

64-040 Modul IP7: Rechnerstrukturen

[http://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2012ws/vorlesung/rs](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2012ws/vorlesung/rs)

– Kapitel 10 –

Andreas Mäder



Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik

Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2012/2013

Kapitel 10

Schaltfunktionen

Definition

Darstellung

Normalformen

Entscheidungsbäume und OBDDs

Realisierungsaufwand und Minimierung

Minimierung mit KV-Diagrammen

Literatur

Schaltfunktionen

- ▶ **Schaltfunktion:** eine eindeutige Zuordnungsvorschrift f , die jeder Wertekombination (b_1, b_2, \dots, b_n) von Schaltvariablen einen Wert zuweist:

$$y = f(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0, 1\}$$

- ▶ **Schaltvariable:** eine Variable, die nur endlich viele Werte annehmen kann – typisch sind binäre Schaltvariablen
- ▶ **Ausgangvariable:** die Schaltvariable am Ausgang der Funktion, die den Wert y annimmt
- ▶ bereits bekannt: *elementare Schaltfunktionen* (AND, OR, usw.)
wir betrachten jetzt Funktionen von n Variablen

Beschreibung von Schaltfunktionen

- ▶ textuelle Beschreibungen
formale Notation, Schaltalgebra, Beschreibungssprachen
- ▶ tabellarische Beschreibungen
Funktionstabelle, KV-Diagramme, ...
- ▶ graphische Beschreibungen
Kantorovic-Baum (Datenflussgraph), Schaltbild, ...
- ▶ Verhaltensbeschreibungen \Rightarrow „was“
- ▶ Strukturbeschreibungen \Rightarrow „wie“

Funktionstabelle

- ▶ Tabelle mit Eingängen x_i und Ausgangswert $y = f(x)$
- ▶ Zeilen im Binärcode sortiert
- ▶ zugehöriger Ausgangswert eingetragen

x_3	x_2	x_1	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Funktionstabelle (cont.)

- ▶ Kurzschreibweise: nur die Funktionswerte notiert

$$f(x_2, x_1, x_0) = \{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0\}$$

- ▶ n Eingänge: Funktionstabelle umfasst 2^n Einträge
- ▶ Speicherbedarf wächst exponentiell mit n
z.B.: 2^{33} Bit für 16-bit Addierer (16+16+1 Eingänge)

⇒ daher nur für kleine Funktionen geeignet

- ▶ Erweiterung auf don't-care Terme, s.u.

Verhaltensbeschreibung

- ▶ Beschreibung einer Funktion als Text über ihr Verhalten
- ▶ Problem: umgangssprachliche Formulierungen oft mehrdeutig
- ▶ logische Ausdrücke in Programmiersprachen
- ▶ Einsatz spezieller (Hardware-) Beschreibungssprachen
z.B.: Verilog, VHDL, SystemC

umgangssprachlich: Mehrdeutigkeit

„Das Schiebedach ist ok (y), wenn der Öffnungskontakt (x_0) **oder** der Schließkontakt (x_1) funktionieren **oder beide nicht** aktiv sind (Mittelstellung des Daches)“

K. Henke, H.-D. Wuttke: *Schaltsysteme* [HW02]

zwei mögliche Missverständnisse

- ▶ *oder*: als OR oder XOR?
- ▶ *beide nicht*: x_1 und x_0 nicht, oder x_1 nicht und x_2 nicht?

⇒ je nach Interpretation völlig unterschiedliche Schaltung

Strukturbeschreibung

- ▶ **Strukturbeschreibung:** eine Spezifikation der konkreten Realisierung einer Schaltfunktion
- ▶ vollständig geklammerte algebraische Ausdrücke

$$f = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$$
- ▶ Datenflussgraphen
- ▶ Schaltpläne mit Gattern (s.u.)
- ▶ PLA-Format für zweistufige AND-OR Schaltungen (s.u.)
- ▶ ...

Funktional vollständige Basismenge

- Menge M von Verknüpfungen über $GF(2)$ heißt **funktional vollständig**, wenn die Funktionen $f, g \in T_2$:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

$$g(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$$

allein mit den in M enthaltenen Verknüpfungen geschrieben werden können

- Boole'sche Algebra: { AND, OR, NOT }
- Reed-Muller Form: { AND, XOR, 1 }
- technisch relevant: { NAND }, { NOR }

Normalformen

- ▶ Jede Funktion kann auf beliebig viele Arten beschrieben werden

Suche nach Standardformen

- ▶ in denen man alle Funktionen darstellen kann
- ▶ Darstellung mit universellen Eigenschaften
- ▶ eindeutige Repräsentation \Rightarrow einfache Überprüfung, ob gegebene Funktionen übereinstimmen
- ▶ Beispiel: Darstellung von reellen Funktionen als Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Normalformen (cont.)

