ALA 01 (HA) zum 04.11.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

11. April 2013

1.

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{2}{x+5} & \geq & 3 \\ \Leftrightarrow & 2 & \geq & 3 \cdot (x+5) \\ \Leftrightarrow & 2 & \geq & 3x+15 \\ \Leftrightarrow & -13 & \geq & 3x \\ \Leftrightarrow & -\frac{13}{3} & \geq & x \end{array}$$

$$L = \Big(-\infty, -\frac{13}{3}\Big]$$

2. **Fall 1**: $x \geq \frac{4}{3}$

$$\begin{array}{rrcl} & 3x-4 & \geq & 2 \\ \Leftrightarrow & 3x & \geq & 6 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 2 \end{array}$$

Fall 2: $x < \frac{4}{3}$

$$\begin{array}{rrcl} & -3x+4 & \geq & 2 \\ \Leftrightarrow & -3x & \geq & -2 \\ \Leftrightarrow & -3x & \geq & -2 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & \frac{2}{3} \end{array}$$

$$L = \Big(-\infty, \frac{2}{3}\Big] \cup \Big[2, \infty\Big)$$

3. a)

$$|a_n - a| = \Big|\frac{2n-1}{n+3} - 2\Big| = \Big|\frac{2n-1}{n+3} - \frac{2\cdot(n+3)}{n+3}\Big| = \Big|\frac{2n-1}{n+3} - \frac{2n+6}{n+3}\Big|$$

$$= \Big| - \frac{7}{n+3}\Big| = \frac{7}{n+3}$$

b) Es sei $\epsilon > 0$ folglich ergibt sich aus a:

$$|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{7}{n+3} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{7}{\epsilon} - 3$$

Entsprechend kann man ein N wählen sodass $|a_n - a| < \epsilon$ für $n \geq N$ wie in der Definition von Konvergenz gefordert: $N > \frac{7}{\epsilon} - 3$.

c) Hier muss die oben berechnete Unleichung benutzt werden. Beispiel: $N > \frac{7}{\epsilon} - 3 \Rightarrow n > 67$, folglich muss das kleinstmögliche $N = 68$ sein (da N *größer als* 67 *sein soll).*

ϵ	N
$\frac{1}{10}$	68
$\frac{1}{100}$	698
$\frac{1}{100000}$	699998

4. Beschränktheit:

Induktionsannahme (IA): $0 \leq a_n < \frac{1}{2}$

Induktionsanfang: $0 \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ gilt.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen:

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq a_n^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Der erste Teil der Ungleichung gilt immer, da a_n^2 nie negativ (und damit auch nicht kleiner als $\frac{1}{4}$) sein kann.

Der zweite Teil der Ungleichung lautet:

$$a_n^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_n^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow a_n < \frac{1}{2}$$

Dies gilt laut der Induktionsannahme, damit ist die Beschränktheit von a gezeigt.

Monotonie:

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$a_n^2 + \frac{1}{4} \geq a_n$$

Angenommen, die Folge sei nicht monoton, so müsse demnach für mindestens ein a_n gelten:

$$\begin{array}{rrcl} & a_n^2 + \frac{1}{4} & < & a_n \\ \Leftrightarrow & a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} & < & 0 \\ \Leftrightarrow & (a_n - \frac{1}{2})^2 & < & 0 \end{array}$$

Dies ist nicht möglich, da ein Quadrat niemals negativ ist. Also existiert kein a_n, welches kleiner ist, als sein Nachfolger a_{n+1}, somit ist die Folge Monoton. $\square$