第 1 天 二次函数

参考答案

★（鼓楼期末）

1. 【答案】$x_1 = 3$，$x_2 = -1$．

【解析】因为二次函数与 x 轴的一个交点坐标为 $(3,0)$ 且对称轴为 $x = 1$，所以二次函数与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-1,0)$．

所以原方程的根为 $x_1 = 3$，$x_2 = -1$．

★（秦淮二模）

2. 【答案】B

【解析】$y = -x^2 \xrightarrow{\text{向右平移1个单位}} y = -(x-1)^2 \xrightarrow{\text{向上平移5个单位}} y = -(x-1)^2 + 5$．

故选 B．

★（秦淮二模）

3. 【答案】$y = 2x^2 + 4x - 1$ 或 $y = 2(x+1)^2 - 3$

【解析】将二次函数化为顶点式，有：

$y = 2x^2 - 4x - 1$

$\quad = 2(x^2 - 2x) - 1$

$\quad = 2(x-1)^2 - 3$，

∴顶点坐标为 $(1,-3)$，

沿 y 轴翻折后，$a = 2$ 不变，顶点变为 $(-1,-3)$，

∴所得到的图象对应的解析式为：

$y = 2(x+1)^2 - 3 = 2x^2 + 4x - 1$．

★★（玄武期末）

4. 【答案】C

【解析】①从图象与 y 轴交于正半轴知 $c > 0$，正确；

②令 $y = 0$，从图象与 x 轴有 2 个交点知 $b^2 - 4ac > 0$，错误；

③从图象与直线 $x = -1$ 交于 x 轴上方知当 $x = -1$ 时，$a - b + c > 0$，正确；

④从图象可知，开口方向向下，对称轴不是直线 $x = -1$，错误；

综上所述①③正确．

故选 C．

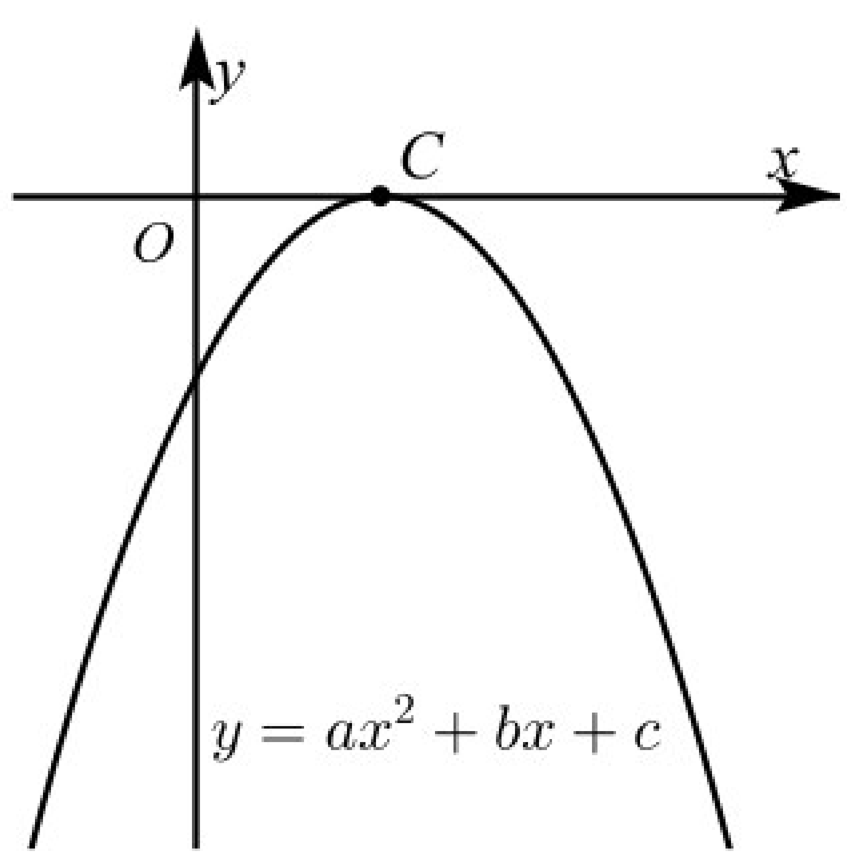
★★（联合体期末）

5. 【答案】C

【解析】∵二次函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a < 0 < b)$ 的图象与 x 轴只有一个交点，

∴$a < 0$，$b > 0$，

可知抛物线开口向下，对称轴在 y 轴右侧，顶点在 x 轴上，除顶点之外，图象都在 x 轴的下方，大致图象如图所示：



在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大，

因此①是正确的；

当 $x = 1$ 时，$y = a + b + c$，

当 $(1, a+b+c)$ 是顶点时，$a + b + c = 0$，

因此②是不正确的；

当 $y = -2$ 时，对应抛物线上有两个点，

因此 $ax^2 + bx + c = -2$ 有两个不等的实数根，

因此③正确；

故正确的结论有①③．

故选 C．

★★（玄武二模）

6.【答案】(1) 10．

(2) 当边长为 20 米时，铺设广场地面的总费用最少，最少费用为 200000 元．

【解析】(1) 设四角的小正方形的边长为 x 米，根据题意可得：

$100\times80-2x(100-2x)-2x(80-2x)=5200$

$8000-200x+4x^2-160x+4x^2=5200$

$8x^2-360x+8000=5200$

$8x^2-360x+2800=0$

$x^2-45x+350=0$

$(x-35)(x-10)=0$，

$\therefore x=35$ 或 $x=10$，

当 $x=35$ 时，$EG=35$ 米，$EF=80-2x=10$（米），$EG>EF$，不符合题意舍去，

当 $x=10$ 时，$EG=10$ 米，$EF=80-2x=60$（米），$EG<EF$，符合题意．

故四角的小正方形的边长为 10 米．

(2) 设四角的小正方形的边长为 x 米，$x\leqslant20$，铺设广场地面的总费用为 W 元，

则 $EG=x$ 米，$EF=(80-2x)$ 米，$EG<EF$，

$\therefore x<80-2x$，即 $x<\dfrac{80}{3}$，

$\therefore x\leqslant20$．

铺设绿色地砖的面积为：

$2x(100-2x)+2x(80-2x)=200x-4x^2+160x-4x^2$

$=-8x^2+360x$（平方米），

铺设白色地砖的面积为：

$100\times80-\left(-8x^2+360x\right)=8x^2-360x+8000$（平方米），

则 $W=20\left(-8x^2+360x\right)+30\left(8x^2-360x+8000\right)$

整理得：$W=80x^2-3600x+240000$，

配方得：$W=80\left(x-\dfrac{45}{2}\right)^2+199500$，

$\therefore$当 $x<\dfrac{45}{2}$ 时，W 随 x 的增大而减小，

$\therefore$当 $x=20$ 时，W 取得最小值，$W_{\min}=80\times\left(20-\dfrac{45}{2}\right)^2+199500=200000$．

故当广场四角小正方形的边长为 20 米时，铺设广场地面的总费用最少，最少费用为 200000 元．

★★（鼓楼二模）

7.【答案】(1) -1

(2) $y=x^2+2x$ 或 $y=-x^2-2x$．

(3) $-3\leqslant t\leqslant0$

【解析】(1) $y=ax^2+2ax$，

$\therefore$对称轴 $x=-\dfrac{2a}{2\cdot a}=-1$．

(2) 当 $a>0$ 时，开口向上，

$\because$对称轴为 $x=-1$，

$\therefore$当 $x=-1$ 时，$y_{\min}=a\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)=a-2a=-a$，

当 $x=-3$ 时，$y_{\max}=a\cdot(-3)^2+2a\cdot(-3)=9a-6a=3a$，

$\therefore 3a+a=4$，$a=1$，

$\therefore y=x^2+2x$；

当 $a<0$ 时，开口向下，

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$y_{\max}=-a$；

当 $x=-3$ 时，$y_{\min}=3a$，

$\therefore -a-3a=4$，$a=-1$，

$\therefore y=-x^2-2x$．

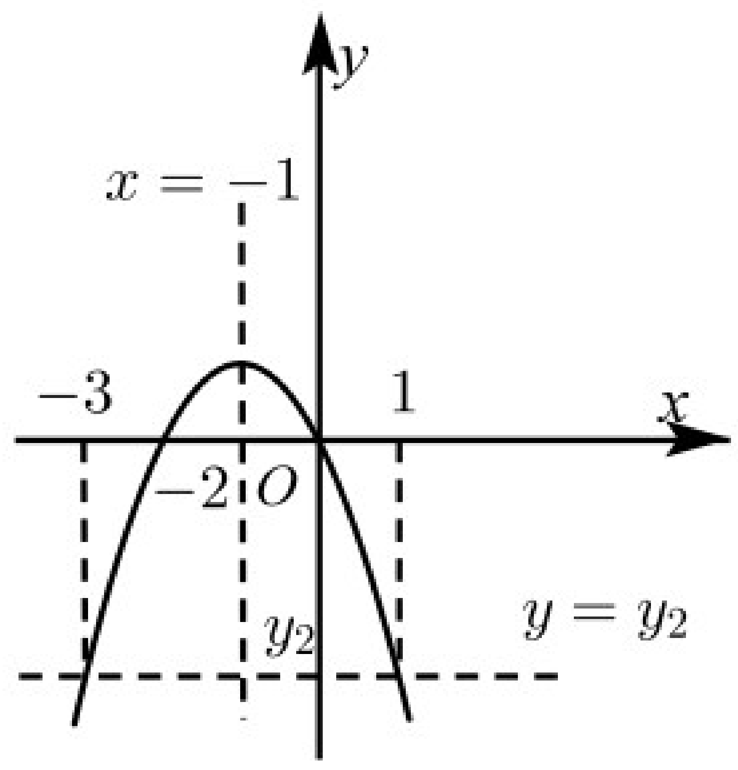
综上 $y=x^2+2x$ 或 $y=-x^2-2x$．

(3) $y=ax^2+2ax=ax(x+2)$，

结合图表及其对称性可知

$\begin{cases} t \geqslant -3 \\ t+1 \leqslant 1 \end{cases}$，

$\therefore -3 \leqslant t \leqslant 0$．



★★★（鼓楼区期末）

8. 【答案】(1) $a+2$；2

(2) $a=-2$，$6+4\sqrt{2}$ 或 $6-4\sqrt{2}$．

(3) $a<-8+2\sqrt{15}$．

【解析】(1) 将 $A(-1,0)$，$B(0,2)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得 $\begin{cases} 0=a-b+c \\ 2=c \end{cases}$．

