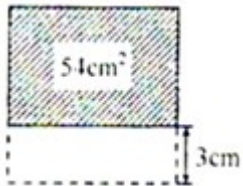


一元二次方程：

填空：

1. 一元二次方程 $x^2 - 3x = 4$ 中， $b^2 - 4ac =$ _____.
2. 一元二次方程 $x(x - 1) = 0$ 的解是_____.
3. 若 $x = 2$ 是关于 x 的方程 $x^2 - x - a^2 + 5 = 0$ 的一个根，则 a 的值为_____.
4. 如果二次三项式 $x^2 - 6x + m^2$ 是一个完全平方式，那么 m 的值为_____.
5. 若关于 x 的方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 有两个实数根，则 m 的取值范围是_____.
6. 已知 a 、 b 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根，则代数式 $(a - b)(a + b - 2) + ab$ 的值等于_____.
7. 某城市 2013 年年底绿地面积有 200 万平方米，计划经过两年达到 242 万平方米，则平均每年的增长率为_____.
8. 一块正方形钢板上截去 3cm 宽的长方形钢条，剩下的面积是 54cm^2 ，则原来这块钢板的面积是_____ cm^2 .

9. 用配方法解方程 $2x^2 + 4x + 1 = 0$ 时，原方程应变形为_____.
10. 用公式法解方程 $x^2 = -8x - 15$ ，其中 $b^2 - 4ac =$ _____. $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____.
11. 已知关于 x 的方程 $3x^2 - 5x + k = 0$ 的一个根是 -1 ，则另一个根为_____, k 的值为_____.

12. 写出以 $-1, 2$ 为根的一元二次方程_____.

13. 用一根长 24cm 的铁丝围成一个斜边长是 10cm 的直角三角形, 则两直角边长分别为_____.

14. 若 n ($n \neq 0$) 是关于 x 的方程 $x^2 + mx + 2n = 0$ 的根, 则 $m + n$ 的值为_____.

15. 已知一元二次方程 $x^2 + px + 3 = 0$ 的一个根为 -3 , 则 $p =$ _____.

16. 若 $x = 1$ 是一元二次方程 $x^2 + x + c = 0$ 的一个解, 则 $c^2 =$ _____.

17. 已知 $x = 1$ 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + kx - 1 = 0$ 的一个根, 则实数 k 的值是_____.

18. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 的一个根是 1 , 则 m 的值是_____.

19. 已知 $x = 1$ 是方程 $ax^2 + x - 2 = 0$ 的一个根, 则 $a =$ _____.

20. 已知 $x = -1$ 是关于 x 的方程 $2x^2 + ax - a^2 = 0$ 的一个根, 则 $a =$ _____.

21. 若 $x = 0$ 是方程 $(m - 2)x^2 + 3x + m^2 + 2m - 8 = 0$ 的解, 则 $m =$ _____.

22. 关于 x 的两个方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 与 $\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x+a}$ 有一个解相同, 则 $a =$ _____.

23. 已知 x 是一元二次方程 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 的实数根, 那么代数式 $\frac{x-3}{3x^2-6x} \div (x+2 - \frac{5}{x-2})$ 的值为_____.

24. 已知关于 x 的方程 $2x^2 - kx + 1 = 0$ 的一根为 $x = 1$, 则 k 的值为_____.

25. 已知 $x = -1$ 是方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 的一个根, 则 $m =$ _____.

一元二次方程 200 题（含解析）——朱韬老师共享

26. 已知 $a \neq 0$, $a \neq b$, $x=1$ 是方程 $ax^2+bx-10=0$ 的一个解, 则 $\frac{a^2-b^2}{2a-2b}$ 的值是_____.

27. 若关于 x 的方程 $x^2+mx-6=0$ 有一个根是 2, 则 m 的值为_____.

28. 若 $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx-2=0$ 的根, 则 $a+b=$ _____.

29. 如果 -4 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2+7x-k=0$ 的一个根, 则 k 的值为_____.

30. 一元二次方程 $2x^2-6=0$ 的解为_____.

31. 方程 $x^2+1=2$ 的解是_____.

32. 方程 $(x-1)^2=4$ 的解为_____.

33. 一元二次方程 $x^2=16$ 的解是_____.

34. 在实数范围内定义运算 “ \star ”, 其规则为: $a \star b = a^2 - b^2$, 则方程 $(4 \star 3) \star x = 13$ 的解为 $x=$ _____.

35. 将 4 个数 a, b, c, d 排成 2 行、2 列, 两边各加一条竖直线记成 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, 定义 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 上述记号就叫做 2 阶行列式. 若 $\begin{vmatrix} x+1 & 1-x \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 6$, 则 $x=$ _____.

36. 方程 $x^2-2=0$ 的解为_____.

37. 用配方法解方程 $x^2-4x=5$ 时, 方程的两边同时加上_____, 使得方程左边配成一个完全平方式.

38. 二次三项式 x^2-4x-1 写成 $a(x+m)^2+n$ 的形式为_____.

39. 若代数式 x^2-6x+b 可化为 $(x-a)^2-1$, 则 $b-a$ 的值是_____.

- 40 . 方程 $x^2+x-1=0$ 的根是 ()
- 41 . 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有两个不相等的实数根 , 则 b^2-4ac 满足的条件是 ()
- 42 . 关于 x 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$ 有实数根 , 则 a 满足 ()
- 43 . 关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+2k=0$ 有两个不相等的实数根 , 则实数 k 的取值范围是 ()
- 44 . 关于 x 的方程 $(a-6)x^2-8x+6=0$ 有实数根 , 则整数 a 的最大值是 ()
- 45 . 关于 x 的方程 $ax^2-(a+2)x+2=0$ 只有一解 (相同解算一解) , 则 a 的值为 ()
- 46 . 若关于 x 的一元二次方程 $nx^2-2x-1=0$ 无实数根 , 则一次函数 $y=(n+1)x-n$ 的图象不经过第 (象限)
- 47 . 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根 , 则 k 的取值范围是 ()
- 48 . 已知 a, b, c 分别是三角形的三边 , 则方程 $(a+b)x^2+2cx+(a+b)=0$ 的根的情况是 ()
- 49 . 关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+(m-2)=0$ 的根的情况是 ()
- 50 . 已知 $(m-1)x^2+2mx+(m-1)=0$ 有两个不相等的实数根 , 则 m 的取值范围是 ()
- 51 . 如果关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2-(2k+1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根 , 那么 k 的取值范围是 ()

52. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - m = 2x$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是 ()

53. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m - 2)x^2 + (2m + 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是 ()

54. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 没有实数根，则实数 m 的取值是 ()

55. 一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两根分别是 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2$ 等于 ()

56. 已知 $x = 0$ 是方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的一个根，则方程的另一个根为 ()
 q 的值分别是 ()

57. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别为 $x_1 = 2, x_2 = 1$ ，那么 p ，

58. 已知方程 $x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两个解分别为 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2$ 的值为 ()

59. 一元二次方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两根之积是 ()

60. 设 a, b 是方程 $x^2 + x - 2009 = 0$ 的两个实数根，则 $a^2 + 2a + b$ 的值为 ()

61. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + k + 1 = 0$ 的两个实数根是 x_1, x_2 ，且 $x_1^2 + x_2^2 = 24$ ，则 k 的值是 ()

62. 若方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 ()

63. 设 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + n - 2 = mx$ 的两个实数根，且 $x_1 < 0, x_2 - 3x_1 < 0$ ，则 m 和 n 的取值范围分别是

64. 已知 a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + nx - 1 = 0$ 的两实数根，则式子 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值是 ()

65. 若 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的两个不相等的实数根, 则代数式 $2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 3$ 的值是 ()

66. 已知 a, b 为一元二次方程 $x^2 + 2x - 9 = 0$ 的两个根, 那么 $a^2 + a - b$ 的值为 ()

67. 如图, 若将左图正方形剪成四块, 恰能拼成右图的矩形, 设 $a=1$, 则 $b=()$

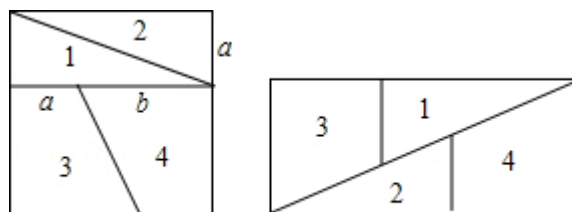


图1

图2

68. 解方程 $\sqrt{1+\frac{9}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+9}} = \frac{5}{2}$. 如果有一个实根, 用这个根和它的相反数为二根作一个一元二次方程; 如果有两个实根, 分别用这两个实根的倒数为根作一个一元二次方程.

69.
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

70. 解方程: $\sqrt{x^2 + 7} = -\sqrt{2}x + 1$.

解答:

1. 解方程:

(1) $x^2 - 6x - 16 = 0$

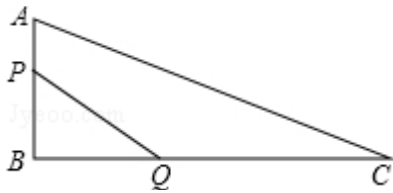
(2) $x^2 + 4x - 1 = 0$.

2. 某村计划建造如图所示的矩形蔬菜温室, 要求长与宽之比为 $2:1$ 在温室内, 沿前侧内墙保留 3m 宽的空地. 其他三侧内墙各保留 2m 宽的通道. 当矩形温室的长与宽各为多少时, 蔬菜种植区域的面积是 275m^2 ?

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1cm/s 的速度移动, 点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2cm/s 的速度移动.

(1) 如果点 P, Q 分别从 A, B 同时出发, 那么几秒后 $\triangle PBQ$ 的面积等于 4cm^2 ?

(2) 在(1)中 $\triangle PBQ$ 的面积能否等于7? 请说明理由.



4. 山西特产专卖店销售核桃, 其进价为每千克40元, 按每千克60元出售, 平均每天可售出100千克, 后来经过市场调查发现, 单价每降低2元, 则平均每天的销售可增加20千克. 若该专卖店销售这种核桃要想平均每天获利2240元, 请回答:

(1) 每千克核桃应降价多少元?

(2) 在平均每天获利不变的情况下, 为尽可能让利于顾客, 赢得市场, 该店应按原售价的几折出售?

5. 一个广告公司制作广告的收费标准是: 以面积为单位, 在不超过规定面积 A (m^2) 的范围内, 每张广告收费1000元, 若超过 $A\text{m}^2$, 则除了要交这1000元的基本广告费以外, 超过部分还要按每平方米 $50A$ 元缴费. 下表是该公司对两家公司广告的面积及相应收费情况的记载:

单位	广告的面积(m^2)	收费金额(元)
烟草公司	6	1400
食品公司	3	1000

红星公司要制作一张大型公益广告, 其材料形状是矩形, 它的四周是空白, 如果上、下各空0.25m, 左、右各空0.5m, 那么空白部分的面积为 6m^2 . 已知矩形材料的长比宽多1m, 并且空白部分不收广告费, 那么这张广告的费用是多少?

6. 有一块长32cm, 宽14cm的矩形铁皮.

(1) 如图1, 如果在铁皮的四个角裁去四个边长一样的正方形后, 将其折成底面积为 280cm^2 的无盖长方体盒子, 求裁去的正方形的边长.

(2) 由于需要, 计划制作一个有盖的长方体盒子, 为了合理利用材料, 某学生设计了如图2的裁剪方案, 阴影部分为裁剪下来的边角料, 其中左侧的两个阴影部分为正方形, 问能否折出底面积为180的有盖盒子? 如果能, 请求出盒子的体积; 如果不能, 请说明理由.



图1



图2

7. 用适当的方法解下列方程：

(1) $(x-1)^2 = (2x+3)^2$

(2) $x^2 + 4x - 5 = 0$

(3) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

(4) $4(2x+1)^2 - 4(2x+1) + 1 = 0$.

8. 按指定的方法解方程：

(1) $9(x-1)^2 - 5 = 0$ (直接开平方法)

(2) $2x^2 - 4x - 8 = 0$ (配方法)

(3) $6x^2 - 5x - 2 = 0$ (公式法)

(4) $(x+1)^2 = 2x+2$ (因式分解法)

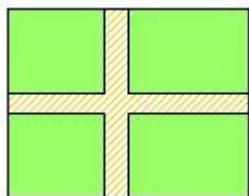
9. 已知于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + 1 - m = 0$.

(1) 请选取一个你喜欢的 m 的值代入方程，是方程有两个不相等的实数根，并说明它的正确性.

(2) 设 x_1, x_2 是 (1) 中所得方程的两个根，求 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值.

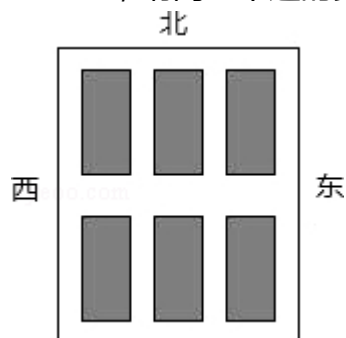
10. 若 α 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根，求代数式 $2000\alpha^3 + 4000\alpha^2$ 的值.

11. 如图是一块长方形的土地，长 50m，宽 48m，由南到北，由东到西各修筑一条同样宽度的彩石路，要使空地的面积是 2208m^2 ，求小路的宽.

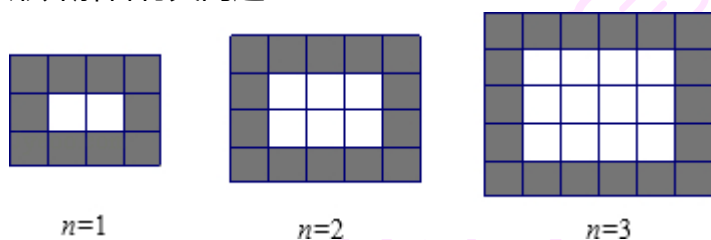


12. 一条长为 12cm 的铁丝被剪成两段，每段均折成正方形，若两个正方形的面积和等于 5cm^2 ，求这两个正方形的周长分别是多少？

13. 如图是中北居民小区某一休闲场所的平面示意图. 图中阴影部分是草坪和健身器材安装区, 空白部分是用做散步的道路. 东西方向的一条主干道较宽, 其余道路的宽度相等, 主干道的宽度是其余道路的宽度的 2 倍. 这块休闲场所南北长 18m, 东西宽 16m. 已知这休闲场地中草坪和健身器材安装区的面积为 168m^2 , 请问主干道的宽度为多少米?



14. 如图, 用同样规格的黑白两色的正方形瓷砖铺设矩形地面, 请观察下列图形并解答有关问题.



(1) 在第 n 个图中, 第一横行共 _____ 块瓷砖, 第一竖列共有 _____ 块瓷砖; (均用含 n 的代数式表示)

(2) 设铺设地面所用瓷砖的总块数为 y , 请写出 y 与 (1) 中的 n 的函数;

(3) 按上述铺设方案, 铺一块这样的矩形地面共用了 506 块瓷砖, 求此时 n 的值;

(4) 黑瓷砖每块 4 元, 白瓷砖每块 3 元, 问题 (3) 中, 共花多少元购买瓷砖;

(5) 是否存在黑瓷砖与白瓷砖块数相等的情形请通过计算说明理由.

15. 教材或资料会出现这样的题目: 把方程 $\frac{1}{2}x^2 - x = 2$ 化为一元二次方程的一般形式, 并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

现在把上面的题目改编为下面的两个小题, 请解答.

(1) 下列式子中, 有哪几个是方程 $\frac{1}{2}x^2 - x = 2$ 所化的一元二次方程的一般形式?

(答案只写序号)

① $\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 0$; ② $-\frac{1}{2}x^2 + x + 2 = 0$; ③ $x^2 - 2x = 4$; ④ $-x^2 + 2x + 4 = 0$; ⑤ $\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} = 0$.

(2) 方程 $\frac{1}{2}x^2 - x = 2$ 化为一元二次方程的一般形式，它的二次项系数，一次项系数，常数项之间具有什么关系？

16. (1) 计算： $(x+3)^2 - (x-1)(x-2)$

(2) 化简： $\frac{x^2+2x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2}$

(3) 解方程： $x^2 - 2x - 3 = 0$

17. (1) 请从三个代数式 $4x^2 - y^2$, $2xy + y^2$, $4x^2 + 4xy + y^2$ 中，任选两个构造一个分式，并化简该分式；

(2) 解方程： $(x-1)^2 + 2x - 3 = 0$.

18. 在实数范围内定义运算“ \oplus ”，其法则为： $a \oplus b = a^2 - b^2$ ，求方程 $(4 \oplus 3) \oplus x = 24$ 的解 .

19. 解方程： $x^2 - 6x + 9 = (5 - 2x)^2$.

20. 解一元二次方程： $(x-1)^2 = 4$.

21. 解方程： $x(x+8) = 16$.

22. 解方程： $x^2 - 6x - 6 = 0$.

23. (1) 计算： $(-1)^2 \div \frac{1}{2} + (7-3) \times \frac{3}{4} - (\frac{1}{2})^0$;

(2) 计算： $[(2x-y)(2x+y) + y(y-6x)] \div 2x$;

(3) 解方程： $x^2 - 6x + 1 = 0$.

24. 解方程： $x^2 + 4x + 2 = 0$.

25. 观察下列方程及其解的特征：

(1) $x + \frac{1}{x} = 2$ 的解为 $x_1 = x_2 = 1$ ；

(2) $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ 的解为 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ ；

(3) $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ 的解为 $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$ ；

...

解答下列问题：

(1) 请猜想：方程 $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$ 的解为_____；

(2) 请猜想：关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = \frac{a+1}{a}$ 的解为 $x_1 = a, x_2 = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)；

(3) 下面以解方程 $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$ 为例，验证 (1) 中猜想结论的正确性。

解：原方程可化为 $5x^2 - 26x = -5$ 。

(下面请大家用配方法写出解此方程的详细过程)

26. 用配方法解方程： $6x^2 - x - 12 = 0$ 。

27. 解方程： $x^2 - 6x - 2 = 0$ 。

28. 用配方法解方程： $2x^2 + 1 = 3x$ 。

29. 解方程：

(1) $\frac{3}{x-1} = \frac{4}{x}$ ；

(2) $x^2 + 2x - 2 = 0$ 。

30. 解方程： $x^2 + 4x - 1 = 0$ 。

31. 用配方法解方程： $2x^2 - x - 1 = 0$ 。

32. (1) 解方程： $2x^2 - 2x - 1 = 0$ ；

(2) 先化简后求值： $(\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{2}{x+2}) \div \frac{x-5}{x+2}$ ，其中 $x = \sqrt{2} + 2$ 。

33. (1) 解不等式： $\frac{x-1}{2}+1 \geq x$ ，并将解集表示在数轴上.

(2) 解方程： $4x^2+8x+1=0$.

34. 用配方法解方程： $x^2-4x+1=0$

35. 解方程： $x^2+4x-5=0$

36. 解方程： $\frac{6}{x+2}-\frac{1}{2-x}=1$.

37. 解方程： $x^3-2x^2-3x=0$.

38. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k+4)x^2+3x+k^2+3k-4=0$ 的一个根为 0，求 k 的值.

39. 已知关于 x 的一元二次 $2x^2-(2m^2-1)x-m-4=0$ 有一个实数根为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求 m 的值；

(2) 求已知方程所有不同的可能根的平方和.