- Darstellung von reellen Funktionen als Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Normalform einer Boole'schen Funktion

- analog zur Potenzreihe
- als Summe über Koeffizienten $\{0, 1\}$ und Basisfunktionen

$$f = \sum_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \hat{B}_i, \quad \hat{f}_i \in \text{GF}(2)$$

mit $\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_{2^n}$ einer Basis des T^n

Definition: Normalform

- ▶ funktional vollständige Menge V der Verknüpfungen von $\{0, 1\}$
- ▶ Seien $\oplus, \otimes \in V$ und assoziativ

- ▶ Wenn sich alle $f \in T^n$ in der Form

$$f = (\hat{f}_1 \otimes \hat{B}_1) \oplus \cdots \oplus (\hat{f}_{2^n} \otimes \hat{B}_{2^n})$$

schreiben lassen, so wird die Form als **Normalform** und die Menge der \hat{B}_i als **Basis** bezeichnet.

- ▶ Menge von 2^n Basisfunktionen \hat{B}_i
Menge von 2^{2^n} möglichen Funktionen f

Disjunktive Normalform (DNF)

- ▶ **Minterm:** die UND-Verknüpfung *aller* Schaltvariablen einer Schaltfunktion, die Variablen dürfen dabei negiert oder nicht negiert auftreten
- ▶ **Disjunktive Normalform:** die disjunktive Verknüpfung aller Minterme m mit dem Funktionswert 1

$$f = \bigvee_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \cdot m(i), \quad \text{mit } m(i) : \text{Minterm}(i)$$

auch: *kanonische disjunktive Normalform*
sum-of-products (SOP)

Disjunktive Normalform: Minterme

- ▶ Beispiel: alle 2^3 Minterme für drei Variablen
- ▶ jeder Minterm nimmt nur für eine Belegung der Eingangsvariablen den Wert 1 an

x_3	x_2	x_1	Minterme
0	0	0	$\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}$
0	0	1	$\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1$
0	1	0	$\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}$
0	1	1	$\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1$
1	0	0	$x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}$
1	0	1	$x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge x_1$
1	1	0	$x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}$
1	1	1	$x_3 \wedge x_2 \wedge x_1$

Disjunktive Normalform: Beispiel

x_3	x_2	x_1	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- Funktionstabelle: Minterm $0 \equiv \bar{x}_i$ $1 \equiv x_i$
 - für f sind nur drei Koeffizienten der DNF gleich 1
- ⇒ DNF: $f(x) = (\bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1) \vee (\bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_1)$

Allgemeine disjunktive Form

- ▶ **disjunktive Form** (sum-of-products): die disjunktive Verknüpfung (ODER) von Termen. Jeder Term besteht aus der UND-Verknüpfung von Schaltvariablen, die entweder direkt oder negiert auftreten können
- ▶ entspricht dem Zusammenfassen („Minimierung“) von Termen aus der disjunktiven Normalform
- ▶ disjunktive Form ist nicht eindeutig (keine Normalform)

▶ Beispiel

$$\text{DNF} \quad f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$$

$$\text{minimierte disjunktive Form} \quad f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$$

Allgemeine disjunktive Form

- ▶ **disjunktive Form** (sum-of-products): die disjunktive Verknüpfung (ODER) von Termen. Jeder Term besteht aus der UND-Verknüpfung von Schaltvariablen, die entweder direkt oder negiert auftreten können
- ▶ entspricht dem Zusammenfassen („Minimierung“) von Termen aus der disjunktiven Normalform
- ▶ disjunktive Form ist nicht eindeutig (keine Normalform)

▶ Beispiel

$$\text{DNF} \quad f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$$

$$\text{minimierte disjunktive Form} \quad f(x) = (\overline{x_3} \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1})$$

$$f(x) = (x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1)$$

Konjunktive Normalform (KNF)

- ▶ **Maxterm:** die ODER-Verknüpfung *aller* Schaltvariablen einer Schaltfunktion, die Variablen dürfen dabei negiert oder nicht negiert auftreten
- ▶ **Konjunktive Normalform:** die konjunktive Verknüpfung aller Maxterme μ mit dem Funktionswert 0

$$f = \bigwedge_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \cdot \mu(i), \quad \text{mit } \mu(i) : \text{Maxterm}(i)$$

auch: *kanonische konjunktive Normalform*
product-of-sums (POS)