$\therefore b=a+2$，$c=2$．

(2) 由（1）得 $y=ax^2+(a+2)x+2$，

关于 $x=-\dfrac{a+2}{2a}$ 对称，

令 $x=-\dfrac{a+2}{2a}$，得 $y=2-\dfrac{(a+2)^2}{4a}$，

$S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}\times|-1|\times\left|2-\dfrac{(a+2)^2}{4a}\right|=1$．

$\therefore \left|2-\dfrac{(a+2)^2}{4a}\right|=2$．

①$2-\dfrac{(a+2)^2}{4a}=2$，

$\therefore a=-2$，

②$2-\dfrac{(a+2)^2}{4a}=-2$，

$a=6\pm4\sqrt{2}$．

经检验，$4a$ 均不为 0，

$\therefore a=-2$，$6+4\sqrt{2}$ 或 $6-4\sqrt{2}$．

(3) $\because x>1$ 时 $y<5$，

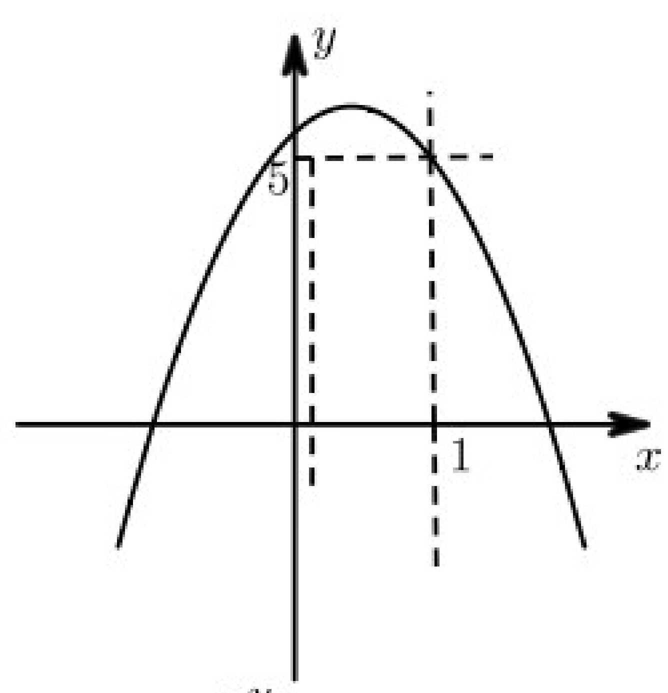
$\therefore x>1$ 时，y 随 x 的增大而减少．

故 $a<0$．

当 $x=-\dfrac{a+2}{2a}\leqslant 1$ 时，即 $a\leqslant -\dfrac{2}{3}$ 时，$x=1$，

$y=a+(a+2)+2=2a+4\leqslant 5$

$a\leqslant\dfrac{1}{2}$．



当 $x=-\dfrac{a+2}{2a}>1$ 时，即 $a>-\dfrac{2}{3}$，

$y_{\max}=2-\dfrac{(a+2)^2}{4a}<5$，

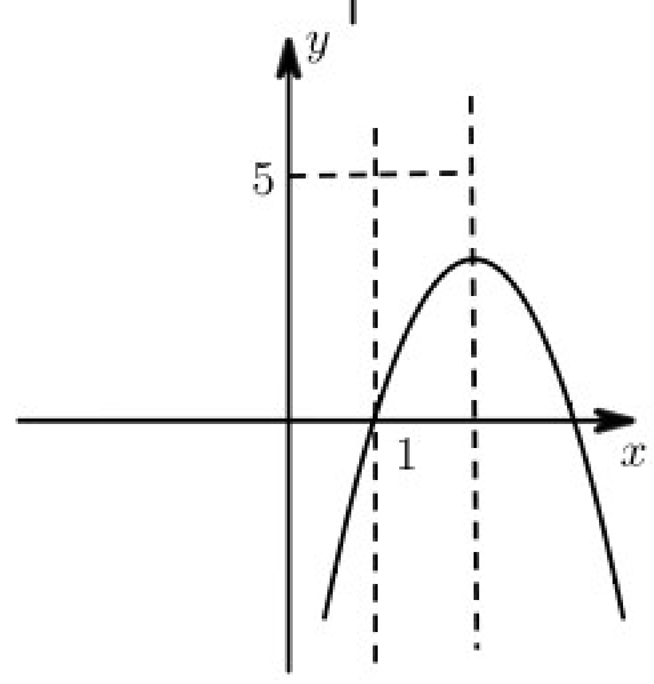
即 $\dfrac{16a+a^2+4}{4a}>0$．

$\because a<0$，

$\therefore a^2+16a+4<0$．

$\therefore -8-2\sqrt{15}<a<-8+2\sqrt{15}$．

综上所述 $a<-8+2\sqrt{15}$．



第 2 天 相似（一）

参考答案

★（六合一模）

1. 【答案】C

【解析】$\because \frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$，

$\because DE//BC$，

$\therefore \frac{AC}{CE}=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，$\frac{\triangle ADE周长}{\triangle ABC周长}=\frac{1}{3}$，

$\frac{\triangle ADE面积}{\triangle ABC面积}=(\frac{AD}{AB})^2=\frac{1}{9}$．

故 A，B，D 错误．

★（鼓楼期末）

2. 【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】如图，连接 DE，

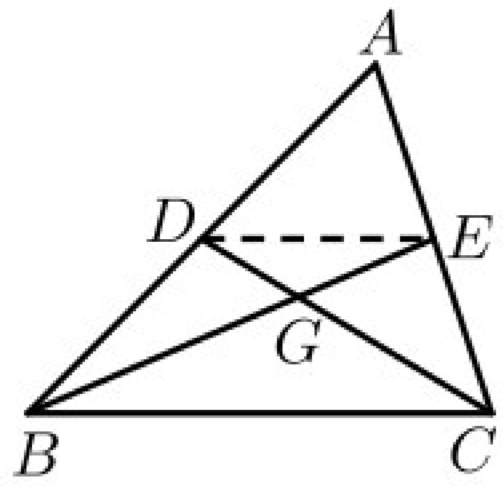
$\because BE$、CD 为 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore \triangle DEG\backsim\triangle CBG$，

$\therefore \frac{DG}{GC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$．

故答案为：$\frac{1}{2}$．



★★（玄武一模）

3. 【答案】A

【解析】由甲的作法可知 $PQ//BC$（如图 1），

$\because PQ//BC$，

$\therefore \angle B=\angle APQ$，

又 $\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ABC$，（两角相等，两三角形相似），

而不是 $\triangle AQP\backsim\triangle ABC$，

$\therefore$甲的作法错误，

由乙的作法可知，P，B，C，Q 四点共圆，

四边形 $PBCQ$ 为圆内接四边形，

$\therefore \angle B+\angle PQC=180^\circ$（圆内接四边形对角互补），

又 $\angle PQC+\angle AQP=180^\circ$，

$\therefore \angle B=\angle AQP$，

又 $\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle AQP\backsim\triangle ABC$（如图 2），

$\therefore$乙的作法正确．

故选 A．

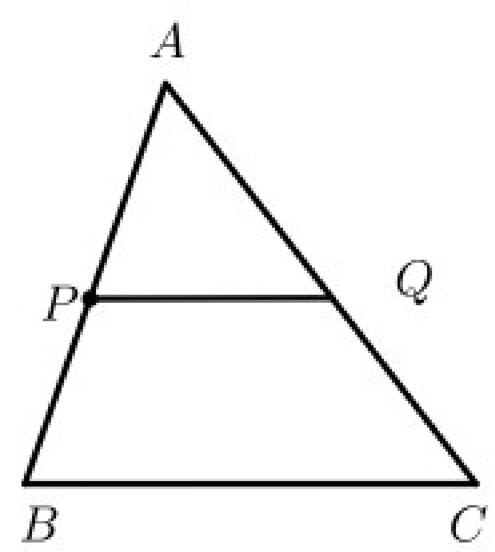


图1

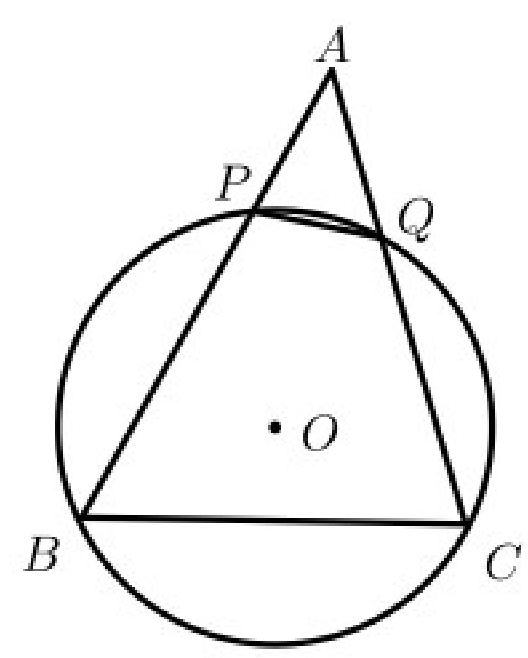


图2

★（玄武一模）

4.【答案】D

【解析】过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E，过点 B' 作 $'F\perp x$ 轴于点 F，

