ALA 05 (HA) zum 16.05.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

16. Mai 2013

1. (i) $f(x) = x^{-\frac{5}{4}} \cdot x^{\frac{7}{6}}$
$f'(x) = -\frac{1}{12}x^{-\frac{13}{12}}$

(ii) $f'(x) = cos(x^2) \cdot 2x$

(iii) $f'(x) = 2 \cdot sin(x) \cdot cos(x)$

(iv) $f'(x) = cos(x)^2 + sin(x) \cdot -sin(x)$

(v) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

(vi) $f'(x) = (x^3-1)^{arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot ln(x^3-1) + arctan(x) \cdot \left(\frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2\right)$

2.

1. f ist definiert in in $\mathbb{R}$, denn im Nenner kann keine 0 stehen da x^2 nie negativ wird.
2. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
   $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{x^4+2x^2+1}$
   $f''(x) = \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$
   Nullstellen von f: 0
   Nullstellen von f': 0
   Nullstellen von f'': 0, 1 und -1
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\cdot 2}{x^2\cdot(\frac{1}{x^2})}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x\cdot(\frac{1}{x^2})}\right)$
   Folglich gilt für die gesuchten Grenzwerte:
   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
4. Aus 3. folgt:
   - $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$
   - $f(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$
   - $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 1)$
   - $f'(x) < 0$ für alle $x \in (1, \infty)$

- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (0, 1)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (-1, 0)$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, -1)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (\infty, 1)$

Diese Ergebebnisse lassen sich nun folgendermaßen darstellen:

f ist negativ	0	f ist positiv

	-1		1	
f ist streng monoton fallend		f ist streng monoton wachsend		f ist streng monoton fallend

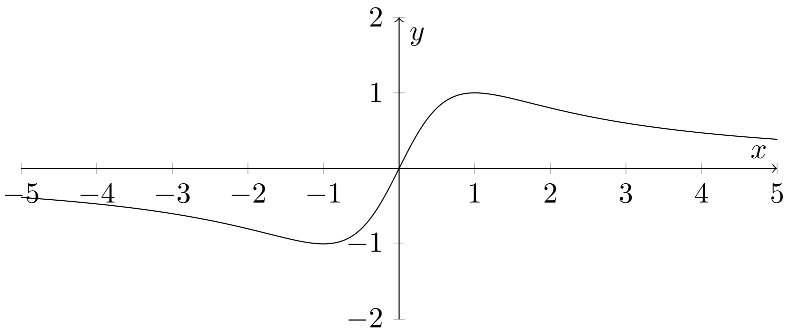
	-1		0		1	
f ist streng konvex		f ist streng konkav		f ist streng konvex		f ist streng konkav

5. Aus 4. ergibt sich:
   f hat bei x = 1 ein Maximum
   f hat bei x = -1 ein Minimum
   f hat bei x = 0 einen Wendepunkt
6. Asymptote: $g(x) = ax + b$ für $x \to \infty$:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x+x^3}\right) = 0 \\ b &= \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+x^2} - 0\right) = 0 \end{aligned}$$

Für $x \to \infty$ ist die Asymptote also $g(x) = 0$. Enstsprechend kann man einfach zeigen, dass f für $x \to -\infty$ ebenso eine Asymptote $g(x) = 0$ hat.

Da $g(x)$ immer gleich 0 ist befindet sich der Snittpunkt mit $f(x)$ bei der bereits gefundenen Nullstelle der Funktion, also $x = 0$.



7.

x	0	0.5	1	4	-0.5	-1	-4
$f(x)$	0	0.8	1	8/17	-0.6	-1	-8/17

3. $f(1) = -1$
$f(2) = 17$

Die werte von $f(x)$ haben im Intervall $[1, 2]$ einen Vorzeichenwechsel. Da die Funktion (wie alle Polynome) stetig ist, muss es dementsprechend eine Nullstelle im Intervall geben.

$$x_1 = \frac{2 - 4 \cdot 2^3 - (10 \cdot 2) + 5}{24 - 10} = 1.5526316$$

Entsprechend berechnen sich weitere x_n Werte.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 1.5526316 \\
x_2 &= 1.3177844 \\
x_3 &= 1.2277567 \\
x_4 &= 1.2122722 \\
x_5 &= 1.2118115 \\
x_6 &= 1.2118111 \\
x_7 &= 1.2118111
\end{aligned}$$

Das Newtensche Näherungsverfahren gibt uns also einen ungefähren Wert von 1.2118111 für die Nullstelle zurück.

4. Die Seitenlängen des Rechtecks seien a und b Seitenlängen des Rechtecks, und F seine Fläche. Dabei haben die sich gegenüberliegenden Seiten die beide Teil des Seils sind beide die Länge a. Sowie L wie in der Aufgabe vorgegeben eine Konstante für die Länge der Leine.

$F = a \cdot b$
$L = 2a + b$
$b = L - 2a$
$F = a \cdot (L - 2a) = aL - 2a^2$
Diese Funktion zeigt nun die Fläche in Abhängikeit der Seitenlänge a. Nun ist das Maximum zu suchen.
$f(a) = aL - 2a^2$
$f'(a) = L - 4a$
Nullstelle der 1. Ableitung suchen:
$L - 4a = 0$
$a = \frac{L}{4}$
Da es sich um eine quadratische Funktion handelt haben wir damit bereits das Maximum gefunden. Das Rechteck ist also maximal groß wenn wir $a = \frac{L}{4}$ und folglich $b = \frac{L}{2}$ wählen.

5. a)

b)