Konjunktive Normalform: Maxterme

- ▶ Beispiel: alle 2^3 Maxterme für drei Variablen
- ▶ jeder Maxterm nimmt nur für eine Belegung der Eingangsvariablen den Wert 0 an

x_3	x_2	x_1	Maxterme
0	0	0	$x_3 \vee x_2 \vee x_1$
0	0	1	$x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}$
0	1	0	$x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$
0	1	1	$x_3 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$
1	0	0	$\overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$
1	0	1	$\overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$
1	1	0	$\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee x_1$
1	1	1	$\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$

Konjunktive Normalform: Beispiel

x_3	x_2	x_1	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- ▶ Funktionstabelle: Maxterm $0 \equiv x_i$ $1 \equiv \bar{x}_i$
- ▶ für f sind fünf Koeffizienten der KNF gleich 0
- ⇒ KNF:
$$f(x) = (x_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)$$

Allgemeine konjunktive Form

- ▶ **konjunktive Form** (product-of-sums): die konjunktive Verknüpfung (UND) von Termen. Jeder Term besteht aus der ODER-Verknüpfung von Schaltvariablen, die entweder direkt oder negiert auftreten können
- ▶ entspricht dem Zusammenfassen („Minimierung“) von Termen aus der konjunktiven Normalform
- ▶ konjunktive Form ist nicht eindeutig (keine Normalform)

▶ Beispiel

$$\text{KNF} \quad f(x) = (x_3 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1) \wedge (\overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1})$$

minimierte konjunktive Form

$$f(x) = (x_3 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_1) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_1})$$

Reed-Muller Form

- ▶ **Reed-Muller Form:** die additive Verknüpfung aller Reed-Muller-Terme mit dem Funktionswert 1

$$f = \bigoplus_{i=1}^{2^n} \hat{f}_i \cdot RM(i)$$

- ▶ mit den Reed-Muller Basisfunktionen $RM(i)$
- ▶ Erinnerung: Addition im $GF(2)$ ist die XOR-Operation

Reed-Muller Form: Basisfunktionen

- Basisfunktionen sind:

$\{1\},$	(0 Variablen)
$\{1, x_1\},$	(1 Variable)
$\{1, x_1, x_2, x_2x_1\},$	(2 Variablen)
$\{1, x_1, x_2, x_2x_1, x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_3x_2x_1\},$	(3 Variablen)
...	
$\{RM(n-1), x_n \cdot RM(n-1)\}$	(n Variablen)

- rekursive Bildung: bei n bit alle Basisfunktionen von $(n-1)$ -bit und zusätzlich das Produkt von x_n mit den Basisfunktionen von $(n-1)$ -bit

Reed-Muller Form: Umrechnung

Umrechnung von gegebenem Ausdruck in Reed-Muller Form?

- ▶ Ersetzen der Negation: $\bar{a} = a \oplus 1$
- Ersetzen der Disjunktion: $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$
- Ausnutzen von: $a \oplus a = 0$

- ▶ Beispiel

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= (\bar{x}_1 \vee x_2)x_3 \\
 &= (\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1 x_2)x_3 \\
 &= ((1 \oplus x_1) \oplus x_2 \oplus (1 \oplus x_1)x_2)x_3 \\
 &= (1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2)x_3 \\
 &= x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3
 \end{aligned}$$

Reed-Muller Form: Transformationsmatrix

- ▶ lineare Umrechnung zwischen Funktion f , bzw. der Funktionstabelle (distributive Normalform), und RMF
- ▶ Transformationsmatrix A kann rekursiv definiert werden (wie die RMF-Basisfunktionen)
- ▶ Multiplikation von A mit f ergibt Koeffizientenvektor r der RMF

$$r = A \cdot f, \quad \text{und} \quad f = A \cdot r$$

- ▶ weitere Details in [Hei05]
K. von der Heide: *Vorlesung: Technische Informatik T1*
- ▶ Hinweis: Beziehung zu Fraktalen (Sierpinski-Dreieck)

Reed-Muller Form: Transformationsmatrix (cont.)

► $r = A \cdot f$ (und $A \cdot A = I$, also $f = A \cdot r$ (!))

$$A_0 = (1)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reed-Muller Form: Transformationsmatrix (cont.)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ A_{n-1} & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Reed-Muller Form: Beispiel

x_3	x_2	x_1	$f(x)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- Berechnung durch Rechenregeln der Boole'schen Algebra oder Aufstellen von A_3 und Ausmultiplizieren: $f(x) = x_2 \oplus x_3x_2x_1$
- häufig kompaktere Darstellung als DNF oder KNF

Reed-Muller Form: Beispiel (cont.)