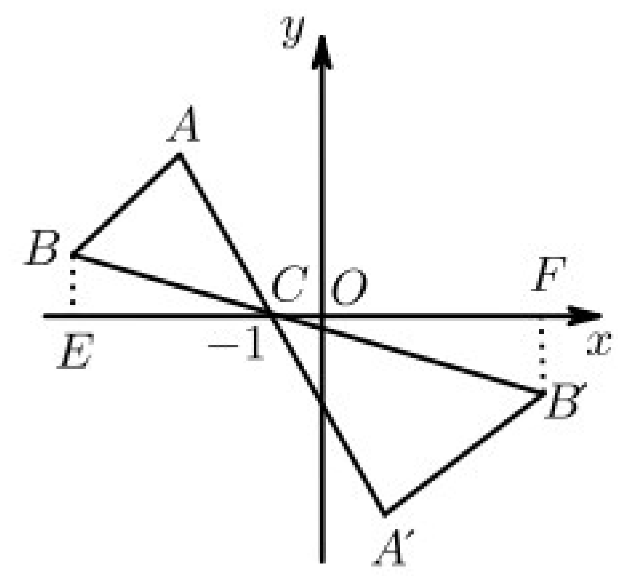
∵点 C 的坐标是 $(-1,0)$．以点 C 为位似中心，在 x 轴的下方作 $\triangle ABC$ 的位似图形 $\triangle A'B'C$，并把 $\triangle ABC$ 的边长放大到原来的 2 倍．

点 B 的对应点 B' 的横坐标是 a，

$\therefore FO=a$，$CF=a+1$，

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}(a+1)$，

∴点 B 的横坐标是：$-1-\dfrac{1}{2}(a+1)=-\dfrac{1}{2}(a+3)$．



★★（秦淮一模）

5.【答案】5.1

【解析】∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD//BC$，且 $AD=BC=10$，

$\therefore \angle DAC=\angle BCA$，

又$\because \angle BAE=\angle DAC$，

$\therefore \angle BAE=\angle BCA$，

$\because \angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle BAE\backsim\triangle BCA$，

$\therefore \dfrac{BA}{BC}=\dfrac{BE}{BA}$，

$\because AB=7$，$BC=10$，

$\therefore \dfrac{7}{10}=\dfrac{10-EC}{7}$，

解得：$EC=5.1$．

★★★（鼓楼一模）

6.【答案】$\left(\sqrt{3},-1\right)$ 或 $\left(\sqrt{3},-3\right)$ 或 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{3}{4}\right)$ 或 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},-\dfrac{3}{4}\right)$

【解析】$\because A(0,1)$、$B\left(\sqrt{3},0\right)$，

$\therefore OA=1$，$OB=\sqrt{3}$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2$，$\angle ABO=30^\circ$．

当 $\angle OBC=90^\circ$ 时，如图 1，

① 若 $\triangle BOC_1\backsim\triangle OBA$，

则 $\angle C_1=\angle ABO=30^\circ$，$BC_1=OA=1$，$OB=\sqrt{3}$，

$\therefore C_1\left(\sqrt{3},-1\right)$．

② 若 $\triangle BC_2O\backsim\triangle OAB$，

则 $\angle BOC_2=\angle BAO=30^\circ$，$BC_2=\sqrt{3}OB$，

$\because OB=\sqrt{3}$，

$\therefore BC_2=3$

$\therefore C_2\left(\sqrt{3},-3\right)$．，

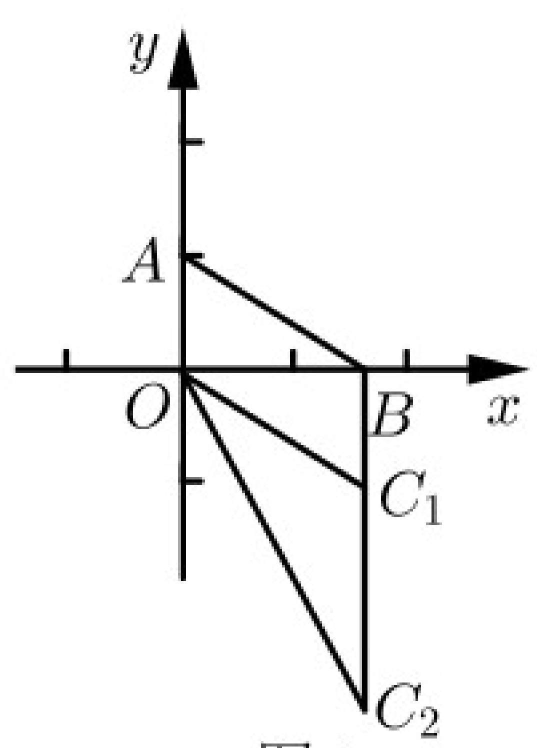


图 1

当 $\angle OCB = 90^\circ$ 时，如图 2，

过点 C 作 $CP \perp OB$ 于点 P，

① 当 $\triangle C_3BO \backsim \triangle OBA$ 时，

$\angle OBC_3 = \angle ABO = 30^\circ$，

$\therefore OC_3 = \dfrac{1}{2}OB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

同理：$OP = \dfrac{1}{2}OC_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore PC_3 = \sqrt{3}OP = \dfrac{3}{4}$，

$\therefore C_3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{3}{4}\right)$.

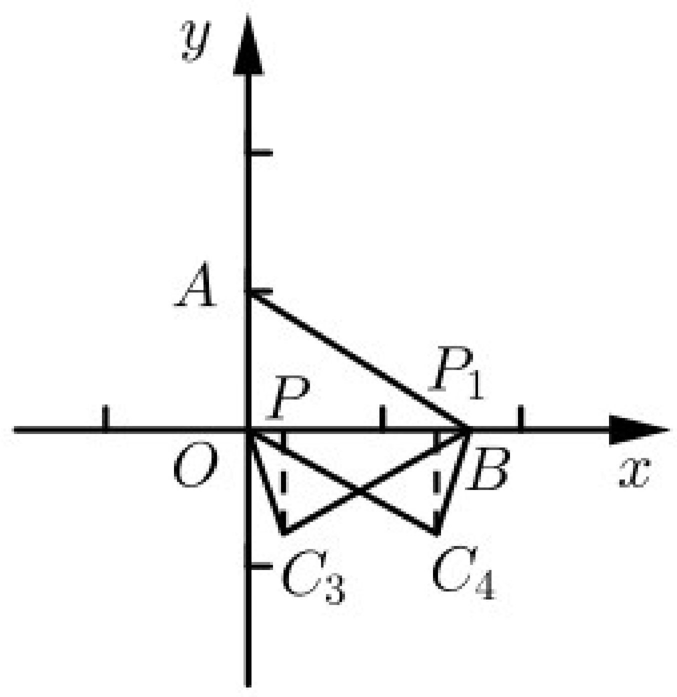


图 2

② 当 $\triangle C_4BO \backsim \triangle OAB$ 时，

$\angle BOC_4 = \angle ABO = 30^\circ$，

$\therefore BC_4 = \dfrac{1}{2}OB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

同理：$BP_1 = \dfrac{1}{2}BC_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore P_1C_4 = \sqrt{3}BP_1 = \dfrac{3}{4}$，$OP_1 = OB - BP_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore C_4\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{3}{4}\right)$.

综上所述：点 C 的坐标为 $(\sqrt{3}, -1)$ 或 $(\sqrt{3}, -3)$ 或 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{3}{4}\right)$ 或 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{3}{4}\right)$.

★★★（联合体期末）

7.【答案】$\dfrac{10}{3}$ 或 $\dfrac{5}{4}$ 或 $\dfrac{8}{3}$

【解析】$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$AC = 4$，$BC = 3$，

$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $3 + 4 + 5 = 12$，

设 $AD = x$，

（1）作 $DE \perp AC$ 于 E，

如图 1，

则 $AE = 6 - x$，

$\because DE // BC$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

$\therefore AD : AB = AE : AC$，

即 $x : 5 = (6 - x) : 4$，解得 $x = \dfrac{10}{3}$.

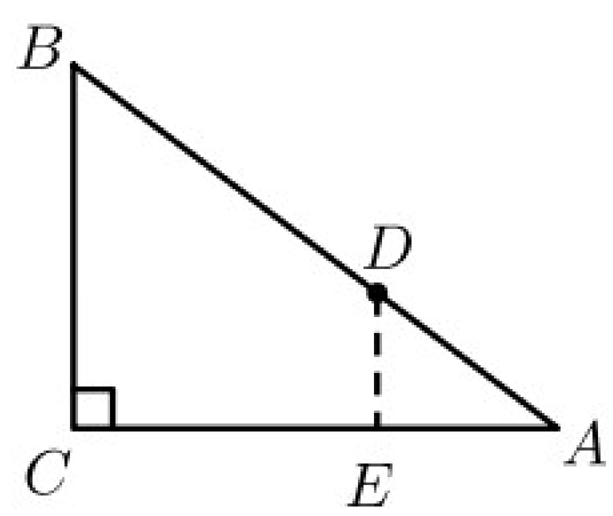


图1

（2）作 $DF \perp BC$ 于 F，

如图 2，

则 $BD = 5 - x$，$BF = 6 - (5 - x) = 1 + x$，

$\because DF // AC$，

$\therefore \triangle BDF \backsim \triangle BAC$，

$\therefore BD : BA = BF : BC$，

即 $(5 - x) : 5 = (1 + x) : 3$，

解得 $x = \dfrac{5}{4}$.

