ALA 04 (HA) zum 02.05.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

28. April 2013

1. a) (i) $f'(x) = 35x^4 + 9x^2 + 1$

(ii) $f'(x) = 8(3x^7 - 4x^3 + x^2 - 3x + 1)^7 \cdot (21x^6 - 12x^2 + 2x - 3)$

(iii) $f'(x) = (3x^4 + 2x)(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) + (12x^3 + 2)\sqrt{x^2 + 1}$

(iv) $f'(x) = (x^3 + 1)(\frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2+1}) + 3x \cdot \ln\left(x^4 + 3x^2 + 1\right)$

(v) $f'(x) = e^{x^3+x^2+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x}\right)$

(vi) $f'(x) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} \cdot \ln(x) + \frac{1}{x}\sqrt{x^4 + 1}$

b) $q(x) = \frac{5x^2+1}{x-3}$

$q'(x) = \frac{10x(x-3)-(5x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{5x^2-30x-1}{(x-3)^2}$

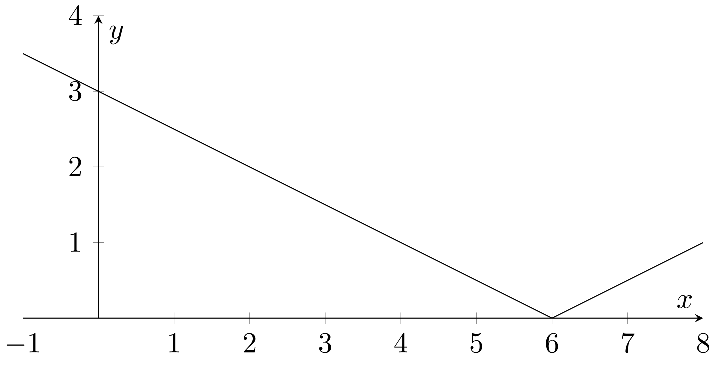
$q''(x) = \frac{(10x-30)(x-3)^2-(5x^2-30x-1)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)^2-10x^2+60x+2}{(x-3)^3}$

$q'''(x) = \frac{(20(x-3)-20x+60)(x-3)^3-\left(10(x-3)^2-10x^2+60x+2\right)\cdot 3(x-3)^2}{(x-3)^6} = -\frac{21}{(x-3)^4}$

2.

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{f(x)-f(6)}{x-6}\right) = \lim_{x\to 6}\left(\frac{|3-\frac{1}{2}x| - |3-\frac{1}{2}\cdot 6|}{x-6}\right) = \lim_{x\to 6}\left(\frac{|3-\frac{1}{2}x|}{x-6}\right) =$$

$$\lim_{x\to 6}\left(\sqrt{\frac{(3-\frac{1}{2}x)^2}{(x-6)^2}}\right) = \sqrt{\lim_{x\to 6}\left(\frac{9-3x+\frac{1}{4}x^2}{x^2-2x+36}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



3. a) $f(x) = (x^4+1)^{x+2} = e^{\ln\left((x^4+1)^{x+2}\right)} = e^{\ln\left(x^4+1\right)(x+2)}$

$f'(x) = e^{\ln\left(x^4+1\right)(x+2)} \cdot \left(\ln\left(x^4+1\right) + (x+2)\frac{4x^3}{x^4+1}\right)$

$= (x^4+1)^{x+2} \cdot \left(\ln\left(x^4+1\right) + \frac{4x^4+8x^3}{x^4+1}\right)$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)} = e^{\frac{1}{2}\cdot\ln x}$

$f'(x) = e^{\frac{1}{2}\cdot\ln x} \cdot \frac{1}{2x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)} = e^{x\ln\frac{1}{2}}$

$g'(x) = e^{x\ln\frac{1}{2}} \cdot \ln\frac{1}{2} = \left(e^{\ln\frac{1}{2}}\right)^x \cdot \ln\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln\frac{1}{2}$

c) (i) $g(x) = \left(x^2+1\right)^{4x+1} = e^{\ln\left(\left(x^2+1\right)^{4x+1}\right)} = e^{(4x+1)\ln\left(x^2+1\right)}$

$g'(x) = \left(e^{\ln\left(x^2+1\right)}\right)^{4x+1} \cdot \left(4\ln\left(x^2+1\right) + (4x+1)\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)$

$= \left(x^2+1\right)^{4x+1}\left(4\ln\left(x^2+1\right) + \frac{8x^2+2x}{x^2+1}\right)$

(ii) $h(x) = (x-3)^{3x^4+5} = e^{\ln(x-3)\cdot\left(3x^4+5\right)}$

$h'(x) = (x-3)^{3x^4+5} \cdot \left(12x^3 \cdot \ln(x-3) + \frac{1}{x-3}\left(3x^4+5\right)\right)$