- ▶ $f(x_3, x_2, x_1) = \{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0\}$ (Funktionstabelle)
- ▶ Aufstellen von A_3 und Ausmultiplizieren

$$r = A_3 \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

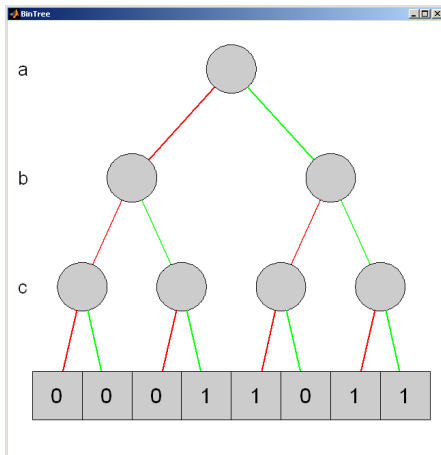
führt zur gesuchten RMF:

$$f(x_3, x_2, x_1) = r \cdot RM(3) = x_2 \oplus x_3 x_2 x_1$$

Grafische Darstellung: Entscheidungsbäume

- ▶ Darstellung einer Schaltfunktion als Baum/Graph
- ▶ jeder Knoten ist einer Variablen zugeordnet
jede Verzweigung entspricht einer **if-then-else**-Entscheidung
- ▶ vollständige Baum realisiert Funktionstabelle
- + einfaches Entfernen/Zusammenfassen redundanter Knoten
- ▶ Beispiel: Multiplexer
$$f(a, b, c) = (a \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c)$$

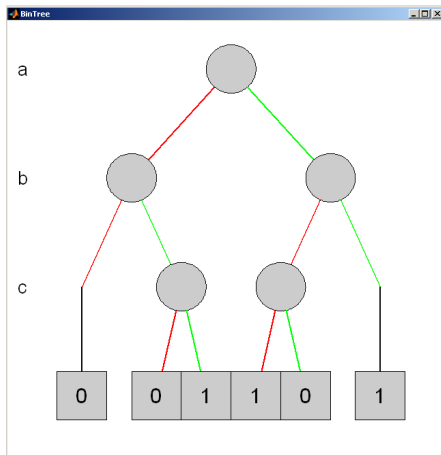
Entscheidungsbaum: Beispiel



► $f(a, b, c) = (a \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c)$

► rot: 0-Zweig
grün: 1-Zweig

Entscheidungsbaum: Beispiel (cont.)



$$\blacktriangleright f(a, b, c) = (a \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c)$$

\Rightarrow Knoten entfernt

\blacktriangleright rot: 0-Zweig
grün: 1-Zweig

Reduced Ordered Binary-Decision Diagrams (ROBDD)

Binäres Entscheidungsdiagramm

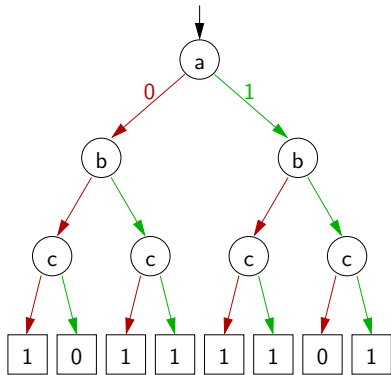
- ▶ Variante des Entscheidungsbaums
- ▶ vorab gewählte Variablenordnung (*ordered*)
- ▶ redundante Knoten werden entfernt (*reduced*)
- ▶ ein ROBDD ist eine Normalform für eine Funktion

- ▶ viele praxisrelevante Funktionen sehr kompakt darstellbar
 $O(n) \dots O(n^2)$ Knoten bei n Variablen
- ▶ wichtige Ausnahme: n -bit Multiplizierer ist $O(2^n)$
- ▶ derzeit das Standardverfahren zur Manipulation von
(großen) Schaltfunktionen