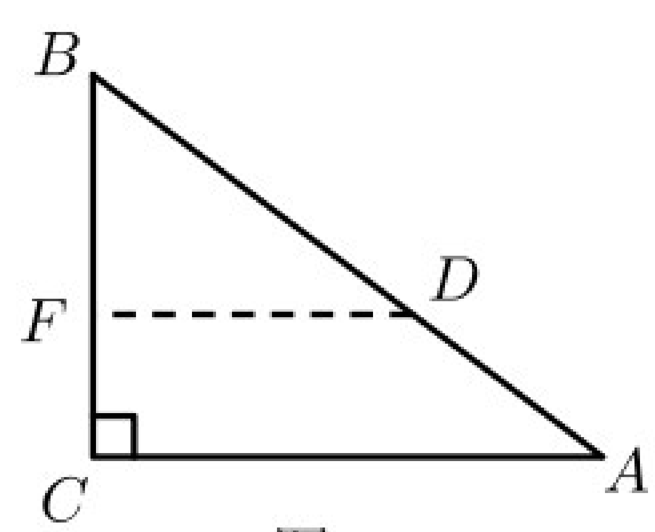


图 2

（3）作 $DG \perp AB$，交 AC 于 G，

如图 3，

则 $AG = 6 - x$，

$\because \angle DAG = \angle CAB$，$\angle ADG = \angle C = 90^\circ$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADG \backsim \mathrm{Rt}\triangle ACB$，

$\therefore AD : AC = AG : AB$，

即 $x : 4 = (6 - x) : 5$，

解得 $x = \dfrac{8}{3}$，

综上所述，AD 的长为 $\dfrac{10}{3}$ 或 $\dfrac{5}{4}$ 或 $\dfrac{8}{3}$．

故答案为：$\dfrac{10}{3}$ 或 $\dfrac{5}{4}$ 或 $\dfrac{8}{3}$．

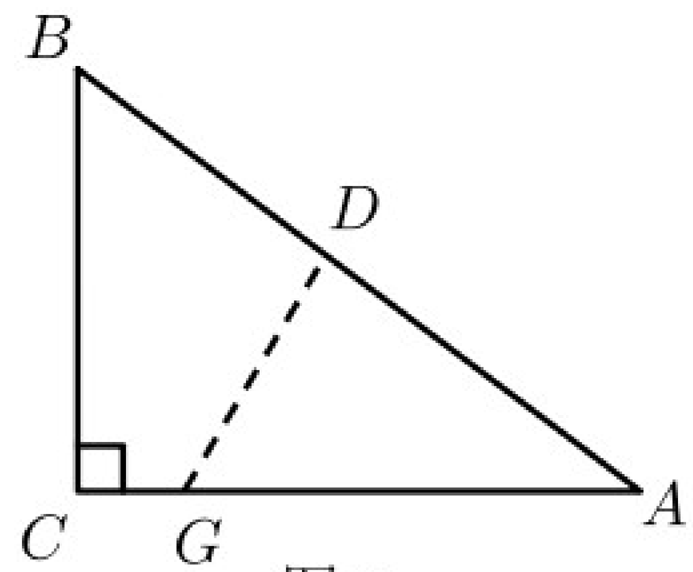


图 3

★★★（鼓楼二模）

8.【答案】(1) 画图见解析．

(2) B

(3) $\dfrac{12}{7}$．

【解析】(1)

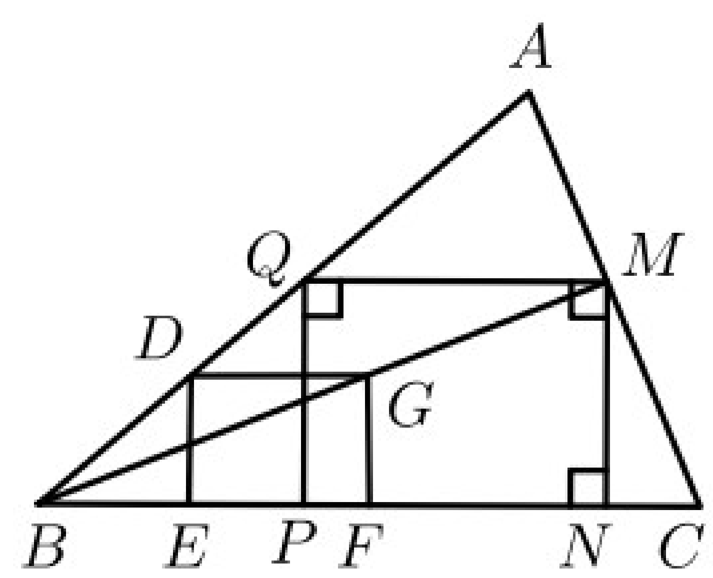
作法：①连 BG 并延长交 AC 于 M，

②过 M 作 $MN \perp BC$ 于 N，

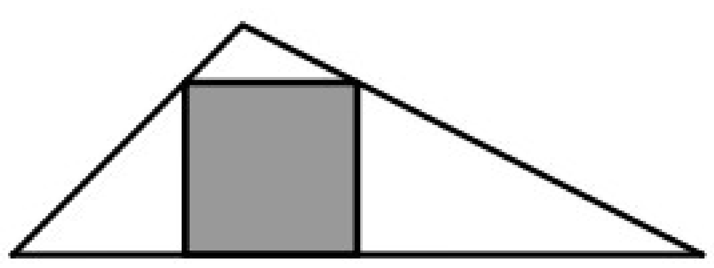
③过 M 作 $MQ \perp MN$ 交 AB 于 Q，

④过 Q 作 $QP \perp BC$ 于 P，

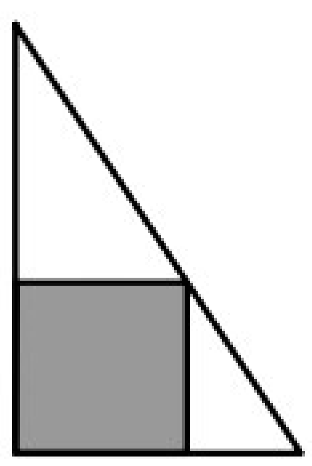
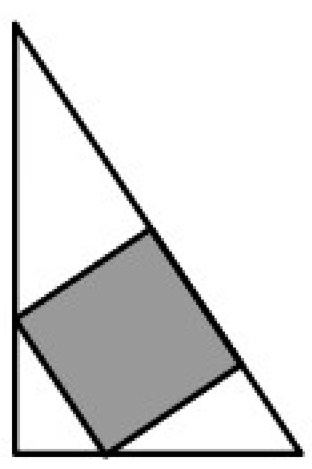
则矩形 $MNPQ$ 即为所求．



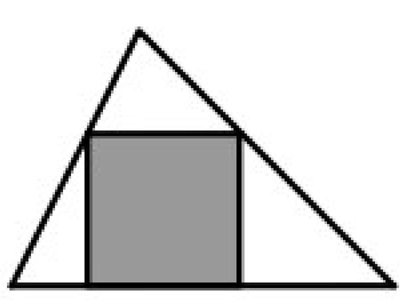
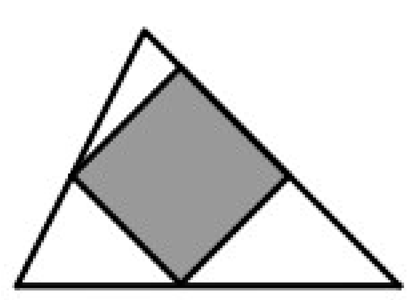
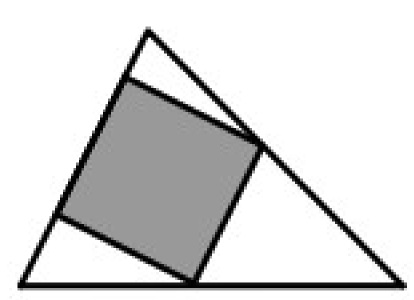
(2) 钝角三角形内接正方形只有 1 个．



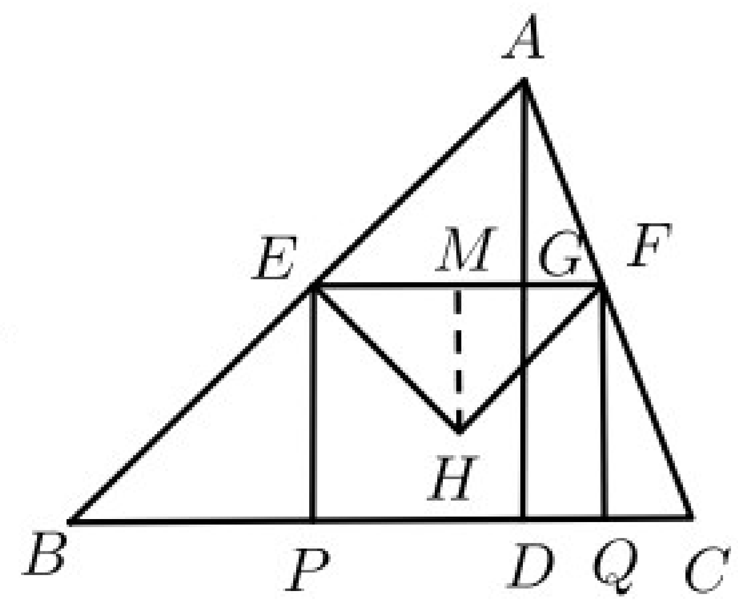
直角三角形内接正方形有 2 个．

锐角三角形内接正方形有 3 个．

(3) 过点 H 作 $HM\perp EF$，HM 交 EF 于点 M，如图，



$\because EF//BC$，

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABC$，设 $AG=a$，

$\therefore \dfrac{AG}{AD}=\dfrac{EF}{BC}$ 即 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{EF}{4}$，故 $EF=\dfrac{4}{3}a$，

$\because \triangle EFH$ 中 $\angle EHF=90^\circ$，$EH=HF$，$HM\perp EF$，

$\therefore HM=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}a=\dfrac{2}{3}a$，

$\therefore HM+AG=a+\dfrac{2}{3}a=\dfrac{5}{3}a$，

①当 $\dfrac{5}{3}a\leqslant 3$ 即 $a\leqslant\dfrac{9}{5}$ 时，此时 M 在 PQ 上方，

此时 $\triangle EFH$ 与四边形 $EPQF$ 重合部分，

$S=EF\times HM\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}a\times\dfrac{2}{3}a\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{9}a^2$.