40. 解方程或不等式组；

$$(1) \begin{cases} 2x-1 > 1 \\ x-2 \leq \frac{x-1}{2} \end{cases};$$

$$(2) \frac{1}{x} = \frac{x}{3x-2}.$$

41. 解方程： $\frac{40}{x}-\frac{40}{x+2}=1$

42. 解方程： $\frac{x}{x-1}-\frac{x+2}{x}=\frac{3}{2}$

43. 解方程： $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+\frac{2x-1}{x-1}=0$

44. 解方程： $\frac{1}{x-2}+1=\frac{4}{x^2-4}$

45. 已知方程 $\frac{1}{x-1}=1$ 的解是 k ，求关于 x 的方程 $x^2+kx=0$ 的解。

46. 解方程： $\frac{1}{1-x}-1=\frac{3x-x^2}{1-x^2}$ 。

47. 解方程： $x+\frac{2}{x}=3$

48. 解方程或方程组。在本题中将给你两种选择，你可以根据自己的学习情况任意选择一道适合于你的试题解答，如果两题都给出解答，阅卷时将不论对错只选择第一道题的解答评分。

第一题： $\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{5x}{x+1}+6=0$

第二题： $\begin{cases} 4x^2-9y^2=15 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$ 。

49. 解方程： $\frac{6}{(x+1)(x-1)}-\frac{3}{x-1}=1$ 。

50. 解方程： $\frac{x+1}{x-1}-\frac{3x-3}{x+1}=2$

51. 已知 $x=3$ 是方程 $\frac{10}{x+2}+\frac{k}{x}=1$ 的一个根，求 k 的值和方程其余的根。

52. 解方程： $\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-1}=1$

53. 解方程： $\frac{6}{x^2-1}-\frac{3}{x-1}=1$

54. 解方程： $\frac{(x-1)^2}{x^2}-\frac{x-1}{x}-2=0$ 。

55. 解方程： $\frac{2(x+1)^2}{x^2}+\frac{x+1}{x}-6=0$ 。

56. 解方程： $\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{5}{2}$

57. 解方程： $x^2 - \frac{12}{x^2 - 2x} = 2x - 1$

58. 解分式方程： $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - \frac{7x-7}{2x} + 3 = 0$

59. 用换元法解方程： $x^2 + 3x - \frac{20}{x^2 + 3x} = -1$.

60. 探究下表中的奥秘，并完成填空：

一元二次方程	两个根	二次三项式因式分解
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x_1 = 1, x_2 = 1$	$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$
$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x_1 = 1, x_2 = 2$	$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
$3x^2 + x - 2 = 0$	$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -1$	$3x^2 + x - 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1)$
$2x^2 + 5x + 2 = 0$	$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2$	$2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)$
$4x^2 + 13x + 3 = 0$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}},$ $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$4x^2 + 13x + 3 = 4\left(x + \underline{\hspace{2cm}}\right)$ $\left(x + \underline{\hspace{2cm}}\right)$

将你发现的结论一般化，并写出来。

61. 附加题：（如果你的全卷得分不足 150 分，则本题的得分将计入总分，但计入总分后全卷不得超过 150 分）

（1）解方程 $x(x-1) = 2$ 。

有学生给出如下解法：

$$\begin{aligned} \because x(x-1) = 2 &= 1 \times 2 = (-1) \times (-2), \\ \therefore \begin{cases} x=1 \\ x-1=2 \end{cases} &\text{或} \begin{cases} x=2 \\ x-1=1 \end{cases} &\text{或} \begin{cases} x=-1 \\ x-1=-2 \end{cases} &\text{或} \begin{cases} x=-2 \\ x-1=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

解上面第一、四方程组，无解；解第二、三方程组，得 $x=2$ 或 $x=-1$ 。

$\therefore x=2$ 或 $x=-1$ 。

请问：这个解法对吗？试说明你的理由。

（2）在平面几何中，我们可以证明：周长一定的多边形中，正多边形面积最大。

使用上边的事实，解答下面的问题：

用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的五根木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 求能够围成的三角形的最大面积.

62. 解方程: $\frac{x}{x-2} - 2 = \frac{3(x-2)}{x}$

63. 已知下列 n (n 为正整数) 个关于 x 的一元二次方程: ① $x^2 - 1 = 0$, ② $x^2 + x - 2 = 0$, ③ $x^2 + 2x - 3 = 0$, ... (n) $x^2 + (n-1)x - n = 0$.

(1) 请解上述一元二次方程①、②、③、(n);

(2) 请你指出这 n 个方程的根具有什么共同特点, 写出一条即可.

64. k 取什么值时, 方程组: $\begin{cases} x - y - k = 0 \\ x^2 - 8y = 0 \end{cases}$ 有一个实数解并求出这时方程组的解.

65. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2(k+1)x + k - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 是否存在实数 k , 使 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ 成立? 若存在, 请求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

66. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + k(x-1) - 1 = 0$

(1) 求证: 无论 k 取何值, 这个方程总有两个实数根;

(2) 是否存在正数 k , 使方程的两个实数根 x_1, x_2 满足 $x_1^2 + kx_1 + 2x_1x_2 = 7 - 3(x_1 + x_2)$? 若存在, 试求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

67. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$

(1) 当 m 取值范围是多少时, 方程有两个实数根;

(2) 为 m 选取一个合适的整数, 使方程有两个不相等的实数根, 并求出这两个实数根.

68. 已知一元二次方程 $x^2 - 3x + m - 1 = 0$.

(1) 若方程有两个不相等的实数根, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若方程有两个相等的实数根, 求此时方程的根.

69. 已知一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$.

- (1) 若方程有两个实数根，求 m 的范围；
- (2) 若方程的两个实数根为 x_1, x_2 ，且 $x_1 + 3x_2 = 3$ ，求 m 的值.

70. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + p - 1 = 0$ 有两实数根 x_1, x_2 ,

- (1) 求 p 的取值范围；
- (2) 若 $[2 + x_1(1 - x_1)][2 + x_2(1 - x_2)] = 9$ ，求 p 的值.

71. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 = 2(1 - m)x - m^2$ 的两实数根为 x_1, x_2

- (1) 求 m 的取值范围；
- (2) 设 $y = x_1 + x_2$ ，当 y 取得最小值时，求相应 m 的值，并求出最小值.

72. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x - k^2 = 0$ (k 为常数).

- (1) 求证：方程有两个不相等的实数根；
- (2) 设 x_1, x_2 为方程的两个实数根，且 $x_1 + 2x_2 = 14$ ，试求出方程的两个实数根和 k 的值.

相关链接：

若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两实数根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

73. 从甲、乙两题中选做一题. 如果两题都做，只以甲题计分.

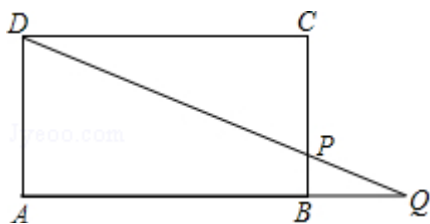
题甲：若关于 x 一元二次方程 $x^2 - 2(2 - k)x + k^2 + 12 = 0$ 有实数根 α, β .

- (1) 求实数 k 的取值范围；
- (2) 设 $t = \frac{\alpha + \beta}{k}$ ，求 t 的最小值.

题乙：如图所示，在矩形 $ABCD$ 中， P 是 BC 边上一点，连接 DP 并延长，交 AB 的延长线于点 Q .

- (1) 若 $\frac{BP}{PC} = \frac{1}{3}$ ，求 $\frac{AB}{AQ}$ 的值；
- (2) 若点 P 为 BC 边上的任意一点，求证： $\frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} =$.

我选做的是_____题.



74. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，三边分别为 a 、 b 、 c ，其中 $a=5$ ，若关于 x 的方程 $x^2 + (b+2)x + 6 - b = 0$ 有两个相等的实数根，求 $\triangle ABC$ 的周长。

75. 已知方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的一个根为 -2 ，求方程的另一根及 m 的值。

76. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 的两个实数根，且 $x_1 + 2x_2 = 3 - \sqrt{2}$ 。

(1) 求 x_1, x_2 及 a 的值；

(2) 求 $x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_1 + x_2$ 的值。

77. 设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - 4x + k + 1 = 0$ 的两个实数根。试问：是否存在实数 k ，使得 $x_1 \cdot x_2 > x_1 + x_2$ 成立？请说明理由。

(温馨提示：关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，则它的两个实数根是： $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)

78. 已知关于 x 的方程 $kx^2 - 2(k+1)x + k - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根。

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 是否存在实数 k ，使此方程的两个实数根的倒数和等于 0 ？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由。

79. 阅读材料：如果 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，那么有 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ 。这是一元二次方程根与系数的关系，我们利用它可以用来解题，

例 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 6x - 3 = 0$ 的两根，求 $x_1^2 + x_2^2$ 的值。解法可以这样： $\because x_1 + x_2 = -6$ ， $x_1 x_2 = -3$ 则 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-6)^2 - 2 \times (-3) = 42$ 。

请你根据以上解法解答下题：已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的两根，求：

(1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值；

(2) $(x_1 - x_2)^2$ 的值。

80. (1) 解方程求出两个解 x_1 、 x_2 ，并计算两个解的和与积，填入下表

方程	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$9x^2 - 2 = 0$				
$2x^2 - 3x = 0$				
$x^2 - 3x + 2 = 0$				
关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数， 且 $a \neq 0$ ， $b^2 - 4ac \geq 0$)	$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$		

(2) 观察表格中方程两个解的和、两个解的积与原方程的系数之间的关系有什么规律？写出你的结论。

81. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 的两个实数根，且 $x_1^2 x_2^2 - x_1 - x_2 = 115$ 。

- (1) 求 k 的值；
(2) 求 $x_1^2 + x_2^2 + 8$ 的值。

82. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 2 = 0$...①

- (1) 若 $x = -1$ 是方程①的一个根，求 m 的值和方程①的另一根；
(2) 对于任意实数 m ，判断方程①的根的情况，并说明理由。

83. 设 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + a^2 + 4a - 2 = 0$ 的两实根，当 a 为何值时， $x_1^2 + x_2^2$ 有最小值？最小值是多少？

84. (1) 解分式方程： $\frac{2x}{2x-3} - \frac{1}{2x+3} = 1$

- (2) 如果 -1 是一元二次方程 $x^2 + bx - 3 = 0$ 的一个根，求它的另一根。

85. 阅读并解答：

①方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的根是 $x_1 = x_2 = 1$ ，则有 $x_1 + x_2 = 2$ ， $x_1 x_2 = 1$ 。

②方程 $2x^2 - x - 2 = 0$ 的根是 $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ， $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ ，则有 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ ， $x_1 x_2 = -1$ 。

③方程 $3x^2 + 4x - 7 = 0$ 的根是 $x_1 = -\frac{7}{3}$ ， $x_2 = 1$ ，则有 $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{7}{3}$ 。

一元二次方程 200 题（含解析）——朱韬老师共享

(1) 根据以上①②③请你猜想 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 有两个实数根为 x_1, x_2 , 那么 x_1, x_2 与系数 a, b, c 有什么关系? 请写出你的猜想并证明你的猜想;

(2) 利用你的猜想结论, 解决下面的问题:

已知关于 x 的方程 $x^2 + (2k+1)x + k^2 - 2 = 0$ 有实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 11$, 求 k 的值.

86. 已知 $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx-40=0$ 的一个解, 且 $a \neq b$, 求 $\frac{a^2-b^2}{2a-2b}$ 的值.

87. 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 5x - 6 = 0$ 的两根, 求 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ 的值.

88. 已知 a, b 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根, 求代数式 $(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(ab^2 - a^2b)$ 的值.

89. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (m-1)x - 2m^2 + m = 0$ (m 为实数) 有两个实数根 x_1, x_2 .

(1) 当 m 为何值时, $x_1 \neq x_2$;

(2) 若 $x_1^2 + x_2^2 = 2$, 求 m 的值.

90. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(m-2)x + m^2 = 0$. 问是否存在实数 m , 使方程的两个实数根的平方和等于 56, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

91. 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - (m-1)x + 2m = 0$ 的两根, 且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 8$, 求 m 的值.

92. 先阅读, 再填空解答:

方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的根是: $x_1 = -1, x_2 = 4$, 则 $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -4$;

方程 $3x^2 + 10x + 8 = 0$ 的根是: $x_1 = -2, x_2 = -\frac{4}{3}$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{10}{3}, x_1 x_2 = \frac{8}{3}$.

(1) 方程 $2x^2 + x - 3 = 0$ 的根是: $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}, x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, 则 $x_1 + x_2 = \underline{\hspace{2cm}}, x_1 x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$, 且 a, b, c 为常数) 的两个实数根, 那么 x_1+x_2, x_1x_2 与系数 a, b, c 的关系是:

$x_1+x_2=$ _____, $x_1x_2=$ _____;

(3) 如果 x_1, x_2 是方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根, 根据(2)所得结论, 求 $x_1^2+x_2^2$ 的值.

93. 设 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - (m-1)x - m = 0$ ($m \neq 0$) 的两个根, 且满足 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{3}$, 求 m 的值.

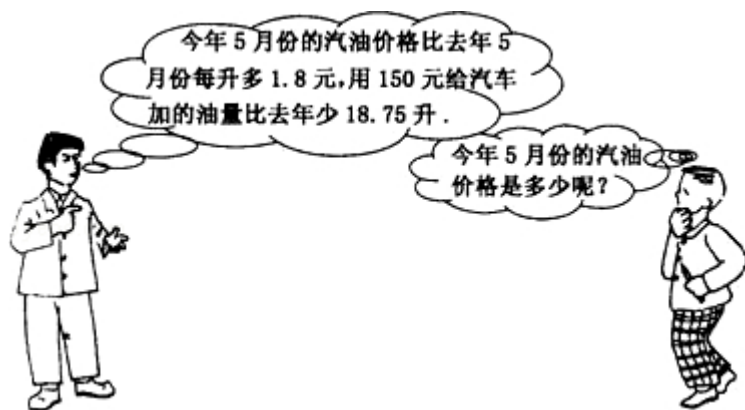
94. 为了营造出“城在林中、道在绿中、房在园中、人在景中”的城市新景象, 市园林局计划在一定时间内完成 100 万亩绿化任务. 现为配合东部城区大开发的需要, 市政府在调研后将原定计划调整为: 绿化面积在原计划的基础上增加 20%, 并且需提前 1 年完成. 园林局经测算知, 要完成新的计划, 平均每年的绿化面积必须比原计划平均每年多 10 万亩. 求原计划平均每年的绿化面积.

95. 近年来, 由于受国际石油市场的影响, 润滑油价格不断上涨. 某种润滑油今年 5 月份的价格比去年 5 月份每桶多 2 元, 客户小王用了 120 元购买这种润滑油, 比去年 5 月份恰好少买了 2 桶, 问今年 5 月份这种润滑油每桶的价格是多少元?

96. 我市某县要在 2006 年通过自治区“两基”达标验收, 县内 - 初级中学有 360 套旧课桌椅需要修理, 现有甲、乙两个木工小组都想承接这项修理业务. 经商谈知: 甲小组单独修理这批桌椅比乙小组多用 10 天; 乙小组每天比甲小组多修理 6 套. 求甲、乙两小组每天各修理桌椅多少套?

97. 甲、乙两地间铁路长 2400 千米, 经技术改造后, 列车实现了提速. 提速后比提速前速度增加 20 千米/时, 列车从甲地到乙地行驶时间减少 4 小时. 已知列车在现有条件下安全行驶的速度不超过 140 千米/时. 请你用学过的数学知识说明这条铁路在现有条件下是否还可以再次提速?

98. 近年来, 由于受国际石油市场的影响, 汽油价格不断上涨, 请你根据下面的信息, 帮小明计算今年 5 月份汽油的价格.



99. “南友高速公路”开通后,南宁至崇左的路程为 120 千米,本市某单位职工在星期一早上分别乘甲、乙两辆汽车从南宁同时赶往崇左上班,因为甲车每小时比乙车少走 20 千米,所以甲车比乙车晚 12 分钟到达崇左,问甲、乙两车平均每小时各走多少千米?

100. 今年五月,某工程队(有甲、乙两组)承包人民路中段的路基改造工程,规定若干天内完成.

(1) 已知甲组单独完成这项工程所需时间比规定时间的 2 倍多 4 天,乙组单独完成这项工程所需时间比规定时间的 2 倍少 16 天.如果甲、乙两组合做 24 天完成,那么甲、乙两组合做能否在规定时间内完成?

(2) 在实际工作中,甲、乙两组合做完成这项工程的 $\frac{5}{6}$ 后,工程队又承包了东段的改造工程,需抽调一组过去,从按时完成中段任务考虑,你认为抽调哪一组最好?请说明理由.

101. 据报道,徐州至连云港铁路的提速改造工程已于 2005 年 4 月 20 日全面开工建设,工程完成后,旅客列车的平均速度比现在提高 50 千米/时,运行时间将缩短 38 分钟,徐州站到连云港之间的行程约为 190 千米,那么提速后旅客列车的平均速度是多少?

102. 去年年底,东南亚地区发生海啸,给当地人民带来了极大的灾难,听到这个消息,某校初中毕业班中的 30 名同学踊跃捐款,支援灾区人民,其中女同学共捐款 150 元,男同学共捐款 120 元,男同学比女同学平均每人少捐款 2 元,男、女同学平均每人各捐款多少元?

103. A、B 两地的路程是 12 千米. 甲从 A 地出发步行前往 B 地, 20 分钟后, 乙从 B 地出发骑车前往 A 地, 乙到达 A 地后停留了 40 分钟, 然后按原路以原来速度骑车返回, 结果甲、乙两人同时到达 B 地. 如果乙骑车比甲步行每小时多走 8 千米, 求甲、乙两人的速度.

104. 某中学库存 960 套旧桌凳, 修理后捐助贫困山区学校现有甲、乙两个木工小组都想承揽这项业务. 经协商后得知: 甲小组单独修理这批桌凳比乙小组多用 20 天; 乙小组每天比甲小组多修 8 套; 学校每天需付甲小组修理费 80 元, 付乙小组 120 元.

(1) 求甲、乙两个木工小组每天各修桌凳多少套?

(2) 在修理桌凳过程中, 学校要委派一名维修工进行质量监督, 并由学校负担他每天 10 元的生活补助. 现有以下三种修理方案供选择: ①由甲单独修理; ②由乙单独修理; ③由甲、乙共同合作修理. 你认为哪种方案既省时又省钱? 试比较说明.

105. 某车间要加工 170 个零件, 在加工完 90 个以后改进了操作方法, 每天多加工 10 个, 一共用了 5 天完成了任务. 改进操作方法后每天加工的零件个数为个.

106. 为了确保我市国家级卫生城市的称号, 市里对主要街道的排污水沟进行改造. 其中光明施工队承包了一段要开挖 96 米长的排污水沟, 开工后每天比原计划多挖 2 米, 结果提前 4 天完成任务, 问原计划每天挖多少米?

107. 就要毕业了, 几位要好的同学准备中考后结伴到某地游玩, 预计共需费用 1 200 元, 后来又有 2 名同学参加进来, 但总费用不变, 于是每人可少分摊 30 元, 试求原计划结伴游玩的人数.

108. 某校初中三年级 270 名师生计划集体外出一日游, 乘车往返, 经与客运公司联系, 他们有座位数不同的中巴车和大客车两种车型可供选择, 每辆大客车比中巴车多 15 个座位, 学校根据中巴车和大客车的座位数计算后得知, 如果租用中巴车若干辆, 师生刚好坐满全部座位; 如果租用大客车, 不仅少用一辆, 而且师生坐完后还多 30 个座位.

(1) 求中巴车和大客车各有多少个座位?