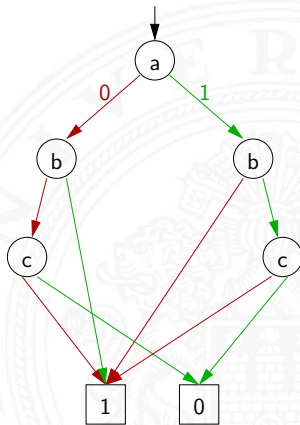
ROBDD vs. Entscheidungsbaum

Entscheidungsbaum

$$f = (a b c) \vee (a \bar{b}) \vee (\bar{a} b) \vee (\bar{a} \bar{b} \bar{c})$$

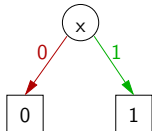


ROBDD

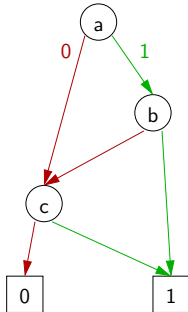


ROBDD: Beispiele

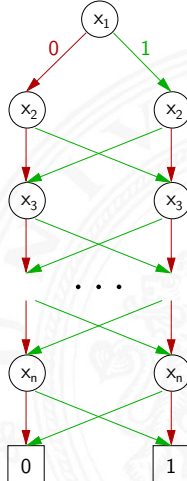
$$f(x) = x$$



$$g = (a b) \vee c$$



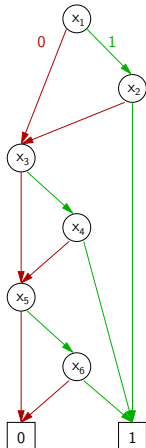
$$\text{Parität } p = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$$



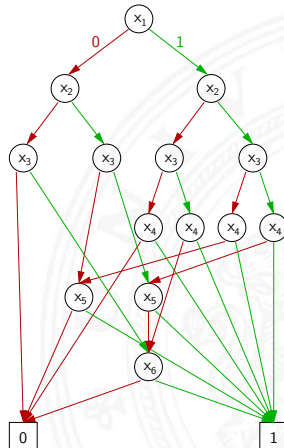
ROBDD: Problem der Variablenordnung

- Anzahl der Knoten oft stark abhängig von der Variablenordnung

$$f = x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_5 x_6$$



$$g = x_1 x_4 \vee x_2 x_5 \vee x_3 x_6$$



Minimierung von Schaltfunktionen

- ▶ mehrere (beliebig viele) Varianten zur Realisierung einer gegebenen Schaltfunktion bzw. eines Schaltnetzes

Minimierung des Realisierungsaufwandes:

- ▶ diverse Kriterien, technologieabhängig
 - ▶ Hardwarekosten Anzahl der Gatter
 - ▶ Hardwareeffizienz z.B. NAND statt XOR
 - ▶ Geschwindigkeit Anzahl der Stufen, Laufzeiten
 - ▶ Testbarkeit Erkennung von Produktionsfehlern
 - ▶ Robustheit z.B. ionisierende Strahlung

Algebraische Minimierungsverfahren

- ▶ Vereinfachung der gegebenen Schaltfunktionen durch Anwendung der Gesetze der Boole'schen Algebra
- ▶ im Allgemeinen nur durch Ausprobieren
- ▶ ohne Rechner sehr mühsam
- ▶ keine allgemeingültigen Algorithmen bekannt
- ▶ Heuristische Verfahren
 - ▶ Suche nach *Primimplikanten* (= kürzeste Konjunktionsterme)
 - ▶ Quine-McCluskey-Verfahren und Erweiterungen

Algebraische Minimierung: Beispiel

- ▶ Ausgangsfunktion in DNF

$$\begin{aligned} y(x) = & \overline{x_3}x_2x_1\overline{x_0} \vee \overline{x_3}x_2x_1x_0 \\ & \vee x_3\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3\overline{x_2}x_1\overline{x_0} \\ & \vee x_3\overline{x_2}x_1x_0 \vee x_3x_2\overline{x_1}x_0 \\ & \vee x_3x_2x_1\overline{x_0} \vee x_3x_2x_1x_0 \end{aligned}$$

- ▶ Zusammenfassen benachbarter Terme liefert

$$y(x) = \overline{x_3}x_2x_1 \vee x_3\overline{x_2}x_0 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee x_3x_2x_0 \vee x_3x_2x_1$$

- ▶ aber bessere Lösung ist möglich (weiter Umformen)

$$y(x) = x_2x_1 \vee x_3x_0 \vee x_3x_1$$

Grafische Minimierungsverfahren

- ▶ Darstellung einer Schaltfunktion im KV-Diagramm
- ▶ Interpretation als disjunktive Normalform (konjunktive NF)
- ▶ Zusammenfassen benachbarter Terme durch **Schleifen**
- ▶ alle 1-Terme mit möglichst wenigen Schleifen abdecken
alle 0-Terme $-$ $-$ \equiv konjunktive Normalform
- ▶ Ablesen der minimierten Funktion, wenn keine weiteren Schleifen gebildet werden können
- ▶ beruht auf der menschlichen Fähigkeit, benachbarte Flächen auf einen Blick zu „sehen“
- ▶ bei mehr als 6 Variablen nicht mehr praktikabel

