1 a) Es gibt $7^5 = 16807$ Abbildungen.
Davon sind injektiv:

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

Für g(2), g(3) und g(4) verschiedene Elemente gibt es:
$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1500$ Möglichkeiten.

b) Es können 6 Zahlen gewählt werden wobei bei der ersten 49 Wahlmöglichkeiten zur Verfügung stehen, bei der zweiten nur noch 48 und so weiter, also $49^{\underline{6}}$ Da aber die Rehenfolge irrelevant ist muss durch 6! geteilt werden. Das Ergebnis ist also:

$$\frac{49^{\underline{6}}}{6!} = 13983816.$$

Das ganze entspricht auch der einfachen Notation $\binom{49}{6} = 13983816$

c) Es werden zunächst die Anzahl der Möglickeiten einer 997-Elementigen Menge gesucht, hierzu kommen aber noch die jeweils größeren Teilmengen (denn die Aufgabe fragt ja nach mindestens 997 Elementen).

$$\binom{1000}{997} + \binom{1000}{998} + \binom{1000}{999} + \binom{1000}{1000} = 166.667.501$$

2 a)

$$x^5y^{11} \text{ in } (x+y)^{11} \to \binom{16}{5}$$

$$x^3y^5z^2 \text{ in } (x+y+z)^{10} \to \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!}$$

b) CAPPUCCINO:

$$\frac{10!}{3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{12} = 302400$$

MANGOLASSI:

$$\frac{10!}{2! \cdot 2!} = \frac{3628800}{4} = 907200$$

SELTERWASSER:

$$\frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{479001600}{72} = 6652800$$

c) 10 Sorten je 6 mal $\to$ 6 Flaschen Auswählen $\to 10^6$
Da in der Aufgabenstellung explizit eine Kiste mit 6 Plätzen erwähnt wurde ist die Reihenfolge der Flaschen relevant, denn man kann z.B. die Flaschen in der Kiste nach Sorten sortieren.

3 a) **Induktionsanfang:**

$$\binom{3}{3-3} + \binom{3+1}{4} = 1 = \sum_{i=3}^{3} \binom{i}{i-3}$$

Induktionsannahme: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gilt die gegebene Formel, also:

$$\sum_{i=3}^{n} \binom{i}{i-3} = \binom{n+1}{4}$$

Somit muss die Formel auch folgendermaßen für n+1 gelten(Induktionsschritt):

$$\sum_{i=3}^{n+1} \binom{i}{i-3} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{n+1-3}$$

Folglich:

$$\binom{n+1+1}{4} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{n-2}$$

$$\binom{n+1+1}{4} = \binom{n+1}{4} + \frac{(n+1)!}{3! \cdot (n+2)!}$$

$$\binom{n+1+1}{4} = \binom{n+1}{4} + \frac{(n+1)!}{3! \cdot (n+1-3)!}$$

$$\binom{n+1+1}{4} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{3}$$

$$\Rightarrow \binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{3}$$

Mit diesen Werten entspricht die Formel der Rekursionsformel die Aussage ist anhand dieser bewiesen und gilt somit.

4 a) $k \in \mathbb{N}(1 \leq k \leq 2000)$, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar sind.

$$2000 - \left(\left\lfloor \frac{2000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \right)$$

Ausgerechnet:

$$2000 - 666 - 400 - 285 - 133 - 95 - 57 - 19 = 915$$

Antwort: 915 Zahlen sind weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar.

b) $k \in \mathbb{N}(1 \leq k \leq 1000)$, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 noch durch 11 teilbar sind.

$$\begin{aligned} 1000 &- \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5} \right\rfloor \\ &+ \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\ &- \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 7 \cdot 11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \right\rfloor \end{aligned}$$

$$1000 - 333 - 200 - 142 - 90 + 66 + 47 + 30 + 28 + 12 - 9 - 6 - 4 - 2 - 0 = 415$$

Antwort: 415 Zahlen sind weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 noch durch 11 teilbar.