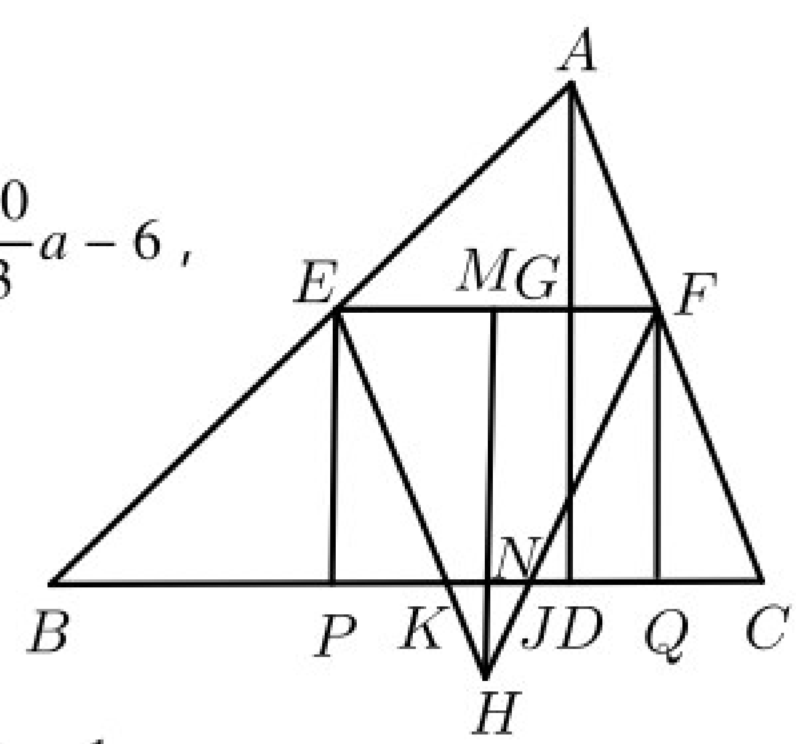
②当 $\dfrac{5}{3}a>3$ 即 $a>\dfrac{9}{5}$ 时，此时 M 在 PQ 下方，

记 HF 与 PQ 交点 J，HE 与 PQ 交点 K，HM 交 BC 于点 N，如图，

此时 $\triangle EFH$ 与四边形 $EPQF$ 重合部分为四边形 $EFJK$，

$\therefore \triangle HKJ\backsim\triangle HEF$，

$\therefore$此时 $HN=AG+HM-AD=\dfrac{5}{3}a-3$，



$\therefore \dfrac{HN}{HM}=\dfrac{KJ}{EF}$，即 $\dfrac{\frac{5}{3}a-3}{\frac{2}{3}a}=\dfrac{KJ}{\frac{4}{3}a}$，解之得 $KJ=\dfrac{10}{3}a-6$，

$\therefore HN=\dfrac{1}{2}KJ=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{10}{3}a-6\right)=\dfrac{5}{3}a-3$，

$$\begin{aligned}\therefore S_{四边形EFJK}&=S_{\triangle HEF}-S_{\triangle HKJ}\\&=EF\times HM\times\frac{1}{2}-KJ\times HN\times\frac{1}{2}\\&=\frac{4}{3}a\times\frac{2}{3}a\times\frac{1}{2}-\left(\frac{10}{3}a-6\right)\left(\frac{5}{3}a-3\right)\times\frac{1}{2}\\&=\frac{4}{9}a^2-\frac{25}{9}a^2-9+10a\\&=-\frac{21}{9}\left(a-\frac{45}{21}\right)^2+\frac{12}{7},\end{aligned}$$

$\therefore$重合部分面积 $S=\begin{cases}\dfrac{4}{9}a^2\left(0\leqslant a\leqslant\dfrac{9}{5}\right)\\-\dfrac{21}{9}\left(a-\dfrac{45}{21}\right)^2+\dfrac{12}{7}\left(\dfrac{9}{5}<a\leqslant 3\right)\end{cases}$，

$\therefore$可知 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{9}{5}$ 时，$S_{\max}=\dfrac{4}{9}\times\left(\dfrac{9}{5}\right)^2=\dfrac{36}{25}$，

$\dfrac{9}{5}<a\leqslant 3$ 时，$S_{\max}=-\dfrac{21}{9}\times\left(\dfrac{45}{21}-\dfrac{45}{21}\right)^2+\dfrac{12}{7}=\dfrac{12}{7}$，

$\therefore \triangle EFH$ 与四边形 $EPQF$ 重合部分面积最大值为 $\dfrac{12}{7}$.

第 3 天 相似（二）

参考答案

★（联合体一模）

1. 【答案】A

【解析】由旋转得：

$\angle C'AB' = \angle CAB$，$AC' = AC$，$AB' = AB$，

$\therefore \angle C'AC = \angle B'AB$，

$\therefore \angle ACC' = \angle ABB'$，

$\therefore \triangle ACC' \backsim \triangle ABB'$，

$\therefore \dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{AB}{AC}$．

★（高淳期末）

2. 【答案】8

【解析】$\because \angle BAC = 90^\circ$，$AD$ 是 BC 边上的高，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CBA$，

$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BD}{AB}$．

$\because AB = 4$，$BD = 2$，

$\therefore \dfrac{4}{BC} = \dfrac{2}{4}$，

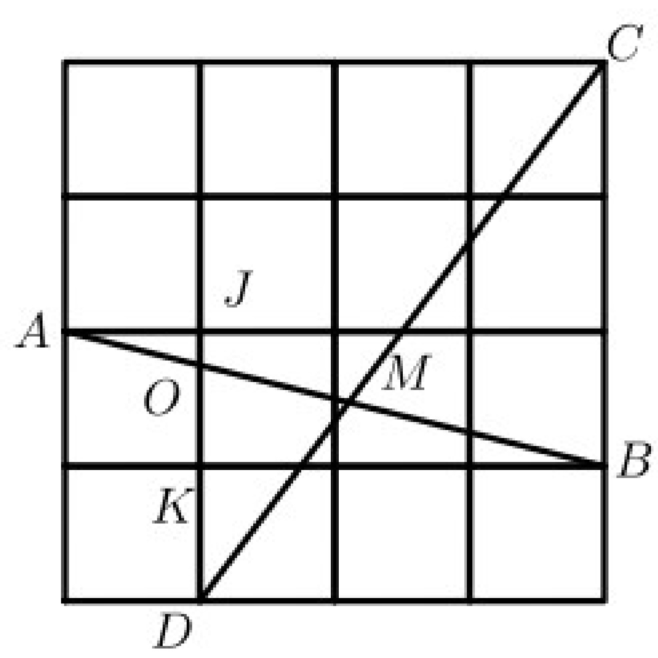
$\therefore BC = 8$．

故答案为：8．

★★（秦淮二模）

3. 【答案】$\dfrac{12}{7}$

【解析】



如图，设小正方形的边长为 1，取格点 J，K，设 AB 交格线于 O．

$\because AJ//BK$，

$\therefore \triangle AJO \backsim \triangle BKO$，

$\therefore JO : OK = AJ : BK = 1 : 3$，

$\therefore OK = \dfrac{3}{4}$，

$\therefore OD = DK + OK = \dfrac{7}{4}$，

$\because DO//BC$，

$\therefore \triangle DOM \backsim \triangle CBM$，

$\therefore \dfrac{DM}{CM} = \dfrac{DO}{BC} = \dfrac{\frac{7}{4}}{3} = \dfrac{7}{12}$，

$\therefore \dfrac{MC}{MD} = \dfrac{12}{7}$．

故答案为：$\dfrac{12}{7}$．

★★（秦淮一模）

4. 【答案】 $\dfrac{7\sqrt{10}}{30}$

【解析】设 $BE=x$，则 $BC=3x$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=CD=AD$，

$\angle ABC=\angle C=\angle D=\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore \angle ABK+\angle KBE=90^\circ$，

$\because BF\perp AE$，

$\therefore \angle AKB=90^\circ$，

$\therefore \angle BAK=\angle KBE$，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$\begin{cases}\angle BAE=\angle FBC\\ AB=BC\\ \angle ABE=\angle BCF\end{cases}$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF$（ASA），

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中，$BC^2+CF^2=BF^2$，

$\therefore BF=\sqrt{9x^2+x^2}=\sqrt{10}x$，

$\because \angle FBC=\angle KBE$，$\angle BKE=BCF=90^\circ$，

$\therefore \triangle BKE\backsim\triangle BCF$，

$\therefore \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{BK}{BC}$，

$\therefore BK=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}x$，

$\therefore KF=\sqrt{10}x-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}x=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}x$，

$\because$四边形 $KFGH$ 是矩形，

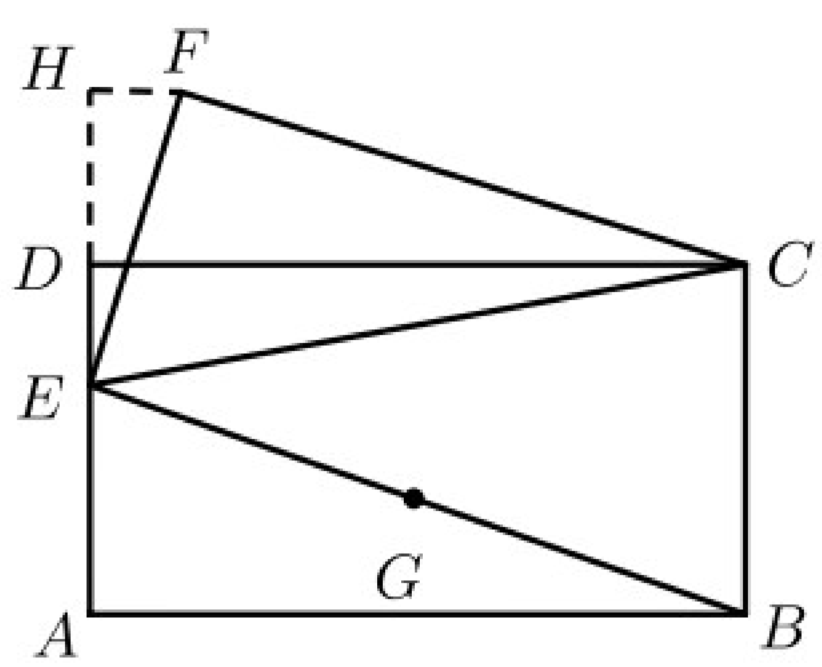
$\therefore HG=KF$，

$\therefore \dfrac{HG}{AB}=\dfrac{\frac{7\sqrt{10}}{10}x}{3x}=\dfrac{7\sqrt{10}}{30}$．

★★★（鼓楼二模）

5. 【答案】 15

【解析】过点 F 作 AD 的垂线交 AD 的延长线于点 H，



$\because \angle A=\angle H=90^\circ$，$\angle FEB=90^\circ$，

$\therefore \angle FEH=90^\circ-\angle BEA=\angle EBA$，

$\therefore \triangle FEH\backsim\triangle EBA$，

$\therefore \dfrac{HF}{AE}=\dfrac{HE}{AB}=\dfrac{EF}{BE}=\dfrac{1}{2}$，

设 $AE=x$，

$\because AB=8$，$AD=4$，

$\therefore HF=\dfrac{1}{2}x$，$EH=4$，$DH=x$，

$\therefore \triangle CEF$ 面积 $=\dfrac{1}{2}(4+x)\times 8-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}x\times 4-\dfrac{1}{2}\times\left(8-\dfrac{1}{2}x\right)x$

$=\dfrac{1}{4}x^2-x+16=\dfrac{1}{4}(x-2)^2+15$，

$\therefore$当 $x=2$ 时，$\triangle CEF$ 面积的最小值是 15．

★★（福州中考）

6. 【答案】(1) $AD^2 = AC \cdot CD$

(2) $\angle ABD = 36^\circ$.