Erinnerung: Karnaugh-Veitch Diagramm

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	0000	0001	0011	0010
	01	0100	0101	0111	0110
	11	1100	1101	1111	1110
	10	1000	1001	1011	1010

- ▶ 2D-Diagramm mit $2^n = 2^{n_y} \times 2^{n_x}$ Feldern
 - ▶ gängige Größen sind: 2×2 , 2×4 , 4×4
darüber hinaus: mehrere Diagramme der Größe 4×4
 - ▶ Anordnung der Indizes ist im Gray-Code (!)
- ⇒ benachbarte Felder unterscheiden sich gerade um 1 Bit

KV-Diagramme: 2...4 Variable (2×2, 2×4, 4×4)

		x0	
		0	1
x1	0	00	01
	1	10	11

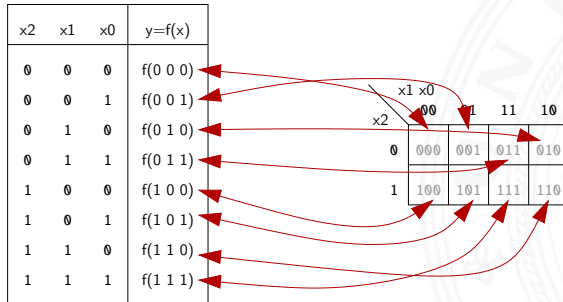
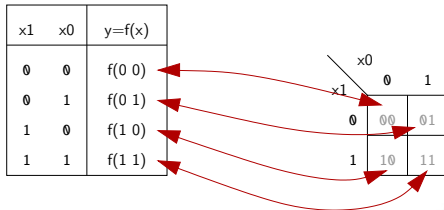
		x1 x0			
		00	01	11	10
x2	0	000	001	011	010
	1	100	101	111	110

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3	x2	00	01	11	10
	00	0000	0001	0011	0010
	01	0100	0101	0111	0110
	11	1100	1101	1111	1110
	10	1000	1001	1011	1010

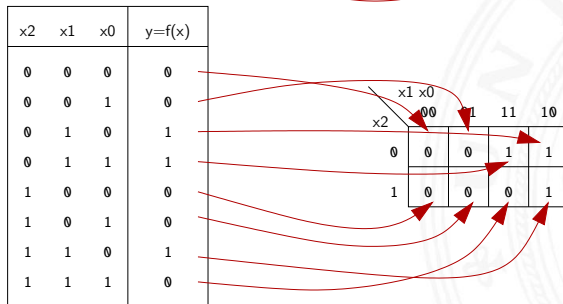
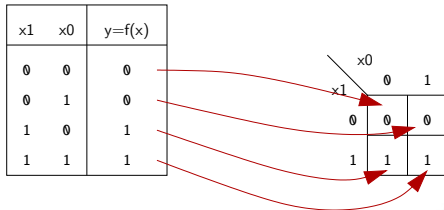
KV-Diagramm für Schaltfunktionen

- ▶ Funktionswerte in zugehöriges Feld im KV-Diagramm eintragen
- ▶ Werte 0 und 1
don't-care „*“ für nicht spezifizierte Werte (!)
- ▶ 2D-Äquivalent zur Funktionstabelle
- ▶ praktikabel für 3..6 Eingänge
- ▶ fünf Eingänge: zwei Diagramme a 4×4 Felder
sechs Eingänge: vier Diagramme a 4×4 Felder
- ▶ viele Strukturen „auf einen Blick“ erkennbar

KV-Diagramm: Zuordnung zur Funktionstabelle



KV-Diagramm: Eintragen aus Funktionstabelle



KV-Diagramm: Beispiel

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

- ▶ Beispielfunktion in DNF mit vier Termen:

$$f(x) = (\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}) \vee (\overline{x_3} \overline{x_2} x_1 \overline{x_0}) \vee (x_3 \overline{x_2} x_1 x_0) \vee (x_3 x_2 x_1 x_0)$$
- ▶ Werte aus Funktionstabelle an entsprechender Stelle ins Diagramm eintragen

Schleifen: Zusammenfassen benachbarter Terme

- ▶ benachbarte Felder unterscheiden sich um 1-Bit
- ▶ falls benachbarte Terme beide 1 sind \Rightarrow Funktion hängt an dieser Stelle nicht von der betroffenen Variable ab
- ▶ zugehörige (Min-) Terme können zusammengefasst werden

