64-040 Modul IP7: Rechnerstrukturen

http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2012ws/vorlesung/rs

– Kapitel 6 –

Andreas Mäder

Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik
Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2012/2013

Kapitel 6

Rechner-Arithmetik

- Wiederholung: Stellenwertsystem
- Addition: Ganzzahlen, Zweierkomplementzahlen
- Überlauf

- Multiplikation
- Division

- Schiebe-Operationen

Wiederholung: Stellenwertsystem („Radixdarstellung“)

- Wahl einer geeigneten Zahlenbasis b („Radix“)
  - 10: Dezimalsystem
  - 16: Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem)
  - 2: Dualsystem
- Menge der entsprechenden Ziffern $\{0, 1, \ldots, b-1\}$
- inklusive einer besonderen Ziffer für den Wert Null
- Auswahl der benötigten Anzahl n von Stellen

$$|z| = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot b^i$$

b Basis a_i Koeffizient an Stelle i

- universell verwendbar, für beliebig große Zahlen

Integer-Datentypen in C und Java

C:

- Zahlenbereiche definiert in Headerdatei `/usr/include/limits.h`
  `LONG_MIN`, `LONG_MAX`, `ULONG_MAX`, etc.
- Zweierkomplement (signed), Ganzzahl (unsigned)
- die Werte sind plattformabhängig (!)

Java:

- 16-bit, 32-bit, 64-bit Zweierkomplementzahlen
- Wrapper-Klassen `Short`, `Integer`, `Long`

```
Short.MAX_VALUE    =        32767
Integer.MIN_VALUE  = -2147483648
Integer.MAX_VALUE  =  2147483647
Long.MIN_VALUE     = -9223372036854775808L
...
```

- Werte sind für die Sprache fest definiert

Addition im Dualsystem

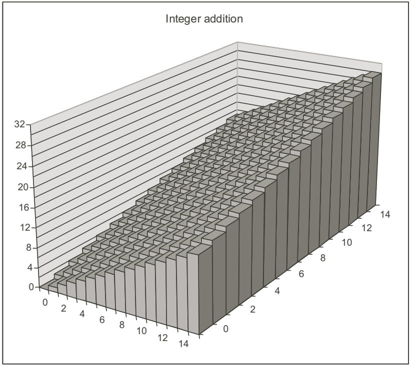
- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- Addition mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- Additionsmatrix:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}$$

- Beispiel

$$\begin{array}{rr} & 1011\,0011 \\ + & 0011\,1001 \\ \hline \text{Ü} & 11\quad\;\; 11\;\; \\ \hline\hline & 1110\,1100 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} = & 179 \\ = & 57 \\ \hline & 11\; \\ \hline\hline = & 236 \end{array}$$

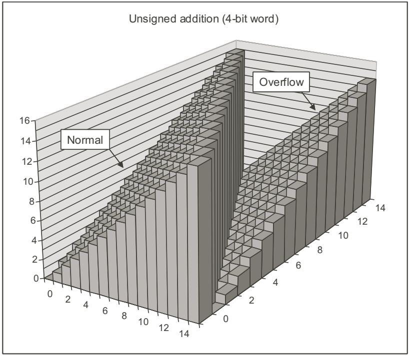
unsigned Addition: Visualisierung



[BO11]

- Wortbreite der Operanden ist w, hier 4-bit
- Zahlenbereich der Operanden x, y ist $0 .. (2^w - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats s ist $0 .. (2^{w+1} - 2)$

unsigned Addition: Visualisierung (cont.)



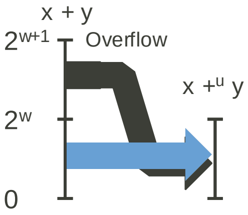
[BO11]

- Wortbreite der Operanden und des Resultats ist w

$\Rightarrow$ Überlauf, sobald das Resultat größer als $(2^w - 1)$

$\Rightarrow$ oberstes Bit geht verloren

unsigned Addition: Überlauf



- Wortbreite ist w
- Zahlenbereich der Operanden x, y ist $0 \,..\, (2^w - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats s ist $0 \,..\, (2^{w+1} - 2)$
- Werte $s \geq 2^w$ werden in den Bereich $0 \,..\, 2^w - 1$ abgebildet

Subtraktion im Dualsystem

- Subtraktion mehrstelliger Zahlen erfolgt stellenweise
- (Minuend - Subtrahend), Überträge berücksichtigen