【解析】(1) $\because AB = AC = 1$，$BC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore AD = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$DC = 1 - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore AD^2 = \dfrac{5+1-2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$AC \cdot CD = 1 \times \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore AD^2 = AC \cdot CD$.

(2) $\because AD = BC$，$AD^2 = AC \cdot CD$，

$\therefore BC^2 = AC \cdot CD$，即 $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CD}{BC}$.

又$\because \angle C = \angle C$，

$\therefore \triangle BCD \backsim \triangle ACB$.

$\therefore \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$，$\angle DBC = \angle A$.

$\therefore DB = CB = AD$.

$\therefore \angle A = \angle ABD$，

设 $\angle A = x$，则 $\angle ABD = x$，$\angle DBC = x$，$\angle C = \angle ABC = 2x$.

$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$，

$\therefore x + 2x + 2x = 180^\circ$.

解得：$x = 36^\circ$.

$\therefore \angle ABD = 36^\circ$.

★★★（联合体一模）

7. 【答案】(1) $AF = 1$ 或 3 .

(2) 画图见解析 .

(3) ①当 $1 < m < 4$ 且 $m \neq 3$ 时，有 3 个 F 点；

②当 $m = 3$ 或 $m = 4$ 时，有 2 个 F 点；

③当 $m > 4$ 时，有 1 个 F 点 .

【解析】(1) 存在 . 设 $AF = x$，

①当 $\triangle AEF \backsim \triangle BFC$ 时，

$\dfrac{AE}{BF} = \dfrac{AF}{BC}$，

$\dfrac{1}{4-x} = \dfrac{x}{3}$，

$x(4-x) = 3$.

解得 $x_1 = 1$，$x_2 = 3$.

$\therefore AF = 1$ 或 3 .

②当 $\triangle AEF \backsim \triangle BCF$ 时，

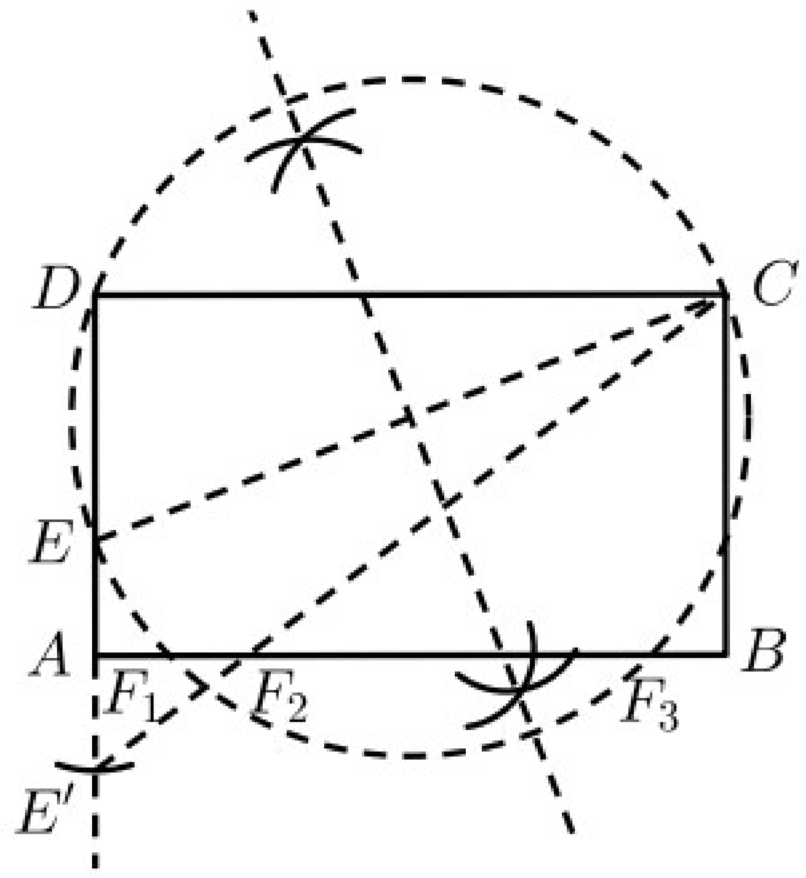
$\dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AF}{BF}$，

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{4-x}$，

解得 $x = 1$.

(2)

如图，F_1、F_2 和 F_3 即为所求．



(3) $AF=x$，$BF=4-x$，

①当 $\triangle EAF\backsim\triangle CBF$，

$\dfrac{EA}{CB}=\dfrac{AF}{BF}$，

$\dfrac{1}{m}=\dfrac{x}{4-x}$，

解得：$x=\dfrac{4}{m+1}$．

②当 $\triangle EAF\backsim\triangle FBC$，

$\dfrac{EA}{FB}=\dfrac{AF}{BC}$，

$\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{x}{m}$，

$x^2-4x+m=0$，

$\Delta=16-4m$．

若 $m>4$，无 F 点；

若 $m=4$，有 1 个 F 点；

若 $m<4$，有 2 个 F 点．

而当 $m=3$ 时，①②两种情况会有重合的点．

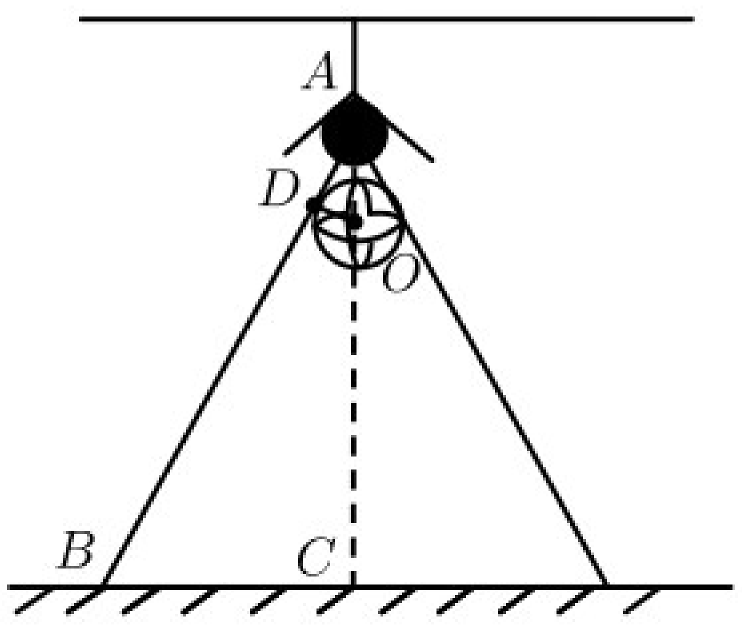
综上：①当 $1<m<4$ 且 $m\neq3$ 时，有 3 个 F 点；

②当 $m=3$ 或 $m=4$ 时，有 2 个 F 点；

③当 $m>4$ 时，有 1 个 F 点．

第 4 天 圆与相似

参考答案



★★（玄武一模）

1.【答案】10

【解析】如图，∵灯与球心所在直线垂直于地面，

$\therefore AC \perp BC$，

∴小球在地面的影子的面积 $1.92\pi \mathrm{m}^2$，

$\therefore \pi \cdot BC^2 = 1.92\pi$，

解得 $BC = \frac{4}{5}\sqrt{3}$，

根据勾股定理，$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2.4^2 + 1.92} = \frac{8}{5}\sqrt{3}$，

∵光线 AB 与球相切，

$\therefore OD \perp AB$，

$\therefore \angle ADO = \angle ACB = 90^\circ$，又$\because \angle BAC = \angle OAD$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AOD$，

$\therefore \frac{BC}{OD} = \frac{AB}{AO}$，

即 $\frac{\frac{4}{5}\sqrt{3}}{OD} = \frac{\frac{8}{5}\sqrt{3}}{OD + 10}$，解得 $OD = 10\mathrm{cm}$．

故答案为：10．

★★（建邺二模）

2.【答案】D

【解析】如图，易得四边形 $OGBH$ 是正方形，设其边长为 x，

易证：$\triangle ABC \backsim \triangle AGO$，得 $\frac{AG}{AB} = \frac{GO}{BC}$，$\frac{3-x}{3} = \frac{x}{4}$，

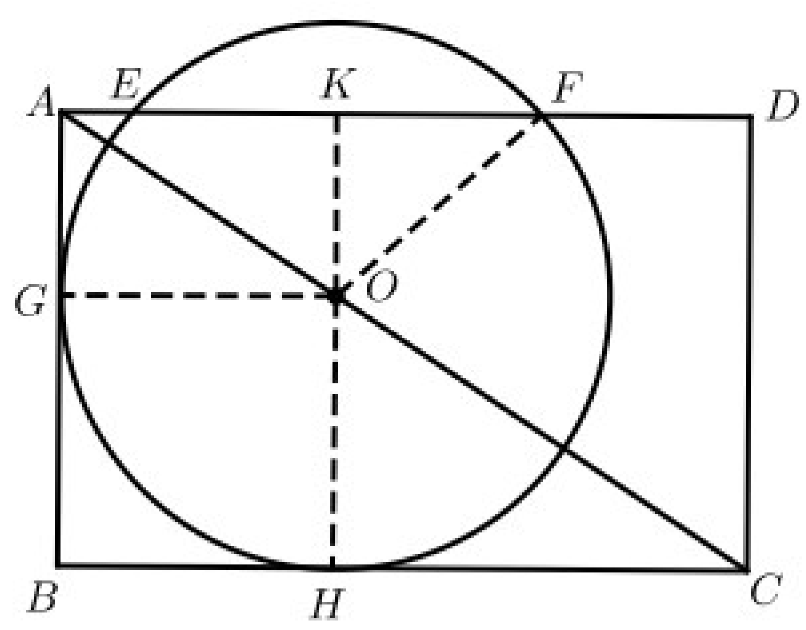
解得 $x = \frac{12}{7}$，

$\therefore OK = AG = 3 - \frac{12}{7} = \frac{9}{7}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OKF$ 中，

