Кратчайшие пути на графе дорог

Андроник Ордиян
Научный руководитель: Алексей Гуревич

Академический университет

19 декабря 2013 г.

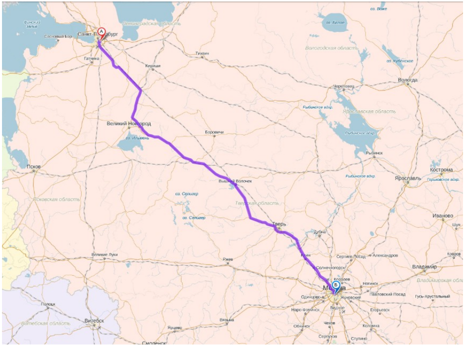
Задача о кратчайшем пути

Вход

- Орграф $G = (V, E)$
- Веса рёбер $w(u, v) \geq 0$
- Начальная вершина s
- Конечная вершина t

Цель: найти кратчайший путь от s до t

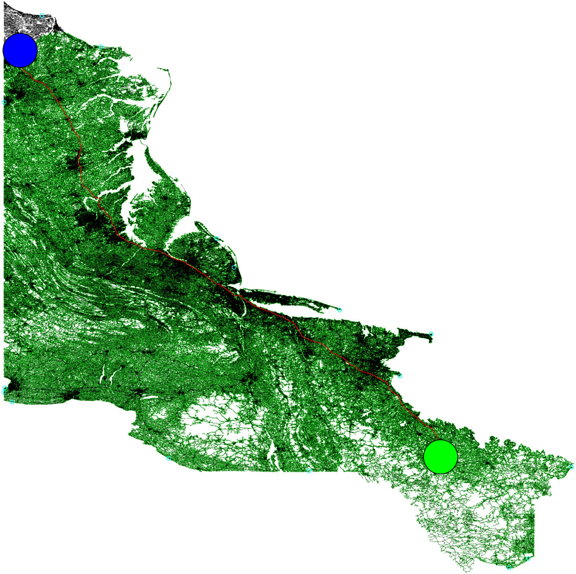
- V – перекрёстки $\sim 10^7$
- E – отрезки дорог, их соединяющие $\sim 10^7$
- $w(u, v)$ – расстояние или время в пути



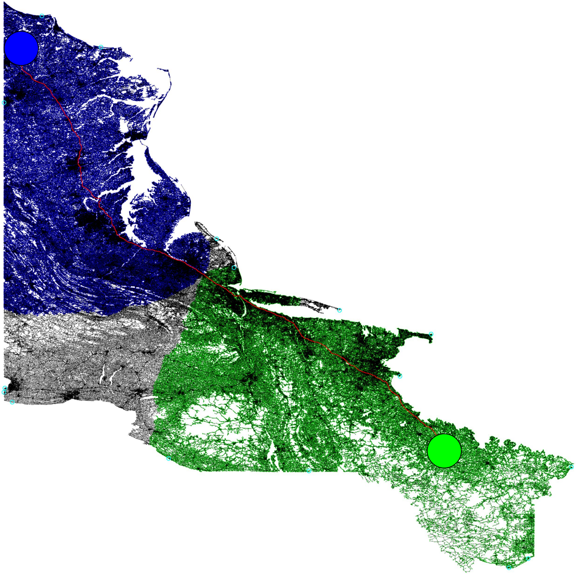
Мотивация

1. Используется в:
   - Яндекс.Карты, Google.Maps, Yahoo! Maps
   - Mapquest, Microsoft MapPoint
   - GPS устройства
   - и т.д.
2. Не всё так просто:
   - Алгоритм Дейкстры на графе USA работает около 5 сек.
   - Предпосчитать всё заранее не получится:
     - время (Европа): $n \times \mathit{Dijkstra} \sim 5$ лет
     - память(Европа): $n \times n$ таблица ~ 1 петабайт

