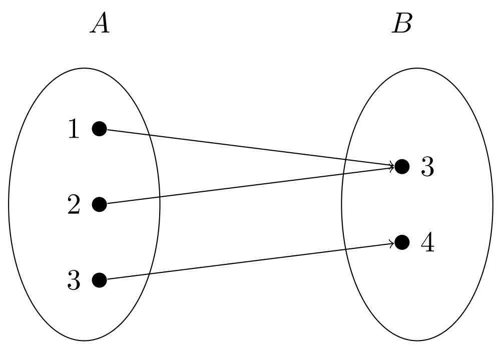
DM 01-B (HA) zum 26.10.2012

Paul Bienkowski, Jascha Andersen

20. November 2012

1. a) (i) Eine mögliche Funktion:



x	$f(x)$
1	3
2	3
3	4

(ii) Bilden einer injektiven Funktion ist nicht möglich, denn es gilt:

$$|A| > |B|\,.$$

(iii) Eine bijektive Funktion ist nicht möglich, da keine injektive Funktion gebildet werden kann, siehe (ii).

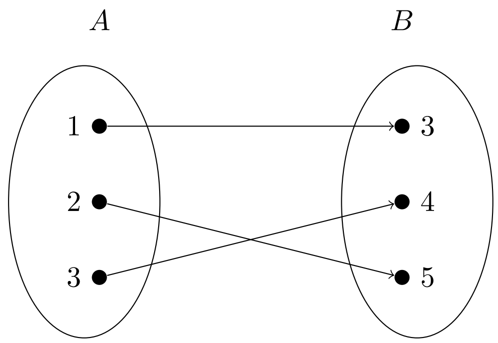
b) (i) Nicht möglich, da in einer surjektiven Funktion jeder Wert aus B genau einmal zugeordnet wäre:

$$|A| = |B|\,.$$

Damit wäre die Funktion automatisch ebenfalls injektiv.

(ii) Nicht möglich aus demselben Grund.

(iii) Eine mögliche Funktion:

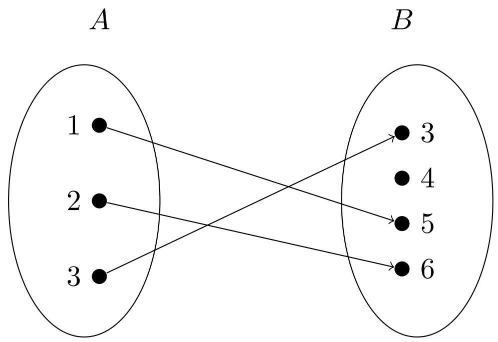


x	$h(x)$
1	3
2	5
3	4

c) (i) Nicht möglich, da für eine surjektiven Funktion jeder Wert in B zugeordnet werden muss, es stehen jedoch nicht genügend Werte in A zur Verfügung:

$$|A| < |B|.$$

(ii) Eine mögliche Funktion:



x	$g(x)$
1	5
2	6
3	3

(iii) Eine bijektive Funktion ist nicht möglich, da keine surjektive Funktion gebildet werden kann, siehe (i).

2.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f	nein (i)	nein (ii)	nein
g	ja (iii)	nein (iv)	nein
h	ja (v)	ja (vi)	ja

(i) **Behauptung:** f ist nicht injektiv.

Beweis: Es sind $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ anzugeben, für die $f(x_1) = f(x_2)$ gilt.

Annahme: Für $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$ ist dies der Fall.

Nachweis:

$$\begin{array}{rcl} f(3) & = & f(-3) \\ 3^2 - 5 & = & (-3)^2 - 5 \\ 9 - 5 & = & 9 - 5 \\ 4 & = & 4 \end{array}$$

Es ist gezeigt dass es Werte für $f(x)$ gibt, welche durch verschiedene x zugeordnet werden, daher ist f nicht injektiv. □

(ii) **Behauptung:** f ist nicht surjektiv.

Beweis: Es sei ein $y \in \mathbb{Z}$ anzugeben, für das gilt: es gibt kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = y$.

Annahme: Für $y = -6$ ist dies der Fall.

