Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae

Wintersemester 2012/13
Blatt 13

A: Präsenzaufgaben am 24./25. Januar 2013

1. a) Es sei U die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x_2 = x_1^2\Big\}.$$

Geben Sie drei verschiedene Elemente aus U an. Überlegen Sie sich, ob U ein Unterraum von $V = \mathbb{R}^4$ ist.

b) Für $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, 4\Big\}$: Machen Sie sich (ebenso wie in a)) zunächst durch Angabe von einigen Elementen aus U klar, um welche Menge es sich handelt. Überlegen Sie sich sodann, ob U ein Unterraum von $V = \mathbb{R}^4$ ist.

c) Überlegen Sie sich, ob die nur zwei Elemente enthaltende Menge $U = \Big\{(0,0,0,0), (1,1,1,1)\Big\}$ ein Unterraum von $V = \mathbb{R}^4$ ist.

d) Wie a) und b) für $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x_1 + x_2 + x_3 = x_4\Big\}$.

2. a) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 2, 3)$ und $v_3 = (4, 4, 0)$. Falls möglich gebe man Skalare c_1, c_2 und c_3 an, für die

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = o$$

gilt, wobei mindestens eines der c_i $(1 \leq i \leq 3)$ ungleich 0 sein soll.

b) Ebenso für $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (7, -8, 4)$ und $v_3 = (3, -2, 1)$.

c) Was bedeuten die Ergebnisse aus a) bzw. b) für die Frage, ob die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear abhängig oder unabhängig sind?

B: Hausaufgaben zum 31. Januar / 1. Februar 2013

1. a) In Hausaufgabe 1b) (Blatt 11) wurde ein lineares Gleichungssystem betrachtet, dessen allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)$ wie folgt lautete (für $t \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t, \quad x_2 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}t, \quad x_3 = t.$$

Überprüfen Sie, ob es sich bei dieser allgemeinen Lösung um eine Gerade handelt und geben Sie diese ggf. in **Parameterform** an, d.h. mit **Stütz-** und **Richtungsvektor**.

b) In Hausaufgabe 1d) (Blatt 11) wurde ein lineares Gleichungssystem betrachtet, dessen allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)$ wie folgt lautete (für $s, t \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t.$$

Überprüfen Sie, ob es sich bei dieser allgemeinen Lösung um eine Ebene handelt und geben Sie diese ggf. in **Parameterform** an, d.h. mit **Stützvektor** und zwei **Spannvektoren**.

c) In Hausaufgabe 2 (Blatt 11) wurde ein lineares Gleichungssystem betrachtet, dessen allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ wie folgt lautete (für $r, s, t \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = -3 + 5r + 3s + t, \quad x_2 = 1 - 2r - 3s, \quad x_3 = r, \quad x_4 = s, \quad x_5 = -2 + 3t, \quad x_6 = t.$$

Man gebe die Lösungsmenge auf eine Art an, die der Parameterform einer Ebene ähnlich ist, d.h. mit **Stützvektor** und mehreren **Spannvektoren**.

2. Mindestens ebenso wichtig wie das Lösen von Übungsaufgaben ist es, dass Sie üben, *einen mathematischen Text langsam und sorgfältig durchzuarbeiten.* Üben Sie dies anhand des Abschnitts 4.2 im Ergänzungsskript. Lesen Sie diesen Abschnitt so genau, dass Sie mit gutem Gewissen behaupten können, alles verstanden zu haben. Lösen Sie danach die folgenden Aufgaben a) - d).

a) Es sei U die folgende Menge:

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\right\}.$$

Um klar vor Augen zu haben, um welche Menge es sich handelt, gebe man zunächst vier Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ an, von denen zwei in U und zwei nicht in U liegen.
Handelt es sich bei U um einen Unterraum von $V = \mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Meinung!

Hinweis: Auch in den folgenden Teilaufgaben b) - d) sollten Sie sich immer zunächst anhand von Beispielen klar machen, um welche Menge es sich handelt.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die folgende Menge U ist ein Unterraum von $V = \mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_4 \geq x_1\right\}.$$

c) Wie b) für $U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_4 = 2x_1 + x_2 + x_3\right\}$.

d) Wie b) für $U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_4 = 2x_1 + x_2 + x_3 + 1\right\}$.

3. a) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 1, 2, 3)$, $v_2 = (3, -1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 3, 1, 0)$ und $v_4 = (6, 2, 0, 4)$. Falls möglich gebe man Skalare c_1, c_2, c_3 und c_4 an, für die

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = o$$

gilt, wobei mindestens eines der c_i $(1 \leq i \leq 4)$ ungleich 0 sein soll.

b) Ebenso für $v_1 = (1, 1, 2, 3)$, $v_2 = (3, -1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 3, -1, 0)$ und $v_4 = (-5, -1, 8, 7)$.

c) Was bedeuten die Ergebnisse aus a) bzw. b) für die Frage, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 linear abhängig oder unabhängig sind?

4. a) Finden Sie heraus, ob die Vektoren $v_1 = (2, 4, -2, -4)$, $v_2 = (-2, 3, 3, 3)$ und $v_3 = (-5, 18, 9, 6)$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

b) Ebenso für $v_1 = (2, 4, -2, -4)$, $v_2 = (-2, 3, 3, 3)$ und $v_3 = (-4, -1, 6, 7)$.

c) Ebenso für $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (2, 2, 0, -1)$ und $v_4 = (-1, 5, 13, 14)$.

d) Ebenso für $v_1 = (4, 3, 0, 1)$, $v_2 = (5, 6, 7, 8)$, $v_3 = (1, 0, 0, 7)$, $v_4 = (0, 0, 7, 0)$ und $v_5 = (4, 7, 1, 1)$.

C: Präsenzaufgaben am 31. Januar / 1. Februar 2013

1. Für $v_1 = (1, 3, -2)$, $v_2 = (-1, 4, 5)$ und $v_3 = (-8, -3, 25)$: Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle von v_1, v_2 und v_3. Geben Sie auch eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

2. Für $v_1 = (1, 2, 0, 3)$, $v_2 = (-1, 0, 3, 2)$, $v_3 = (3, 8, 3, 14)$ und $v_4 = (3, 6, 0, 9)$: Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.