ALA 09 (HA) zum 20.06.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

20. Juni 2013

1. (a)

$$
\begin{aligned}
T_8(x) &= T_9(x) &&= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} \\
T_{10}(x) &= T_{11}(x) &&= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} - \tfrac{x^{10}}{10!} \\
T_{12}(x) &= T_{13}(x) &&= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} - \tfrac{x^{10}}{10!} + \tfrac{x^{12}}{12!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_9(1) &= \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{4!} - \tfrac{1}{6!} + \tfrac{1}{8!} &&= \tfrac{4357}{8064} &&\approx 0.540302579365 \\
T_{11}(1) &= \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{4!} - \tfrac{1}{6!} + \tfrac{1}{8!} - \tfrac{1}{10!} &&= \tfrac{1960649}{3628800} &&\approx 0.540302303791 \\
T_{13}(1) &= \cdots &&= \cdots &&\approx 0.540302305879
\end{aligned}
$$

(b) Taylorpolynome für $f(x)$ und $g(x)$ an $x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x} & g(x) &= \tfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \\
T_0(x) &= 1 & T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= 1 + \tfrac{x}{2} & T_1(x) &= 1 - \tfrac{x}{3} \\
T_2(x) &= 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4\cdot 2!} & T_2(x) &= 1 - \tfrac{x}{3} + \tfrac{4x^2}{9\cdot 2!} \\
T_3(x) &= 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4\cdot 2!} + \tfrac{x^3}{2\cdot 3!} & T_3(x) &= 1 - \tfrac{x}{3} + \tfrac{4x^2}{9\cdot 2!} - \tfrac{28x^3}{27\cdot 3!} \\
T_4(x) &= 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4\cdot 2!} + \tfrac{x^3}{2\cdot 3!} - \tfrac{5x^4}{4\cdot 4!} & T_4(x) &= 1 - \tfrac{x}{3} + \tfrac{4x^2}{9\cdot 2!} - \tfrac{28x^3}{27\cdot 3!} + \tfrac{280x^4}{81\cdot 4!}
\end{aligned}
$$

(c) Taylorpolynom für $f(x) = e^x \cdot \sin x$ an $x_0 = 0$:

$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30}$$

2. (i)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) = \frac{1}{2}$$

(ii) Es handelt sich um den Typ $\frac{0}{0}$ entsprechend lässt sich der Nenner vom Zähler getrennt ableiten. Man erhält so die Funktion:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-6x+1}{2x-5}\right)=-1$$

(iii)

$$\lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{2x}}\right)\lim_{x\to 0}\left(e^{ln(1+3x)\frac{1}{2x}}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ln(1+3x)}{2x}\right)}$$

Dabei handelt es sich um den Typ $\frac{0}{0}$, Ableiten von Zähler und Nenner:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+3x}\cdot 3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}\approx 4,482$$

(iv)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin(x)-e^x-1}{(sin(x))\cdot(e^x-1)}\right)$$

Da der Nenner gegen Null strebt während der Zähler gegen 1 strebt, strebt der gesamte Wert trivialerweise gegen $-\infty$

3. (a)

(b)

(c)

(d)

4. (a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right)$$

Dabei handelt es sich um den Typ $\frac{\infty}{\infty}$ (Sowohol die Folge im Nenner auls auch die im Zähler divergieren.) Also können Nenner und Zähler getrennt abgeleitet werden.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ln(a)\cdot a^x}{n\cdot x^{n-1}}\right)$$

Dabei handelt es sich offensichtlich wieder um den Typ $\frac{\infty}{\infty}$ das gilt solange im Nenner der Exponent von x großer 0 bleibt somit darf man die n-te Ableitung Bilden:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ln(a)^n\cdot a^x}{n!\cdot x^{n-n}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ln(a)^n\cdot a^x}{n!}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(ln(a)^n\cdot a^x)}{n!}=\infty$$

Hier wird offensichtilich das im Nenner eine Konstante steht während der Zähler weiterhin divergiert. Der Grenzwert beträgt ∞. Also wächst $f(x)$ schneller.

(b)

(c) (a)