

ALA 09 (HA) zum 20.06.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

20. Juni 2013

1. (a)

$$T_8(x) = T_9(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

$$T_{10}(x) = T_{11}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

$$T_{12}(x) = T_{13}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}$$

$$T_9(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} = \frac{4357}{8064} \approx 0.540302579365$$

$$T_{11}(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} = \frac{1960649}{3628800} \approx 0.540302303791$$

$$T_{13}(1) = \dots = \dots \approx 0.540302305879$$

(b) Taylorpolynome für $f(x)$ und $g(x)$ an $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$T_1(x) = 1 - \frac{x}{3}$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!}$$

$$T_2(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9 \cdot 2!}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!}$$

$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9 \cdot 2!} - \frac{28x^3}{27 \cdot 3!}$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{4 \cdot 4!}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9 \cdot 2!} - \frac{28x^3}{27 \cdot 3!} + \frac{280x^4}{81 \cdot 4!}$$

(c) Taylorpolynom für $f(x) = e^x \cdot \sin x$ an $x_0 = 0$:

$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30}$$

2. (i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) = \frac{1}{2}$$

- (ii) Es handelt sich um den Typ $\frac{0}{0}$ entsprechend lässt sich der Nenner vom Zähler getrennt ableiten. Man erhält so die Funktion:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 6x + 1}{2x - 5} \right) = -1$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + 3x)^{\frac{1}{2x}} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\ln(1+3x)^{\frac{1}{2x}}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+3x)}{2x} \right)}$$

Dabei handelt es sich um den Typ $\frac{0}{0}$, Ableiten von Zähler und Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{1+3x} \cdot 3}{2} \right) = e^{\frac{3}{2}} \approx 4,482$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - e^x - 1}{(\sin(x)) \cdot (e^x - 1)} \right)$$

Da der Nenner gegen Null strebt während der Zähler gegen 1 strebt, strebt der gesamte Wert trivialerweise gegen $-\infty$

3. (a) $f(x) = 3^x$
 $f'(x) = 3^x \ln 3$
 $f'(2) = 9 \ln 3 \approx 9.887510598$
 $x_0 = 2 - \frac{9}{9 \ln 3} \approx 1.08761$

Der Schnittpunkt befindet sich an $S(0, x_0)$.

(b)

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \sqrt[7]{2} \\ T_1(x) &= \sqrt[7]{2} + \frac{x}{7\sqrt[7]{2^6}} \\ T_2(x) &= \sqrt[7]{2} + \frac{x}{7\sqrt[7]{2^6}} - \frac{3x^2}{49\sqrt[7]{2^{13}}} \end{aligned}$$

- (c) Für Stetigkeit ist zu zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) = 0$ ist. Hierfür eignet sich die Folge $(a_n) = \left(\frac{1}{n} \right)$, also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{1}{(a_n)} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(n))$$

Es existiert kein Grenzwert, also konvergiert $\cos \left(\frac{1}{x} \right)$ für $x \rightarrow 0$ **nicht** gegen 0, somit ist die Funktion nicht stetig.

- (d) Bei \mathcal{B} handelt es sich um alle beschränkten Folgen, da es in jedem Fall ein (beliebiges) Limit für den Abstand geben muss. Allerdings sind nicht alle dieser Folgen konvergent, sie können z.B. auch innerhalb der Schranken oszillieren (z.B. $f(x) = \sin x$, $\varepsilon = 2$, $a = 0$).

4. (a)
(b)
(c)