- Beispiel

	1011 0011	=	179
-	0011 1001	=	57
Ü	1111		
	111 1010	=	122

- Alternative: Ersetzen der Subtraktion durch Addition des *b*-Komplements

Subtraktion mit *b*-Komplement

- bei Rechnung mit fester Stellenzahl n gilt:

$$K_b(z) + z = b^n \quad = 0$$

weil b^n gerade nicht mehr in n Stellen hineinpasst

- also gilt für die Subtraktion auch:

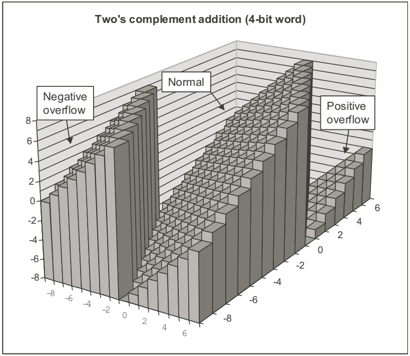
$$x - y = x + K_b(y)$$

$\Rightarrow$ Subtraktion kann also durch Addition des b-Komplements ersetzt werden

- und für Integerzahlen gilt außerdem

$$x - y = x + K_{b-1}(y) + 1$$

signed Addition: Visualisierung 2-Komplement

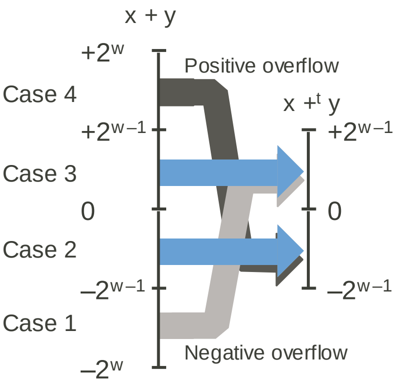


[BO11]

- Wortbreite der Operanden ist w, hier 4-bit
- Zahlenbereich der Operanden x, y ist -2^{w-1} .. $(2^{w-1}-1)$
- Zahlenbereich des Resultats s ist -2^{w} .. $(2^{w}-2)$

$\Rightarrow$ Überlauf in beide Richtungen möglich

signed Addition: Überlauf



- Wortbreite des Resultats ist w: Bereich -2^{w-1} .. $(2^{w-1}-1)$
- Überlauf positiv wenn Resultat $\geq \;\; 2^{w-1}$: Summe negativ
  –"– negativ –"– $< -2^{w-1}$: Summe positiv

Überlauf: Erkennung

- Erkennung eines Überlaufs bei der Addition?
- wenn beide Operanden das gleiche Vorzeichen haben und sich das Vorzeichen des Resultats unterscheidet

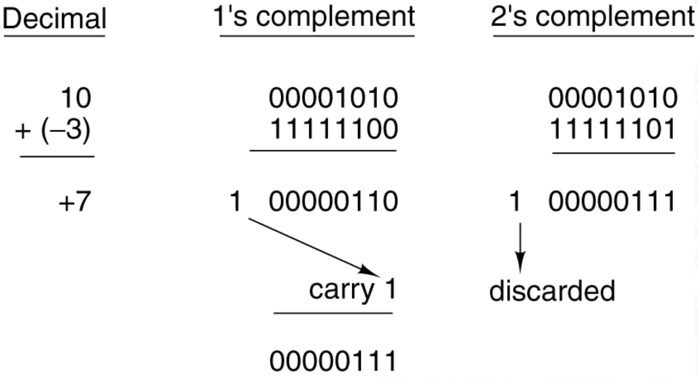
- Java-Codebeispiel

```
int a, b, sum;          // operands and sum
boolean ovf;            // ovf flag indicates overflow

sum = a + b;
ovf = ((a < 0) == (b < 0)) && ((a < 0) != (sum < 0));
```

Subtraktion mit Einer- und Zweierkomplement

- Subtraktion ersetzt durch Addition des Komplements



[Tan09]

Subtraktion mit Einer- und Zweierkomplement (cont.)

