4$

Tableau nach 1. Iteration:

$$\begin{array}{rclcrcrcr} y_3 & = & \frac{1}{11} & + & \frac{1}{11}y_1 & - & \frac{3}{11}y_2 & - & \frac{1}{11}y_4 \\ y_5 & = & \frac{10}{11} & - & \frac{12}{11}y_1 & - & \frac{8}{11}y_2 & + & \frac{1}{11}y_4 \\ \hline z & = & \frac{10}{11} & - & \frac{45}{11}y_1 & + & \frac{36}{11}y_2 & - & \frac{10}{11}y_4 \end{array}$$

Eingangsvariable: y_3, Ausgangsvariable: y_2
$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_4 - \frac{11}{3}y_3$
$y_5 = \frac{10}{11} - \frac{12}{11}y_2 - \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_4 - \frac{11}{3}y_3\right) + \frac{1}{11}y_4 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_4 + \frac{8}{3}y_3$
$z = \frac{10}{11} - \frac{45}{11}y_1 + \frac{36}{11}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_4 - \frac{11}{3}y_3\right) - \frac{10}{11}y_4 = 2 - 3y_1 - 2y_4 - 12y_3$

Tableau nach 2. Iteration:

$$\begin{array}{rclcrcrcr} y_2 & = & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3}y_1 & - & \frac{1}{3}y_4 & - & \frac{11}{3}y_3 \\ y_5 & = & \frac{2}{3} & - & \frac{4}{3}y_1 & + & \frac{1}{3}y_4 & + & \frac{8}{3}y_3 \\ \hline z & = & 2 & - & 3y_1 & - & 2y_4 & - & 12y_3 \end{array}$$

Die optimale Lösung für das duale Problem lautet $y^* = (0, \frac{1}{3}, 0)$, die optimale Lösung des Originalproblems ist $x^* = (2, 0)$. Dies lässt sich mit dem Dualitätssatz zeigen:
$z = -2 - 0 = -2$
$z' = 5 \cdot 0 - 6 \cdot \frac{1}{3} - 10 \cdot 0 = -2$