

ALA 09 (HA) zum 20.06.2013

Paul Bienkowski, Hans Ole Hatzel

19. Juni 2013

1. (a)

$$T_8(x) = T_9(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

$$T_{10}(x) = T_{11}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$$

$$T_{12}(x) = T_{13}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}$$

$$T_9(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} = \frac{4357}{8064} \approx 0.540302579365$$

$$T_{11}(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} = \frac{1960649}{3628800} \approx 0.540302303791$$

$$T_{13}(1) = \dots = \dots \approx 0.540302305879$$

(b) Taylorpolynome für $f(x)$ und $g(x)$ an $x_0 = 0$:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$T_1(x) = 1 - \frac{x}{3}$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!}$$

$$T_2(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9 \cdot 2!}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!}$$

$$T_3(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9 \cdot 2!} - \frac{28x^3}{27 \cdot 3!}$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{4 \cdot 4!}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9 \cdot 2!} - \frac{28x^3}{27 \cdot 3!} + \frac{280x^4}{81 \cdot 4!}$$

(c) Taylorpolynom für $f(x) = e^x \cdot \sin x$ an $x_0 = 0$:

$$T_5(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30}$$

2. (i)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 - 5x + 6} \right) = \frac{1}{2}$$

- (ii) Es handelt sich um den Typ $\frac{0}{0}$ entsprechend lässt sich der Nenner vom Zähler getrennt ableiten. Man erhält so die Funktion:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 6x + 1}{2x - 5} \right) = -1$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + 3x)^{\frac{1}{2x}} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\ln(1+3x)^{\frac{1}{2x}}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+3x)}{2x} \right)}$$

Dabei handelt es sich um den Typ $\frac{0}{0}$, Ableiten von Zähler und Nenner:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{1+3x} \cdot 3}{2} \right) = e^{\frac{3}{2}} \approx 4,482$$

(iv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - e^x - 1}{(\sin(x)) \cdot (e^x - 1)} \right)$$

Da der Nenner gegen Null strebt während der Zähler gegen 1 strebt, strebt der gesamte Wert trivialerweise gegen $-\infty$

3. (a)

(b)

(c)

(d)

4. (a)

(b)

(c)