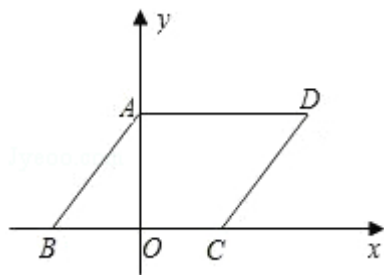
(2) 客运公司为学校这次活动提供的报价是 租用中巴车每辆往返费用 350 元，租用大客车每辆往返费用 400 元，学校在研究租车方案时发现，同时租用两种车，其中大客车比中巴车多租一辆，所需租车费比单独租用一种车型都要便宜，按这种方案需要中巴车和大客车各多少辆？租车费比单独租用中巴车或大客车各少多少元？

109. 如图， $\square ABCD$ 在平面直角坐标系中， $AD=6$ ，若 OA 、 OB 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的两个根，且 $OA > OB$ 。

(1) 求 $\sin \angle ABC$ 的值；

(2) 若 E 为 x 轴上的点，且 $S_{\triangle AOE} = \frac{16}{3}$ ，求经过 D 、 E 两点的直线的解析式，并判断 $\triangle AOE$ 与 $\triangle DAO$ 是否相似？

(3) 若点 M 在平面直角坐标系内，则在直线 AB 上是否存在点 F ，使以 A 、 C 、 F 、 M 为顶点的四边形为菱形？若存在，请直接写出 F 点的坐标；若不存在，请说明理由。



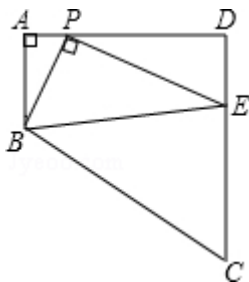
110. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AD = 5$ ， P 是 AD 上一动点（不与 A 、 D 重合）， $PE \perp BP$ ， P 为垂足， PE 交 DC 于点 E 。

(1) $\triangle ABP$ 和 $\triangle DPE$ 是否相似？请说明理由；

(2) 设 $AP = x$ ， $DE = y$ ，求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出 x 的取值范围；

(3) 请你探索在点 P 运动的过程中，四边形 $ABED$ 能否构成矩形？如果能，求出 AP 的长；如果不能，请说明理由；

(4) 请你探索在点 P 的运动过程中， $\triangle BPE$ 能否构成等腰三角形？如果能，求出 AP 的长；如果不能，请说明理由。



111. 在数学活动课时，王倩同学出了这样一道题：“已知 x_1 、 x_2 是方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的两个实数根，求 $x_1^2 + x_2^2$ 的值。”很快，张智同学便给出了如下的解答：“ $\because x_1 + x_2 = 1$ ， $x_1 \cdot x_2 = 1$ ， $\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -1$ 。”

(1) 你对王倩同学出的这道题及张智同学给出的解答是否有不同的看法？若有，请写出你的见解；

(2) 写出一个你喜欢的一元二次方程，并求出 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值。

112. 已知：关于 x 的方程 $x^2 + 4x + a = 0$ 有两个实数根 x_1 、 x_2 ，且 $2x_1 - x_2 = 7$ ，求实数 a 的值。

113. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (4m+1)x + 2m - 1 = 0$ 。

求证：不论 m 为任何实数，方程总有两个不相等的实数根。

114. 已知 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $2x^2 - 2x + 1 - 3m = 0$ 的两个实数根，且 x_1 、 x_2 满足不等式 $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) > 0$ ，求实数 m 的取值范围。

115. 已知 x_1 、 x_2 是方程 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 的两实数根，不解方程求下列各式的值：

(1) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ ；

(2) $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ 。

116. 已知 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $2x^2 - 2x + m + 1 = 0$ 的两个实根。

(1) 求实数 m 的取值范围；

(2) 如果 m 满足不等式 $7 + 4x_1x_2 > x_1^2 + x_2^2$ ，且 m 为整数。求 m 的值。

117. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + 4x + m = 0$

(1) $x = 1$ 是方程的一个根，求方程的另一个根；

(2) 若 x_1 、 x_2 是方程的两个不同的实数根，且 x_1 和 x_2 满足 $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2x_2^2 = 0$ ，求 m 的值。

118. 解方程： $\frac{x}{x+1} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ 。

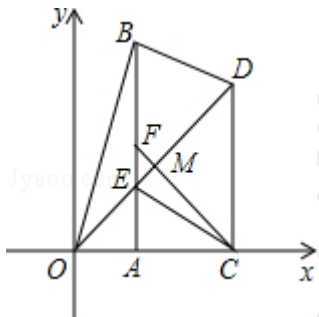
119. 已知 a 、 b 、 c 分别是 $\triangle ABC$ 的三边，其中 $a=1$ ， $c=4$ ，且关于 x 的方程 $x^2 - 4x + b = 0$ 有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状。

120. 已知： $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$ 的两个实数根，第三边 BC 的长为 5。试问： k 取何值时， $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形？

121. 如图，在直角坐标系 xOy 中， $Rt\triangle OAB$ 和 $Rt\triangle OCD$ 的直角顶点 A 、 C 始终在 x 轴的正半轴上， B 、 D 在第一象限内，点 B 在直线 OD 上方， $OC=CD$ ， $OD=2$ ， M 为 OD 的中点， AB 与 OD 相交于 E ，当点 B 位置变化时， $Rt\triangle OAB$ 的面积恒为 $\frac{1}{2}$ 。

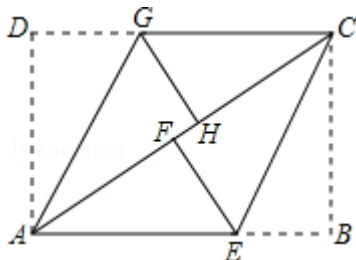
试解决下列问题：

- (1) 点 D 坐标为 ()；
- (2) 设点 B 横坐标为 t ，请把 BD 长表示成关于 t 的函数关系式，并化简；
- (3) 等式 $BO=BD$ 能否成立？为什么？
- (4) 设 CM 与 AB 相交于 F ，当 $\triangle BDE$ 为直角三角形时，判断四边形 $BDCF$ 的形状，并证明你的结论。



122. 如图， $ABCD$ 是矩形纸片，翻折 $\angle B$ ， $\angle D$ ，使 BC ， AD 恰好落在 AC 上。设 F ， H 分别是 B ， D 落在 AC 上的两点， E ， G 分别是折痕 CE ， AG 与 AB ， CD 的交点。

- (1) 求证：四边形 $AECG$ 是平行四边形；
- (2) 若 $AB=4\text{cm}$ ， $BC=3\text{cm}$ ，求线段 EF 的长。



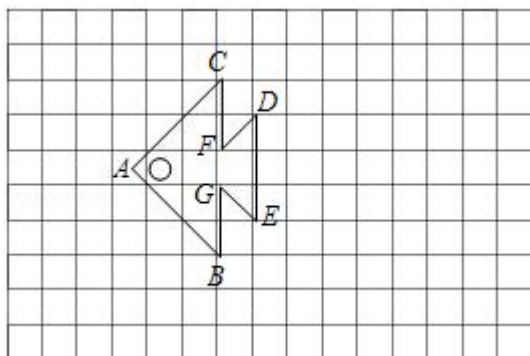
123. 下面方格中是美丽可爱的小金鱼，在方格中分别画出原图形向右平移五个格和把原图形以点 A 为旋转中心顺时针方向旋转 90° 得到的小金鱼(只要求画出平移、旋转后的图形，不要求写出作图步骤和过程).

若每个小方格的边长均为 1cm，则小金鱼所占的面积为_____ cm^2 . (直接写出结果)

已知关于 x 的方程 $kx^2 + 2(k+1)x + (k-1) = 0$

(1) 若此方程有两个实数根 (包括重根的情况)，求 k 的取值范围；

(2) k 为何值时，此方程的两根之和等于两根之积 .



124. 本题为选做题，从甲、乙两题中选做一题即可，如果两题都做，只以甲题计分 .

甲题：关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k-3)x + k^2 = 0$ 有两个不相等的实数根 α 、 β .

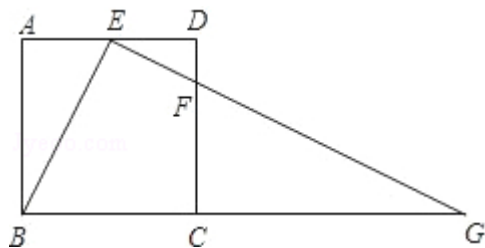
(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若 $\alpha + \beta + \alpha\beta = 6$ ，求 $(\alpha - \beta)^2 + 3\alpha\beta - 5$ 的值 .

乙题：如图，在正方形 ABCD 中，E、F 分别是边 AD、CD 上的点， $AE = ED$ ， $DF = \frac{1}{4}DC$ ，连接 EF 并延长交 BC 的延长线于点 G

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle DEF$ ；

(2) 若正方形的边长为 4，求 BG 的长 .

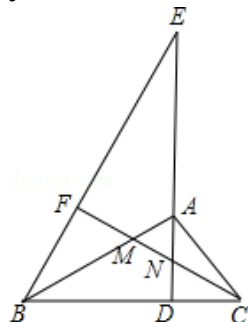


125. 已知, 如图, AD 为 $Rt\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高, 点 E 为 DA 延长线上一点, 连接 BE , 过点 C 作 $CF \perp BE$ 于点 F , 交 AB 、 AD 于 M 、 N 两点.

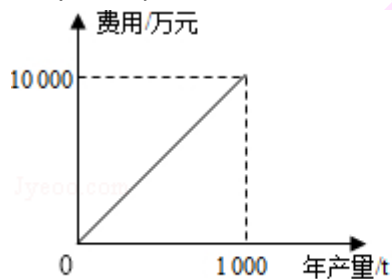
(1) 若线段 AM 、 AN 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2mx + n^2 - mn + \frac{5}{4}m^2 = 0$ 的两个实数根, 求证: $AM = AN$;

(2) 若 $AN = \frac{15}{8}$, $DN = \frac{9}{8}$, 求 DE 的长;

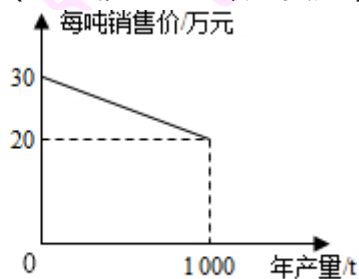
(3) 若在 (1) 的条件下, $S_{\triangle AMN} : S_{\triangle ABE} = 9 : 64$, 且线段 BF 与 EF 的长是关于 y 的一元二次方程 $5y^2 - 16ky + 10k^2 + 5 = 0$ 的两个实数根, 求 BC 的长.



126. 某种产品的年产量不超过 1 000t, 该产品的年产量 (t) 与费用 (万元) 之间的函数关系如图 (1); 该产品的年销售量 (t) 与每吨销售价 (万元) 之间的函数关系如图 (2) 若生产出的产品都能在当年销售完, 则年产量为多少吨时, 当年可获得 7500 万元毛利润? (毛利润 = 销售额 - 费用)



(1)



(2)

127. 某批发商以每件 50 元的价格购进 800 件 T 恤, 第一个月以单价 80 元销售, 售出了 200 件; 第二个月如果单价不变, 预计仍可售出 200 件, 批发商为增加销售量, 决定降价销售, 根据市场调查, 单价每降低 1 元, 可多售出 10 件, 但最低单价应高于购进的价格; 第二个月结束后, 批发商将对剩余的 T 恤一次性清仓销售, 清仓时单价为 40 元, 设第二个月单价降低 x 元.

(1) 填表: (不需化简)

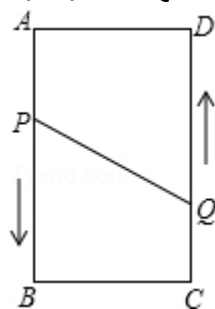
时间	第一个月	第二个月	清仓时
单价 (元)	80		40
销售量 (件)	200		

(2) 如果批发商希望通过销售这批 T 恤获利 9000 元，那么第二个月的单价应是多少元？

128. 如图，A、B、C、D 为矩形的四个顶点， $AB=16\text{cm}$ ， $AD=6\text{cm}$ ，动点 P、Q 分别从点 A、C 同时出发，点 P 以 3cm/s 的速度向点 B 移动，一直到达 B 为止，点 Q 以 2cm/s 的速度向 D 移动。

(1) P、Q 两点从出发开始到几秒？四边形 PBCQ 的面积为 33cm^2 ；

(2) P、Q 两点从出发开始到几秒时？点 P 和点 Q 的距离是 10cm 。

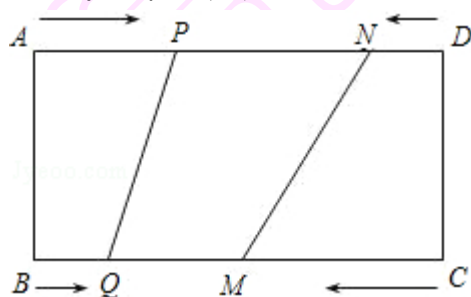


129. 如图，在矩形 ABCD 中， $BC=20\text{cm}$ ，P、Q、M、N 分别从 A、B、C、D 出发沿 AD、BC、CB、DA 方向在矩形的边上同时运动，当有一个点先到达所在运动边的另一个端点时，运动即停止。已知在相同时间内，若 $BQ=x\text{cm}$ ($x \neq 0$)，则 $AP=2x\text{cm}$ ， $CM=3x\text{cm}$ ， $DN=x^2\text{cm}$ 。

(1) 当 x 为何值时，以 PQ、MN 为两边，以矩形的边 (AD 或 BC) 的一部分为第三边构成一个三角形；

(2) 当 x 为何值时，以 P、Q、M、N 为顶点的四边形是平行四边形；

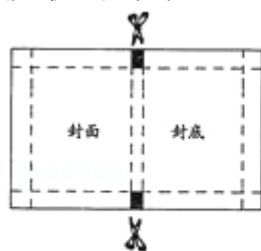
(3) 以 P、Q、M、N 为顶点的四边形能否为等腰梯形？如果能，求 x 的值；如果不能，请说明理由。



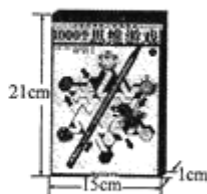
130. 如图 1 的矩形包书纸示意图中，虚线是折痕，阴影是裁剪掉的部分，四角均为大小相同的正方形，正方形的边长为折叠进去的宽度。

(1) 如图 2,《思维游戏》这本书的长为 21cm, 宽为 15cm, 厚为 1cm, 现有一张面积为 875cm^2 的矩形纸包好了这本书, 展开后如图 1 所示. 求折叠进去的宽度;

(2) 若有一张长为 60cm, 宽为 50cm 的矩形包书纸, 包 2 本如图 2 中的书, 书的边缘与包书纸的边缘平行, 裁剪包好展开后均如图 1 所示. 问折叠进去的宽度最大是多少?



(图 1)



(图 2)

解析：

填空：

1. 解：方程化为 $x^2 - 3x - 4 = 0$,

所以 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$. 故答案为 25.

2. 解： $x(x - 1) = 0$,

$x = 0$, $x - 1 = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, 故答案为： $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

3. 解：把 $x = 2$ 代入方程 $x^2 - x - a^2 + 5 = 0$ 得： $4 - 2 - a^2 + 5 = 0$,

解得： $a = \pm\sqrt{7}$. 故答案为： $\pm\sqrt{7}$.

4. 解：据题意得， $m^2 = 9$, $\therefore m = \pm 3$.

5. 解：根据题意得 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) \geq 0$, 解得 $m \geq -1$.

故答案为 $m \geq -1$.

6. 解： $\because a, b$ 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根，

$\therefore ab = -1$, $a + b = 2$,

$\therefore (a - b)(a + b - 2) + ab = (a - b)(2 - 2) + ab$,

$= 0 + ab$, $= -1$, 故答案为： -1 .

7. 解：设每年绿地面积平均每年的增长率为 x , 由题意得：

$200(1 + x)^2 = 242$,

解得： $x_1 = 10\%$, $x_2 = -210\%$ (舍去).

答：每年绿地面积平均每年的增长率为 10% . 故答案为： 10% .

8. 解：设正方形的边长为 x , 根据题意得： $x^2 - 3x = 54$,

解得 $x = 9$ 或 -6 (不合题意, 舍去). 故这块钢板的面积是 $x^2 = 9 \times 9 = 81 \text{cm}^2$.

9. 解： $\because 2x^2 + 4x + 1 = 0$, $\therefore 2x^2 + 4x = -1$, $\therefore x^2 + 2x = -\frac{1}{2}$,

$\therefore x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1$, $\therefore (x + 1)^2 = \frac{1}{2}$, 故答案为 $(x + 1)^2 = \frac{1}{2}$.

一元二次方程 200 题（含解析）——解析

10. 解： $x^2 = -8x - 15$, $x^2 + 8x + 15 = 0$,
 $b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 1 \times 15 = 4$,
 $x = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2 \times 1}$, $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, 故答案为： 4 , -3 , -5 .

11. 解：设方程另一个根为 x_1 ,
根据题意得 $x_1 + (-1) = -\frac{-5}{3}$, 解得 $x_1 = \frac{8}{3}$
而 $x_1 \cdot (-1) = \frac{k}{3}$,
所以 $\frac{8}{3} \times (-1) = \frac{k}{3}$, 解得 $k = -8$. 故答案为 $\frac{8}{3}$, -8 .

12. 解： $\because -1 + 2 = 1$, $(-1) \times 2 = -2$,
 \therefore 以 $-1, 2$ 为根的一元二次方程可以是 $x^2 - x - 2 = 0$ (答案不唯一).
故答案为： $x^2 - x - 2 = 0$ (答案不唯一).

13. 解：设一直角边长为 $x\text{cm}$, 根据勾股定理得
 $(14 - x)^2 + x^2 = 10^2$ 解之得, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$ 答：两直角边长分别为 6cm , 8cm .

14. 解：把 n 代入方程得到 $n^2 + mn + 2n = 0$,
将其变形为 $n(m + n + 2) = 0$, 因为 $n \neq 0$ 所以解得 $m + n = -2$.

15. 解：把 $x = -3$ 代入方程可得： $(-3)^2 - 3p + 3 = 0$, 解得 $p = 4$

16. 解 根据一元二次方程的解得定义 把 $x = 1$ 代入方程 $x^2 + x + c = 0$ 得到 $2 + c = 0$,
解得 $c = -2$ 则 $c^2 = 2^2 = 4$ 若 $x = 1$ 是一元二次方程 $x^2 + x + c = 0$ 的一个解 则 $c^2 = 4$.
故本题答案为则 $c^2 = 4$.

17. 解：把 $x = 1$ 代入方程得： $2 + k - 1 = 0$, 解方程得 $k = -1$. 故答案为： 1

18. 解：把 $x = 1$ 代入方程可得： $1 - 5 + m = 0$, 解得 $m = 4$.

19. 解：根据题意得： $a + 1 - 2 = 0$ 解得 $a = 1$

20. 解：根据题意得： $2 - a - a^2 = 0$ 解得 $a = -2$ 或 1 . 故答案为： -2 或 1 .