- das b-**Komplement** einer Zahl z ist

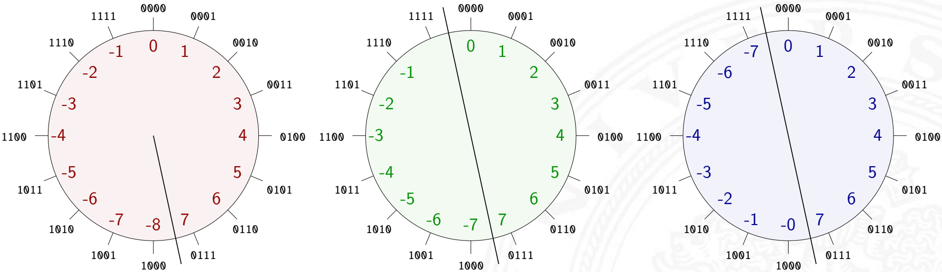
$$
\begin{aligned}
K_b(z) &= b^n - z, && \text{für} \quad z \neq 0 \\
&= 0, && \text{für} \quad z = 0
\end{aligned}
$$

- das $(b-1)$-**Komplement** einer Zahl z ist

$$
\begin{aligned}
K_{b-1}(z) &= b^n - b^{-m} - z, && \text{für} \quad z \neq 0 \\
&= 0, && \text{für} \quad z = 0
\end{aligned}
$$

Veranschaulichung: Zahlenkreis

Beispiel für 4-bit Zahlen

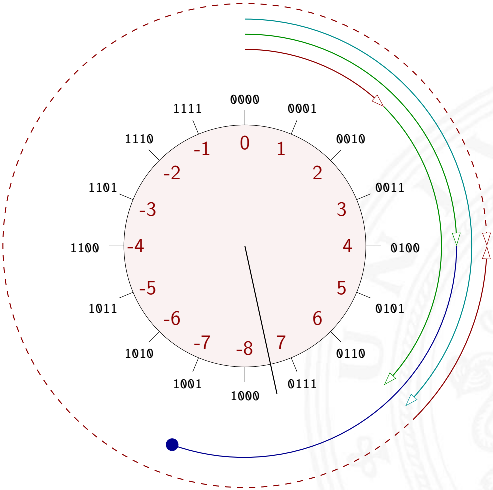


2-Komplement 1-Komplement Betrag+Vorzeichen

- Komplement-Arithmetik als Winkeladdition

Zahlenkreis: Addition, Subtraktion

2-Kompl.

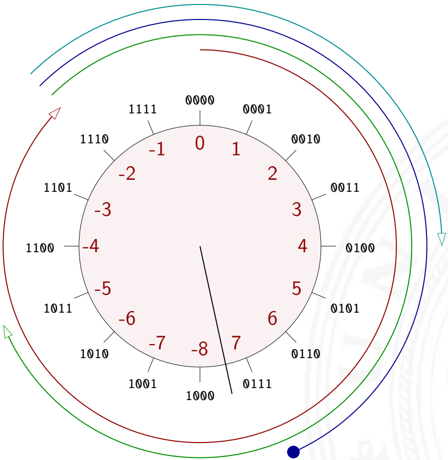


0010+0100=0110
0100+0101=1001
0110-0010=0100

0010 1110
0100
0101
0110

Zahlenkreis: Addition, Subtraktion (cont.)

2-Kompl.

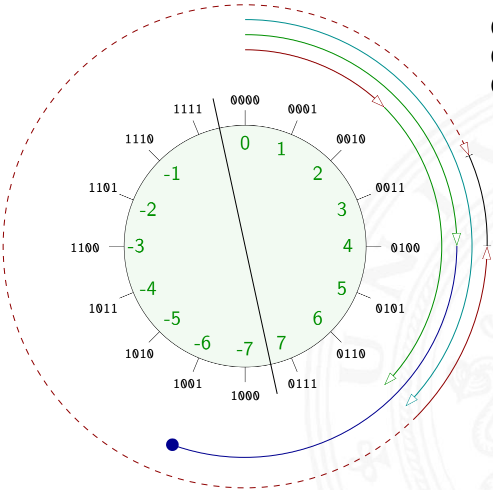


1110+1101=1011
1110+1001=0111
1110+0110=0100

1110
1101
1001
0110

Zahlenkreis: Addition, Subtraktion (cont.)

1-Kompl.

