Optimierung Blatt 07 zum 02.12.2013

Paul Bienkowski, Nils Rokita, Arne Struck

2. Dezember 2013

1. a)

$$\begin{array}{lcccccccc} P_1: & \frac{33}{4} & + & 0 & + & 3\cdot\frac{3}{2} & = & 12\frac{3}{4} & < & 30 \\ P_2: & 2\cdot\frac{33}{4} & + & 2\cdot 0 & + & 5\cdot\frac{3}{2} & & & = & 24 \\ P_3: & 4\cdot\frac{33}{4} & + & 0 & + & 2\cdot\frac{3}{2} & & & = & 36 \end{array}$$

Die Ungleichung P_2 und P_3 sind mit Gleichheit erfüllt, daher muss $y_1^* = 0$ gelten. Aus $x_1 \neq 0, x_3 \neq 0$ folgt, dass D_1 und D_3 mit Gleichheit erfüllt sein müssen:

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & = & 3 \\ 3y_1 & + & 5y_2 & + & 2y_3 & = & 2 \end{array}$$

Durch Einsetzen von $y_1 = 0$ und Auflösen erhält man:

$$y^* = (0, \frac{1}{8}, \frac{11}{16})$$

Dies muss eine gültige Lösung für (D) sein, allerdings erhält man in D_2:

$$0 + 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{11}{16} = \frac{15}{16} \geq 1$$

Damit ist dies keine gültige Lösung für (D), die vorgeschlagene Lösung kann daher nicht optimal sein.

b) **Duales Problem (D):**
minimiere $7y_1 + 8y_2 + 12y_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & & & + & 2y_3 & \geq & 2 \\ y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 3 \\ & & y_2 & & & \geq & 2 \\ & & & & y_{1..3} & \geq & 0 \end{array}$$

Einsetzen von $x^* = (5, 2, 6)$ in (P) erfüllt alle Ungleichungen mit Gleichheit, also können wir keine Aussage über $y^*_{1..3}$ treffen:

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & + & 2 & & & = & 7 \\ & & 2 & + & 6 & = & 8 \\ 2 \cdot 5 & + & 2 & & & = & 12 \end{array}$$

Da $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ sind, müssen $D_{1..3}$ mit Gleichheit erfüllt sein:

$$\begin{array}{ccccccc} y1 & & & + & 2y_3 & = & 2 \\ y1 & + & y_2 & + & y_3 & = & 3 \\ & & y_2 & & & = & 2 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung für dieses Gleichungssystem ist $y^* = (0, 2, 1)$. Da alle Ungleichungen am Gleichungssystem beteiligt sind, ist dies ebenfalls eine zulässige Lösung für (D). Damit ist die vorgeschlagene Lösung optimal.

2. Der Index 1 bezieht sich auf einfache Einheiten, der Index 2 gibt die in regulärer Arbeitszeit veredelten Einheiten, Index 3 in Überstunden veredelten Einheiten.

Die vorgeschlagene Lösung lautet: $a^* = (0, 400, 0), b^* = (440, 10, 30), c^* = (0, 10, 220)$.

Primales Problem (P):

maximiere $5a_1 + 13a_2 + 8a_3 + 9b_1 + 15b_2 + 12b_3 + 5c_1 + 14c_2 + 10c_3$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcr} a_1 + a_2 + a_3 & \leq & 400 \\ -a_1 - a_2 - a_3 & \leq & -400 \\ b_1 + b_2 + b_3 & \leq & 480 \\ -b_1 - b_2 - b_3 & \leq & -480 \\ c_1 + c_2 + c_3 & \leq & 230 \\ -c_1 - c_2 - c_3 & \leq & -230 \\ a_2 + b_2 + c_2 & \leq & 420 \\ a_3 + b_3 + c_3 & \leq & 250 \\ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Duales Problem (D):

minimiere $400y_1 - 400y_2 + 480y_3 - 480y_4 + 230y_5 - 230y_6 + 420y_7 + 250y_8$
unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccccr} y_1 & - & y_2 & & & \geq & 5 \\ y_1 & - & y_2 & + & y_7 & \geq & 13 \\ y_1 & - & y_2 & + & y_8 & \geq & 8 \\ y_3 & - & y_4 & & & \geq & 9 \\ y_3 & - & y_4 & + & y_7 & \geq & 15 \\ y_3 & - & y_4 & + & y_8 & \geq & 12 \\ y_5 & - & y_6 & & & \geq & 5 \\ y_5 & - & y_6 & + & y_7 & \geq & 14 \\ y_5 & - & y_6 & + & y_8 & \geq & 10 \\ y_{1..8} & \geq & 0 & & & & \end{array}$$

Aus $a_2, b_{1..3}, c_{2..3} \neq 0$ folgt, dass $D_{2,4,5,6,8,9}$ mit Gleichheit erfüllt sein müssen. Schaut man sich nur $D_{4,5,8,9}$ an, erhält man:

$$\begin{array}{ccccccr} y_3 & - & y_4 & & & = & 9 \\ y_3 & - & y_4 & + & y_7 & = & 15 \\ y_5 & - & y_6 & & & = & 5 \\ y_5 & - & y_6 & + & y_7 & = & 14 \end{array}$$

Die ersten 2 Gleichungen hiervon ergeben $y_7 = 6$, die letzten den im Widerspruch stehenden Wert $y_7 = 9$. Damit gibt es keine gültige Lösung y^* für das duale Problem, die vorgeschlagene Lösung ist nicht optimal.