一元二次方程 200 题（含解析）——解析

21. 解：把 $x=0$ 代入方程 $(m-2)x^2+3x+m^2+2m-8=0$ ，
可得 $m^2+2m-8=0$ ，解得 $m=2$ 或 -4 ，
当 $m=2$ 时，方程为 $3x=0$ ，
当 $m=-4$ 时，方程为 $-6x^2+3x=0$ ，满足条件，故答案为：2 或 -4 。

22. 解：解方程 $x^2-x-2=0$ 得： $x=2$ 或 -1 ；
把 $x=2$ 或 -1 分别代入方程 $\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x+a}$ ，
当 $x=2$ 时 $x-2=0$ ，方程不成立；
当 $x=-1$ 时，得到 $\frac{1}{-1-2}=\frac{2}{-1+a}$ ，解得 $a=-5$ 。

23. 解： $\because x$ 是一元二次方程 $x^2+3x-1=0$ 的实数根，
 $\therefore x^2+3x=1$ ，
 $\therefore \frac{x-3}{3x^2-6x} \div (x+2-\frac{5}{x-2})$
 $= \frac{x-3}{3x(x-2)} \div \frac{x^2-9}{x-2}$
 $= \frac{x-3}{3x(x-2)} \cdot \frac{x-2}{(x+3)(x-3)}$
 $= \frac{1}{3(x^2+3x)}$
 $= \frac{1}{3}$ 。

24. 解：把 $x=1$ 代入方程 $2x^2-kx+1=0$ ，
得 $2-k+1=0$ ，即 $k=3$ 。

25. 解：把 $x=-1$ 代入方程可得： $1-m+1=0$ ，解得 $m=2$ 。故填 2。

26. 解： $\frac{a^2-b^2}{2a-2b} = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{2(a-b)} = \frac{(a+b)}{2}$ ，
将 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx-10=0$ 中可得 $a+b-10=0$ ，
解得 $a+b=10$ 则 $\frac{(a+b)}{2}=5$ ，

27. 解：把 $x=2$ 代入方程可以得到： $4+2m-6=0$ ，解得： $m=1$

一元二次方程 200 题（含解析）——解析

28. 解：把 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx-2=0$ ，可得： $a+b-2=0$ ，解得： $a+b=2$ 。

29. 解：把 $x=-4$ 代入方程可得： $32-28-k=0$ ，解得 $k=4$ 。

30. 解： $2x^2-6=0$ ， $2x^2=6$ ， $x^2=3$ ， $x=\pm\sqrt{3}$ 。

31. 解：移项，得 $x^2=2-1$ ，合并，得 $x^2=1$ ，开方，得 $x=\pm 1$ 。

32. 解： $(x-1)^2=4$ ，即 $x-1=\pm 2$ ，所以 $x_1=3$ ， $x_2=-1$ 。

33. 解：开方得 $x=\pm 4$ ，即 $x_1=4$ ， $x_2=-4$ 。

34. 解：其规则为： $a\star b=a^2-b^2$ ，

则方程 $(4\star 3)\star x=13$ 解的步骤为：

$$(4^2-3^2)\star x=13,$$

$$7\star x=13, 49-x^2=13, x^2=36, \therefore x=\pm 6.$$

35. 解：定义 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc$ ，

$$\text{若 } \begin{vmatrix} x+1 & 1-x \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix}=6, \therefore (x+1)^2+(x-1)^2=6, \text{化简得 } x^2=2, \text{即 } x=\pm\sqrt{2}.$$

36. 解：移项得： $x^2=2$ ，开方得： $x=\pm\sqrt{2}$ 。

37. 解： $\therefore x^2-4x=5$ ， $\therefore x^2-4x+4=5+4$ ，

\therefore 用配方法解方程 $x^2-4x=5$ 时，方程的两边同时加上 4，使得方程左边配成一个完全平方式。

38. 解：原式= $x^2-4x+4-5=(x-2)^2-5$ 。

39. 解： $x^2-6x+b=x^2-6x+9-9+b=(x-3)^2+b-9=(x-a)^2-1$ ，

$\therefore a=3$ ， $b-9=-1$ ，即 $a=3$ ， $b=8$ ，故 $b-a=5$ 。

故答案为：5。

40. 解: $a=1, b=1, c=-1$,
 $b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5 > 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

41. 解: \because 一元二次方程有两个不相等的实数根, $\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$.

42. 解: 分类讨论:

① 当 $a - 5 = 0$ 即 $a = 5$ 时, 方程变为 $-4x - 1 = 0$, 此时方程一定有实数根;

② 当 $a - 5 \neq 0$ 即 $a \neq 5$ 时,

\therefore 关于 x 的方程 $(a - 5)x^2 - 4x - 1 = 0$ 有实数根

$\therefore 16 + 4(a - 5) \geq 0$, $\therefore a \geq 1$. $\therefore a$ 的取值范围为 $a \geq 1$.

43. 解: \because 一元二次方程有两个不相等的实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$, 即 $(-6)^2 - 4 \times 2k > 0$, 解得 $k < \frac{9}{2}$.

44. 解: 当 $a - 6 = 0$, 即 $a = 6$ 时, 方程是 $-8x + 6 = 0$, 解得 $x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$;

当 $a - 6 \neq 0$, 即 $a \neq 6$ 时, $\Delta = (-8)^2 - 4(a - 6) \times 6 = 208 - 24a \geq 0$, 解上式,
得 $a \leq \frac{26}{3} \approx 8.6$, 取最大整数, 即 $a = 8$.

45. 解: 当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 - (a + 2)x + 2 = 0$ 为一元二次方程, 若方程有相等的两解,

则 $\Delta = [-(a + 2)]^2 - 4 \times a \times 2 = 0$,

整理得 $a^2 - 4a + 4 = 0$,

即 $\Delta = (a - 2)^2 = 0$,

解得 $a = 2$;

当 $a = 0$ 时, 方程 $ax^2 - (a + 2)x + 2 = 0$ 为一元一次方程,

原方程转化为: $-2x + 2 = 0$,

此时方程只有一个解 $x = 1$.

所以当 $a = 0$ 或 $a = 2$ 关于 x 的方程 $ax^2 - (a + 2)x + 2 = 0$ 只有一解.

46. 解: 一元二次方程 $nx^2 - 2x - 1 = 0$ 无实数根, 说明 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 即 $(-2)^2 - 4 \times n \times (-1) < 0$,

一元二次方程 200 题 (含解析) ——解析

解得 $n < -1$, 所以 $n+1 < 0$, $-n > 0$, 故一次函数 $y = (n+1)x - n$ 的图象不经过第三象限.

47. 解: 因为方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,
则 $b^2 - 4ac > 0$, 即 $(-2)^2 - 4k \times (-1) > 0$,
解得 $k > -1$. 又结合一元二次方程可知 $k \neq 0$,

48. 解: $\because \Delta = (2c)^2 - 4(a+b)^2 = 4[c^2 - (a+b)^2] = 4(a+b+c)(c-a-b)$,
根据三角形三边关系, 得 $c - a - b < 0$, $a+b+c > 0$.
 $\therefore \Delta < 0$. \therefore 该方程没有实数根.

49. 解: $\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(m-2) = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 0$,
所以方程有两个不相等的实数根.

50. 解: $\because a = m - 1$, $b = 2m$, $c = m - 1$, 且方程有两个不相等的实数根,
 $\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4(m-1)(m-1) = 8m - 4 > 0$, $\therefore m > \frac{1}{2}$.
又: 二次项系数不为 0, $\therefore m \neq 1$, $\therefore m > \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 1$.

51. 解: 由题意知, $k \neq 0$, 方程有两个不相等的实数根,
所以 $\Delta > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = (2k+1)^2 - 4k^2 = 4k+1 > 0$.
又: 方程是一元二次方程, $\therefore k \neq 0$, $\therefore k > -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$.

52. 解: \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - m = 2x$ 有两个不相等的实数根,
 $\therefore \Delta = 4 + 4m > 0$, 即 $m > -1$.

53. 解: 根据题意列出方程组 $\begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m-2)^2 > 0, \\ m-2 \neq 0 \end{cases}$,
解之得 $m > \frac{3}{4}$ 且 $m \neq 2$.

54. 解: 由题意知, $\Delta = 4 - 4m < 0$, $\therefore m > 1$

55. 解: \because 一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两根分别是 x_1 , x_2 , $\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$;

56. 解：设方程的另一个根为 x ，依题意得 $0+x=-2$ ，解之得 $x=-2$ 。

57. 解：由题意，得： $x_1+x_2=-p$ ， $x_1x_2=q$ ；

$$\therefore p=-(x_1+x_2)=-3, q=x_1x_2=2;$$

58. 解：根据题意可得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=5$ ， $x_1x_2=\frac{c}{a}=2$ ，

$$\therefore x_1+x_2-x_1\cdot x_2=5-2=3.$$

59. 解：根据题意有两根之积 $x_1x_2=\frac{c}{a}=-2$ 。

60. 解： $\because a$ 是方程 $x^2+x-2009=0$ 的根， $\therefore a^2+a=2009$ ；

由根与系数的关系得 $a+b=-1$ ， $\therefore a^2+2a+b=(a^2+a)+(a+b)=2009-1=2008$ 。

61. 解：由根与系数的关系可知： $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=6$ ，

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=k+1,$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=36-2(k+1)=24, \text{解之得 } k=5.$$

62. 解：由根与系数的关系得： $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3$ ， $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-1$ 。

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-3.$$

63. 解： $\because x_2-3x_1<0$ ， $\therefore x_2<3x_1$ ，

$$\therefore x_1<0, \therefore x_2<0.$$

$\because x_1, x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+n-2=mx$ ，即 $x^2+(1-m)x+n-2=0$ 的两个实数根， $\therefore x_1+x_2=m-1$ ， $x_1x_2=n-2$ ，

$$\therefore m-1<0, n-2>0, \text{解得：}\begin{cases} m<1 \\ n>2 \end{cases}.$$

64. 解：由题意知，

$$\begin{aligned} a+b=-n, ab=-1, \therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b} \\ =\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{n^2+2}{-1}=-n^2-2. \end{aligned}$$

65. 解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 的两个不相等的实数根.

$$\therefore x_1^2 - 2x_1 = 4, x_1x_2 = -4, x_1 + x_2 = 2.$$

$$\therefore 2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 3 = x_1^2 - 2x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 3$$

$$= x_1^2 - 2x_1 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 3 = 4 + 4 + 8 + 3 = 19.$$

66. 解: $\because a, b$ 为一元二次方程 $x^2 + 2x - 9 = 0$ 的两个根,

$$\therefore a^2 + 2a - 9 = 0, a + b = -2,$$

$$\therefore a^2 + a - b = (a^2 + 2a - 9) - (a + b) + 9 = 11.$$

67. 解: 依题意得 $(a+b)^2 = b(b+a+b)$,

而 $a=1$,

$$\therefore b^2 - b - 1 = 0, \therefore b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 而 } b \text{ 不能为负, } \therefore b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

68. 解: 设 $y = \sqrt{1 + \frac{9}{x}}$, 则原方程可变形为: $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$, 即 $2y^2 - 5y + 2 = 0$,

$$\text{解得: } y_1 = 2, y_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } y = 2 \text{ 时, } \sqrt{1 + \frac{9}{x}} = 2,$$

$$\text{解得: } x = 3,$$

$$\text{当 } y = \frac{1}{2} \text{ 时, } \sqrt{1 + \frac{9}{x}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } x = -12$$

经检验 $x=3, x=-12$ 均为原方程的根,

$$\text{则所求的一元二次方程为: } z^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right)z + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{12}\right) = 0,$$

$$\text{即 } z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{36} = 0.$$

$$69. \text{ 解: } \begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 & \text{①} \\ x^2 + y^2 = 10 & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $x - y = 0, x - 3y = 0$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \quad (1), \quad \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{解方程组 (1) 得: } \begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ y_1 = \sqrt{5} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{5} \\ y_2 = -\sqrt{5} \end{cases};$$

解方程组 (2) 得: $\begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1 \end{cases}, \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1 \end{cases}.$

\therefore 方程组的解是: $\begin{cases} x_1=\sqrt{5} \\ y_1=\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2=-\sqrt{5} \\ y_2=-\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x_3=3 \\ y_3=1 \end{cases}, \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1 \end{cases}.$

70. 解: $\because \sqrt{x^2+7} = -\sqrt{2}x+1,$

$\therefore x^2+7=1-2\sqrt{2}x+2x^2,$

$\therefore x^2-2\sqrt{2}x-6=0,$

$x=\sqrt{2}\pm 2\sqrt{2},$

$\therefore x_1=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}; x_2=\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2},$

经检验, $x=3\sqrt{2}$ 是增根, \therefore 原方程的解为 $-\sqrt{2}.$

解答:

1. 解: (1) $x^2-6x-16=0,$

$(x-8)(x+2)=0, x-8=0, x+2=0, x_1=8, x_2=-2;$

(2) $x^2+4x-1=0,$

$b^2-4ac=4^2-4\times 1\times (-1)=20,$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2\times 1}, x_1=-2+\sqrt{5}, x_2=-2-\sqrt{5}.$

2. 解: 设矩形温室的宽为 x m, 则长为 $2x$ m,

根据题意, 得 $(x-4)\cdot(2x-5)=275,$

解得: $x_1=-8.5$ (不合题意, 舍去), $x_2=15,$

所以 $x=15, 2x=2\times 15=30.$

答: 当矩形温室的长为 30m, 宽为 15m 时, 蔬菜种植区域的面积是 $275\text{m}^2.$



3. 解: (1) 设 x 秒后 $\triangle PBQ$ 的面积等于 $4\text{cm}^2,$

则 $BQ=2x, BP=5-x,$

根据题意得出: $\frac{1}{2}\times 2x\times (5-x)=4,$

解得： $x_1=1$ ， $x_2=4$ （不合题意舍去），答：1 秒后 $\triangle PBQ$ 的面积等于 4cm^2 ；

（2）不能，

由题意可得出： $\frac{1}{2} \times 2x \times (5-x) = 7$ ，

整理得出： $x^2 - 5x + 7 = 0$ ，

$b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 7 = -3 < 0$ ，

\therefore 此方程无实数根，则 $\triangle PBQ$ 的面积不能等于 7。

4.（1）解：设每千克核桃应降价 x 元。

根据题意，得 $(60 - x - 40)(100 + \frac{x}{2} \times 20) = 2240$ 。

化简，得 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 解得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 6$ 。

答：每千克核桃应降价 4 元或 6 元。

（2）解：由（1）可知每千克核桃可降价 4 元或 6 元。

因为要尽可能让利于顾客，所以每千克核桃应降价 6 元。

此时，售价为： $60 - 6 = 54$ （元）， $\frac{54}{60} \times 100\% = 90\%$ 。

答：该店应按原售价的九折出售。

5. 解：由表可知， $3 \leq A < 6$ ，根据题意，得 $1000 + 50A(6 - A) = 1400$ ，

解得 $A_1 = 4$ ， $A_2 = 2$ （舍去）， $\therefore A = 4$ 。

设矩形材料的宽为 $x\text{m}$ ，长为 $(x+1)\text{m}$ ，

由题意，得 $2 \times 0.25(x+1) + 2 \times 0.5(x - 0.25 \times 2) = 6$ ，解得 $x = 4$ 。

所以矩形材料的长为 5m ，宽为 4m ，

广告部分的面积为 $5 \times 4 - 6 = 14\text{m}^2$ ，

广告的费用为 $1000 + 50 \times 4 \times (14 - 4) = 1000 + 2000 = 3000$ （元）。

答：这张广告的费用是 3000 元。

6. 解：（1）设截去的小正方形的边长为 $x\text{cm}$ ，由题意，得

$(32 - 2x)(14 - 2x) = 280$ ，解得： $x_1 = 2$ ， $x_2 = 21$ （舍去）。

答：截去的小正方形的边长 2cm 。

（2）能。

设左边的小正方形的边长为 $x\text{cm}$ ，

根据题意得 $(14 - 2x) \cdot \frac{32 - 2x}{2} = 180$ 解得： $x = 1$ 或 $x = 22$ ，

经检验 $x = 22$ 不符合题意，舍去， \therefore 盒子的体积为： $180 \times 1 = 180\text{cm}^3$ 。

7. 解：(1) $(x-1)^2 = (2x+3)^2$,

开方得： $x-1 = \pm(2x+3)$,

解得： $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{2}{3}$;

(2) $x^2 + 4x - 5 = 0$,

$(x+5)(x-1) = 0$,

$x+5=0$, $x-1=0$,

$x_1 = -5$, $x_2 = 1$;

(3) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$,

$b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4$,

$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{4}}{2 \times 1}$,

$x_1 = \sqrt{2} + 1$, $x_2 = \sqrt{2} - 1$;

(4) $4(2x+1)^2 - 4(2x+1) + 1 = 0$,

$[2(2x+1) - 1]^2 = 0$,

$2(2x+1) - 1 = 0$,

$x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$.

8. 解：(1) 移项得： $9(x-1)^2 = 5$,

$(x-1)^2 = \frac{5}{9}$,

开方得： $x-1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{3}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{3}$;

(2) $2x^2 - 4x - 8 = 0$,

$2x^2 - 4x = 8$,

$x^2 - 2x = 4$,

配方得： $x^2 - 2x + 1 = 4 + 1$,

$(x-1)^2 = 5$,

开方得： $x-1 = \pm\sqrt{5}$,

$x_1 = 1 + \sqrt{5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{5}$;

(3) $6x^2 - 5x - 2 = 0$,

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 73$,

$x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2 \times 6}$,

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{73}}{12}, x_2 = \frac{5-\sqrt{73}}{12};$$

$$(4)(x+1)^2 = 2x+2,$$

$$(x+1)^2 - 2(x+1) = 0,$$

$$(x+1)(x+1-2) = 0,$$

$$x+1=0, x+1-2=0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

9. 解： $(1) \Delta = 9 - 4(1-m) > 0,$

解得 $m > -\frac{5}{4},$

所以当 $m=2$ 时，方程有两个不相等的实数根，此时方程为 $x^2+3x-1=0;$

(2) 根据题意得 $x_1+x_2 = -3, x_1 \cdot x_2 = -1,$

所以 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-3}{-1} = 3.$

10. 解： $\because a$ 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根，

$$\therefore a^2+a=1, \therefore 2000a^3+4000a^2$$

$$=2000a(a^2+a+a)=2000a \cdot (1+a)=2000(a^2+a)=2000.$$

故答案为 2000.

11. 解：把两条路平移到长方形的两边时，空地为一个长方形，长为 $50-x$ ，宽为 $40-x$ ，

$$\because \text{空地的面积是 } 2208\text{m}^2,$$

$$\therefore \text{可列方程为 } (50-x)(48-x)=2208,$$

$$\text{解得：} x_1=2, x_2=96 \text{ (不合题意，舍去).}$$

则小路的宽是 2m.

12. 解：设这两个正方形其中一个的边长为 $x\text{cm}$ ，则另外一个正方形的边长为

$$\frac{12-4x}{4} = (3-x)\text{cm},$$

$$\text{由题意得：} x^2 + (3-x)^2 = 5, \text{解得：} x_1=2, x_2=1.$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时，} 3-x=1(\text{cm}),$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时，} 3-1=2(\text{cm}),$$

则这两个正方形的周长分别是： $2 \times 4 = 8(\text{cm})$ 和 $1 \times 4 = 4(\text{cm})$ ；

答：这两个正方形的周长分别是 8cm 和 4cm.

13. 解：设主干道的宽度为 $2xm$ ，则其余道路宽为 xm ，

依题意得： $(16 - 4x)(18 - 4x) = 168$ ，

整理，得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = \frac{15}{2}$ 。

当 $x_2 = \frac{15}{2}$ 时， $16 - 4x < 0$ ，不合题意，舍去。

当 $x = 1$ 米时， $2x = 2$ 米。

答：主干道的宽度为 2 米。

14. 解：(1) 每 - 横行有 $(n+3)$ 块，每 - 竖列有 $(n+2)$ 块。

(2) $y = (n+3)(n+2)$ ，

(3) 由题意，得 $(n+3)(n+2) = 506$ ，解之 $n_1 = 20$ ， $n_2 = -25$ (舍去)。

(4) 观察图形可知，每 - 横行有白砖 $(n+1)$ 块，每 - 竖列有白砖 n 块，因而白砖总数是 $n(n+1)$ 块， $n=20$ 时，白砖为 $20 \times 21 = 420$ (块)，黑砖数为 $506 - 420 = 86$ (块)。

故总钱数为 $420 \times 3 + 86 \times 4 = 1260 + 344 = 1604$ (元)。

(5) 当黑白砖块数相等时，有方程 $n(n+1) = (n^2 + 5n + 6) - n(n+1)$ 。

整理得 $n^2 - 3n - 6 = 0$ 。

解之得 $n_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$ ， $n_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$ 。

由于 n_1 的值不是整数， n_2 的值是负数，故不存在黑砖白块数相等的情形

15. 解 (1) 一元二次方程的一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$)，因此①，②，④，⑤是方程 $\frac{1}{2}x^2 - x = 2$ 所化的一元二次方程的一般形式。

(2) 一元二次方程的一般形式是： $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$)，在一般形式中 ax^2 叫二次项， bx 叫一次项， c 是常数项。其中 a, b, c 分别叫二次项系数，一次项系数，常数项。若设方程 $\frac{1}{2}x^2 - x = 2$ 的二次项系数为 a ($a \neq 0$)，则一次项系数为 $-2a$ ，常数项为 $-4a$ ，因此二次项系数：一次项系数：常数项 $= 1 : (-2) : (-4)$ 。

答：这个方程的二次项系数：一次项系数：常数项 $= 1 : (-2) : (-4)$ 。

16. 解：

$$(1)(x+3)^2 - (x-1)(x-2)$$

$$= x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 3x + 2)$$

$$= x^2 + 6x + 9 - x^2 + 3x - 2$$

$$=9x+7.$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{x^2+2x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} \\ &= \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{x-2} \\ &= \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) 移项, 得 $x^2 - 2x = 3$, 配方,
得 $(x-1)^2 = 4$,
 $\therefore x-1 = \pm 2$,
 $\therefore x_1 = -1, x_2 = 3$.