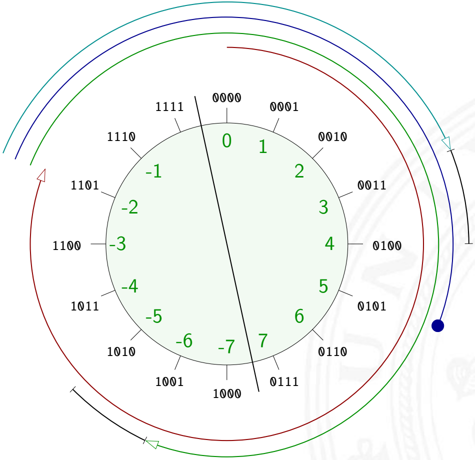


0010+0100=0110
0100+0101=1001
0110+1101+1=0100

0010 1101
0100
0101
0110

Zahlenkreis: Addition, Subtraktion (cont.)

1-Kompl.



1101+1100+1=1010

1101+1000=0101

1101+0110+1=0100

1101

1100

1000

0110

in C: unsigned Zahlen

- für hardwarenahe Programme und Treiber
- für modulare Arithmetik („multi-precision arithmetic")
- aber evtl. ineffizient (vom Compiler schlecht unterstützt)

- Vorsicht vor solchen Fehlern

```
unsigned int i, cnt = ...;
for( i = cnt-2; i >= 0; i-- ) {
  a[i] += a[i+1];
}
```

in C: Casting-Regeln

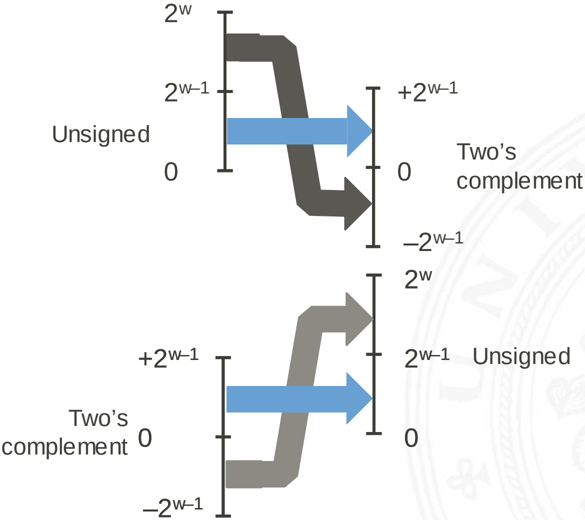
- Bit-Repräsentation wird nicht verändert
- kein Effekt auf positiven Zahlen
- Negative Werte als (große) positive Werte interpretiert

```
short int            x =  15213;
unsigned short int ux = (unsigned short) x; // 15213

short int            y = -15213;
unsigned short int uy = (unsigned short) y; // 50323
```

- Schreibweise für Konstanten:
  - ohne weitere Angabe: signed
  - Suffix „U“ für unsigned: `0U`, `4294967259U`

in C: unsigned / signed Interpretation



in C: Vorsicht bei Typumwandlung

- Arithmetische Ausdrücke:
  - bei gemischten Operanden: Auswertung als unsigned
  - auch für die Vergleichsoperationen <, >, ==, <=, >=
  - Beispiele für Wortbreite 32-bit:

Konstante 1	Relation	Konstante 2	Auswertung	Resultat
`0`	`==`	`0U`	unsigned	1
`-1`	`<`	`0`	signed	1
`-1`	`<`	`0U`	unsigned	`0`
`2147483647`	`>`	`-2147483648`	signed	1
`2147483647U`	`>`	`-2147483648`	unsigned	`0`
`2147483647`	`>`	`(int) 2147483648U`	signed	1
`-1`	`>`	`-2`	signed	1
`(unsigned) -1`	`>`	`-2`	unsigned	1

Fehler

Sign-Extension

- Gegeben: w-bit Integer x
- Umwandeln in $w + k$-bit Integer x' mit gleichem Wert?

- **Sign-Extension**: Vorzeichenbit kopieren

$$x' = x_{w-1}, \dots x_{w-1}, x_{w-1}, x_{w-2}, \dots x_0$$

0110	4-bit signed:	+6
0000 0110	8-bit signed:	+6
0000 0000 0000 0110	16-bit signed:	+6
1110	4-bit signed:	-2
1111 1110	8-bit signed:	-2
1111 1111 1111 1110	16-bit signed:	-2

Java Puzzlers No.5

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*, Addison-Wesley 2005

```java
public static void main( String[] args ) {
  System.out.println(
    Long.toHexString( 0x100000000L + 0xcafebabe ));
}
```

- Programm addiert zwei Konstanten, Ausgabe in Hex-Format
- Was ist das Resultat der Rechnung?