Алгоритм Дейкстры



Двунаправленный Дейкстра



A* поиск

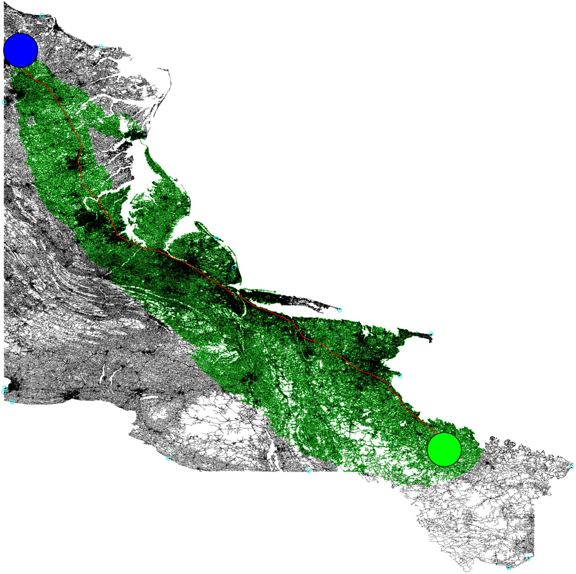
Неформально:

- Просматривает сначала те маршруты, которые «кажутся» ведущими к цели
- При выборе вершины он также учитывает *весь* пройденный до неё путь

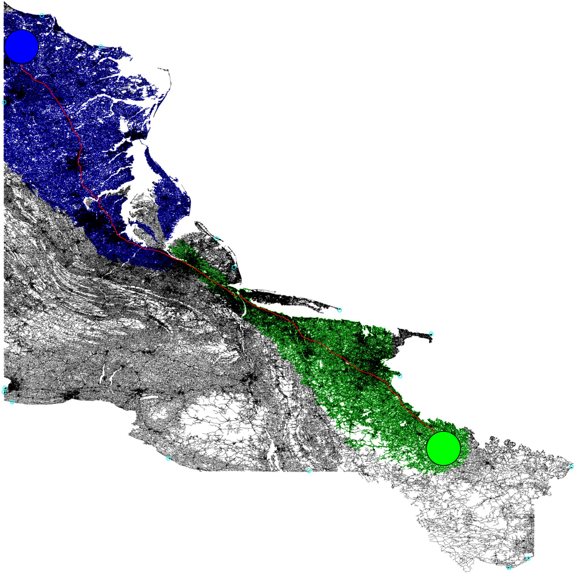
Формально:

- Возьмём функцию $\pi : V \to \mathbb{R}$, т.ч. $\pi(v) \leq dist(v, t)$
- A* поиск $\equiv$ Dijkstra с расстоянием w_π
- $w_\pi(u, v) = w(u, v) - \pi(u) + \pi(v)$
- π даёт нижнюю оценку на расстояние
- Чем точнее оценка, тем быстрее сходимость
- Эффект: **целенаправленный** поиск

A* поиск



Двунаправленный A*



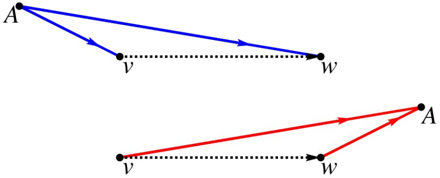
ALT

- **A*** + **L**andmarks + **T**riangle inequality: **ALT** [GH05]
- Две части: **предподсчёт** и **запрос**, использующий предподсчёт
- **Предподсчёт**: выбираем несколько (например, 16) вершин как **ориентиры**
- Находим Дейкстрой расстояние от них до всех остальных
- Сохраняем эти расстояния

ALT

1. **Запрос**: A* поиск с ориентирами, в качестве π берётся оценка из неравенства $\triangle$ для ориентиров
2. Неравенство $\triangle$:

$$dist(v, w) \geq dist(A, w) - dist(A, v)$$
$$dist(v, w) \geq dist(v, A) - dist(w, A)$$



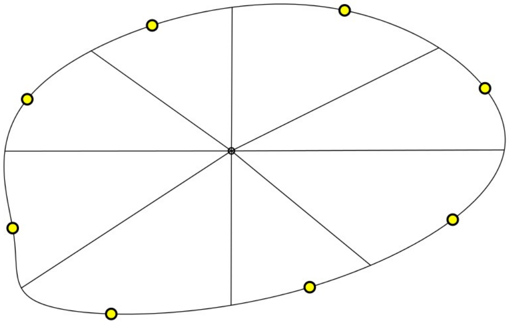
3. Выбираем максимум нижних границ по всем ориентирам
4. Больше ориентиров $\Rightarrow$ точнее оценка, больше памяти

ALT: выбор ориентиров

1. Нужно выбрать ориентиры, которые хороши для всех запросов
2. Несколько видов было опробовано:
    - random
    - planar
    - avoid