17. 解: (1) 本题答案不唯一.

$$\begin{aligned} & \frac{4x^2 - y^2}{2xy + y^2} \\ &= \frac{(2x+y)(2x-y)}{y(2x+y)} \\ &= \frac{2x-y}{y} \\ ② & \frac{4x^2 - y^2}{4x^2 + 4xy + y^2} = \frac{(2x+y)(2x-y)}{(2x+y)^2} = \frac{2x-y}{2x+y} \cdot \frac{y(2x+y)}{y(2x+y)(2x-y)} = \frac{y}{2x-y}; \\ ③ & \frac{2xy + y^2}{4x^2 - y^2} = \frac{y(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{y}{2x-y}; \\ ④ & \frac{2xy + y^2}{4x^2 + 4xy + y^2} = \frac{y(2x+y)}{(2x+y)^2} = \frac{y}{2x+y}; \\ ⑤ & \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{4x^2 - y^2} = \frac{(2x+y)^2}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{2x+y}{2x-y}; \\ ⑥ & \frac{4x^2 + 4xy + y^2}{2xy + y^2} = \frac{(2x+y)^2}{y(2x+y)} = \frac{2x+y}{y}. \end{aligned}$$

(2) $x^2 - 2x + 1 + 2x - 3 = 0$,
 $x^2 - 2 = 0$,
 $x^2 = 2$,
 $\therefore x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$.

18. 解： $\because a \oplus b = a^2 - b^2$,

$$\therefore (4 \oplus 3) \oplus x = (4^2 - 3^2) \oplus x = 7 \oplus x = 7^2 - x^2$$

$$\therefore 7^2 - x^2 = 24$$

$$\therefore x^2 = 25.$$

$$\therefore x = \pm 5.$$

19. 解： $\because (x - 3)^2 = (5 - 2x)^2$,

$$\therefore x - 3 = 5 - 2x \text{ 或 } x - 3 = 2x - 5$$

$$\text{解之得：} x_1 = 2, x_2 = \frac{8}{3}.$$

20. 解： $(x - 1)^2 = 4$, $x - 1 = \pm 2$, $x = 3$ 或 $x = -1$.

21. 解： $x^2 + 8x = 16$,

$$x^2 + 8x + 4^2 = 16 + 4^2,$$

$$(x + 4)^2 = 32, \therefore x + 4 = \pm 4\sqrt{2}, \therefore x_1 = 4\sqrt{2} - 4, x_2 = -4\sqrt{2} - 4.$$

22. 解： $(x - 3)^2 = 15$,

$$x - 3 = \pm \sqrt{15}.$$

$$\therefore x_1 = 3 + \sqrt{15}, x_2 = 3 - \sqrt{15}.$$

23. 解：(1) 原式 $= (-1)^2 \div \frac{1}{2} + (7 - 3) \times \frac{3}{4} - (\frac{1}{2})^0$

$$= 1 \times 2 + 4 \times \frac{3}{4} - 1$$

$$= 2 + 3 - 1 = 4;$$

(2) 原式 $= [(2x - y)(2x + y) + y(y - 6x)] \div 2x$

$$= (4x^2 - y^2 + y^2 - 6xy) \div 2x$$

$$= (4x^2 - 6xy) \div 2x$$

$$= 2x - 3y;$$

(3) 解： $x^2 - 6x + 1 = 0$

$$(x - 3)^2 - 8 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 8$$

$$x - 3 = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{即 } x_1 = 3 + 2\sqrt{2}, x_2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

24. 解: $\because x^2+4x+2=0$

$$\therefore x^2+4x = -2$$

$$\therefore x^2+4x+4 = -2+4$$

$$\therefore (x+2)^2 = 2$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore x_1 = -2 + \sqrt{2}, x_2 = -2 - \sqrt{2}$$

25. 解: (1) $x_1=5, x_2=\frac{1}{5}$;

(2) $\frac{a^2+1}{a}$ (或 $a+\frac{1}{a}$);

(3) 方程二次项系数化为 1,

$$\text{得 } x^2 - \frac{26}{5}x = -1.$$

配方得,

$$x^2 - \frac{26}{5}x + \left(-\frac{13}{5}\right)^2 = -1 + \left(-\frac{13}{5}\right)^2, \text{ 即 } \left(x - \frac{13}{5}\right)^2 = \frac{144}{25},$$

开方得,

$$x - \frac{13}{5} = \pm \frac{12}{5},$$

$$\text{解得 } x_1=5, x_2=\frac{1}{5}.$$

经检验, $x_1=5, x_2=\frac{1}{5}$ 都是原方程的解.

26. 解: 原式两边都除以 6, 移项得 $x^2 - \frac{1}{6}x = 2$,

$$\text{配方, 得 } x^2 - \frac{1}{6}x + \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = 2 + \left(-\frac{1}{12}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = \left(\frac{17}{12}\right)^2,$$

$$\text{即 } x - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \text{ 或 } x - \frac{1}{12} = -\frac{17}{12}, \text{ 所以 } x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{4}{3}.$$

27. 解: 移项, 得 $x^2 - 6x = 2$

$$\text{配方, 得 } (x-3)^2 = 11,$$

$$\text{即 } x-3 = \sqrt{11} \text{ 或 } x-3 = -\sqrt{11},$$

$$\text{所以, 方程的解为 } x_1 = 3 + \sqrt{11}, x_2 = 3 - \sqrt{11}.$$

28. 解：移项，得 $2x^2 - 3x = -1$ ，

二次项系数化为 1，得 $x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$ ，

配方 $x^2 - \frac{3}{2}x + (\frac{3}{4})^2 = -\frac{1}{2} + (\frac{3}{4})^2$ ，

$$(x - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{16}，$$

由此可得 $x - \frac{3}{4} = \pm \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}.$$

29. 解：(1) 去分母，得 $3x = 4x - 4$ 。

解得， $x = 4$ 。

经检验， $x = 4$ 是原方程的根。

\therefore 原方程的根是 $x = 4$ 。

(2) 配方得 $(x+1)^2 = 3$ ，

开方得 $x+1 = \pm \sqrt{3}$ 。

$$\therefore x_1 = -1 + \sqrt{3}, x_2 = -1 - \sqrt{3}.$$

30. 解： $\because x^2 + 4x - 1 = 0$

$$\therefore x^2 + 4x = 1$$

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 1 + 4$$

$$\therefore (x+2)^2 = 5$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore x_1 = -2 + \sqrt{5}, x_2 = -2 - \sqrt{5}.$$

31. 解：两边都除以 2，得 $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ 。

移项，得 $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ 。

配方，得 $x^2 - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{4})^2 = \frac{9}{16}$ ， $(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{16}$ 。

$$\therefore x - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ 或 } x - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

32. 解: (1) 原方程变为: $(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$ (2 分)

$$\therefore x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ (4 分)}$$

(用求根公式法解答可参照给分)

解: (2) 原式 = $\frac{x+1-2(x-2)}{x^2-4} \times \frac{x+2}{x-5}$ (1 分)

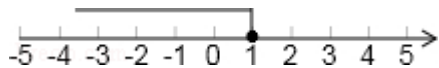
$$= \frac{1}{2-x} \text{ (3 分)}$$

$$\text{将 } x = \sqrt{2} + 2 \text{ 代入得, 原式} = \frac{1}{2 - (2 + \sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (4 分)}$$

33. (1) 解: 原不等式可化为 $x - 1 + 2 \geq 2x$,

移项、合并同类项、化系数为 1 得, $x \leq 1$.

在数轴上的解集表示为:



(2) 解: 原方程可化为 $x^2 + 2x + \frac{1}{4} = 0$,

$$\text{配方得, } (x+1)^2 = \frac{3}{4},$$

$$\text{开方得, } x+1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{故 } x_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

34. 解: 移项, 得: $x^2 - 4x = -1$,

配方, 得: $x^2 - 4x + (-2)^2 = -1 + (-2)^2$, 即 $(x-2)^2 = 3$,

解这个方程, 得: $x-2 = \pm\sqrt{3}$;

$$\text{即 } x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

35. 解: 原方程变形为 $(x-1)(x+5) = 0$. $x_1 = -5, x_2 = 1$.

36. 解: 方程可变形为: $\frac{6}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 1$

方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$, 得: $6(x-2) + (x+2) = (x+2)(x-2)$,

整理得: $x^2 - 7x + 6 = 0$, 解得: $x_1 = 1, x_2 = 6$,

检验: 将 $x_1 = 1, x_2 = 6$ 分别代入 $(x+2)(x-2) \neq 0$,

$\therefore x_1 = 1, x_2 = 6$ 是原方程的解.

37. 解: 将方程左边分解因式, 得,

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0, (3 \text{ 分})$$

$$x(x - 3)(x + 1) = 0, (3 \text{ 分})$$

由此得 $x=0$, $x-3=0$, 或 $x+1=0$.

所以原方程有三个实数根: $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=-1$. (2 分)

38. 解: 把 $x=0$ 代入一元二次方程 $(k+4)x^2+3x+k^2+3k-4=0$,

$$\text{得 } k^2+3k-4=0,$$

解得 $k=-4$ 或 1 ; 又 $k+4 \neq 0$, 即 $k \neq -4$; 所以 $k=1$.

39. 解: (1) 把 $x=\frac{3}{2}$ 代入方程得: $3m^2+m-2=0$,

$$\text{解得 } m_1=\frac{2}{3}, m_2=-1;$$

$$(2) \text{ 当 } m=\frac{2}{3} \text{ 时, 方程是 } 2x^2+\frac{1}{9}x-\frac{14}{3}=0,$$

设方程的两根是 x_1, x_2 ,

$$\text{则 } x_1+x_2=-\frac{1}{18},$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3},$$

$$\text{则 } x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \frac{1513}{324};$$

当 $m=-1$ 时方程是 $2x^2-x-3=0$,

设它的解是 x_3, x_4 ,

$$\text{则 } x_3+x_4=\frac{1}{2},$$

$$x_3 \cdot x_4 = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore x_3^2+x_4^2 = (x_3+x_4)^2 - 2x_3x_4 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4},$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = \frac{1513}{324} + \frac{13}{4} = \frac{1283}{162}.$$

40. 解: (1) 由①得, $x > 1$; (2 分)

由②得, $x \leq 3$, (4 分) \therefore 原不等式组的解集为 $1 < x \leq 3$;

解: (2) 两边都乘以 $x(3x-2)$, (1 分)

$$\text{得出 } 3x-2=x^2 \text{ (2 分)}$$

$$\text{移项得 } x^2-3x+2=0, (x-1)(x-2)=0, \therefore x_1=1, x_2=2.$$

经检验, $x_1=1$ 或 $x_2=2$ 是原方程的解.

41. 解：方程两边同乘以 $x(x+2)$ ，得 $40(x+2) - 40x = x(x+2)$

整理得 $x^2 + 2x - 80 = 0$ ， $x_1 = -10$ ， $x_2 = 8$

经检验 $x_1 = -10$ ， $x_2 = 8$ 都是原方程的根。

42. 解：方程两边都乘 $2x(x-1)$ ，

得： $2x^2 - 2(x-1)(x+2) = 3x(x-1)$ ，

整理得： $3x^2 - x - 4 = 0$

$\therefore (3x-4)(x+1) = 0$ ，解得 $x_1 = \frac{4}{3}$ ， $x_2 = -1$ 。

检验 $x = \frac{4}{3}$ 或 $x = -1$ 时， $2x(x-1) \neq 0$ ；所以原方程的解为 $x_1 = \frac{4}{3}$ 或 $x_2 = -1$ 。

43. 解：方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$ ，

得 $x^2 - 3x + (2x-1)(x+1) = 0$ ，

整理得 $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ，

解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = -\frac{1}{3}$ 。

经检验， $x_1 = 1$ 是增根， $x_2 = -\frac{1}{3}$ 是原方程的根。

\therefore 原方程的根是 $x = -\frac{1}{3}$ 。

44. 解： $\frac{1}{x-2} + 1 = \frac{4}{(x+2)(x-2)}$ ，

两边同乘以 $(x+2)(x-2)$ ，

得： $(x+2) + (x+2)(x-2) = 4$ ，

并整理得 $x^2 + x - 6 = 0$ ，

解得 $x_1 = -3$ ， $x_2 = 2$ ，

经检验 $x_1 = -3$ 是原方程的解 $x_2 = 2$ 是增根，

\therefore 原方程的解是 $x = -3$ 。

45. 解：解方程 $\frac{1}{x-1} = 1$ 。

方程两边同时乘以 $(x-1)$ ，

得： $1 = x - 1$ ，解得 $x = 2$ 。

经检验， $x = 2$ 是原方程的解，所以原方程的解为 $x = 2$ 。即 $k = 2$ 。

把 $k = 2$ 代入 $x^2 + kx = 0$ ，得 $x^2 + 2x = 0$ 。

解得 $x_1 = 0$ ， $x_2 = -2$ 。

46. 解: 去分母, 得 $1+x-(1-x^2)=3x-x^2$,
 去括号, 得 $1+x-1+x^2=3x-x^2$,
 移项, 合并同类项, 得 $2x^2-2x=0$,
 把左边分解因式, 得 $2x(x-1)=0$, $\therefore x_1=0$, $x_2=1$.
 经检验 $x_2=1$ 是增根舍去, \therefore 原方程的根是 $x=0$.

47. 解: 方程两边都乘 x , 得
 $x^2+2=3x$,
 整理得 $x^2-3x+2=0$,
 即 $(x-2)(x-1)=0$, $\therefore x=2$ 或 $x=1$.
 检验: 当 $x=2$ 或 1 时, 最简公分母均不为 0 . \therefore 原方程的解为 $x_1=2$, $x_2=1$.

48. 解: (1) 原方程可化为: $\frac{x^2+5x(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{6(x+1)^2}{(x+1)^2} = 0$,

$$\frac{12x^2+17x+6}{(x+1)^2} = 0,$$

$\therefore (x+1)^2 \neq 0$, $\therefore 12x^2+17x+6=0$, 解得: $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$;

$$(2) \begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 15 & \text{①} \\ 2x - 3y = 5 & \text{②} \end{cases},$$

①可化简为: $(2x+3y)(2x-3y)=15$ ③,

将②代入③中得: $2x+3y=3$ ④,

②+④, 得: $4x=8$, $x=2$,

④-②, 得: $6y=-2$, $y=-\frac{1}{3}$,

即原方程组的解为: $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$.

49. 解: 方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$,

得: $6-3(x+1)=(x+1)(x-1)$,

整理得: $x^2+3x-4=0$,

解得 $x_1=1$, $x_2=-4$,

经检验: $x_1=1$ 是增根, 舍去,

\therefore 方程的解为: $x=-4$.

50. 解: 方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$, 得

$$(x+1)^2 - 3(x-1)^2 = 2(x+1)(x-1),$$

整理得 $x^2 - 2x = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

检验: 当 $x=0$ 或 2 时, $(x+1)(x-1) \neq 0$. $\therefore x=0$ 或 2 均是原方程的根.

51. 解: 把 $x=3$ 代入 $\frac{10}{x+2} + \frac{k}{x} = 1$, 得 $\frac{10}{3+2} + \frac{k}{3} = 1$, 解得 $k = -3$.

将 $k = -3$ 代入原方程得: $\frac{10}{x+2} - \frac{3}{x} = 1$,

方程两边都乘以 $x(x+2)$, 得 $10x - 3(x+2) = x(x+2)$,

整理得 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

检验: $x=2$ 时, $x(x+2) = 8 \neq 0$. $\therefore x=2$ 是原方程的根.

$x=3$ 时, $x(x+2) = 15 \neq 0$. $\therefore x=3$ 是原方程的根. \therefore 原方程的根为 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

故 $k=3$, 方程其余的根为 $x=2$.

52. 解: 方程两边都乘 $(x+2)(x-1)$,

$$\text{得: } 2(x-1) + 2(x+2) = (x+2)(x-1), x^2 - 3x - 4 = 0,$$

解得: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$,

检验: 当 $x_1 = 4$, $x_2 = -1$ 时, $(x+2)(x-1) \neq 0$,

\therefore 原方程的根是 $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.

53. 解: 方程两边同乘 $(x+1)(x-1)$,

$$\text{得 } 6 - 3(x+1) = x^2 - 1,$$

整理得 $x^2 + 3x - 4 = 0$, 即 $(x+4)(x-1) = 0$,

解得 $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. 经检验 $x=1$ 是增根, 应舍去, \therefore 原方程的解为 $x = -4$.

54. 解: 令 $\frac{x-1}{x} = t$, 则原方程可化为 $t^2 - t - 2 = 0$,

解得, $t_1 = 2$, $t_2 = -1$,

当 $t=2$ 时, $\frac{x-1}{x} = 2$, 解得 $x_1 = -1$,

当 $t=-1$ 时, $\frac{x-1}{x} = -1$, 解得 $x_2 = \frac{1}{2}$,

经检验, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ 是原方程的解.

55. 解：设 $\frac{x+1}{x}=y$ ，则 $\frac{(x+1)^2}{x^2}=y^2$ ，

所以原方程可化为 $2y^2+y-6=0$ 。

解得 $y_1=-2$ ， $y_2=\frac{3}{2}$ 。

即： $\frac{x+1}{x}=-2$ 或 $\frac{x+1}{x}=\frac{3}{2}$ 。

解得 $x_1=2$ ， $x_2=-\frac{1}{3}$ 。

经检验， $x_1=2$ ， $x_2=-\frac{1}{3}$ 是原方程的根。

56. 解：方法一：设 $y=\frac{x-1}{x}$ ，

则原方程化为 $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$ ，整理得 $2y^2-5y+2=0$ ， $\therefore y_1=\frac{1}{2}$ ， $y_2=2$ ，

当 $y=\frac{1}{2}$ 时， $\frac{x-1}{x}=\frac{1}{2}$ ，解得： $x=2$ ；

当 $y=2$ 时， $\frac{x-1}{x}=2$ ，解得： $x=-1$ 。

经检验 $x_1=2$ ， $x_2=-1$ 是原方程的根；

方法二：去分母得 $2(x-1)^2+2x^2=5x(x-1)$ ，

整理得 $x^2-x-2=0$ ，解得 $x_1=2$ ， $x_2=-1$ ，

经检验 $x_1=2$ ， $x_2=-1$ 是原方程的根。

57. 解：设 $y=x^2-2x$ ，

则原方程变为： $y-\frac{12}{y}=-1$ ，即 $y^2+y-12=0$ ，

得 $(y-3)(y+4)=0$ ，解得： $y=3$ 或 $y=-4$ ，

当 $y=3$ 时， $x^2-2x=3$ ， $(x-3)(x+1)=0$ ，解得 $x_1=3$ ， $x_2=-1$ ，

当 $y=-4$ 时， $x^2-2x=-4$ ，

$\therefore \Delta=-12<0$ ， \therefore 此方程无解。经检验， $x_1=3$ ， $x_2=-1$ 都是原方程的根。

58. 解：设 $\frac{x-1}{x}=y$ ，原方程化为 $y^2-\frac{7}{2}y+3=0$ ，

解得 $y_1=2$ ， $y_2=\frac{3}{2}$ ，

当 $y=2$ 时， $\frac{x-1}{x}=2$ ，解得 $x=-1$ 。

当 $y=\frac{3}{2}$ 时， $\frac{x-1}{x}=\frac{3}{2}$ ，解得 $x=-2$ 。

经检验 $x_1=-1$ ， $x_2=-2$ 都是原方程的根。

59. 解：设 $x^2+3x=y$ ，则原方程变形为 $y - \frac{20}{y} = -1$ ，

即 $y^2+y-20=0$ ，解得 $y_1=-5$ ， $y_2=4$ 。

当 $y=-5$ 时， $x^2+3x=-5$ ，即 $x^2+3x+5=0$ ，

$\because \Delta=3^2-4\times 1\times 5=9-20=-11<0$ ， \therefore 此方程无解；

当 $y=4$ 时， $x^2+3x=4$ ，即 $x^2+3x-4=0$ ，解得 $x_1=-4$ ， $x_2=1$ 。

经检验， $x_1=-4$ ， $x_2=1$ 都是原方程的解。

60. 解：填空： $-\frac{1}{4}$ ， -3 ； $4x^2+13x+3=4(x+\frac{1}{4})(x+3)$ 。

发现的一般结论为：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1 、 x_2 ，则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 。

61. 解：(1) 答案一：

对于这个特定的已知方程，解法是对的。

理由是：一元二次方程有根的话，只能有两个根，此学生已经将两个根都求出来了，所以对。

答案二：

解法不严密，方法不具有一般性。

理由是：为何不可以 $2=3\times\frac{2}{3}$ 等，得到其它的方程组此学生的方法只是巧合了，求对了方程的解。

(2) 解：因为周长一定 ($2+3+4+5+6=20\text{cm}$) 的三角形中，以正三角形的面积最大。

取三边尽量接近，使围成的三角形尽量接近正三角形，则面积最大。

此时，三边为 6、5+2、4+3，这是一个等腰三角形。

可求得其最大面积为 $6\sqrt{10}$ 。

62. 解：方程两边都乘 $x(x-2)$ ，得

$$x^2-2x(x-2)=3(x-2)^2$$

原方程可化为 $x^2-4x+3=0$

解得 $x_1=3$ ， $x_2=1$

检验：当 $x=3$ 或 1 时， $x(x-2)\neq 0$

\therefore 原方程的解为 $x_1=3$ ， $x_2=1$

63. 解: (1) ① $(x+1)(x-1)=0$,

所以 $x_1=-1, x_2=1$

② $(x+2)(x-1)=0$,

所以 $x_1=-2, x_2=1$;

③ $(x+3)(x-1)=0$,

所以 $x_1=-3, x_2=1$;

$(n)(x+n)(x-1)=0$,

所以 $x_1=-n, x_2=1$

(2) 共同特点是:

都有一个根为 1; 都有一个根为负整数;

两个根都是整数根等等.