0xffffffffcafebabe	(sign-extension!)
0x0000000100000000	
Ü 11111110	
00000000cafebabe	

Ariane-5 Absturz

Ariane-5 Absturz (cont.)

- Erstflug der Ariane-5 („V88“) am 04. Juni 1996
- Kurskorrektur wegen vermeintlich falscher Fluglage
- Selbstzerstörung der Rakete nach 36,7 Sekunden
- Schaden ca. 370 M$ (teuerster Softwarefehler der Geschichte?)

- bewährte Software von Ariane-4 übernommen
- aber Ariane-5 viel schneller als Ariane-4
- 64-bit Gleitkommawert für horizontale Geschwindigkeit
- Umwandlung in 16-bit Integer: dabei Überlauf

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Ariane_V88`

Multiplikation im Dualsystem

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- $p = a \cdot b$ mit Multiplikator a und Multiplikand b
- Multiplikation von a mit je einer Stelle des Multiplikanten b
- Addition der Teilterme

- Multiplikationsmatrix ist sehr einfach:

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Multiplikation im Dualsystem (cont.)

- Beispiel

$$
\begin{array}{rrlcl}
 & 10110011 \times 1101 & & = 179 \cdot 13 & = 2327 \\
\hline
 & 10110011 \quad\quad 1 & & & = 1001\,0001\,0111 \\
 & 10110011 \quad\quad 1 & & & = 0x917 \\
 & 00000000 \quad\quad 0 & & & \\
 & 10110011 \quad\quad 1 & & & \\
\hline
\text{Ü} & 11101111 & & & \\
\hline\hline
 & 100100010111 & & &
\end{array}
$$

unsigned Multiplikation

- bei Wortbreite w bit
- Zahlenbereich der Operanden: $0 \,..\, (2^w - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats: $0 \,..\, (2^w - 1)^2 = 2^{2w} - 2^{w+1} + 1$

$\Rightarrow$ bis zu $2w$ bits erforderlich

- C: Resultat enthält nur die unteren w bits
- Java: keine unsigned Integer
- Hardware: teilweise zwei Register *high*, *low* für die oberen und unteren Bits des Resultats

signed Multiplikation 2-Komplement

- Zahlenbereich der Operanden: -2^{w-1} .. $(2^{w-1} - 1)$
- Zahlenbereich des Resultats: $-2^{w} \cdot (2^{w-1} - 1)$ .. (2^{2w-2})

$\Rightarrow$ bis zu $2w$ bits erforderlich

- C, Java: Resultat enthält nur die unteren w bits
- Überlauf wird ignoriert

```
int i = 100*200*300*400; // -1894967296
```

- Repräsentation der unteren Bits des Resultats entspricht der unsigned Multiplikation

$\Rightarrow$ kein separater Algorithmus erforderlich
Beweis: siehe Bryant/O'Hallaron, 2.3.5

Java Puzzlers No. 3

J. Bloch, N. Gafter: *Java Puzzlers: Traps, Pitfalls, and Corner Cases*, Addison-Wesley 2005

```
public static void main( String args[] ) {
  final long MICROS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000 * 1000;
  final long MILLIS_PER_DAY = 24 * 60 * 60 * 1000;
  System.out.println(  MICROS_PER_DAY / MILLIS_PER_DAY );
}
```

- druckt den Wert 5, nicht 1000…
- `MICROS_PER_DAY` mit 32-bit berechnet, dabei Überlauf
- Konvertierung nach 64-bit `long` erst bei Zuweisung
- `long`-Konstante schreiben: `24L * 60 * 60 * 1000 * 1000`

Division im Dualsystem

- $d = a/b$ mit Dividend a und Divisor b

- funktioniert genau wie im Dezimalsystem
- schrittweise Subtraktion des Divisors
- Berücksichtigen des „Stellenversetzens“

- in vielen Prozessoren nicht (oder nur teilweise) durch Hardware unterstützt
- daher deutlich langsamer als Multiplikation

Division im Dualsystem (cont.)

