DM 03-B (HA) zum 09.11.2012

Paul Bienkowski, Jascha Andersen

4. November 2012

1. a) (i) $177 - 18 = 159, 5 \nmid 159 \rightarrow$ falsch

(ii) $177 - (-18) = 195, 5 \mid 195 \rightarrow$ wahr

(iii) $-89 - (-12) = -77, 12 \nmid -77 \rightarrow$ falsch

(iv) $-123 - 33 = -156, 12 \mid -156 \rightarrow$ wahr

(v) $39 - (-1) = 40, 40 \mid 40 \rightarrow$ wahr

(vi) $77 - 0 = 77, 11 \mid 77 \rightarrow$ wahr

(vii) 2^{51} ist gerade, also ist $2^{51} - 51$ ungerade, somit gilt $2 \nmid 2^{51} - 51 \rightarrow$ falsch

b) $ggT(7293, 378) = ggT(378, 111) = ggT(111, 45) = ggT(45, 21) = ggT(21, 3) = 3$

$$\begin{array}{rcrll} 7293 & = & 19 & \cdot 378 & + 111 \\ 378 & = & 3 & \cdot 111 & + 45 \\ 111 & = & 2 & \cdot 45 & + 21 \\ 45 & = & 2 & \cdot 21 & + 3 \\ 21 & = & 7 & \cdot 3 & + 0. \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lcr} \lceil\sqrt{7}\rceil & = & 3 \\ \lfloor\sqrt{7}\rfloor & = & 2 \\ \lceil 7.1\rceil & = & 8 \\ \lfloor 7.1\rfloor & = & 7 \\ \lceil -7.1\rceil & = & -7 \\ \lfloor -7.1\rfloor & = & -8 \\ \lceil -7\rceil & = & -7 \\ \lfloor -7\rfloor & = & -7 \end{array}$$

2. (2) Es ist gegeben, dass $b_1 \mid a_1$ und $b_2 \mid a_2$. Für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ gilt also $a_1 = b_1 \cdot c_1$ und $a_2 = b_2 \cdot c_2$. Es ist zu zeigen, dass $b_1 \cdot b_2 \mid a_1 \cdot a_2$ wahr ist.

Dies lässt sich wie folgt darstellen:

$$b_1 \cdot b_2 \mid (b_1 \cdot c_1) \cdot (b_2 \cdot c_2)$$
$$b_1 \cdot b_2 \mid (b_1 \cdot b_2) \cdot (c_1 \cdot c_2)$$

Dies ist wahr, da $(c_1 \cdot c_2) \in \mathbb{Z}$ ist. $\square$

(3) Es ist gegeben, dass $c \cdot b \mid c \cdot a$. Es ist zu zeigen, dass $b \mid a$ wahr ist. Für $d \in \mathbb{Z}$ gilt also:

$$\begin{aligned} c \cdot a &= (c \cdot b) \cdot d \\ \Rightarrow a &= b \cdot d \end{aligned}$$

Aus $a = b \cdot d$ und $d \in \mathbb{Z}$ folgt $a \mid b$. $\square$

(4) Es ist gegeben, dass $b \mid a_1$ und $b \mid a_2$. Es ist zu zeigen, dass $b \mid c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ gilt. Es folgt für $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= b \cdot d_1 \\ a_2 &= b \cdot d_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Damit $b \mid c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2$ gilt, muss für $e \in \mathbb{Z}$ gelten:

$$c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 = b \cdot e$$

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot (b \cdot d_1) + c_2 \cdot (b \cdot d_2) &= b \cdot e \\ b \cdot (c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2) &= b \cdot e \\ c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2 &= e \end{aligned}$$

Da $c_1, d_1, c_2, d_2 \in \mathbb{Z}$ sind, ist auch $e \in \mathbb{Z}$, somit ist die Aussage bewiesen. $\square$

3. a) Die Aussage $3 \mid (n^3 + 2n)$ wird als $A(n)$ bezeichnet.