$KF = \sqrt{OF^2 - OK^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$，

根据垂径定理得：$EF = 2KF = \frac{6\sqrt{7}}{7}$．



★★（秦淮一模）

3.【答案】$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

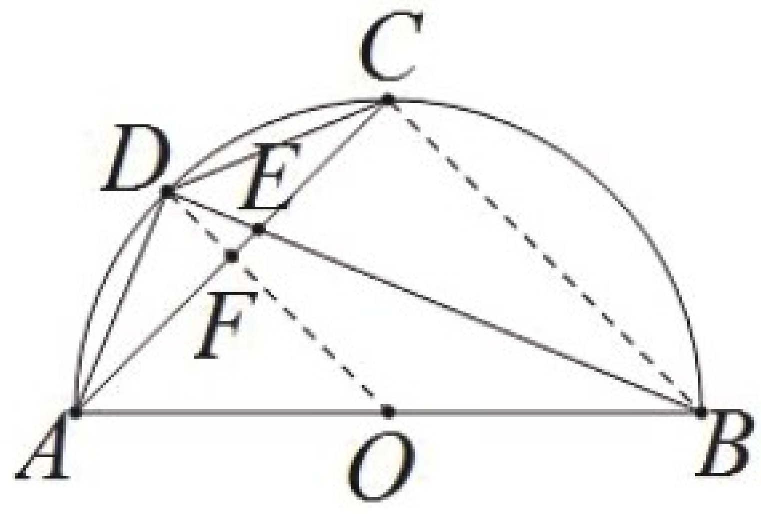
【解析】连接 OD，交 AC 于点 F，连接 BC

∵点 D 是弧 AC 的中点

$\therefore OD \perp$ AC

∴△DEF∽△BEC

$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{DF}{BC} = \frac{r - \frac{\sqrt{2}}{2}r}{\sqrt{2}r} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$



★★★（建邺二模）

4. 【答案】 $DN=\dfrac{24}{5}$ 或 $5<DN\leqslant 6$

【解析】（1）当⊙D 与线段 AM 相切时，如图 1，设切点为 Q，则 $DQ\perp AM$，

$\because M$ 是 BC 的中点，$BC=6$，

$\therefore BM=MC=3$，在 Rt△ABM 中，

$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

$\because ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD//BC$，$\angle B=90^\circ$，

$\therefore \angle AMB=\angle DAQ$.

又$\because \angle B=\angle DQA=90^\circ$，

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle DQA$，

$\therefore \dfrac{DQ}{AB}=\dfrac{AD}{AM}$，

即 $\dfrac{DQ}{4}=\dfrac{6}{5}$，

$\therefore DQ=\dfrac{24}{5}=DN$，

即 $DN=\dfrac{24}{5}$ 时，⊙D 与线段 AM 相切，⊙D 与线段 AM 仅有一个公共点；

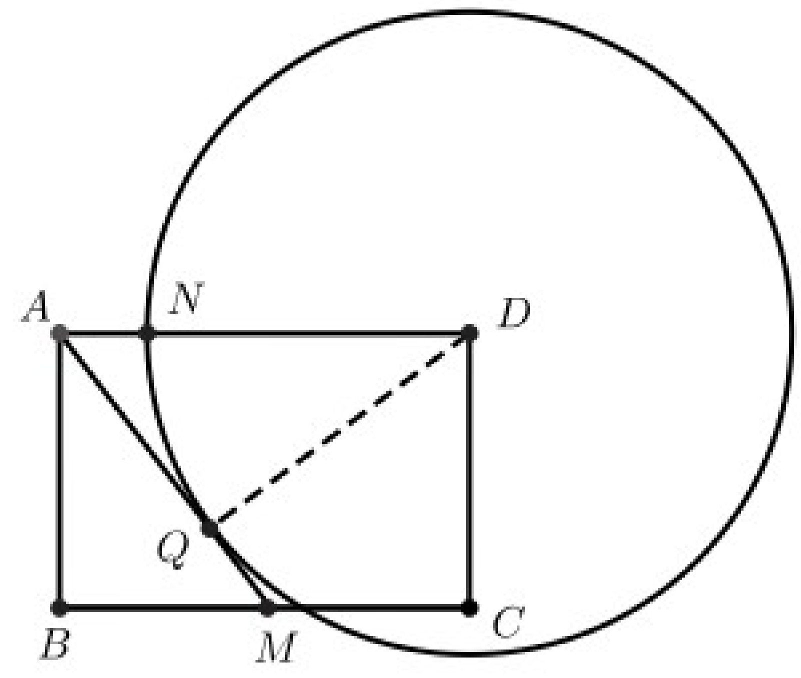


图1

（2）当⊙D 过线段 AM 的端点 M 时，如图 2，此时⊙D 与线段 AM 有两个公共点的最小临界值，

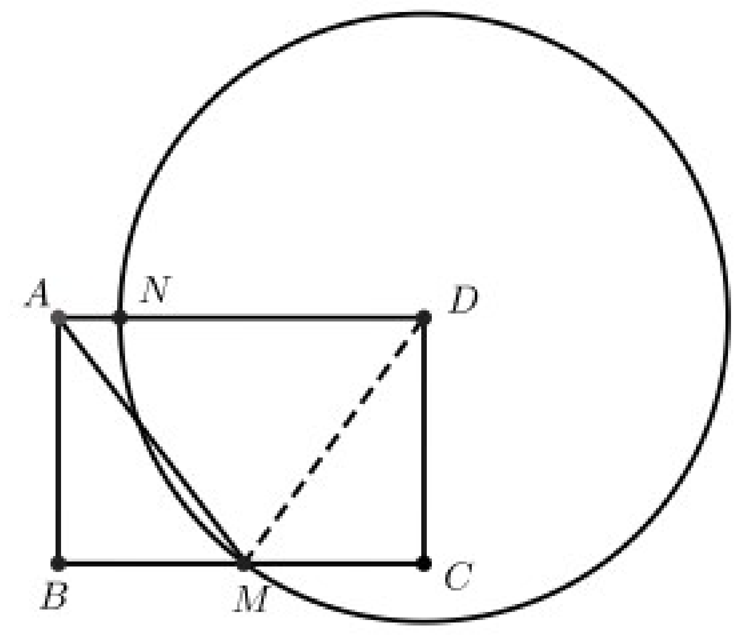


图2

$DN=DM=AM=5$，

当⊙D 过线段 AM 的端点 A 时，如图 3，此时⊙D 与线段 AM 有一个公共点的最大临界值，

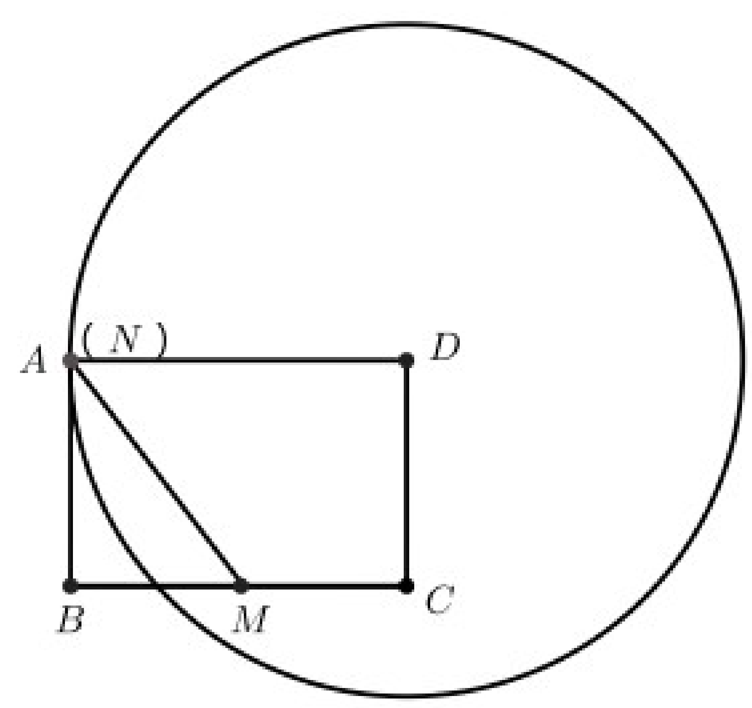


图3

此时，$DN=DA=6$，

因此 $5<DN\leqslant 6$ 时，⊙D 与直线 AM 相交，而与线段 AM 仅有一个公共点，

综上所述，当 $DN=\dfrac{24}{5}$ 或 $5<DN\leqslant 6$，⊙D 与线段 AM 仅有一个公共点 .

故答案为：$DN=\dfrac{24}{5}$ 或 $5<DN\leqslant 6$.