- Beispiele

$$100_{10}/3_{10} = 110\,0100_2/11_2 = 10\,0001_2$$

$$\begin{array}{lll}
1100100 & / \;\; 11 = & 0100001 \\
1 & & 0 \\
11 & & \;1 \\
-11 & & \\
\hline
\;\;0 & & \;\;0 \\
\;\;\;0 & & \;\;\;0 \\
\;\;\;\;1 & & \;\;\;\;0 \\
\;\;\;\;10 & & \;\;\;\;\;0 \\
\;\;\;\;100 & & \;\;\;\;\;\;1 \\
\;\;\;-11 & & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;1 & & \;\;\;\;\;\;\;1 \quad \text{(Rest)}
\end{array}$$

Division im Dualsystem (cont.)

$$91_{10}/13_{10} = 101\,1011_2/1101_2 = 111_2$$

$$\begin{array}{llll}
1011011 & / & 1101 = & 0111 \\
1011 & & & 0 \\
10110 & & & \;\,1 \\
-1101 & & & \\
\hline
\;\,10011 & & & \;\;\;1 \\
\;-1101 & & & \\
\hline
\;\;\;01101 & & & \;\;\;\;1 \\
\;\;-1101 & & & \\
\hline
\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 & & &
\end{array}$$

Höhere mathematische Funktionen

Berechnung von $\sqrt{x}$, $\log x$, $\exp x$, $\sin x$, $\ldots$?

- Approximation über Polynom (Taylor-Reihe) bzw. Approximation über rationale Funktionen
  - vorberechnete Koeffizienten für höchste Genauigkeit
  - Ausnutzen mathematischer Identitäten für Skalierung
- Sukzessive Approximation über iterative Berechnungen
  - Beispiele: Quadratwurzel und Reziprok-Berechnung
  - häufig schnelle (quadratische) Konvergenz
- Berechnungen erfordern nur die Grundrechenarten

Reziprokwert: Iterative Berechnung von $1/x$

- Berechnung des Reziprokwerts $y = 1/x$ über

$$y_{i+1} = y_i \cdot (2 - x \cdot y_i)$$

- geeigneter Startwert y_0 als Schätzung erforderlich

- Beispiel $x = 3$, $y_0 = 0.5$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 0.5 \cdot (2 - 3 \cdot 0.5) &&= 0.25 \\
y_2 &= 0.25 \cdot (2 - 3 \cdot 0.25) &&= 0.3125 \\
y_3 &= 0.3125 \cdot (2 - 3 \cdot 0.3125) &&= 0.33203125 \\
y_4 &= 0.3332824 \\
y_5 &= 0.3333333332557231 \\
y_6 &= 0.3333333333333333
\end{aligned}$$

Quadratwurzel: Heron-Verfahren für $\sqrt{x}$

Babylonisches Wurzelziehen

- Sukzessive Approximation von $y = \sqrt{x}$ gemäß

$$y_{n+1} = \frac{y_n + x/y_n}{2}$$

- quadratische Konvergenz in der Nähe der Lösung
- Anzahl der gültigen Stellen verdoppelt sich mit jedem Schritt

- aber langsame Konvergenz fernab der Lösung
- Lookup-Tabelle und Tricks für brauchbare Startwerte y_0

Informationstreue

Welche mathematischen Eigenschaften gelten bei der Informationsverarbeitung, in der gewählten Repräsentation?

Beispiele:

- Gilt $x^2 \geq 0$?
  - float: ja
  - signed integer: nein
- Gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$?
  - integer: ja
  - float: nein

  1.0E20 + (-1.0E20 + 3.14) = 0

Festkomma Addition

unsigned Arithmetik

- Wortbreite auf w begrenzt
- kommutative Gruppe / Abel'sche Gruppe
  - Abgeschlossenheit $0 \leq a \oplus_w^u b \leq 2^w - 1$
  - Kommutativgesetz $a \oplus_w^u b = b \oplus_w^u a$
  - Assoziativgesetz $a \oplus_w^u (b \oplus_w^u c) = (a \oplus_w^u b) \oplus_w^u c$
  - neutrales Element $a \oplus_w^u 0 = a$
  - Inverses $a \oplus_w^u \overline{a} = 0; \overline{a} = 2^w - a$

Festkomma Addition (cont.)

signed Arithmetik — 2-Komplement

- Wortbreite auf w begrenzt
- signed und unsigned Addition sind auf Bit-Ebene identisch