- ▶ Erweiterung auf vier benachbarte Felder (4×1 1×4 2×2)
 —"— auf acht —"— (4×2 2×4) usw.
- ▶ aber keine Dreier- Fünfergruppen, usw. (Gruppengröße 2^i)

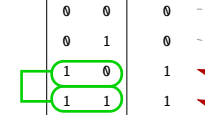
- ▶ Nachbarschaft auch „außen herum“
- ▶ mehrere Schleifen dürfen sich überlappen

Schleifen: Ablesen der Schleifen

x1	x0	y=f(x)
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$$f(x_1, x_0) = x_1$$

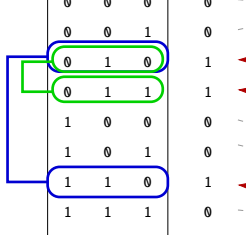
x0	
0	0 1
1	0 0



x2	x1	x0	y=f(x)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2}x_1 \vee x_1\overline{x_0}$$

x1 x0	
00	00 11
01	00 11
10	00 11
11	00 11



Schleifen: Ablesen der Schleifen (cont.)

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

- insgesamt zwei Schleifen möglich
- grün entspricht $(\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_0}) = (\overline{x_3} \overline{x_2} x_1 \overline{x_0}) \vee (\overline{x_3} \overline{x_2} x_1 x_0)$
blau entspricht $(x_3 x_1 x_0) = (x_3 x_2 x_1 x_0) \vee (x_3 \overline{x_2} x_1 x_0)$
- minimierte disjunktive Form $f(x) = (\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_0}) \vee (x_3 x_1 x_0)$

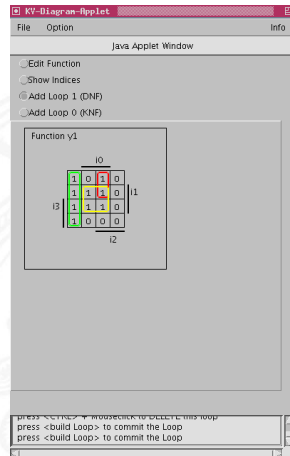
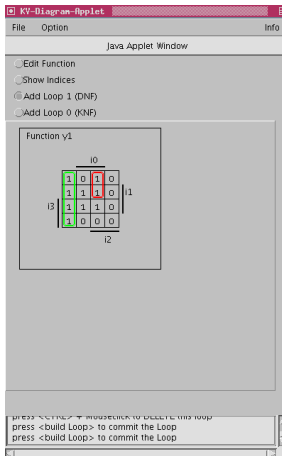
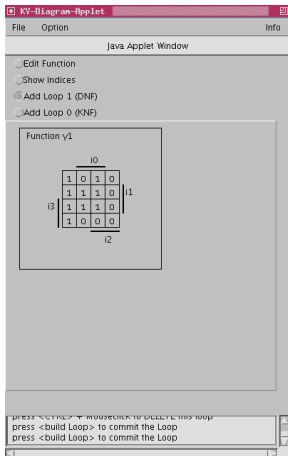
Schleifen: interaktive Demonstration

- ▶ Applet zur Minimierung mit KV-Diagrammen
`tams.informatik.uni-hamburg.de/applets/kvd`
- 1. Auswahl oder Eingabe einer Funktion (2..6 Variablen)
- 2. Interaktives Setzen und Erweitern von Schleifen:
„click“, „shift+click“, „control+click“
- 3. Anzeige der zugehörigen Hardwarekosten und Schaltung

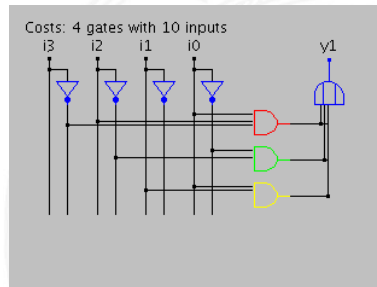
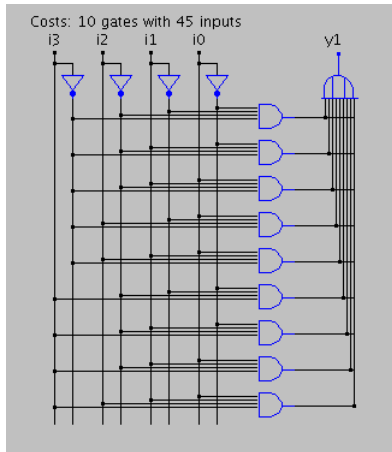
Achtung: andere Anordnung der Eingangsvariablen als im Skript

