Optimierung Blatt 08 zum 09.12.2013

Paul Bienkowski, Nils Rokita, Arne Struck

9. Dezember 2013

1. a) minimiere $y_1 + 2y_2 + 3y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcr}
2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \geq & 5 \\
3y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & -7 \\
-y_1 & + & 4y_2 & - & 2y_3 & \geq & 3 \\
y_1 & - & 2y_2 & - & 1y_3 & = & 1 \\
 & & & & y_{2,3} & \geq & 0
\end{array}$$

b) maximiere $-y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 8y_4 + y_5 - 4y_6 - 10y_7 + 9y_8$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcr}
2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & + & y_5 & + & 4y_6 & - & 4y_7 & + & y_8 & \leq & -2 \\
-4y_1 & + & 5y_2 & & & + & 4y_4 & - & 3y_5 & - & 3y_6 & + & 3y_7 & + & 2y_8 & = & 3 \\
y_1 & + & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & + & y_5 & & & - & 5y_7 & + & y_8 & = & 22 \\
 & & & & & & & & & & & & & & y_{4,5,6,7} & \geq & 0
\end{array}$$

2. a) (i) **Starttableau**:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 100 & - & x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 4000 & - & 10x_1 & - & 50x_2 \\
\hline
z & = & & & 40x_1 & + & 70x_2
\end{array}$$

Eingangsvariable: x_2, Ausgangsvariable: x_4
$x_2 = 80 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{50}x_4$
$x_3 = 100 - x_1 - \left(80 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{50}x_4\right) = 20 - \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{50}x_4$
$z = 40x_1 + 70\left(80 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{50}x_4\right) = 5600 + 26x_1 - \frac{7}{5}x_4$

Tableau nach 1. Iteration:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & 80 & - & \frac{1}{5}x_1 & - & \frac{1}{50}x_4 \\
x_3 & = & 20 & - & \frac{4}{5}x_1 & + & \frac{1}{50}x_4 \\
\hline
z & = & 5600 & + & 26x_1 & - & \frac{7}{5}x_4
\end{array}$$

Eingangsvariable: x_1, Ausgangsvariable: x_3
$x_1 = 25 + \frac{1}{40}x_4 - \frac{5}{4}x_3$
$x_2 = 80 - \frac{1}{5}\left(25 + \frac{1}{40}x_4 - \frac{5}{4}x_3\right) - \frac{1}{50}x_4 = 75 - \frac{1}{40}x_4 + \frac{1}{4}x_3$
$z = 5600 + 26\left(25 + \frac{1}{40}x_4 - \frac{5}{4}x_3\right) - \frac{7}{5}x_4 = 6250 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{65}{2}x_3$

Tableau nach 2. Iteration:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 25 & + & \frac{1}{40}x_4 & - & \frac{5}{4}x_3 \\ x_2 & = & 75 & - & \frac{1}{40}x_4 & + & \frac{1}{4}x_3 \\ \hline z & = & 6250 & - & \frac{3}{4}x_4 & - & \frac{65}{2}x_3 \end{array}$$

Aus diesem Tableau kann man $x^* = (25, 75)$ sowie $y^* = (0.75, 32.5)$ ablesen. □

(ii)

$$\begin{array}{lcll} x_1^* \neq 0 & : & 1 \cdot 32.5 + 10 \cdot 0.75 & = 40 \\ x_2^* \neq 0 & : & 1 \cdot 32.5 + 50 \cdot 0.75 & = 70 \\ y_1^* \neq 0 & : & 1 \cdot 25 + 1 \cdot 75 & = 100 \\ y_2^* \neq 0 & : & 10 \cdot 25 + 50 \cdot 75 & = 4000 \quad \square \end{array}$$

b) **Starttableau**:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 100 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 4000 + t & - & 10x_1 & - & 50x_2 \\ \hline z & = & & & 40x_1 & + & 70x_2 \end{array}$$

Eingangsvariable: x_2, Ausgangsvariable: x_4

Die Ausgangsvariable x_4 kann gewählt werden, da im „schlechtesten" Fall von $t = 1000$ diese Variable genauso schnell 0 ist wie x_3, ansonsten schneller.

$x_2 = 80 + \frac{t}{50} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{50}x_4$

$x_3 = 100 - x_1 - \left(80 + \frac{t}{50} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{50}x_4\right) = 20 - \frac{t}{50} - \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{50}x_4$

$z = 40x_1 + 70\left(80 + \frac{t}{50} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{50}x_4\right) = 5600 + \frac{7}{5}t + 26x_1 - \frac{7}{5}x_4$

Tableau nach 1. Iteration:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & 80 + \frac{t}{50} & - & \frac{1}{5}x_1 & - & \frac{1}{50}x_4 \\ x_3 & = & 20 - \frac{t}{50} & - & \frac{4}{5}x_1 & + & \frac{1}{50}x_4 \\ \hline z & = & 5600 + \frac{7}{5}t & + & 26x_1 & - & \frac{7}{5}x_4 \end{array}$$

Eingangsvariable: x_1, Ausgangsvariable: x_3

Die Ausgangsvariable x_3 kann gewählt werden, da im „schlechtesten" Fall von $t = 0$ diese Variable schneller auf 0 ist.

$x_1 = 25 - \frac{t}{40} + \frac{1}{40}x_4 - \frac{5}{4}x_3$

$x_2 = 80 - \frac{1}{5}\left(25 - \frac{t}{40} + \frac{1}{40}x_4 - \frac{5}{4}x_3\right) - \frac{1}{50}x_4 = 75 + \frac{t}{40} - \frac{1}{40}x_4 + \frac{1}{4}x_3$

$z = 5600 + 26\left(25 - \frac{t}{40} + \frac{1}{40}x_4 - \frac{5}{4}x_3\right) - \frac{7}{5}x_4 = 6250 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}x_4 - \frac{65}{2}x_3$

Tableau nach 2. Iteration:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 25 - \frac{t}{40} & + & \frac{1}{40}x_4 & - & \frac{5}{4}x_3 \\ x_2 & = & 75 + \frac{t}{40} & - & \frac{1}{40}x_4 & + & \frac{1}{4}x_3 \\ \hline z & = & 6250 + \frac{3}{4}t & - & \frac{3}{4}x_4 & - & \frac{65}{2}x_3 \end{array}$$

Die optimale Lösung lässt sich ablesen als $x^* = (25 - \frac{t}{40}, 75 + \frac{t}{40})$.

Man sieht außerdem, dass der Zielfunktionswert im optimalen Fall $6250 + \frac{3}{4}t$ beträgt, also um genau $\frac{3}{4}t$ mehr Gewinn erzielt wird.