  $a \oplus_w^s b = U2S(S2U(a) \oplus_w^u S2U(b))$

$\Rightarrow$ isomorphe Algebra zu $\oplus_w^u$

- kommutative Gruppe / Abel'sche Gruppe
  - Abgeschlossenheit $-2^{w-1} \leq a \oplus_w^s b \leq 2^{w-1} - 1$
  - Kommutativgesetz $a \oplus_w^s b = b \oplus_w^s a$
  - Assoziativgesetz $a \oplus_w^s (b \oplus_w^s c) = (a \oplus_w^s b) \oplus_w^s c$
  - neutrales Element $a \oplus_w^s 0 = a$
  - Inverses $a \oplus_w^s \overline{a} = 0; \quad \overline{a} = \begin{cases} -a, & a \neq -2^{w-1} \\ a, & a = -2^{w-1} \end{cases}$

Festkomma Multiplikation

unsigned Arithmetik

- Wortbreite auf w begrenzt
- Modulo-Arithmetik $a \otimes_w^u b = (a \cdot b) mod 2^w$
- $\otimes_w^u$ und $\oplus_w^u$ bilden einen kommutativen Ring
  - $\oplus_w^u$ ist eine kommutative Gruppe
  - Abgeschlossenheit $0 \leq a \otimes_w^u b \leq 2^w - 1$
  - Kommutativgesetz $a \otimes_w^u b = b \otimes_w^u a$
  - Assoziativgesetz $a \otimes_w^u (b \otimes_w^u c) = (a \otimes_w^u b) \otimes_w^u c$
  - neutrales Element $a \otimes_w^u 1 = a$
  - Distributivgesetz $a \otimes_w^u (b \oplus_w^u c) = (a \otimes_w^u b) \oplus_w^u (a \otimes_w^u c)$

Festkomma Multiplikation (cont.)

signed Arithmetik

- signed und unsigned Multiplikation sind auf Bit-Ebene identisch
- ...

isomorphe Algebren

- unsigned Addition und Multiplikation; Wortbreite w
- signed Addition und Multiplikation; Wortbreite w 2-Kompl.
- isomorph zum Ring der ganzen Zahlen $modulo 2^w$

- Ordnungsrelation im Ring der ganzen Zahlen
  - $\mathrm{a} > 0 \longrightarrow a + b > b$
  - $a > 0, b > 0 \longrightarrow a \cdot b > 0$
  - diese Relationen gelten nicht bei Rechnerarithmetik Überlauf!

Gleitkomma Addition

Vergleich mit kommutativer Gruppe

- Abgeschlossen? Ja
- Kommutativ? Ja
- Assoziativ? Nein
  (Überlauf, Rundungsfehler)
- Null ist neutrales Element? Ja
- Inverses Element existiert? Fast
  (außer für NaN und Infinity)
- Monotonie? $a \geq b \longrightarrow (a + c) \geq (b + c)$ Fast
  (außer für NaN und Infinity)

Gleitkomma Multiplikation

Vergleich mit kommutativem Ring

- Abgeschlossen? — Ja
  (aber Infinity oder NaN möglich)
- Kommutativ? — Ja
- Assozativ? — Nein
  (Überlauf, Rundungsfehler)
- Eins ist neutrales Element? — Ja
- Distributivgesetz? — Nein
- Monotonie? $a \geq b; c \geq 0 \longrightarrow (a \cdot c) \geq (b \cdot c)$ — Fast
  (außer für NaN und Infinity)

Literatur

[BO11] R.E. Bryant, D.R. O'Hallaron:
Computer systems – A programmers perspective.
2nd edition, Pearson, 2011. ISBN 0–13–713336–7

[Tan06] A.S. Tanenbaum: *Computerarchitektur: Strukturen, Konzepte, Grundlagen*. 5. Auflage, Pearson Studium, 2006.
ISBN 3–8273–7151–1

[Tan09] A.S. Tanenbaum: *Structured Computer Organization*.
5th rev. edition, Pearson International, 2009.
ISBN 0–13–509405–4

Literatur (cont.)

[Omo94] A.R. Omondi: *Computer Arithmetic Systems – Algorithms, Architecture and Implementations*. Prentice-Hall International, 1994. ISBN 0–13–334301–4

[Kor93] I. Koren: *Computer Arithmetic Algorithms*. Prentice-Hall, Inc., 1993. ISBN 0–13–151952–2

[Spa76] O. Spaniol: *Arithmetik in Rechenanlagen*. Teubner, 1976. ISBN 3–519–02332–6