DM 04-B (HA) zum 16.11.2012

Paul Bienkowski, Jascha Andersen, Benedikt Bushart

16. November 2012

1. a) Es gibt insgesamt $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 16807$ Abbildungen.

Davon sind $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ injektiv.

Es gibt $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 = 10290$ Abbildungen, für die $g(2), g(3)$ und $g(4)$ verschiedene Elemente sind.

b) Da die Reihenfolge der gewählten Zahlen irrelevant ist, gilt:

$$\frac{49^{\underline{6}}}{6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816 \approx 14 \text{ Mio. verschiedene Tipps.}$$

c) Die Anzahl der n-teiligen Teilmengen lässt sich mit $\binom{1000}{n}$ bestimmen, damit ergibt sich für die Anzahl der gesuchten Teilmengen:

$$\sum_{n=997}^{1000} \binom{1000}{n} = \binom{1000}{997} + \binom{1000}{998} + \binom{1000}{999} + \binom{1000}{1000}$$

$$= 166\,167\,000 + 499\,500 + 1\,000 + 1 = 166\,667\,501$$

2. a) Der Koeffizient von x^5y^{11} in $(x+y)^{16}$ lautet:

$$\frac{16!}{5! \cdot 11!} = \binom{16}{5} = \binom{16}{11}$$

Der Koeffizient von $x^3y^5z^2$ in $(x+y+z)^{10}$ lautet:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} \text{ (keine Schreibweise als Binomialkoeffizient)}$$

b) **CAPPUCCINO** - 10 Buchstaben, davon 3 × „C” und 2 × „P”

$$\frac{10!}{2! \cdot 3!} = 302\,400$$

MANGOLASSI - 10 Buchstaben, davon 2 × „A” und 2 × „S”

$$\frac{10!}{2! \cdot 2!} = 907\,200$$

SELTERWASSER - 12 Buchstaben, davon 3 × „S”, 3 × „E”, 2 × „R”

$$\frac{12!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 6\,652\,800$$

c) Da ein Flaschentyp mehrfach vorkommen darf, und die Reihenfolge egal ist, gibt es 10^6 Möglichkeiten (die Belegungen der einzelnen Kisten-Plätze sind unabhängig voneinander).

3. Induktionsanfang: Es gilt $A(3)$:

$$\sum_{i=3}^{3}\binom{i}{i-3}=\binom{3}{3-3}=\binom{3}{0}=1=\binom{3+1}{4}=\binom{4}{4}=1$$

Induktionsanfang: Es wird angenommen, dass für $n \geq 3$ folgende Aussage gilt:

$$A(n):\sum_{i=3}^{n}\binom{i}{i-3}=\binom{n+1}{4} \tag{IA}$$

Es ist zu zeigen, dass dann auch $A(n+1)$ gilt:

$$A(n+1):\sum_{i=3}^{n+1}\binom{i}{i-3}=\binom{n+2}{4} \tag{1}$$

Dies lässt sich wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{n+1}\binom{i}{i-3} &= \sum_{i=3}^{n}\binom{i}{i-3}+\binom{n+1}{n+1-3}\\
&\overset{\text{(IA)}}{=} \binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{n-2}\\
&= \binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{(n+1)-(n-2)}\\
&= \binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{3}\\
&= \binom{(n+2)-1}{4}+\binom{(n+2)-1}{4-1}\\
&= \binom{n+2}{4}
\end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen. □

4. a)

$$2000-\left\lfloor\frac{2000}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2000}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2000}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2000}{3\cdot 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2000}{3\cdot 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2000}{5\cdot 7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2000}{3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor$$

$$=2000-666-400-285+133+95+57-19=915$$

b)

$$\begin{aligned}
1000 \quad &- \quad \left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{11}\right\rfloor\\
&+ \quad \left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{5\cdot 7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{5\cdot 11}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{7\cdot 11}\right\rfloor\\
&- \quad \left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 5\cdot 7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 5\cdot 11}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 7\cdot 11}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{5\cdot 7\cdot 11}\right\rfloor\\
&+ \quad \left\lfloor\frac{1000}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\right\rfloor=\\
1000 \quad &- \quad 333-200-142-90+66+47+30+28+18+12-9-6-4-2+0=415
\end{aligned}$$