Nachweis:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & -6 \\ x^2 - 5 & = & -6 \\ x^2 & = & -1 \end{array}$$

Es gibt kein $x \in \mathbb{Z}$, für das gilt $x^2 = -1$, daher ist f nicht surjektiv. □

(iii) **Behauptung:** g ist injektiv.

Beweis: Wäre g nicht injektiv, würde für mindestens ein $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mit $x_1 \neq x_2$ gelten:

$$\begin{array}{rcl} g(x_1) & = & g(x_2) \\ 5 \cdot x_1 - 3 & = & 5 \cdot x_2 - 3 \\ 5 \cdot x_1 & = & 5 \cdot x_2 \\ x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Die steht im Widerspruch zur Annahme $x_1 \neq x_2$, daher ist g injektiv. □

(iv) **Behauptung:** g ist nicht surjektiv.

Beweis: Es sei ein $y \in \mathbb{Z}$ anzugeben, für das gilt: es gibt kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $g(x) = y$.

Annahme: Für $y = 0$ ist dies der Fall.

Nachweis:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 5 \cdot x - 3 &= 0 \\ 5 \cdot x &= 3 \\ x &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

Der errechnete Wert für x liegt nicht im Definitionsbereich $\mathbb{Z}$, daher ist g nicht surjektiv. $\square$

(v) **Behauptung:** h ist injektiv.

Beweis: Wäre h nicht injektiv, würde für mindestens ein $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mit $x_1 \neq x_2$ gelten:

$$\begin{aligned} h(x_1) &= h(x_2) \\ x_1 + 5 &= x_2 + 5 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Die steht im Widerspruch zur Annahme $x_1 \neq x_2$, daher ist h injektiv. $\square$

(vi) **Behauptung:** h ist surjektiv.

Beweis: Es gibt für jedes $y \in \mathbb{Z}$ ein $x \in \mathbb{Z}$, sodass gilt: $f(x) = y$. Dieses x lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} y &= x + 5 \\ x &= y - 5 \end{aligned}$$

Da die Subtraktion im $\mathbb{Z}$ unbegrenzt ausführbar ist, lässt sich diese Berechnung auf jedes $y \in \mathbb{Z}$ anwenden. Daher ist h surjektiv. $\square$

3. a) **Behauptung:** f ist nicht injektiv.

Beweis: Es sind $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ anzugeben, für die $f(n_1, m_1) = f(n_2, m_2)$ gilt.

Annahme: Für $(n_1, m_1) = (5, 2)$ und $(n_2, m_2) = (4, 1)$ ist dies der Fall.

Nachweis:

$$\begin{aligned} f(5,2) &= f(4,1) \\ 5-2 &= 4-1 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Es ist gezeigt dass es Werte für $f(n, m)$ gibt, welche durch verschiedene (n, m) zugeordnet werden, daher ist f nicht injektiv. □

Behauptung: f ist surjektiv.

Beweis: Jede ganze Zahl lässt sich als Differenz zweier anderer ganzen Zahlen ausdrücken. Für jede $x, k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f(x+k, k) = x + k - k = x$$

Somit lässt sich jedes $x \in \mathbb{Z}$ durch f abbilden, also ist f surjektiv. □

b) **Behauptung:** g ist injektiv.

Beweis: Es gilt $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$. Wäre g injektiv, wäre:

$$\begin{aligned} g(n_1, m_1) &= g(n_2, m_2) \\ (n_1 + m_1, n_1 - m_1) &= (n_2 + m_2, n_2 - m_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl c rcl} n_1 + m_1 &=& n_2 + m_2 & \wedge & n_1 - m_1 &=& n_2 - m_2 \\ n_1 - n_2 &=& m_2 - m_1 & \wedge & n_1 - n_2 &=& m_1 - m_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= m_1 - m_2 \\ 2 \cdot m_2 &= 2 \cdot m_1 \\ m_2 &= m_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= m_2 - m_1 \\ n_1 - n_2 &= 0 \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $(n_1, m_1) \neq (n_2, m_2)$, also ist g nicht injektiv. □

Behauptung: g ist nicht surjektiv.