64. 解: $\begin{cases} x-y-k=0 & ① \\ x^2-8y=0 & ② \end{cases}$

由①得 $y=x-k$, ③

把③代入②得

$x^2-8x+8k=0$,

\therefore 方程组只有一个实数解, $\therefore \Delta = (-8)^2 - 4 \times 8k = 64 - 32k = 0, \therefore k=2$.

\therefore 原方程化为 $x^2-8x+8 \times 2=0$,

即 $x^2-8x+16=0, (x-4)^2=0, \therefore x=4$.

把 $x=4, k=2$ 代入①, 得 $y=2$. \therefore 方程组的实数解是 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

65. 解: (1) 由题意知, $k \neq 0$ 且 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$\therefore b^2 - 4ac = [-2(k+1)]^2 - 4k(k-1) > 0$,

即 $4k^2+8k+4-4k^2+4k > 0$,

$\therefore 12k > -4$

解得: $k > -\frac{1}{3}$ 且 $k \neq 0$

(2) 不存在.

$\therefore x_1+x_2 = \frac{2(k+1)}{k}, x_1 \cdot x_2 = \frac{k-1}{k}$,

又有 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} = 1$,

可求得 $k = -3$, 而 $-3 < -\frac{1}{3}$

\therefore 满足条件的 k 值不存在.

66. 解: (1) 方程 $x^2 + k(x - 1) - 1 = 0$ 可化为 $x^2 + kx - k - 1 = 0$,

由于 $\Delta = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2 \geq 0$,

所以方程有两个实数根.

(2) 假设存在正数 k , 满足 $x_1^2 + kx_1 + 2x_1x_2 = 7 - 3(x_1 + x_2)$,

由于 x_1, x_2 是方程的两个实数根,

\therefore 把 $x = x_1$ 代入得: $x_1^2 + kx_1 - k - 1 = 0$,

$\therefore x_1^2 + kx_1 = k + 1, x_1 + x_2 = -k, x_1x_2 = -k - 1$,

即 $k + 1 + 2(-k - 1) = 7 + 3k$,

解得 $k = -2$, 这与题设 $k > 0$ 相矛盾.

\therefore 满足条件的正数 k 不存在.

67. 解: (1) 由题意知: $\Delta = b^2 - 4ac = [-2(m+1)]^2 - 4m^2 = [-2(m+1) + 2m][-$

$2(m+1) - 2m] = -2(-4m - 2) = 8m + 4 \geq 0$,

解得 $m \geq -\frac{1}{2}$. \therefore 当 $m \geq -\frac{1}{2}$ 时, 方程有两个实数根.

(2) 选取 $m = 0$. (答案不唯一, 注意开放性)

方程为 $x^2 - 2x = 0$,

解得 $x_1 = 0, x_2 = 2$.

68. 解: $\Delta = (-3)^2 - 4(m - 1)$,

(1) \therefore 方程有两个不相等的实数根, $\therefore \Delta > 0$, 解得 $m < \frac{13}{4}$.

(2) \therefore 方程有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = 0$, 即 $9 - 4(m - 1) = 0$

解得 $m = \frac{13}{4}$. \therefore 方程的根是: $x_1 = x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{3}{2}$.

69. 解: (1) \therefore 方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个实数根,

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m \geq 0$, 解得 $m \leq 1$;

(2) 由两根关系可知, $x_1 + x_2 = 2, x_1 \cdot x_2 = m$,

解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$,

$\therefore m = x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$.

70. 解: (1) 由题意得: $\Delta = (-1)^2 - 4(p-1) \geq 0$ 解得, $p \leq \frac{5}{4}$;

(2) 由 $[2+x_1(1-x_1)][2+x_2(1-x_2)]=9$ 得,

$$(2+x_1-x_1^2)(2+x_2-x_2^2)=9$$

$\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - x + p - 1 = 0$ 的两实数根,

$$\therefore x_1^2 - x_1 + p - 1 = 0, x_2^2 - x_2 + p - 1 = 0,$$

$$\therefore x_1 - x_1^2 = p - 1, x_2 - x_2^2 = p - 1$$

$$\therefore (2+p-1)(2+p-1)=9, \text{ 即 } (p+1)^2=9$$

$$\therefore p=2 \text{ 或 } p=-4,$$

$$\because p \leq \frac{5}{4}, \therefore \text{所求 } p \text{ 的值为 } -4.$$

71. 解: (1) 将原方程整理为 $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$;

\because 原方程有两个实数根,

$$\therefore \Delta = [2(m-1)]^2 - 4m^2 = -8m + 4 \geq 0, \text{ 得 } m \leq \frac{1}{2};$$

(2) $\because x_1, x_2$ 为一元二次方程 $x^2 = 2(1-m)x - m^2$, 即 $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$ 的两根,

$$\therefore y = x_1 + x_2 = -2m + 2, \text{ 且 } m \leq \frac{1}{2};$$

因而 y 随 m 的增大而减小, 故当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 取得最小值 1.

72. (1) 证明: $\because b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-k^2) = 36 + 4k^2 > 0$

因此方程有两个不相等的实数根.

$$(2) \text{ 解: } \because x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6,$$

$$\text{又: } x_1 + 2x_2 = 14,$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 14 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 8. \end{cases}$$

将 $x_1 = -2$ 代入原方程得: $(-2)^2 - 6 \times (-2) - k^2 = 0$, 解得 $k = \pm 4$.

73. 题甲

解: (1) \because 一元二次方程 $x^2 - 2(2-k)x + k^2 + 12 = 0$ 有实数根 α, β ,

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\text{即 } 4(2-k)^2 - 4(k^2 + 12) \geq 0, \text{ 得 } k \leq -2.$$

$$(2) \text{ 由根与系数的关系得: } \alpha + \beta = -[-2(2-k)] = 4 - 2k,$$

$$\therefore t = \frac{a+\beta}{k} = \frac{4-2k}{k} = \frac{4}{k} - 2,$$

$$\because k \leq -2, \therefore -2 \leq \frac{4}{k} < 0, \therefore -4 \leq \frac{4}{k} - 2 < -2, \text{ 即 } t \text{ 的最小值为 } -4.$$

题乙:

$$(1) \text{ 解: } \because AB \parallel CD, \therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QD} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } CD = 3BQ,$$

$$\therefore \frac{AB}{AQ} = \frac{CD}{CD+BQ} = \frac{3BQ}{3BQ+BQ} = \frac{3}{4};$$

(2) 证明: 四边形 ABCD 是矩形

$$\because AB = CD, AB \parallel DC$$

$$\therefore \triangle DPC \sim \triangle QPB$$

$$\therefore \frac{DC}{BQ} = \frac{PC}{BP}$$

$$\frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} = \frac{BP+PC}{BP} - \frac{AB}{BQ} = 1 + \frac{PC}{BP} - \frac{DC}{BQ} = 1$$

$$\therefore \frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} = 1.$$

74. 解: \because 关于 x 的方程 $x^2 + (b+2)x + 6 - b = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (b+2)^2 - 4(6-b) = 0, \text{ 即 } b^2 + 8b - 20 = 0;$$

解得 $b = 2, b = -10$ (舍去);

①当 a 为底, b 为腰时, 则 $2+2 < 5$, 构不成三角形, 此种情况不成立;

②当 b 为底, a 为腰时, 则 $5-2 < 5 < 5+2$, 能够构成三角形;

此时 $\triangle ABC$ 的周长为: $5+5+2=12$;

答: $\triangle ABC$ 的周长是 12.

75. 解: 设原方程的两根为 x_1, x_2 ; 则: $x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = m$;

$$\because x_1 = -2, \therefore x_2 = 4 - x_1 = 6, m = x_1 x_2 = -12;$$

即方程的另一根是 6, m 的值为 -12.

$$76. \text{ 解: (1) 由题意, 得 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 - \sqrt{2} \end{cases},$$

$$\text{解得 } x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } a = x_1 \cdot x_2 = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1;$$

$$(2) \text{ 由题意, 得 } x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0, \text{ 即 } x_1^2 - 2x_1 = 1. \therefore x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_1 + x_2$$

$$= x_1^3 - 2x_1^2 - x_1^2 + 2x_1 + x_2 = x_1(x_1^2 - 2x_1) - (x_1^2 - 2x_1) + x_2$$

$$= x_1 - 1 + x_2 = (x_1 + x_2) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

77. 解: \because 方程有实数根,

$$\therefore b^2 - 4ac \geq 0, \therefore (-4)^2 - 4(k+1) \geq 0, \text{ 即 } k \leq 3.$$

$$\text{解法一: 又} \because x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(k+1)}}{2} = 2 \pm \sqrt{3-k},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = (2 + \sqrt{3-k}) + (2 - \sqrt{3-k}) = 4.$$

$$x_1 \cdot x_2 = (2 + \sqrt{3-k}) \cdot (2 - \sqrt{3-k}) = k+1.$$

若 $x_1 \cdot x_2 > x_1 + x_2$,

$$\text{即 } k+1 > 4, \therefore k > 3.$$

而这与 $k \leq 3$ 相矛盾,

因此, 不存在实数 k , 使得 $x_1 \cdot x_2 > x_1 + x_2$ 成立.

$$\text{解法二: 又} \because x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k+1 \text{ (以下同解法一)}.$$

78. 解: (1) \because 方程有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = [-2(k+1)]^2 - 4k(k-1) = 12k+4 > 0, \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\text{解得 } k > -\frac{1}{3}, \text{ 且 } k \neq 0, \text{ 即 } k \text{ 的取值范围是 } k > -\frac{1}{3}, \text{ 且 } k \neq 0;$$

(2) 假设存在实数 k , 使得方程的两个实数根 x_1, x_2 的倒数和为 0,

$$\text{则 } x_1, x_2 \text{ 不为 } 0, \text{ 且 } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{k-1}{k} \neq 0, \text{ 且 } \frac{\frac{2(k+1)}{k-1}}{\frac{k-1}{k}} = 0, \text{ 解得 } k = -1,$$

而 $k = -1$ 与方程有两个不相等实根的条件 $k \geq -\frac{1}{3}$, 且 $k \neq 0$ 矛盾,

故使方程的两个实数根的倒数和为 0 的实数 k 不存在.

9. 解: $\because x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = 2.$

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$(2) (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4^2 - 4 \times 2 = 8.$$

80.

解: (1) 如下表:

(2) 已知: x_1 和 x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根,

$$\text{那么, } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

一元二次方程 200 题（含解析）——解析

方程	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$9x^2 - 2=0$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	0	$-\frac{2}{9}$
$2x^2 - 3x=0$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0
$x^2 - 3x+2=0$	2	1	3	2
关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ (a、b、c 为常数， 且 $a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$)	$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$

81. 解：(1) $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 6x+k=0$ 的两个根，
 $\therefore x_1+x_2=6, x_1x_2=k$ ，
 $\because x_1^2x_2^2 - x_1 - x_2=115, \therefore k^2 - 6=115$ ，
 解得 $k_1=11, k_2=-11$ ，
 当 $k_1=11$ 时， $\Delta=36-4k=36-44<0, \therefore k_1=11$ 不合题意
 当 $k_2=-11$ 时， $\Delta=36-4k=36+44>0, \therefore k_2=-11$ 符合题意， $\therefore k$ 的值为 -11 ；
 (2) $\because x_1+x_2=6, x_1x_2=-11$
 $\therefore x_1^2+x_2^2+8=(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2+8=36+2 \times 11+8=66$ 。

82. 解：(1) 因为 $x=-1$ 是方程①的一个根，
 所以 $1+m-2=0$ ，
 解得 $m=1$ ，
 \therefore 方程为 $x^2 - x - 2=0$ ，
 解得 $x_1=-1, x_2=2$ 。
 所以方程的另一根为 $x=2$ ；
 (2) $\because b^2 - 4ac=m^2+8$ ，
 因为对于任意实数 $m, m^2 \geq 0$ ，
 所以 $m^2+8>0$ ，
 所以对于任意的实数 m ，
 方程①有两个不相等的实数根。

83. 解: $\because \Delta = (2a)^2 - 4(a^2 + 4a - 2) \geq 0, \therefore a \leq \frac{1}{2}$

又: $x_1 + x_2 = -2a, x_1 x_2 = a^2 + 4a - 2$.

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2(a - 2)^2 - 4$.

设 $y = 2(a - 2)^2 - 4$, 根据二次函数的性质.

$\because a \leq \frac{1}{2}, \therefore$ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $x_1^2 + x_2^2$ 的值最小.

此时 $x_1^2 + x_2^2 = 2(\frac{1}{2} - 2)^2 - 4 = \frac{1}{2}$, 即最小值为 $\frac{1}{2}$.

84. 解: (1) 方程两边同乘 $(2x - 3)(2x + 3)$, 得

$2x(2x + 3) - (2x - 3) = (2x - 3)(2x + 3)$

化简, 得 $4x = -12$, 解得 $x = -3$.

检验: $x = -3$ 时, $(2x - 3)(2x + 3) \neq 0$.

$\therefore x = -3$ 是原分式方程的解.

(2) $\because -1$ 是 $x^2 + bx - 3 = 0$ 的一个根,

设方程的另一根是 m , 则 $(-1) \cdot m = -3$ 解得 $m = 3$

即方程的另一根是 3.

85. 解: (1) 猜想为: 设 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根为 x_1, x_2 , 则有 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

理由: 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根,

那么由求根公式可知, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

于是有 $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$,

综上得, 设 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根为 x_1, x_2 , 则有 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

(2) x_1, x_2 是方程 $x^2 + (2k+1)x + k^2 - 2 = 0$ 的两个实数根

$\therefore x_1 + x_2 = -(2k+1), x_1 x_2 = k^2 - 2$,

又: $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$

$\therefore [-(2k+1)]^2 - 2 \times (k^2 - 2) = 11$

整理得 $k^2 + 2k - 3 = 0$,

解得 $k = 1$ 或 -3 ,

又: $\Delta = [-(2k+1)]^2 - 4(k^2 - 2) \geq 0$, 解得 $k \geq -\frac{9}{4}, \therefore k = 1$.

86. 解: 由 $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx-40=0$ 的一个解,

得: $a+b=40$, 又 $a \neq b$,

得: $\frac{a^2-b^2}{2a-2b} = \frac{(a+b)(a-b)}{2(a-b)} = \frac{a+b}{2} = 20$. 故 $\frac{a^2-b^2}{2a-2b}$ 的值是 20.

87. 解: 根据根与系数的关系得: $x_1+x_2=\frac{5}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -3$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} &= \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} \\ &= \frac{(\frac{5}{2})^2+2 \times 3}{3^2} = \frac{49}{36}. \end{aligned}$$

88. 解: $\because (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(ab^2 - a^2b) = \frac{b-a}{ab} \cdot ab(b-a)$

$$= (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab,$$

又因为 a, b 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根,

$$\text{所以} \begin{cases} a+b=-2 \\ ab=-1 \end{cases},$$

$$\text{故原式} = (-2)^2 - 4 \times (-1) = 8.$$

89. 解: (1) $x^2 + (m-1)x - 2m^2 + m = 0$ (m 为实数) 有两个实数根 x_1, x_2 .

$$\therefore a=1, b=m-1, c=-2m^2+m,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 - 4(-2m^2+m) = m^2 - 2m + 1 + 8m^2 - 4m = 9m^2 -$$

$$6m + 1 = (3m-1)^2,$$

要使 $x_1 \neq x_2$, 则应有 $\Delta > 0$, 即 $\Delta = (3m-1)^2 > 0$, $\therefore m \neq \frac{1}{3}$;

$$(2) \text{ 根据题意得: } x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = 1-m, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2m^2+m$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2=2, \text{ 即 } x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2, \text{ 即 } (1-m)^2 - 2(-2m^2+m) = 2, \text{ 解得 } m_1 = -\frac{1}{5}, m_2 = 1.$$

90. 解: 设方程的两个实数根为 x_1, x_2 , 则 $x_1+x_2=2(m-2)$, $x_1 \times x_2 = m^2$,

$$\text{令 } x_1^2+x_2^2=56 \text{ 得: } (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m-2)^2 - 2m^2 = 56,$$

解这个方程得, $m=10$ 或 $m=-2$,

当 $m=10$ 时, $\Delta < 0$, 所以不合题意, 应舍去, 当 $m=-2$ 时, $\Delta > 0$,

所以存在实数 $m=-2$, 使得方程的两个实数根的平方和等于 56.

91. 解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - (m-1)x + 2m = 0$ 的两个实数根.

$$\therefore x_1 + x_2 = m - 1, x_1 \cdot x_2 = 2m.$$

$$\text{又} \because x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

将 $x_1 + x_2 = m - 1, x_1 \cdot x_2 = 2m$ 代入得:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m - 1)^2 - 2 \times 2m = 8.$$

整理得 $m^2 - 6m - 7 = 0$. 解得 $m = 7$ 或 -1 .

$$\text{方程的判别式} \Delta = (m - 1)^2 - 8m$$

当 $m = 7$ 时, $\Delta = 36 - 7 \times 8 = -20 < 0$, 则 $m = 7$ 应舍去;

当 $m = -1$ 时, $\Delta = 4 + 8 = 12 > 0$. 综上可得, $m = -1$.

$$92. \text{解: (1)} \because 2x^2 + x - 3 = 0,$$

$$\therefore (2x + 3)(x - 1) = 0,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}, x_1x_2 = -\frac{3}{2};$$

$$\text{故填空答案: } -\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$$

$$(2) x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a};$$

$$\text{故填空答案: } -\frac{b}{a}, \frac{c}{a}.$$

(3) 解: 根据 (2) 可知:

$$x_1 + x_2 = -1, x_1x_2 = -3,$$

$$\text{则 } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$= (-1)^2 - 2 \times (-3) = 7.$$

$$93. \text{解: } \because \Delta = (m+1)^2 \geq 0,$$

\therefore 对于任意实数 m , 方程恒有两个实数根 x_1, x_2 .

$$\text{又} \because x_1 + x_2 = m - 1, x_1x_2 = -m, \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{m-1}{-m} = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore 3m - 3 = 2m \therefore m = 3.$$

一元二次方程 200 题（含解析）——解析

94. 解：设原计划平均每年完成绿化面积 x 万亩.

