

ALA 06 (HA) zum 30.05.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

30. Mai 2013

1. (a) Wir berechnen $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{3i}{n}\right) = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i}{n}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3^3}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \quad (1) \\ &= \frac{81}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \frac{81n^4 + 192n^3 + 81n^2}{4n^4} \end{aligned}$$

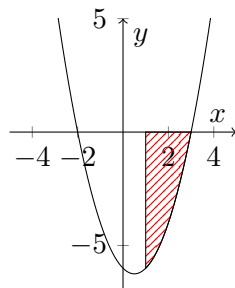
$$\text{Also gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{81n^4 + 192n^3 + 81n^2}{4n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{81 + \frac{192}{n} + \frac{81}{n^2}}{4} \right) = \frac{81}{4}$$

(b)

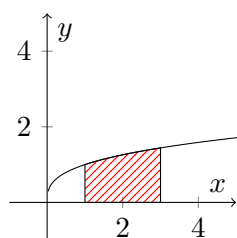
$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{4} x^4 dx = \frac{1}{4} 3^4 - \frac{1}{4} 0^4 = \frac{81}{4}$$

2. (i) $\int_1^3 f(x) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 6x \right]_1^3 = \left(\frac{1}{3} 3^3 - \frac{1}{2} 3^2 - 18 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6 \right) = -\frac{27}{2}$
- (ii) $\int_1^3 f(x) dx = \left[\sqrt[3]{x} \right]_1^3 = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1} \approx 0.442$
- (iii) $\int_1^3 f(x) dx = [\arctan(x)]_1^3 = \arctan(3) - \arctan(1) \approx 26.565$
- (iv) $\int_1^3 f(x) dx = [x \cdot \ln(x) - x]_1^3 = (3 \cdot \ln(3) - 3) - (1 \cdot \ln(1) - 1) \approx 1.296$
- (v) $\int_1^3 f(x) dx = [-e^{-x}]_1^3 = -e^{-3} - (-e^{-1}) \approx 0.318$

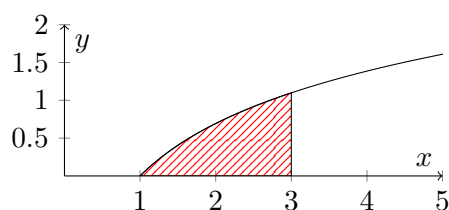
(i)



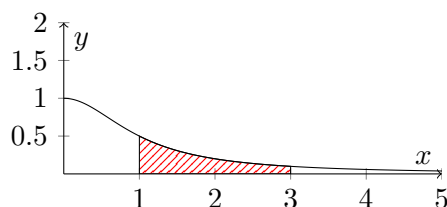
(ii)



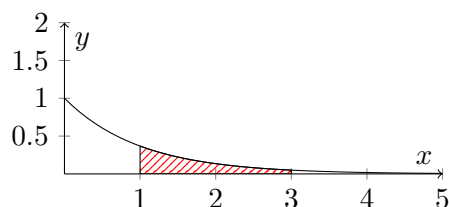
(iv)



(iii)



(v)



3. (i) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + 5x$

(ii) $\int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}}$

(iii) $f'(x) = \sin(3x), g(x) = x$. Dann ist $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$ und $g'(x) = 1$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} \sin 3x \cdot x - \int -\frac{1}{3} \sin 3x \cdot 1 dx \\ &= -\frac{1}{3} \sin 3x \cdot x - \frac{1}{3} \int -\sin 3x dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cdot \sin 3x - \frac{1}{9} \cdot \cos 3x \end{aligned}$$

Probe: $\left(-\frac{1}{3}x \cdot \sin 3x - \frac{1}{9} \cdot \cos 3x\right)' = x \cdot \sin(3x)$

(iv)

$$\begin{aligned} f'(x) = x^3, g(x) &= \ln x. \text{ Dann ist } f(x) = \frac{1}{4}x^4 \text{ und } g'(x) = \frac{1}{x} \\ \int x^3 \cdot \ln x dx &= \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4 \end{aligned}$$

Probe: $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^4\right)' = x^3 \cdot \ln(x)$

(v)

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx \quad (2)$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad (3)$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \quad (4)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \quad (5)$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) \quad (6)$$

Probe: $(e^x(x^2 - 2x + 2))' = x^2 e^x$

5. (i) Nullstellen der ersten Ableitung: 2, 6 Extremwerte berechnen:

$$f''(2) = -12$$

$$f(2) = 26$$

$$f''(6) = 12$$

$$f(6) = 1$$

Grenzen überprüfen:

$$f(6) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Bei $x = 6$ befindet sich somit ein lokales minimum und bei $x = 2$ ein lokales maximum. Die Tageshöchsttemperatur lässt sich am Maximum der Funktion im Intervall $[0, 6]$ erkennen sie liegt also bei $x = 2$. Also beträgt die Tageshöchsttemperatur 26°C .

- (ii) Die Tagestiefsttemperatur lässt sich am Minimum der Funktion im Intervall $[0, 6]$ erkennen, aus (i) folg somit das sie zweimal gemessen wurde (bei $x = 6$ und $x = 0$). Die Tagestiefsttemperatur beträgt also: 1°C

(iii)

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{12}{3}x^3 + 18x^2 + 1x$$

$$\int_0^6 x^3 - 12x^2 + 36x + 1 dx = F(6) - F(0) = 114$$

$$\frac{114}{6} = 19$$

Die Durchschnittstemperatur beträgt also 19°C .