Optimierung Blatt 09 zum 16.12.2013

Paul Bienkowski, Nils Rokita, Arne Struck

16. Dezember 2013

1. a)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Iteration:
<u>1. Schritt</u>:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>2. Schritt</u>:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_2,

mit $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>3. Schritt</u>:
Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>4. Schritt</u>:
Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = 8$. Dies wird bestimmt durch x_5, welches die Ausgangsvariable wird.

<u>5. Schritt</u>:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 34 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Iteration:

<u>1. Schritt</u>:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>2. Schritt</u>:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_1,

mit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>3. Schritt</u>:

Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>4. Schritt</u>:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 34 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = 5$. Dies wird bestimmt durch x_4, welches die Ausgangsvariable wird.

<u>5. Schritt</u>:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 29 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Iteration:
1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Keiner der Werte aus $y^T A_N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist kleiner als der korrespondierende Wert in $c_N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, somit ist diese Lösung optimal: $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 29$.

b)

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Iteration:

<u>1. Schritt</u>:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>2. Schritt</u>:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_1, mit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>3. Schritt</u>:

Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>4. Schritt</u>:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = 7$. Dies wird bestimmt durch x_5, welches die Ausgangsvariable wird.

<u>5. Schritt</u>:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_4 & x_1 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_5 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Iteration:
1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_3, mit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Schritt:
Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:
Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = 1$. Dies wird bestimmt durch x_4, welches die Ausgangsvariable wird.
5. Schritt:
Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_5 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Iteration:
1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_5 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_2, mit $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Schritt:
Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:
Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = 5$. Dies wird bestimmt durch x_6, welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:
Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_5 & x_6 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Iteration:

1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Keiner der Werte aus $y^T A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist kleiner als der korrespondierende Wert in $c_N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, somit ist diese Lösung optimal: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$.

2.

$$A = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Iteration:

1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangs-variable x_3, mit $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = \frac{3}{2}$. Dies wird bestimmt durch x_6, welches die Ausgangs-variable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_5 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_6 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Iteration:

1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 9 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_6 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{27}{2} \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_2, mit $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = 1$. Dies wird bestimmt durch x_5, welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_5 & x_6 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Iteration:

1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{cccc} x_1 & x_5 & x_6 & x_4 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_4, mit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = \frac{1}{5}$. Dies wird bestimmt durch x_3, welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, B = \begin{array}{cc} x_2 & x_4 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \end{array}, A_N = \begin{array}{cccc} x_1 & x_5 & x_6 & x_3 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

4. Iteration:

1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Es gilt $A_N = \begin{array}{cccc} x_1 & x_5 & x_6 & x_3 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \end{array}$, $y^T A_N = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$. Wir wählen somit als Eingangsvariable x_1, mit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt:

Lösung des Gleichungssystems $Bd = a$ ergibt

$$d = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

4. Schritt:

Die Ungleichung $x_B^* - td \geq 0$ lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \geq 0$$

Das größte t, das dieses erfüllt, ist $t = 1$. Dies wird bestimmt durch x_4, welches die Ausgangsvariable wird.

5. Schritt:

Nach Vertauschen der entsprechenden Zeilen gelten folgende Werte:

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, A_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_5 & x_6 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. Iteration:

1. Schritt:

Es gilt $c_B^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Gleichungssystems $y^T B = c_B^T$ lautet

$$y^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

Keiner der Werte aus $y^T A_N = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ ist kleiner als der korrespondierende Wert in $c_N^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, somit ist diese Lösung optimal: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.