根据题意列出方程： $\frac{100}{x} - \frac{100(1+20\%)}{x+10} = 1$.

解这个方程得： $x_1=20$, $x_2=-50$.

经检验， $x_1=20$, $x_2=-50$ 都是原方程的根，但因为绿化面积不能为负数，所以取 $x=20$. 答：原计划平均每年完成绿化面积 20 万亩.

95. 解：设今年 5 月份润滑油价格为 x 元/桶，则去年 5 月份的润滑油价格为 $(x-2)$ 元/桶.

由题意得： $\frac{120}{x-2} - \frac{120}{x} = 2$.

整理，得： $x^2 - 2x - 120 = 0$. 解得： $x_1=12$, $x_2=-10$.

经检验两根都为原方程的根，但 $x_2=-10$ 不符合实际意义，故舍去.

答：今年 5 月份的润滑油每桶的价格为 12 元.

96. 解：设甲每天修理桌凳 x 套，则乙为 $(x+6)$ 套

由题可得： $\frac{360}{x} - 10 = \frac{360}{x+6}$ 解得 $x_1=-18$, $x_2=12$

经检验 $x_1=-18$, $x_2=12$ 均是方程的解，实际中 x 不能为负，故舍去，

答：甲每天修理桌凳 12 套，乙为 18 套.

97. 解：设提速后列车速度为 x 千米/时，则： $\frac{2400}{x-20} - \frac{2400}{x} = 4$. (4 分)

解之得： $x_1=120$, $x_2=-100$ (舍去). (7 分)

经检验 $x=120$ 是原方程的根.

$\because 120 < 140$, \therefore 仍可再提速. 答：这条铁路在现有条件下仍可再次提速. (9 分)

98. 解：设今年 5 月份汽油价格为 x 元/升，则去年 5 月份的汽油价格为 $(x-1.8)$ 元/升.

根据题意，得： $\frac{150}{x-1.8} - \frac{150}{x} = 18.75$ (5 分) 整理，得 $x^2 - 1.8x - 14.4 = 0$ (7 分)

解这个方程，得 $x_1=4.8$, $x_2=-3$ (10 分)

经检验，两根都为原方程的根，但 $x_2=-3$ 不符合实际意义，故舍去. (11 分)

答：今年 5 月份的汽油价格为 4.8 元/升. (12 分)

99. 解：设甲车每小时走 x 千米，则乙车每小时走 $(x+20)$ 千米，

根据题意得 $\frac{120}{x} - \frac{120}{x+20} = \frac{12}{60}$ ，

整理得 $x^2 + 20x - 12000 = 0$ 解得 $x_1 = 100$ ， $x_2 = -120$

经检验， $x_1 = 100$ ， $x_2 = -120$ 都是原方程的解，

但因 $x_2 = -120$ 是负值，所以应舍去，

即 $x = 100$ ， $\therefore x + 20 = 120$

答：甲车每小时走 100 千米，则乙车每小时走 120 千米。

100. 解：(1) 设规定时间为 x 天，则

$\frac{24}{2x+4} + \frac{24}{2x-16} = 1$ ，解之，得 $x_1 = 28$ ， $x_2 = 2$ 。

经检验可知， $x_1 = 28$ ， $x_2 = 2$ 都是原方程的根，

但 $x_2 = 2$ 不合题意，舍去，取 $x = 28$ 。

由 $24 < 28$ 知，甲、乙两组合做可在规定时间内完成。

(2) 设甲、乙两组合做完成这项工程的 $\frac{5}{6}$ 用去 y 天，

则 $y \left(\frac{1}{2 \times 28 + 4} + \frac{1}{2 \times 28 - 16} \right) = \frac{5}{6}$ 。

解之，得 $y = 20$ (天)。

由(1)得，甲单独完成需要 60 天，乙单独完成需要 40 天，则剩余 $\frac{1}{6}$ 的工作量，

甲独做剩下工程所需时间：10 (天)。

因为 $20 + 10 = 30 > 28$ ，

所以甲独做剩下工程不能在规定时间内完成；

乙独做剩下工程所需时间： $\frac{20}{3}$ (天)。

因为 $20 + \frac{20}{3} = 26\frac{2}{3} < 28$ 。

所以乙独做剩下工程能在规定时间内完成。

所以我认为抽调甲组最好。

101. 解：设提速后旅客列车的平均速度为 x 千米/时，(1 分)

根据题意得 $\frac{190}{x-50} - \frac{190}{x} = \frac{38}{60}$ ，(4 分)

解之得 $x_1 = 150$ ， $x_2 = -100$ (6 分)

经检验， $x_1 = 150$ ， $x_2 = -100$ 都是原方程的根，但负值不符合题意，舍去。(7 分)

答：提速后旅客列车的平均速度为 150 千米/时。(8 分)

102. 解：设男同学平均每人捐款 x 元，则女同学平均每人捐款为 $(x+2)$ 元，

依题意得：
$$\frac{150}{x+2} + \frac{120}{x} = 30,$$

化简得： $x^2 - 7x - 8 = 0,$

解之得 $x = -1$ 或 $x = 8,$

经检验他们都是原方程的根，但 $x = -1 < 0$ （舍去），

答：男同学平均每人捐款 8 元，女同学平均每人捐款 10 元．

103. 解：设甲的速度为 x 千米/时，那么乙的速度为 $x+8$ 千米/时，

由题意可得：
$$\frac{12 \times 2}{x+8} = \frac{12}{x} - 1$$

解得： $x_1 = -24$ （不合题意舍去） $x_2 = 4,$

经检验 $x_1 = -24$ 、 $x_2 = 4$ 都是方程的解，不过实际中速度不能为负，故 $x_1 = -24$

舍去， $\therefore x+8=12$

答：甲的速度为 4 千米/小时，乙的速度为 12 千米/小时．

104. 解：(1) 设甲小组每天修桌凳 x 套．则：
$$\frac{960}{x} = \frac{960}{x+8} + 20.$$

整理得： $x^2 + 8x - 384 = 0$ ．解得： $x_1 = -24$ （舍去）， $x_2 = 16$ ．

经检验： $x = 16$ 是原方程的解． $\therefore x+8=24$ ．

答：甲小组每天修桌凳 16 套，乙小组每天修 24 套．

(2) 若甲小组单独修理，则需 $960 \div 16 = 60$ （天）；

总费用： $60 \times 80 + 60 \times 10 = 5400$ （元）．

若乙小组单独修理，则需 $960 \div 24 = 40$ （天）；

总费用： $40 \times 120 + 40 \times 10 = 5200$ （元）．

若甲、乙两小组合作：则需 $960 \div (24+16) = 24$ （天）

总费用： $(80+120) \times 24 + 24 \times 10 = 5040$ （元）

通过比较看出：选择第三种方案符合既省时，又省钱的要求．

105. 解：设改进操作方法后每天加工零件 x 个，

根据题意得：
$$\frac{90}{x-10} + \frac{170-90}{x} = 5$$
 整理得 $x^2 - 44x + 160 = 0$ 解得 $x_1 = 40$ $x_2 = 4$ ，

经检验， $x_1 = 40$ ， $x_2 = 4$ ，都是原方程的根，但 $x_2 = 4$ 时，改进操作方法前即加工 - 6 个，不合题意．

答：改进操作方法后每天加工零件 40 个．

一元二次方程 200 题（含解析）——解析

106. 解：设原计划每天挖 x 米，由题意，得 $\frac{96}{x} = \frac{96}{x+2} + 4$

解之，得 $x_1=6$ ， $x_2=-8$

经检验， $x_1=6$ ， $x_2=-8$ 都是原方程的根，但工作效率为负数不合题意，所以只取 $x=6$ 。答：原计划每天挖 6 米。

107. 解：设原计划结伴游玩的有 x 名同学，那么实际去的同学有 $(x+2)$ 人。

由题意得： $\frac{1200}{x} = \frac{1200}{x+2} + 30$ 。解得 $x=8$ 或 $x=-10$ 。

经检验 $x=8$ ， $x=-10$ 是原方程的解。但 $x=-10$ 不合题意舍去。 $\therefore x=8$ 。

答：原计划结伴游玩的有 8 名同学。

108. 解：(1) 设每辆中巴车有座位 x 个，每辆大客车有座位 $(x+15)$ 个，依题意有

$\frac{270}{x} = \frac{270+30}{x+15} + 1$ 解之得： $x_1=45$ ， $x_2=-90$ （不合题意，舍去）。

经检验 $x=45$ 是分式方程的解，故大客车有座位： $x+15=45+15=60$ 个。

答：每辆中巴车有座位 45 个，每辆大客车有座位 60 个。

(2) 解法一：

①若单独租用中巴车，租车费用为 $\frac{270}{45} \times 350 = 2100$ （元）

②若单独租用大客车，租车费用为 $(6-1) \times 400 = 2000$ （元）

③设租用中巴车 y 辆，大客车 $(y+1)$ 辆，则有

$45y + 60(y+1) \geq 270$

解得 $y \geq 2$ ，当 $y=2$ 时， $y+1=3$ ，运送人数为 $45 \times 2 + 60 \times 3 = 270$ 人，符合要求

这时租车费用为 $350 \times 2 + 400 \times 3 = 1900$ （元）

故租用中巴车 2 辆和大客车 3 辆，比单独租用中巴车的租车费少 200 元，比单独租用大客车的租车费少 100 元。

解法二：①、②同解法一

③设租用中巴车 y 辆，大客车 $(y+1)$ 辆，则有

$350y + 400(y+1) < 2000$ 解得： $y < \frac{32}{15}$ 。

由 y 为整数，得到 $y=1$ 或 $y=2$ 。

当 $y=1$ 时，运送人数为 $45 \times 1 + 60 \times 2 = 165 < 270$ ，不合要求舍去；

当 $y=2$ 时，运送人数为 $45 \times 2 + 60 \times 3 = 270$ ，符合要求。

故租用中巴车 2 辆和大客车 3 辆，比单独租用中巴车的租车费少 200 元，比单独租用大客车的租车费少 100 元。

109. 解: (1) 解 $x^2 - 7x + 12 = 0$, 得 $x_1 = 4, x_2 = 3$. $\therefore OA > OB$. $\therefore OA = 4, OB = 3$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中, 由勾股定理有 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$, $\therefore \sin \angle ABC = \frac{OA}{AB} = \frac{4}{5}$.

(2) \because 点 E 在 x 轴上, $S_{\triangle AOE} = \frac{16}{3}$, 即 $\frac{1}{2}AO \times OE = \frac{16}{3}$,

解得 $OE = \frac{8}{3}$. $\therefore E(\frac{8}{3}, 0)$ 或 $E(-\frac{8}{3}, 0)$.

由已知可知 $D(6, 4)$, 设 $y_{DE} = kx + b$, 当 $E(\frac{8}{3}, 0)$ 时有 $\begin{cases} 4 = 6k + b \\ 0 = \frac{8}{3}k + b \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = \frac{6}{5} \\ b = -\frac{16}{5} \end{cases}$.

$\therefore y_{DE} = \frac{6}{5}x - \frac{16}{5}$.

同理 $E(-\frac{8}{3}, 0)$ 时, $y_{DE} = \frac{6}{13}x + \frac{16}{13}$. 在 $\triangle AOE$ 中, $\angle AOE = 90^\circ$, $OA = 4$, $OE = \frac{8}{3}$;

在 $\triangle AOD$ 中, $\angle OAD = 90^\circ$, $OA = 4$, $OD = 6$; $\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{OA}{OD}$, $\therefore \triangle AOE \sim \triangle DAO$.

(3) 根据计算的数据, $OB = OC = 3$, $\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$,

① AC 、 AF 是邻边, 点 F 在射线 AB 上时, $AF = AC = 5$,

所以点 F 与 B 重合, 即 $F(-3, 0)$,

② AC 、 AF 是邻边, 点 F 在射线 BA 上时, M 应在直线 AD 上, 且 FC 垂直平分 AM , 点 $F(3, 8)$.

③ AC 是对角线时, 做 AC 垂直平分线 L , AC 解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$, 直线 L 过 $(\frac{3}{2}, 2)$, 且 k 值为 $\frac{3}{4}$ (平面内互相垂直的两条直线 k 值乘积为 -1),

L 解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}$, 联立直线 L 与直线 AB 求交点,

$\therefore F(-\frac{75}{14}, -\frac{22}{7})$,

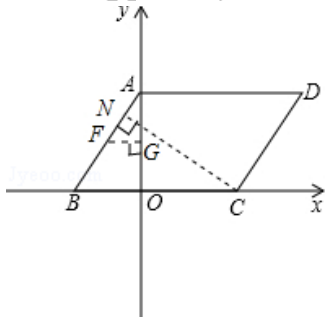
④ AF 是对角线时, 过 C 做 AB 垂线, 垂足为 N , 根据等积法求出 $CN = \frac{24}{5}$, 勾

股定理得出, $AN = \frac{7}{5}$, 做 A 关于 N 的对称点即为 F , $AF = \frac{14}{5}$, 过 F 做 y 轴垂线,

垂足为 G , $FG = \frac{14}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{42}{25}$, $\therefore F(-\frac{42}{25}, \frac{44}{25})$.

综上所述, 满足条件的点有四个: $F_1(3, 8)$; $F_2(-3, 0)$;

$F_3(-\frac{75}{14}, -\frac{22}{7})$; $F_4(-\frac{42}{25}, \frac{44}{25})$.



110 .

解 : (1) $\triangle ABP \sim \triangle DPE$.(2) 由 (1) $\triangle ABP \sim \triangle DPE$, $\therefore \frac{AP}{DE} = \frac{AB}{PD} \therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{5-x}$, $\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$ ($0 < x < 5$) .

(3) 能构成矩形 .

当 $DE=AB=2$ 时 , $\therefore AB \parallel DE$, $AB=DE$, \therefore 四边形 $ABED$ 为平行四边形 ,
 $\therefore \angle A=90^\circ$, \therefore 平行四边形 $ABED$ 为矩形 .由 (2) 有 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = 2$. $x_1=1$, $x_2=4$. \therefore 当 $AP=1$ 或 $AP=4$ 时 , $ABED$ 是矩形 . (9 分)

(4) 能构成等腰三角形 .

当 $AP=DE$ 时 , $\triangle ABP \cong \triangle DPE$, 此时 $\triangle BPE$ 为等腰三角形 . (10 分)即 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = x$. 解之得 $x_1=3$, $x_2=0$ (舍去) .即 $AP=3$ 时 , $\triangle BPE$ 是等腰三角形 (答等腰直角三角形同样正确) . (12 分)111 . 解 : (1) $\therefore a=1$, $b=-1$, $c=1$. $\therefore \Delta = b^2 - 4ac$ $= (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. \therefore 方程没有实数根 , 张智同学求的就是错误的 .(2) 我选择方程 : $x^2 - x - 6 = 0$. $\therefore a=1$, $b=-1$, $c=-6$. $\therefore x_1+x_2 = -\frac{b}{a}=1$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -6$.

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{6} .$$

112 . 解 : $\therefore x_1, x_2$ 为方程 $x^2+4x+a=0$ 的两个根 ,

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1 \cdot x_2=a \end{cases} .$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7 \\ x_1+x_2=-4 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-5 \end{cases} . \text{ 又 } \therefore x_1 \cdot x_2 = a , \therefore a = -5 .$$

113 . 证明 : $\Delta = (4m+1)^2 - 4(2m-1)$

$$= 16m^2 + 8m + 1 - 8m + 4 = 16m^2 + 5 > 0 ,$$

 \therefore 不论 m 为任何实数 , 方程总有两个不相等的实数根 .114 . 解 : \therefore 方程 $2x^2 - 2x + 1 - 3m = 0$ 有两个实数根 ,

$$\therefore \Delta = 4 - 8(1-3m) \geq 0 , \text{ 解得 } m \geq \frac{1}{6} .$$

由根与系数的关系, 得 $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1-3m}{2}$.

$\therefore x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) > 0$, $\therefore \frac{1-3m}{2} + 2 > 0$, 解得 $m < \frac{5}{3}$. $\therefore \frac{1}{6} \leq m < \frac{5}{3}$.

115. 解: 根据根与系数的关系得: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = -2$,

$$(1) \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{4}{-2} = -2;$$

(2) ①当 $x_1 < x_2$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}{-2} \\ &= \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2}}{-2} \\ &= \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{-2} \\ &= \frac{\sqrt{2^2 - 4 \times (-2)}}{-2} = -\sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \sqrt{3};$$

②当 $x_1 > x_2$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= -\frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}{-2} \\ &= -\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2}}{-2} \\ &= -\frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{-2} \\ &= -\frac{\sqrt{2^2 - 4 \times (-2)}}{-2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3},$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\sqrt{3}.$$

116. 解: (1) $\because a=2, b=-2, c=m+1$.

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (m+1) = -4 - 8m.$$

当 $-4 - 8m \geq 0$, 即 $m \leq -\frac{1}{2}$ 时, 方程有两个实数根.

2. 整理不等式 $7 + 4x_1x_2 > x_1^2 + x_2^2$, 得 $(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 7 < 0$.

由一元二次方程根与系数的关系, 得 $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = \frac{m+1}{2}$.

代入整理后的不等式得 $1 - 3(m+1) - 7 < 0$, 解得 $m > -3$.

又 $\because m \leq -\frac{1}{2}$, 且 m 为整数 $\therefore m$ 的值为 $-2, -1$.

117. 解: (1) 设方程的另一个根是 x_1 , 那么 $x_1 + 1 = -2, \therefore x_1 = -3$;

(2) $\because x_1, x_2$ 是方程的两个实数根, $\therefore x_1 + x_2 = -2, x_1x_2 = \frac{m}{2}$,

又 $\because x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2x_2^2 = 0, \therefore (x_1 + x_2)^2 - (x_1x_2)^2 = 0$,

即 $4 - \frac{m^2}{4} = 0$, 得 $m = \pm 4$,

又 $\because \Delta = 4^2 - 8m > 0$, 得 $m < 2, \therefore$ 取 $m = -4$.

118. 解: 方程两边同乘以最简公分母 $(x+1)(x+2)(x-2)$,

得: $(x-2)(x+2)x - (x+1)(x+2)^2 = 8(x+1)$,

$5x^2 + 20x + 12 = 0$, 解得 $x_1 = \frac{2\sqrt{10}}{5} - 2, x_2 = -\frac{2\sqrt{10}}{5} - 2$,

经检验 $x_1 = \frac{2\sqrt{10}}{5} - 2, x_2 = -\frac{2\sqrt{10}}{5} - 2$ 都是方程的根.

119. 解: \because 方程 $x^2 - 4x + b = 0$ 有两个相等的实数根

$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4b = 0$ (3分) $\therefore b = 4$ (4分)

$\because c = 4, \therefore b = c = 4$ (5分) $\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形. (6分)

120. 解: 设边 $AB = a, AC = b$

$\because a, b$ 是方程 $x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k + 2 = 0$ 的两根 $\therefore a + b = 2k + 3, a \cdot b = k^2 + 3k + 2$

又 $\because \triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形, 且 $BC = 5, \therefore a^2 + b^2 = 5^2$,

即 $(a+b)^2 - 2ab = 5^2, \therefore (2k+3)^2 - 2(k^2 + 3k + 2) = 25$

$\therefore k^2 + 3k - 10 = 0, \therefore k_1 = -5$ 或 $k_2 = 2$

当 $k = -5$ 时, 方程为: $x^2 + 7x + 12 = 0$ 解得: $x_1 = -3, x_2 = -4$ (舍去)

当 $k = 2$ 时, 方程为: $x^2 - 7x + 12 = 0$ 解得: $x_1 = 3, x_2 = 4$

\therefore 当 $k = 2$ 时, $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形.