Induktionsanfang: $A(0) : 3 \mid (0^3 + 2 \cdot 0) \Leftrightarrow 3 \mid 0$ ist wahr.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$3 \mid (n^3 + 2n) \tag{IA}$$

Es ist zu zeigen, dass die Aussage $A(n+1)$ ebenfalls gilt, also:

$$3 \mid \big((n+1)^3 + 2(n+1)\big) \tag{2}$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$\begin{array}{lcl} 3 & \mid & (n+1)^3 + 2(n+1) \\ 3 & \mid & n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ 3 & \mid & (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) \\ 3 & \mid & \underbrace{(n^3 + 2n)}_{(2)} + 3(n^2 + n + 1) \end{array} \tag{3}$$

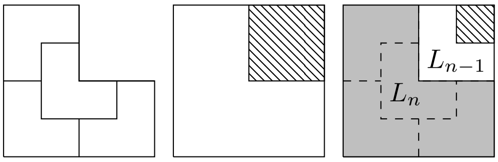
Da $3 \mid n^3 + 2n$ laut (IA) gilt, und $3 | 3(n^2 + n + 1)$ ebenfalls wahr ist, ist auch (3) wahr. $\square$

b) Aus 4 L-Stücken lässt sich ein größeres L-Stück mit doppelter Kantenlänge zusammenlegen (a). Dieses L-Stück sei nun als L_2 bezeichnet (Länge einer kurzen Kante beträgt 2 Einheiten), das Original-L-Stück ist demnach L_1.

Um für $n = 1$ ein 2×2 Feld nach den Vorgaben zu belegen, benötigt man nur ein L_1, wie in (b) gezeigt.

Um für $n = 2$ ein 4×4 Feld zu belegen, benötigt man ein L_1 für die obere rechte Ecke, es bleibt genau Platz für ein L_2. Dies ist in (c) für $n = 2$ dargestellt.

Auf diese Weise lässt sich jedes $2^n \times 2^n$ - Schachbrett mit der Belegung des vorigen Schachbrettes $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ in der oberen rechten Ecke, plus eines L-Stücks der Größe L_n belegen, da die Kanten der noch zu füllende Fläche genau doppelt so lang sind, wie in der vorherigen Iteration.



(a) (b) (c)

4. a) **Behauptung:** g ist injektiv.

Beweis: Wäre g nicht injektiv, gäbe es $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ für die gilt:

$$\begin{aligned} g(x_1, y_1) &= g(x_2, y_2) \\ (x_1y_1^2, x_1y_1^2 - 3x_1, (x_1^2 - 2)y_1) &= (x_2y_2^2, x_2y_2^2 - 3x_2, (x_2^2 - 2)y_2) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$x_1y_1^2 = x_2y_2^2 \tag{4}$$

$$x_1y_1^2 - 3x_1 = x_2y_2^2 - 3x_2 \tag{5}$$

$$(x_1^2 - 2)y_1 = (x_2^2 - 2)y_2 \tag{6}$$

Setzt man (4) in (5) ein, folgt:

$$\begin{aligned} -3x_1 &= -3x_2 \\ \Rightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Setzt man (7) in (6) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} (x_1^2 - 2)y_1 &= (x_1^2 - 2)y_2 \\ \Rightarrow y_1 &= y_2 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$, was ein Widerspruch zu $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ ist. Damit ist g injektiv. $\square$

b) **Behauptung:** h ist nicht surjektiv.

Beweis: Es ist ein $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ anzugeben, das nicht als $h(z)$ dargestellt werden kann.

Annahme: Für $(1, 0)$ ist dies der Fall.

Nachweis:

$$
\begin{array}{rcl}
h(z) & = & (1,0) \\
(z+2, z-1) & = & (1,0) \\
\Rightarrow z+2=1 & \wedge & z-1=0 \\
\Rightarrow z=-1 & \wedge & z=1
\end{array}
$$

Dies stellt einen Widerspruch dar, somit ist $(1, 0)$ nicht als $h(z)$ dargestellt werden, also ist h nicht surjektiv. $\square$