ALT: planar ориентиры

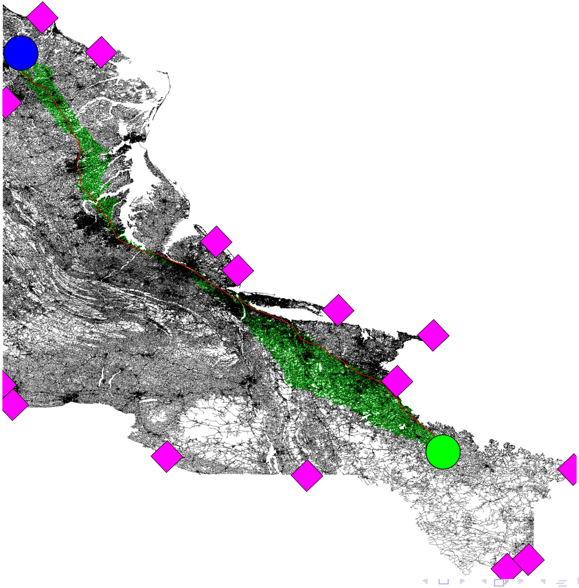
1. Делим карту на n равных секторов
2. Выбираем самую дальнюю от центра вершину в каждом секторе как ориентир



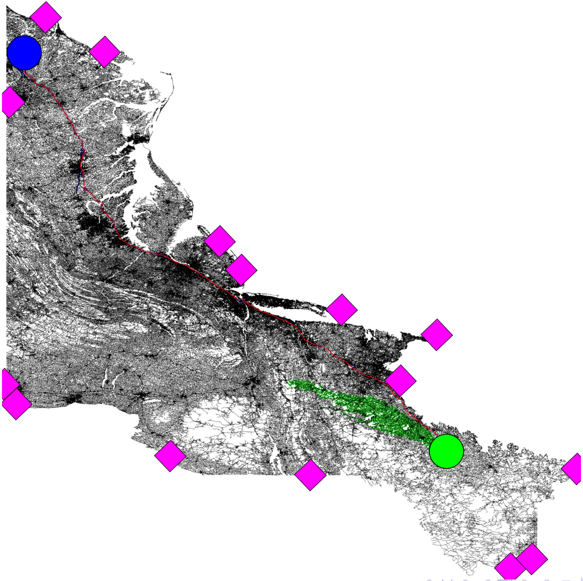
ALT: avoid ориентиры

1. Неформально:
    - Добавляем ориентиры по очереди
    - Предпочтение областям, плохо покрытым уже выбранными ориентирами
2. Формально:
    - выбираем случайно r
    - строим дерево кратчаших путей T от r
    - для каждой вершины определим
        - LB(v) — нижняя оценка на dist(r,v)
        - weight(v) = dist(r, v) — LB(v)
        - size(v): сумма весов всех потомков v (или 0, если среди потомков есть ориентиры)
    - пусть w максимизирует size(w)
    - начиная от w, спустимся по дереву, выбирая ребёнка с максимальным size
    - выберем лист как новый ориентир

avoidALT



Двунаправленный avoidALT



Сравнение

Метод	**Предподсчёт (мин./mb)**	**scaned**	**ms**
Dijkstra	—/300	1211085	3802.716227
biDijkstra	—/300	1060090	2970.800198
A*	—/300	427857	2164.348002
biA*	—/300	414035	1754.347948
planarALT	4/760	118220	1550.984824
biPlanarALT	4/760	75252	990.060073
avoidALT	5/760	117591	1334.5507815
biAvoidALT	5/760	55614	832.725301

Таблица : Восток США, 3.5 млн

Результаты

Познакомился с

1. Алгоритмами A*, ALT, TNR
2. boost::optional, boost::test
3. форматом BMP

Реализовано:

1. Dijkstra/bi, A*/bi, ALT/bi (random, planar, avoid)
2. отрисовка графа
3. `https://github.com/ordian/Graph`

References

Renato F. Werneck (2010)
Shortest Paths and Experimental Evaluation of Algorithms
Microsoft Research Silicon Valley. MIDAS

A. V. Goldberg and C. Harrelson. (2005)
Computing the shortest path: A $*$ search meets graph theory.
In Proc. 16th SODA, 156 – 165.

H. Bast, S. Funke, D. Matijevic, P. Sanders, and D. Schultes. (2007)
In Transit to Constant Shortest-Path Queries in Road Networks.
In Proc. 9th ALENEX, SIAM, 49 – 59

Вопросы?