Mathematik I für Studierende der Informatik
(Diskrete Mathematik)
Thomas Andreae

Wintersemester 2012/13
Blatt 6

A: Präsenzaufgaben am 22./23. November 2012

1. a) Es seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie – falls möglich – die Produkte AB und BA.

b) Es sei A wie oben und $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Begründen Sie, weshalb das Produkt AC nicht existiert. Existiert CA? Falls ja, so berechne man dieses Produkt!

2. Es seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{v, w, x, y, z\}$. Die Funktion $f : A \to B$ sei gegeben durch $f(1) = x$, $f(2) = v$, $f(3) = z$, $f(4) = v$ sowie $f(5) = w$. Für $A' = \{1, 2, 3\}$ und $B' = \{v, w, y\}$:

a) Geben Sie $f(A')$ und $f^{-1}(B')$ an.

b) Prüfen Sie, ob $f^{-1}\big(f(A')\big) = A'$ gilt.

c) Prüfen Sie, ob $f\big(f^{-1}(B')\big) = B'$ gilt.

3. Schauen Sie sich die unten stehenden Hausaufgaben 3 und 4 a) an und machen Sie sich Gedanken zum **Beweisansatz**: Was ist zu zeigen? Was wird vorausgesetzt? Wie fängt man an?

B: Hausaufgaben zum 29./30. November 2012

1. a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Produkte definiert sind und berechnen Sie diese, falls sie existieren: AB, BA, AC, AD, AA, BB, CD, DC.

b) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Element, das in AB in der dritten Zeile und zweiten Spalte steht. Berechnen Sie außerdem die vierte Spalte von AB.

2. a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestätigen Sie mit diesen Matrizen die Gültigkeit des Distributivgesetzes

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2.$$

b) Bestätigen Sie die Gleichung $(AB)^T = B^T A^T$ anhand der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Demonstrieren Sie anhand der Matrizen aus b), dass die „Regel“ $(AB)^T = A^T B^T$ unsinnig ist.

3. A sei eine $m \times n$ - Matrix, B_1 und B_2 seien $n \times p$ - Matrizen. Beweisen Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.

4. a) Beweisen Sie Aussage (6), Skript Seite 61: Für jede Abbildung $f : A \to B$ und jedes $B' \subseteq B$ gilt $f\big(f^{-1}(B')\big) \subseteq B'$.

b) In den Präsenzaufgaben wurde anhand eines Beispiels gezeigt, dass $f\big(f^{-1}(B')\big) = B'$ nicht immer gilt. Geben Sie ein **besonders einfaches Beispiel** an, das dies ebenfalls zeigt.