

# Optimierung Blatt 09 zum 16.12.2013

Paul Bienkowski, Nils Rokita, Arne Struck

16. Dezember 2013

1. a)

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**1. Iteration:**

1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Wir wählen somit als Eingangsvariable  $x_2$ ,

mit  $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = 8$ . Dies wird bestimmt durch  $x_6$ , welches die Ausgangsvariable wird.

### 5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 34 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, A_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## **2. Iteration:**

### 1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = (0 \ 0 \ 3)$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = (0 \ 0 \ 3)$$

### 2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$ ,  $y^T A_N = (0 \ 3)$ . Wir wählen somit als Eingangsvariable  $x_1$ ,

mit  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

### 3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} 34 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = 5$ . Dies wird bestimmt durch  $x_5$ , welches die Ausgangsvariable wird.

### 5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 29 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_4 & x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, A_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**3. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Keiner der Werte aus  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$  ist kleiner als der korrespondierende Wert in

$c_N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ , somit ist die Lösung optimal.

b)

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (3 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

**1. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = (0 \quad 0 \quad 0)$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = (0 \quad 0 \quad 0)$$

2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = (0 \quad 0 \quad 0)$ . Wir wählen somit als Eingangsva-

riable  $x_1$ , mit  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = 7$ . Dies wird bestimmt durch  $x_5$ , welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x_4 & x_1 & x_6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} x_5 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**2. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_5 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ . Wir wählen somit als Eingangsvariable  $x_3$ , mit  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = 1$ . Dies wird bestimmt durch  $x_4$ , welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} x_5 & x_2 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**3. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_5 & x_2 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Wir wählen somit als Eingangsvariable  $x_2$ , mit  $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = 5$ . Dies wird bestimmt durch  $x_6$ , welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} x_5 & x_6 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**4. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Keiner der Werte aus  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist kleiner als der korrespondierende Wert in

$c_N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , somit ist die Lösung optimal.

**2.**

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (5 \quad 6 \quad 9 \quad 8 \quad 0 \quad 0)$$

**1. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = (0 \quad 0)$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = (0 \quad 0)$$

2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ . Wir wählen somit als Eingangs-

variable  $x_3$ , mit  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = \frac{3}{2}$ . Dies wird bestimmt durch  $x_4$ , welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x_3 & x_3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**2. Iteration:**

1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 9 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{27}{2} \end{pmatrix}$ . Wir wählen somit als Eingangs-

variable  $x_2$ , mit  $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = 1$ . Dies wird bestimmt durch  $x_3$ , welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**3. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$



2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Wir wählen somit als Eingangs-

variable  $x_4$ , mit  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = \frac{1}{5}$ . Dies wird bestimmt durch  $x_3$ , welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x_2 & x_4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**4. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt  $A_N = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ . Wir wählen somit als Eingangs-

variable  $x_1$ , mit  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems  $Bd = a$  ergibt

$$d = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung  $x_B^* - td \geq 0$  lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte  $t$ , das dieses erfüllt, ist  $t = 1$ . Dies wird bestimmt durch  $x_4$ , welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} x_4 & x_3 & x_4 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**5. Iteration:**1. Schritt:

Es gilt  $c_B^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix}$ . Die Lösung des Gleichungssystems  $y^T B = c_B^T$  lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Keiner der Werte aus  $y^T A_N = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$  ist kleiner als der korrespondierende Wert in

$c_N^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ , somit ist die Lösung optimal.