4. a) $g(p) = 10^5 \left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p^2}\right)$

$g'(p) = 10^5 \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{3 \cdot 2p}{p^4}\right) = 10^5 \left(\frac{6}{p^3} - \frac{1}{p^2}\right)$

$g''(p) = 10^5 \left(-\frac{18p^2}{p^6} + \frac{2p}{p^4}\right) = 10^5 \left(\frac{2}{p^3} - \frac{18}{p^4}\right)$

Es ist das Maximum der Funktion $g(p)$ zu bestimmen. Am Maximum gilt $g'(p) = 0$ und $g''(p) < 0$.

$$g'(p) = 0 \Leftrightarrow 0 = 10^5 \left(\frac{6}{p^3} - \frac{1}{p^2}\right) \Leftrightarrow \frac{6}{p^3} = \frac{1}{p^2} \Leftrightarrow 6p^2 = p^3 \Leftrightarrow p = 6$$

Der Wert $p = 6$ liegt zunächst im zulässigen Intervall von $[3, 100]$. Um zu zeigen, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt, wird gezeigt, dass $g''(p)$ für $p = 6$ kleiner als 0 ist:

$$g''(6) = 10^5 \left(\frac{2}{6^3} - \frac{18}{6^4}\right) = 10^5 \left(\frac{1}{108} - \frac{1}{72}\right) = -\frac{12500}{27} < 0. \quad \square$$

b) (i) **Ableitungen:**

$f(x) = -2x^3 - x + 25$
$f'(x) = -6x^2 - 1$
$f''(x) = -12x$

Stellen mit Steigung 0:

$$0 = -6x^2 - 1 \Leftrightarrow 6x^2 = -1 \Leftrightarrow x \notin \mathbb{R}$$

Funktionswerte an Intervallgrenzen:

$f(5) = -2 \cdot 5^3 - 5 + 25 = -250 - 5 + 25 = -230$
$f(-5) = -2 \cdot (-5)^3 + 5 + 25 = 250 + 5 + 25 = 280$

Die Funktion hat keinen Punkt mit Steigung 0, ist also streng monoton. Die globalen Extremwerte liegen daher an den Grenzen des Definitionsintervalls, das globale Maximum bei $x = -5$, das globale Minimum bei $x = 5$.

(ii) **Ableitungen:**

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 8$
$g'(x) = 3x^2 - 12x + 3$
$g''(x) = 6x - 12$

Stellen mit Steigung 0 bestimmen:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & 3x^2 - 12x + 3 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & (x-2)^2 - 3 \\ \Leftrightarrow & x - 2 & = & \pm\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679 \\ & x_2 & = & 2 + \sqrt{3} \approx 3.7321 \end{array}$$

Nur die Stelle $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ liegt im Definitionsbereich.

Art der berechneten Extremstelle:

$g''(2-\sqrt{3}) = 6\left(2 - \sqrt{3}\right) - 12 = 12 - 6\sqrt{3} - 12 = -6\sqrt{3} < 0$

Funktionswerte an Intervallgrenzen:

$g(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 8 = 8$
$g(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 8 = 27 - 54 + 9 + 8 = -10$

An der Stelle $x = 2 - \sqrt{3}$ liegt das globale Maximum der Funktion vor. Das globale Minimum liegt am rechten Rand des Defintionsintervalles, bei $x = 3$.

(iii) **Ableitungen:**

$h(x) = e^{2x-3} - e^{x+2}$
$h'(x) = 2e^{2x-3} - e^{x+2}$
$h''(x) = 4e^{2x-3} - e^{x+2}$

Stellen mit Steigung 0 bestimmen:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & 2e^{2x-3} - e^{x+2} \\ \Leftrightarrow & 2e^{2x-3} & = & e^{x+2} \\ \Leftrightarrow & \ln 2 + 2x - 3 & = & (x+2) \\ \Leftrightarrow & x & = & 5 - \ln 2 \approx 4.3069 \end{array}$$

Art der berechneten Extremstelle:

$h''(5 - \ln 2) \approx 548.317 > 0$

Funktionswerte an Intervallgrenzen:

$h(0) = e^{2\cdot 0-3} - e^{0+2} = e^{-3} - e^2 \approx -7.3393$
$h(5) = e^{2\cdot 5-3} - e^{5+2} = 0$

Die einzige Stelle mit Steigung 0 liegt an bei $x = 5 - \ln 2$, es handelt sich hierbei um das globale Minumum. Das globale Maximum der Funktion liegt an der rechten Grenze des Definitionsintervalls bei $x = 5$.