Beweis: Es ist ein $y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ anzugeben, für die gilt: es gibt kein $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $g(n, m) = y$.

Annahme: Für $y = (1, 0)$ ist dies der Fall.

Nachweis:

$$\begin{aligned}
g(n,m) &= (1,0)\\
(n+m, n-m) &= (1,0)\\
n+m=1 &\wedge\ n-m=0\\
n &= m\\
n+n &= 1\\
2\cdot n &= 1\\
n=m &= \tfrac{1}{2}\\
\Rightarrow (n,m) &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

Der errechnete Wert für (n,m) liegt nicht im Definitionsbereich $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, daher ist g nicht surjektiv. □

c) **Behauptung:** h ist injektiv.

Beweis: Wäre h nicht injektiv, gäbe es $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ mit $n_1 \neq n_2$, für die gilt:

$$\begin{aligned}
h(n_1) &= h(n_2)\\
((n_1+1)^2, n_1^2+1) &= ((n_2+1)^2, n_2^2+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n_1+1)^2 &= (n_2+1)^2 \quad \wedge \quad n_1^2+1 = n_2^2+1\\
n_1^2+2\cdot n_1+1 = n_2^2+2\cdot n_2+1 &\wedge\ n_1^2 = n_2^2\\
2\cdot n_1+1 &= 2\cdot n_2+1\\
n_1 &= n_2
\end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu Annahme $n_1 \neq n_2$, also ist h injektiv. □

Behauptung: h ist nicht surjektiv.

Beweis: Es sei ein $y \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ anzugeben, für das gilt: es gibt kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $h(n) = y$.

Annahme: Für $y = (k, 4)$ mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}$ ist dies der Fall.

Nachweis:

$$\begin{aligned}
h(n) &= (k,4)\\
((n+1)^2, n^2+1) &= (k,4) \Rightarrow\\
n^2+1 &= 4\\
n^2 &= 3\\
n &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

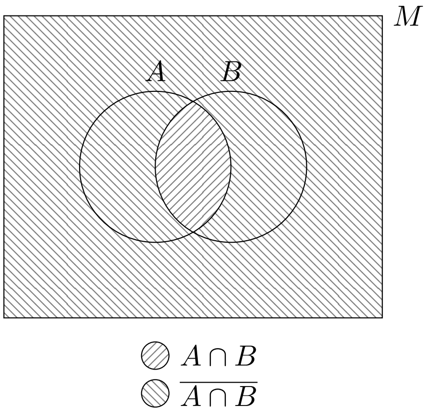
Der errechnete Wert für n ist kein Element der Definitionsmenge ($\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$), also ist h nicht surjektiv. □

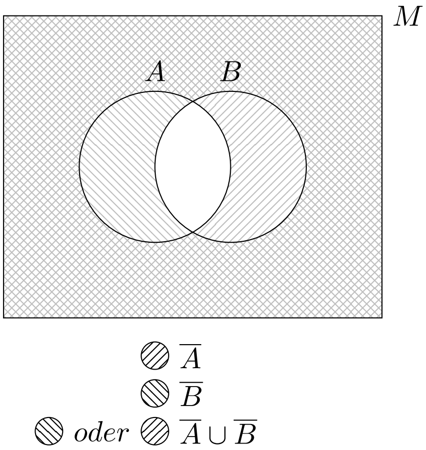
4. a)

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Die Spalten für $\overline{A \cap B}$ und $\overline{A} \cup \overline{B}$ sind identisch, daher gilt für alle $x \in M$:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$





b)

$$\mathcal{P}(M) = \Big\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\} \Big\}$$

c) (i) falsch, a ist keine Menge, es gilt: $a \not\subseteq M$, daher $a \notin \mathcal{P}(M)$.

(ii) falsch, a ist keine Menge, daher kann es auch keine Teilmenge sein

(iii) wahr, da $\{a\} \subseteq M$

(iv) falsch, $a \notin \mathcal{P}(M)$, daher ist $\{a\}$ keine Teilmenge

(v) falsch, $\{\{a\}\}$ ist keine Element der Potenzmenge

(vi) wahr, da $\{a\} \in \mathcal{P}(M)$, siehe (iii).