121. 解: (1) $D(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; (1分)

(2) 由 $Rt\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 得 $B(t, \frac{1}{t})$,

$$\therefore BD^2 = AC^2 + (AB - CD)^2,$$

$$\therefore BD^2 = (\sqrt{2} - t)^2 + (\frac{1}{t} - \sqrt{2})^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2\sqrt{2}(t + \frac{1}{t}) + 4 \quad ①$$

$$= (t + \frac{1}{t})^2 - 2\sqrt{2}(t + \frac{1}{t}) + 2 = (t + \frac{1}{t} - \sqrt{2})^2, \therefore BD = |t + \frac{1}{t} - \sqrt{2}| = t + \frac{1}{t} - \sqrt{2} \quad ②;$$

(3) 解法一: 若 $OB = BD$, 则 $OB^2 = BD^2$.

$$\text{在 } Rt\triangle OAB \text{ 中, } OB^2 = OA^2 + AB^2 = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

$$\text{由 } ① \text{ 得 } t^2 + \frac{1}{t^2} = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2\sqrt{2}(t + \frac{1}{t}) + 4. \text{ 解得: } t + \frac{1}{t} = \sqrt{2}, \therefore t^2 - \sqrt{2}t + 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 = -2 < 0, \therefore \text{此方程无解} \therefore OB \neq BD.$$

解法二: 若 $OB = BD$, 则 B 点在 OD 的中垂线 CM 上.

$$\therefore C(\sqrt{2}, 0), \text{ 在等腰 } Rt\triangle OCM \text{ 中, 可求得 } M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\therefore \text{直线 CM 的函数关系式为 } y = -x + \sqrt{2}, \quad ③$$

$$\text{由 } Rt\triangle OAB \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}, \text{ 得 B 点坐标满足函数关系式 } y = \frac{1}{x}. \quad ④$$

$$\text{联立 } ③, ④ \text{ 得: } x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 = -2 < 0, \therefore \text{此方程无解}, \therefore OB \neq BD.$$

解法三: 若 $OB = BD$, 则 B 点在 OD 的中垂线 CM 上, 如图 1

过点 B 作 $BG \perp y$ 轴于 G, CM 交 y 轴于 H,

$$\therefore S_{\triangle OBG} = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } S_{\triangle OMH} = S_{\triangle MOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, (5 \text{ 分})$$

显然与 $S_{\triangle HMO}$ 与 $S_{\triangle OBG}$ 矛盾 $\therefore OB \neq BD$.

(4) 如果 $\triangle BDE$ 为直角三角形, 因为 $\angle BED = 45^\circ$,

① 当 $\angle EBD = 90^\circ$ 时, 此时 F, E, M 三点重合, 如图 2

$\therefore BF \perp x$ 轴, $DC \perp x$ 轴, $\therefore BF \parallel DC$. \therefore 此时四边形 BDCF 为直角梯形.

② 当 $\angle EDB = 90^\circ$ 时, 如图 3

$$\therefore CF \perp OD, \therefore BD \parallel CF.$$

又 $AB \perp x$ 轴, $DC \perp x$ 轴, $\therefore BF \parallel DC$. \therefore 此时四边形 BDCF 为平行四边形.

下证平行四边形 BDCF 为菱形:

解法一: 在 $\triangle BDO$ 中, $OB^2 = OD^2 + BD^2$,

$$\therefore t^2 + \frac{1}{t^2} = 4 + t^2 + \frac{1}{t^2} - 2\sqrt{2}(t + \frac{1}{t}) + 4, \therefore t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{2},$$

[方法①] $t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$, $\therefore BD$ 在 OD 上方

解得: $t = \sqrt{2} - 1$, $\frac{1}{t} = \sqrt{2} + 1$ 或 $t = \sqrt{2} + 1$, $\frac{1}{t} = \sqrt{2} - 1$ (舍去).

得 $B(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$,

[方法②]由②得: $BD = t + \frac{1}{t} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$,

此时 $BD = CD = \sqrt{2}$, \therefore 此时四边形 $BDCF$ 为菱形 (9分)

解法二: 在等腰 $Rt\triangle OAE$ 与等腰 $Rt\triangle EDB$ 中

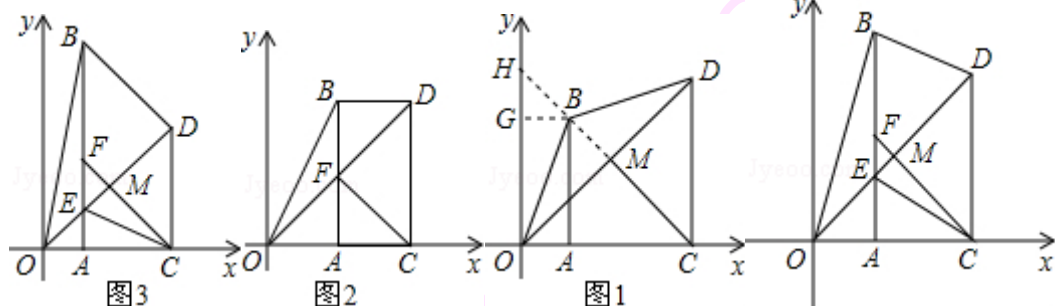
$\therefore OA = AE = t$, $OE = \sqrt{2}t$, 则 $ED = BD = 2 - \sqrt{2}t$,

$\therefore AB = AE + BE = t + \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}t) = 2\sqrt{2} - t$,

$\therefore 2\sqrt{2} - t = \frac{1}{t}$, 即 $t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{2}$ 以下同解法一,

此时 $BD = CD = \sqrt{2}$,

\therefore 此时四边形 $BDCF$ 为菱形. (9分)



122. (1) 证明: 在矩形 $ABCD$ 中,

$\therefore AD \parallel BC$, $\therefore \angle DAC = \angle BCA$.

由题意, 得 $\angle GAH = \frac{1}{2}\angle DAC$, $\angle ECF = \frac{1}{2}\angle BCA$. $\therefore \angle GAH = \angle ECF$, $\therefore AG \parallel CE$.

又 $\therefore AE \parallel CG$, \therefore 四边形 $AECG$ 是平行四边形.

(2) 解法 1: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$\therefore AB = 4$, $BC = 3$, $\therefore AC = 5$.

$\therefore CF = CB = 3$, $\therefore AF = 2$.

在 $Rt\triangle AEF$ 中, 设 $EF = x$, 则 $AE = 4 - x$.

根据勾股定理, 得 $AE^2 = AF^2 + EF^2$, 即 $(4 - x)^2 = 2^2 + x^2$.

解得 $x = \frac{3}{2}$, 即线段 EF 长为 $\frac{3}{2}$ cm.

解法 2:

$\therefore \angle AFE = \angle B = 90^\circ$, $\angle FAE = \angle BAC$, $\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{EF}{CB} = \frac{AE}{AC}$. $\therefore \frac{x}{3} = \frac{4 - x}{5}$,

解得 $x = \frac{3}{2}$, 即线段 EF 长为 $\frac{3}{2}$ cm.

123. 解: ∵ 金鱼的面积 8.25m^2 .

(1) 根据题意, 得 $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = [2(k+1)]^2 - 4k(k-1) \geq 0 \end{cases}$,

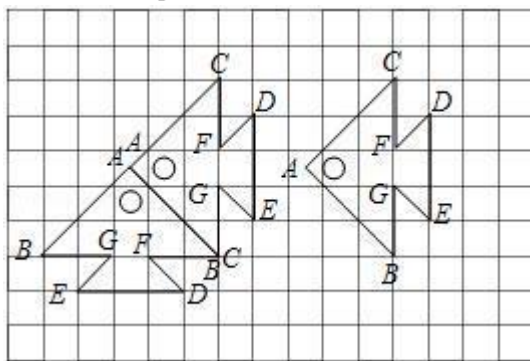
整理得 $\begin{cases} k \neq 0 \\ 3k+1 \geq 0 \end{cases}$, 解得 $k \geq -\frac{1}{3}$ 且 $k \neq 0$;

(2) 因其两根之和为 $-\frac{2(k+1)}{k}$, 两根之积为 $\frac{k-1}{k}$,

由题意得 $-\frac{2(k+1)}{k} = \frac{k-1}{k}$,

解得 $k = -\frac{1}{3}$,

即当 $k = -\frac{1}{3}$ 时, 此方程的两根之和等于两根之积.



124. 甲题:

解: (1) ∵ 方程 $x^2 + (2k-3)x + k^2 = 0$ 有两个不相等的实数根,

∴ $\Delta > 0$, 即 $(2k-3)^2 - 4 \times 1 \times k^2 > 0$, 解得: $k < \frac{3}{4}$;

(2) 由根与系数的关系得: $\alpha + \beta = -(2k-3)$, $\alpha\beta = k^2$,

∴ $\alpha + \beta + \alpha\beta = 6$, ∴ $k^2 - 2k + 3 - 6 = 0$,

解得 $k = 3$ 或 $k = -1$,

由 (1) 可知: $k = 3$ 不合题意, 舍去. ∴ $k = -1$, ∴ $\alpha + \beta = 5$, $\alpha\beta = 1$

故 $(\alpha - \beta)^2 + 3\alpha\beta - 5 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 5 = 19$.

乙题:

(1) 证明: ∵ ABCD 为正方形, ∴ $AD = AB = DC = BC$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$,

∴ $AE = ED$, ∴ $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$,

又 ∵ $DF = \frac{1}{4}DC$, ∴ $\frac{DF}{DE} = \frac{1}{2}$, ∴ $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DE}$, ∴ $\triangle ABE \sim \triangle DEF$.

(2) 解: ∵ ABCD 为正方形,

∴ $ED \parallel BG$, ∴ $\frac{ED}{CG} = \frac{DF}{CF}$,

又 ∵ $DF = \frac{1}{4}DC$ 正方形的边长为 4, ∴ $ED = 2$, $CG = 6$, $BG = BC + CG = 10$.

$$125.(1) \text{ 证明: } \Delta = (-2m)^2 - 4\left(n^2 - mn + \frac{5}{4}m^2\right) = -(m - 2n)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (m - 2n)^2 \leq 0,$$

$$\therefore m - 2n = 0,$$

$$\therefore \Delta = 0$$

$$\therefore \text{一元二次方程 } x^2 - 2mx + n^2 - mn + \frac{5}{4}m^2 = 0 \text{ 有两个相等实根,}$$

$$\therefore AM = AN.$$

$$(2) \text{ 解: } \because \angle BAC = 90^\circ, AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\angle DAC = \angle DBA,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = BD \cdot DC,$$

$$\because CF \perp BE,$$

$$\therefore \angle FCB + \angle EBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E + \angle EBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle FCB,$$

$$\therefore \angle NDC = \angle EDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EBD \sim \triangle CND,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{DN},$$

$$\therefore BD \cdot DC = ED \cdot DN,$$

$$\therefore AD^2 = ED \cdot DN,$$

$$\therefore AN = \frac{15}{8}, DN = \frac{9}{8},$$

$$\therefore AD = DN + AN = 3,$$

$$\therefore 3^2 = \frac{9}{8}DE,$$

$$\therefore DE = 8.$$

$$(3) \text{ 解: 由 (1) 知 } AM = AN,$$

$$\therefore \angle AMN = \angle ANM$$

$$\therefore \angle AMN + \angle CAN = 90^\circ, \angle DNC + \angle NCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle NCD$$

$$\therefore \angle BMF + \angle FBM = 90^\circ, \angle AMC + \angle ACM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle FBM$$

由 (2) 可知 $\angle E = \angle FCB$, $\therefore \angle ABE = \angle E$, $\therefore AB = AE$

过点 M 作 $MG \perp AN$ 于点 G

由 $MG \parallel BD$ 得 $\frac{MG}{BD} = \frac{AM}{AB}$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{\frac{1}{2}AN \cdot MG}{\frac{1}{2}AE \cdot BD} = \frac{AM^2}{AB^2} = \frac{9}{64},$$

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{3}{8}, \therefore \frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{8},$$

过点 A 作 $AH \perp EF$ 于点 H,

由 $AH \parallel FN$,

$$\text{得 } \frac{EH}{HF} = \frac{AE}{AN} = \frac{8}{3},$$

设 $EH = 8a$, 则 $FH = 3a$,

$\therefore AE = AB$, $\therefore BH = HE = 8a$, $\therefore BF = 5a$, $EF = 11a$,

$$\text{由根与系数关系得, } \begin{cases} BF + EF = 16a = \frac{16}{5}k \\ BF \cdot EF = 55a^2 = 2k^2 + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } a = \pm \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore a > 0, a = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore BF = \sqrt{5},$$

由 $\angle ACM = \angle MCB$, $\angle DAC = \angle DBA$ 可知 $\triangle ACN \sim \triangle BCM$,

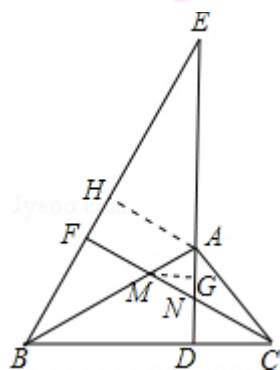
$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AN}{BM} = \frac{3}{5}$$

设 $AC = 3b$, 则 $BC = 5b$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 有 $AB = 4b$, $\therefore AM = \frac{3}{2}b$.

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, 有 $MC = \frac{3\sqrt{5}}{2}b$

$$\text{由 } \triangle ACM \sim \triangle FCB \text{ 得 } \frac{BC}{BF} = \frac{CM}{AM}, \therefore \frac{BC}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}b}{\frac{3}{2}b}, \therefore BC = 5.$$



126 解: 设年产量为 t 吨, 费用为 y (万元), 每吨销售价为 z (万元), 则 $0 \leq t \leq 1000$,

由图 (1) 可求得 $y = 10t$,

由图 (2) 求得 $z = -\frac{1}{100}t + 30$.

设毛利润为 w (万元),

则 $w = tz - y = t(-\frac{1}{100}t + 30) - 10t = -\frac{1}{100}t^2 + 20t$.

$\therefore -\frac{1}{100}t^2 + 20t = 7500, \therefore t^2 - 2000t + 750000 = 0$,

解得 $t_1 = 500, t_2 = 1500$ (不合题意, 舍去).

127. 解: (1) $80 - x, 200 + 10x, 800 - 200 - (200 + 10x)$

时间	第一个月	第二个月	清仓时
单价 (元)	80	$80 - x$	40
销售量 (件)	200	$200 + 10x$	$800 - 200 - (200 + 10x)$

(2) 根据题意, 得

$80 \times 200 + (80 - x)(200 + 10x) + 40[800 - 200 - (200 + 10x)] - 50 \times 800 = 9000$

整理得 $10x^2 - 200x + 1000 = 0$, 即 $x^2 - 20x + 100 = 0$,

解得 $x_1 = x_2 = 10$ 当 $x = 10$ 时, $80 - x = 70 > 50$

答: 第二个月的单价应是 70 元.

128. 解: (1) 设 P, Q 两点从出发开始到 x 秒时四边形 $PBCQ$ 的面积为 33cm^2 ,

则 $PB = (16 - 3x)\text{cm}, QC = 2x\text{cm}$,

根据梯形的面积公式得 $\frac{1}{2}(16 - 3x + 2x) \times 6 = 33$, 解之得 $x = 5$,

(2) 设 P, Q 两点从出发经过 t 秒时, 点 P, Q 间的距离是 10cm ,

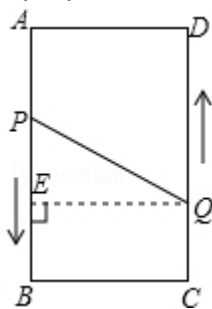
作 $QE \perp AB$, 垂足为 E , 则 $QE = AD = 6, PQ = 10$,

$\therefore PA = 3t, CQ = BE = 2t, \therefore PE = AB - AP - BE = |16 - 5t|$,

由勾股定理, 得 $(16 - 5t)^2 + 6^2 = 10^2$, 解得 $t_1 = 4.8, t_2 = 1.6$.

答: (1) P, Q 两点从出发开始到 5 秒时四边形 $PBCQ$ 的面积为 33cm^2 ;

(2) 从出发到 1.6 秒或 4.8 秒时, 点 P 和点 Q 的距离是 10cm .



129. 解: (1) 当点 P 与点 N 重合或点 Q 与点 M 重合时, 以 PQ, MN 为两边, 以矩形的边 (AD 或 BC) 的一部分为第三边可能构成一个三角形.

① 当点 P 与点 N 重合时, 由 $x^2 + 2x = 20$, 得 $x_1 = \sqrt{21} - 1$, $x_2 = -\sqrt{21} - 1$ (舍去).

因为 $BQ + CM = x + 3x = 4(\sqrt{21} - 1) < 20$, 此时点 Q 与点 M 不重合.

所以 $x = \sqrt{21} - 1$ 符合题意.

② 当点 Q 与点 M 重合时, 由 $x + 3x = 20$, 得 $x = 5$.

此时 $DN = x^2 = 25 > 20$, 不符合题意.

故点 Q 与点 M 不能重合.

所以所求 x 的值为 $\sqrt{21} - 1$.

(2) 由 (1) 知, 点 Q 只能在点 M 的左侧,

① 当点 P 在点 N 的左侧时,

由 $20 - (x + 3x) = 20 - (2x + x^2)$,

解得 $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = 2$.

当 $x = 2$ 时四边形 PQMN 是平行四边形.

② 当点 P 在点 N 的右侧时,

由 $20 - (x + 3x) = (2x + x^2) - 20$,

解得 $x_1 = -10$ (舍去), $x_2 = 4$.

当 $x = 4$ 时四边形 NQMP 是平行四边形.

所以当 $x = 2$ 或 $x = 4$ 时, 以 P, Q, M, N 为顶点的四边形是平行四边形.

(3) 过点 Q, M 分别作 AD 的垂线, 垂足分别为点 E, F.

由于 $2x > x$,

所以点 E 一定在点 P 的左侧.

若以 P, Q, M, N 为顶点的四边形是等腰梯形,

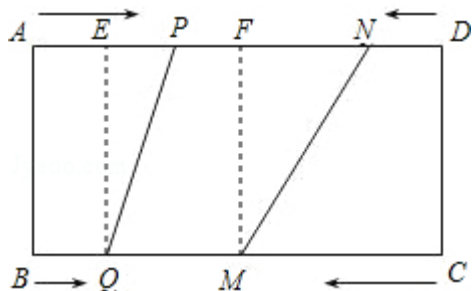
则点 F 一定在点 N 的右侧, 且 $PE = NF$,

即 $2x - x = x^2 - 3x$.

解得 $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = 4$.

由于当 $x = 4$ 时, 以 P, Q, M, N 为顶点的四边形是平行四边形,

所以以 P, Q, M, N 为顶点的四边形不能为等腰梯形.



130. 解: (1) 设折叠进去的宽度为 x cm, 则 $(2x+15 \times 2+1)(2x+21)=875$,

化简得 $x^2+26x-56=0$,

$\therefore x=2$ 或 -28 (不合题意, 舍去),

即折叠进去的宽度为 2 cm.

(2) 设折叠进去的宽度为 x cm, 则

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2(2x+31) \leq 60 \\ 2x+21 \leq 50 \end{cases} \text{得 } x \leq -\frac{1}{2}, \text{ 不符合题意;}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2(2x+31) \leq 50 \\ 2x+21 \leq 60 \end{cases} \text{得 } x \leq -3, \text{ 不符合题意;}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} (2x+31) + (2x+21) \leq 60 \\ 2x+31 \leq 50 \end{cases} \text{得 } x \leq 2;$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} (2x+31) + (2x+21) \leq 50 \\ 2x+31 \leq 60 \end{cases} \text{得 } x \leq -\frac{1}{2}, \text{ 不符合题意;}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} 2x+31 \leq 60 \\ 2(2x+21) \leq 50 \end{cases} \text{得 } x \leq 2;$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} 2x+31 \leq 50 \\ 2(2x+21) \leq 60 \end{cases} \text{得 } x \leq 4.5.$$

综上, $x \leq 4.5$. 即折叠进去的宽度最大为 4.5 cm.