⇒ entsprechend andere Anordnung der Terme im KV-Diagramm
Prinzip bleibt aber gleich

KV-Diagramm Applet: Screenshots



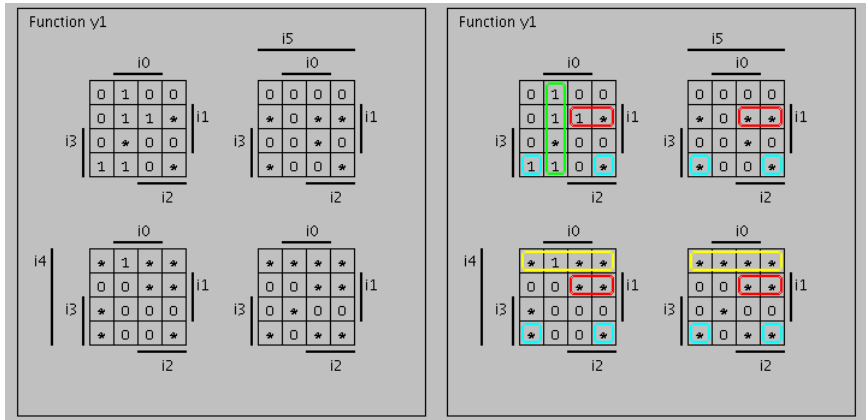
KV-Diagramm Applet: zugehörige Hardwarekosten



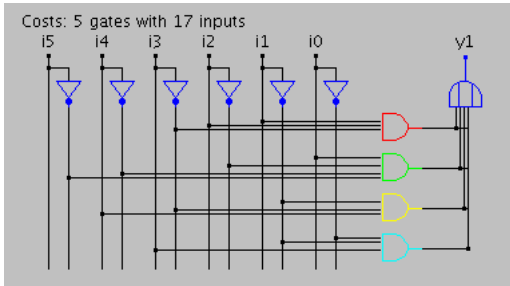
Don't-Care Terme

- ▶ in der Praxis: viele Schaltfunktionen unvollständig definiert weil bestimmte Eingangskombinationen nicht vorkommen
- ▶ zugehörige Terme als **Don't Care** markieren
typisch: Sternchen „*“ in Funktionstabelle/KV-Diagramm
- ▶ solche Terme bei Minimierung nach Wunsch auf 0/1 setzen
- ▶ Schleifen dürfen Don't Cares enthalten
- ▶ Schleifen möglichst groß

KV-Diagramm Applet: 6 Variablen, *Don't Cares*



KV-Diagramm Applet: 6 Variablen, *Don't Cares* (cont.)



- Schaltung und Realisierungsaufwand (# Gatter, Eingänge) nach der Minimierung

Quine-McCluskey-Algorithmus

- ▶ Algorithmus zur Minimierung einer Schaltfunktion
- ▶ Notation der Terme in Tabellen, n Variablen
- ▶ Prinzip entspricht der Minimierung im KV-Diagramm aber auch geeignet für mehr als sechs Variablen
- ▶ Grundlage gängiger Minimierungsprogramme

- ▶ Sortieren der Terme nach Hamming-Distanz
- ▶ Erkennen der unverzichtbaren Terme („Primimplikanten“)
- ▶ Aufstellen von Gruppen benachbarter Terme (mit Distanz 1)
- ▶ Zusammenfassen geeigneter benachbarter Terme

Becker, Drechsler, Molitor: *Technische Informatik: Eine Einführung* [BDM05]

Schiffmann, Schmitz: *Technische Informatik I* [SS04]

Literatur

- [BDM05] B. Bernd, R. Drechsler, P. Molitor:
Technische Informatik: Eine Einführung.
Pearson Studium, 2005. ISBN 978-3-8273-7092-1
- [SS04] W. Schiffmann, R. Schmitz: *Technische Informatik I – Grundlagen der digitalen Elektronik.*
5. Auflage, Springer-Verlag, 2004. ISBN 978-3-540-40418-7
- [HW02] K. Henke, H.D. Wuttke: *Schaltsysteme: Eine automatenorientierte Einführung.*
Pearson, 2002. ISBN 978-3-8273-7035-8

Literatur (cont.)

[Bry86] R.E. Bryant: *Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation*. in: *IEEE Trans. Computers* 35 (1986), Nr. 8, S. 677–691

[Hei05] K. von der Heide: *Vorlesung: Technische Informatik 1 — interaktives Skript*. Universität Hamburg, FB Informatik, 2005.tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1