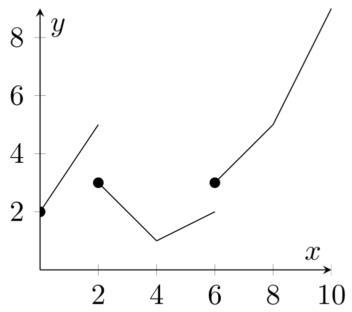
ALA 02 (HA) zum 18.04.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

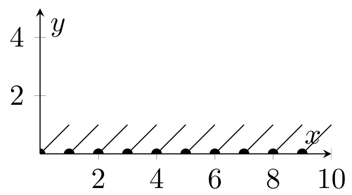
25. April 2013

1. (a) Graph:



unstetig bei $x = 2$ und $x = 6$

(b) Graph:



Für $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x \to n} (g(x)) = n - \lfloor n \rfloor = n - (n - 1) = 1$$

Für $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$g(x) = x - \lfloor x \rfloor = x - x = 0$$

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3n^2-2n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-n+1}+4n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}+4} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{3}}{5}$

Im mit * markierten Schritt wird die Stetigkeit der Wurzelfunktion vorausgesetzt.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{10n^2-n}-n}{2n+3}\right)\right) \overset{*}{=} \cos\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{10-\frac{1}{n}}-1}{2-\frac{3}{n}}\right)\right) \overset{**}{=} \cos\left(\frac{\sqrt{10}-1}{2}\right) \approx 0.4703$

Im mit ** markierten Schritt wird die Stetigkeit der Wurzelfunktion vorausgesetzt. Im mit * markierten Schritt wird die Stetigkeit der Cosinusfunktion vorausgesetzt.

3. Zu zeigen ist, dass $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, die Nacheinanderausführung also stetig ist. Eine Folge $x_n \to x_0$ wobei x_n und x_0 jeweils im Definitionsbereich von $g \circ f$ liegen. Da f in x_0 stetig ist folgt daraus das $f(x_n) \to f(x_0)$ g ist für $f(x_0)$ stetig also gilt:

$$g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$$

Stetigkeit der Nacheinanderausführung ist somit bewiesen.

4.

$$\lim_{x\to 0}(g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Der erste Teil (x^2) konvergiert gegen 0, der zweite Teil ($\sin\left(\frac{1}{x}\right)$) gegen $\sin(\infty)$, was zwar nicht definiert ist, jedoch im Intervall zwischen -1 und 1 liegen muss (Sinusfunktion). Daher konvergiert die ganze Funktion für $x \to 0$ gegen 0. Da für $x = 0$ der Funktionswert ebenfalls 0 ist, ist die Funktion an dieser Stelle stetig.

$$\lim_{x\to 0}(h(x)) = \lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \sin(\infty)$$

Die Funktion alterniert immer schneller, je kleiner $|x|$ wird, da $\frac{1}{x}$ immer schneller wächst, und die Sinusfunktion eine konstant lange Periode hat. Also ist die Funktion nicht stetig an der Stelle $x = 0$.