★★（联合体一模）

5.【答案】(1) 证明见解析．

(2) $\frac{9}{2}$ 或 $9-3\sqrt{5}$ 或 $3\sqrt{5}$

(3) 证明见解析．

【解析】(1) ∵四边形 $DEGF$ 是⊙O 的内接四边形，

$\therefore \angle DEG+\angle DFG=180^\circ$，

$\angle FDE+\angle FGE=180^\circ$，

又$\because \angle AFG+\angle DFG=180^\circ$，

$\angle AGF+\angle FGE=180^\circ$，

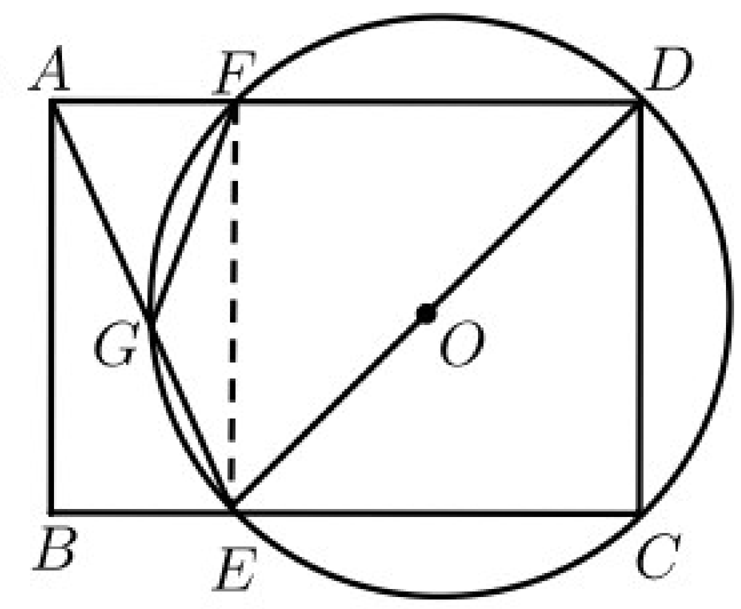
$\therefore \angle AFG=\angle DEG$，$\angle AGF=\angle FDE$，

$\therefore \triangle AFG\backsim\triangle AED$．

(2) 由（1）可知 $\triangle AFG\backsim\triangle AED$，

∴当 $\triangle AFG$ 是等腰三角形时，$\triangle AED$ 是等腰三角形，

连接 EF，如图：



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=6$，$BC=9$，

$\therefore CD=AB=6$，$AD=BC=9$，

$\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=90^\circ$，

∵⊙O 是 $\triangle ECD$ 的外接圆，$\angle ECD=90^\circ$，

∴DE 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle DFE=90^\circ$，

$\therefore \angle AFE=180^\circ-\angle DFE=90^\circ$，

$\therefore \angle BAF=\angle ABE=\angle AFE=90^\circ$，

∴四边形 $ABEF$ 是矩形，

$\therefore AF=BE$，$EF=AB=6$，

$\because \triangle AED$ 是等腰三角形，

∴分三种情况：

①当 $AE=DE$ 时，

$\because \angle DFE=90^\circ$，

$\therefore EF\perp AD$，

又$\because AE=DE$，

$\therefore AF=DF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 9=\frac{9}{2}$，

$\therefore BE=AF=\frac{9}{2}$；

②当 $DE=AD=9$ 时，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中，$\angle ECD=90^\circ$，$DE=9$，$DC=6$，

$\therefore CE=\sqrt{DE^2-DC^2}=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$，

$\therefore BE=BC-CE=9-3\sqrt{5}$；

③当 $AE=AD=9$ 时，

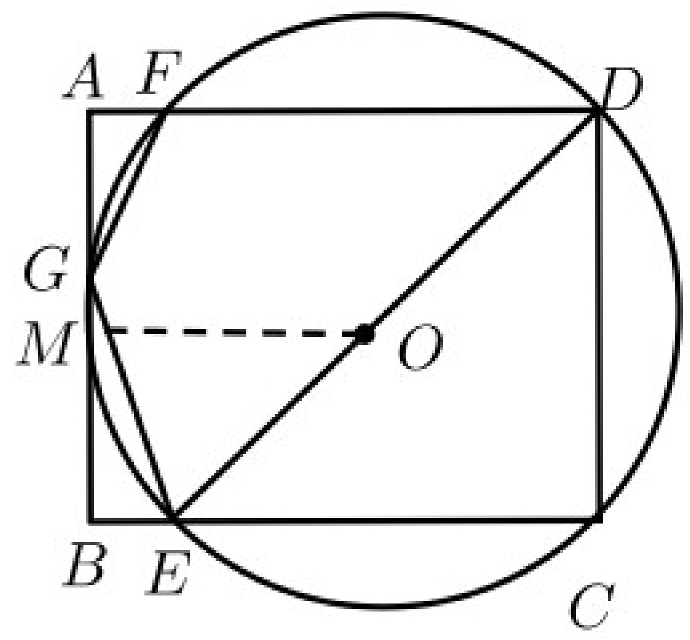
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle ABE=90^\circ$，$AE=9$，$AB=6$，

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$；

综上所述，当 BE 的长为 $\frac{9}{2}$ 或 $9-3\sqrt{5}$ 或 $3\sqrt{5}$ 时，$\triangle AFG$ 为等腰三角形．

故答案为 $\frac{9}{2}$ 或 $9-3\sqrt{5}$ 或 $3\sqrt{5}$．

(3) 设 AB 的中点为 M，连接 OM，如图：



当 $BE=1$ 时，$CE=BC-BE=9-1=8$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore BE//AD$，$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$，

$DC=AB=6$，$AD=BC=9$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中，$\angle DCE=90^\circ$，

$DE=\sqrt{DC^2+CE^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore OD=OE=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\times 10=5$，

$\because BE//AD$，

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是梯形，

又 $\because M$ 为 AB 的中点，O 为 DE 的中点，

$\therefore OM$ 是梯形 $ABED$ 的中位线，

$\therefore OM//AD$，

$M=\frac{1}{2}(BE+AD)=\frac{1}{2}(1+9)=5$，

$\therefore \angle BMO=\angle BAD=90^\circ$，$OM=OD$，

$\therefore OM\perp AB$，

又 $\because OM=OD$，

$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切．

★★★（玄武一模）

6.【答案】(1) 证明见解析．

(2) ①$4$．

②$\frac{10}{3}$

【解析】(1) $\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

$\because DE//AB$，

$\therefore \angle B=\angle EDC$，

$\because \angle EDC=\angle EGH$，

$\therefore \angle B=\angle EGH$，

$\because EF//BC$，

$\therefore \angle B=\angle AFE$，

$\because \angle AFE+\angle EFG=180^\circ$，

$\angle EFG+\angle EHG=180^\circ$，

$\therefore \angle AFE=\angle EHG$，

$\therefore \angle B=\angle EHG$，

$\therefore \angle C=\angle EHG$，

$\therefore \triangle EGH\backsim\triangle ABC$．

(2) ①$\because \triangle EGH\backsim\triangle ABC$，$AB=AC$，

$\therefore \frac{EG}{HG}=\frac{AB}{BC}$，$EG=EH$，

$\because AB=15$，$BC=10$，

$\therefore \frac{EG}{HG}=\frac{3}{2}$，

$\therefore \frac{EH}{HG}=\frac{3}{2}$，

$\because \angle B=\angle EHG=\angle C$，$\angle EHB=\angle EHG+\angle BHG=\angle C+\angle CEH$，

$\therefore \angle BHG=\angle CEH$，

$\therefore \triangle BHG \backsim \triangle CEH$，

$\therefore \dfrac{EH}{HG}=\dfrac{CH}{BG}=\dfrac{CE}{BH}=\dfrac{3}{2}$，

$\because BG=2$，

$\therefore CH=3$，

$\therefore BH=BC-CH=7$，

$\therefore \dfrac{CE}{BH}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore CE=\dfrac{21}{2}$，

$\because AB=AC=15$，

$\therefore AE=AC-CE=\dfrac{9}{2}$，

$\because DE//AB$，

$\therefore \dfrac{CE}{AE}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{7}{3}$，

$\therefore CD=7$，$BD=3$，

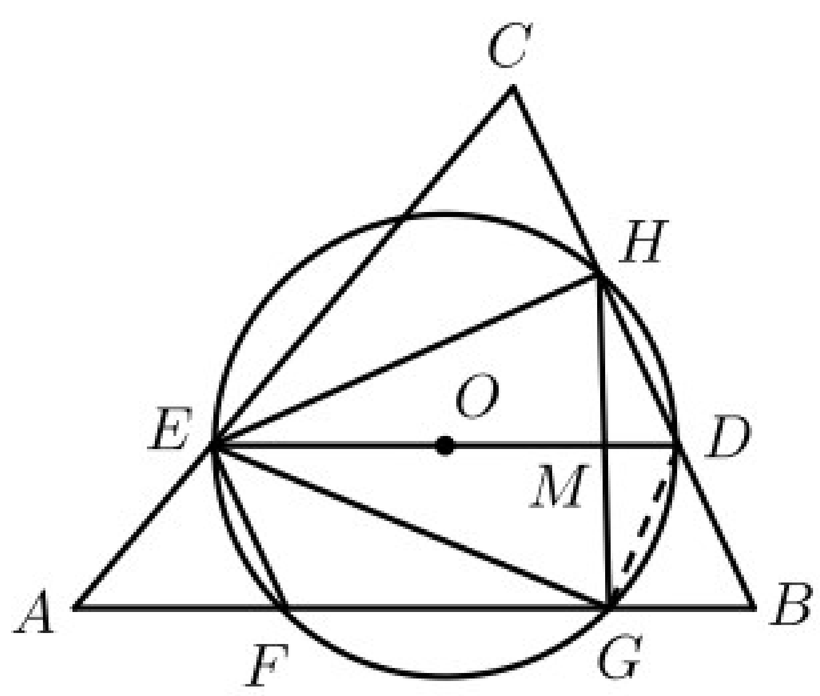
$\therefore DH=CD-CH=4$．

②设 ED 交 HG 于 M，连结 DG，

$\because EG=EH$，ED 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore ED\perp HG$，

$\therefore HM=MG$，$DH=DG$，



$\because \dfrac{EG}{HG}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore \dfrac{EG}{2MG}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore \dfrac{EG}{MG}=3$，

$\because DE//AB$，$DE\perp HG$，

$\therefore HG\perp AB$，

$\therefore \sin\angle GHD=\sin\angle GED=\dfrac{MG}{EG}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \dfrac{BG}{BH}=\dfrac{1}{3}$，

$\because \dfrac{CH}{BG}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$设 $BG=2a$，则 $CH=3a$，$BH=6a$，

$\therefore BC=CH+BH=9a$，

$\because BC=10$，

$\therefore a=\dfrac{10}{9}$，

$\therefore BH=\dfrac{20}{3}$，

$\because DH=DG$，

$\therefore \angle DHG=\angle DGH$，

$\because \angle DHG+\angle B=90^\circ$，$\angle DGH+\angle DGB=90^\circ$，

$\therefore \angle B=\angle DGB$，

$\therefore DG=BD$，

$\therefore DH=DG=BD=\dfrac{1}{2}BH=\dfrac{10}{3}$．